# Implication de la théorie algébrique des graphes dans les algorithmes de calibration de phase en synthèse d'ouverture

**A. Lannes**

Laboratoire d'Astrophysique de Toulouse, OMP et CERFACS
14 Avenue Édouard Belin, F-31400 Toulouse France
lannes@obs-mip.fr

RÉSUMÉ

Nous présentons une nouvelle classe d'algorithmes de calibration de phase. L'originalité des ces algorithmes, ainsi que leur efficacité, résulte de certaines structures particulières dont l'analyse relève de la théorie algébrique des graphes. Le processus d'optimisation correspondant, qui est fondé sur le principe des méthodes de région de confiance, s'avère être très bien adapté à ces structures particulières. Les premières retombées de notre approche concernent l'imagerie à clôture de phase en imagerie radio et en interférométrie optique.

ABSTRACT

We present a new class of phase calibration algorithms. The originality of these algorithms, as well as their efficiency, results from certain particular structures, the analysis of which is relevant to algebraic graph theory. The corresponding optimization process, which is based on the principle of trust region methods, proves to be very well suited to these particular structures. The first spinoffs of our approach concern phase closure imaging in radio imaging and in optical interferometry.

## 1 Introduction

Considérons un réseau $\mathscr{A}$ de $n$ éléments pupillaires (de $n$ télescopes ou de $n$ antennes) observant une certaine distribution de luminance objet $\phi_{\rm o}(\mathbf{x})$ ; $\mathbf{x}$ est ici une variable de position angulaire bidimensionnelle. Désignons par $\mathbf{r}(j)$ le vecteur position du projeté du $j$ième élément pupillaire dans un plan normal à la direction moyenne d'observation. Conformément au théorème de Van Cittert-Zernike, le vecteur des données, le vecteur des 'visibilités expérimentales' $V_{\rm e}(j,k)$, correspond à un certain échantillonnage de la transformée de Fourier de $\phi_{\rm o}$ :

$$\widehat{\phi}_{\rm o}(\mathbf{u}) \triangleq \int_{\mathbb{R}^2} \phi_{\rm o}(\mathbf{x}) \exp(-2i\pi \mathbf{u}\cdot\mathbf{x})\, d\mathbf{x},$$

$$\mathbf{u} \equiv \mathbf{u}(j,k) = \frac{\mathbf{r}(j) - \mathbf{r}(k)}{\lambda}.$$

Chaque ligne de base $(j,k)$ définit un certain point d'échantillonnage fréquentiel $\mathbf{u}$ : une fréquence spatiale angulaire géométriquement bien identifiée. Dans la plupart des cas rencontrés en pratique, la relation entre $\phi_{\rm o}$ et $V_{\rm e}$ n'est pas une simple opération d'échantillonnage de Fourier. En particulier, des phases d'aberration pupillaires $\alpha_{\rm e}(j)$ viennent souvent brouiller the principe observationnel de base. Plus précisément, on alors

$$V_{\rm e}(j,k) = \widehat{\phi}_{\rm o}\big(\mathbf{u}(j,k)\big)\exp\big(i\beta_{\rm e}(j,k)\big) + \text{termes d'erreur}$$

avec

$$\beta_{\rm e}(j,k) = \alpha_{\rm e}(j) - \alpha_{\rm e}(k).$$

Le fait que $\phi_{\rm o}$ soit une fonction à valeurs réelles montre que $V_{\rm e}$ est une fonction hermitienne : $V_{\rm e}(k,j) = \overline{V}_{\rm e}(j,k)$.

Dans cette communication, nous considérons les situations dans lesquelles la distribution de phase pupillaire $\alpha_{\rm e}$ ne peut pas être calibrée de façon expérimentale ; en d'autres termes, $\alpha_{\rm e}$ est une inconnue du problème. Le phaseur de $\widehat{\phi}_{\rm o}$, le facteur complexe $\exp(i\varphi_{\rm o})$ impliqué dans la représentation module-phase $\widehat{\phi}_{\rm o} \equiv \rho_{\rm o}\exp(i\varphi_{\rm o})$, n'est donc pas directement accessible.

Soit $\mathscr{B}$ l'ensemble des $n(n-1)/2$ lignes de base $(j,k)$. engendrées par $\mathscr{A}$. Le graphe $(\mathscr{A},\mathscr{B})$, dont les sommets sont les éléments pupillaires de $\mathscr{A}$, et dont les côtés sont les lignes de base de $\mathscr{B}$, est dit être homogène (ou complet) [1]. En pratique, $V_{\rm e}$ peut n'être disponible que sur un sous-ensemble $\mathscr{B}_{\rm e}$ de $\mathscr{B}$. Le graphe devant être considéré est alors de la forme $(\mathscr{A},\mathscr{B}_{\rm e})$ (cf. la définition générale des graphes donnée dans [2]). Il est toujours possible de se ramener au cas où $(\mathscr{A},\mathscr{B}_{\rm e})$ est connexe. Pour un tel graphe, que nous qualifierons de 'graphe interférométrique', la condition $\alpha(j) - \alpha(k) = 0$ pour tous les $(j,k)\in\mathscr{B}_{\rm e}$ implique que $\alpha$ soit constant sur $\mathscr{A}$.

D'une façon un peu réductrice, on peut dire qu'un dispositif de synthèse d'ouverture est un ensemble de réseaux $\mathscr{A}_i$ observant le même objet indépendamment. Relativement à l'opération d'échantillonnage de Fourier correspondante, un tel dispositif se caractérise donc par un ensemble de graphes interférométriques $(\mathscr{A}_i,\mathscr{B}_{i,{\rm e}})$ avec $\mathscr{B}_{i,{\rm e}} \subseteq \mathscr{B}_i$ . Il est a priori clair que les $\mathscr{A}_i$ sont les réseaux (ou les sous-réseaux) impliqués dans la définition traditionnelle des dispositifs interférométriques.

Dans les problèmes inverses de reconstruction d'image, les inconnues sont la distribution de luminance $\phi_{\rm o}$ et les phases de transfert $\beta_{i,{\rm e}}$. Quand on résout le problème, le modèle objet $\phi$ est affiné de façon progressive dans une suite alternée d'opérations de calibration de phase et de synthèse de Fourier [3, 4, 5]. Dans les opérations de calibration, le modèle courant joue le rôle d'un calibrateur ; $\phi$ est donc fixé, et l'on pose

$$V(j,k) \triangleq \widehat{\phi}\big(\mathbf{u}(j,k)\big).$$

Pour chaque graphe interférométrique, on est alors conduit à minimiser une fonctionnelle objectif de la forme

$$f(\beta) \triangleq \sum_{(j,k)\in\mathscr{B}_e} \big|V_e(j,k) - V(j,k)\exp\big(\mathrm{i}\beta(j,k)\big)\big|^2\, \varpi(j,k),$$

où $\varpi$ est une certaine fonction poids ; dans un souci de clarté, les indices $i$ ont été omis. Le domaine de $f$, l'espace dans lequel la phase de transfert $\beta$ est confinée, est l'ensemble des fonctions à valeurs réelles de la forme $\beta(j,k) = \alpha(j) - \alpha(k)$. Cela dit, l'objectif n'est pas de trouver la phase de transfert $\beta$, mais plutôt le phaseur de transfert $\exp(\mathrm{i}\beta)$.

La fonctionnelle objectif $f$ induit une fonctionnelle équivalente en $\alpha$, notée $c$ :

$$c(\alpha) \triangleq f(B_e\alpha), \quad (B_e\alpha)(j,k) \triangleq \alpha(j) - \alpha(k), \quad (j,k) \in \mathscr{B}_e .$$

Les fonctions $\alpha$ constantes sur $\mathscr{A}$ appartiennent au noyau de $c$. Il est donc naturel de compléter la définition de cette fonctionnelle en faisant en sorte que son domaine soit l'ensemble des fonctions $\alpha$ telles que $\sum_{j\in\mathscr{A}} \alpha(j) = 0$.

L'objet de cette communication est de montrer qu'en raison de certaines propriétés très particulières, dont l'analyse relève de la théorie algébrique des graphes, le problème de la minimisation de $c$ mérite un traitement très spécifique. Dans le cadre de ces actes de congrès, nous nous limiterons simplement à sensibiliser le lecteur à cette nouvelle approche.

## 2 Eléments de théorie algébrique des graphes

Dans ce qui suit, $\mathscr{A}$ est un réseau ou un sous-réseau de $n$ éléments pupillaires. Il est parfois commode de considérer qu'un réseau puisse être réduit à un seul élément pupillaire ; $n$ est donc supérieur ou égal à 1, et nous identifions $\mathscr{A}$ avec $\mathbb{A} \triangleq \{1, 2, \ldots, n\}$. Dans le cas $n > 1$, nous désignons par $\mathscr{H} \triangleq (\mathscr{A}, \mathscr{B})$ le graphe homogène correspondant, et par $\mathbb{B}$ la grille des lignes de base orientées : $\mathbb{B} \triangleq \{(j,k) \in \mathbb{A}^2 : j \neq k\}$. Par définition, l'espace des phase pupillaires de $\mathscr{A}$ est l'espace $F$ des fonctions $\alpha$ à valeurs réelles sur $\mathscr{A}$ ou $\mathbb{A}$. De même, pour $n > 1$, l'espace des phases de ligne de base de $\mathscr{A}$ est l'espace $G$ des fonctions antisymétriques $\beta$ à valeurs réelles sur $\mathbb{B}$ : $\forall (j,k) \in \mathbb{B}, \beta(k,j) = -\beta(j,k)$. Muni des produits scalaires

$$(\alpha^{(1)} \mid \alpha^{(2)})_F \triangleq \sum_{j\in\mathbb{A}} \alpha^{(1)}(j)\alpha^{(2)}(j)$$

et

$$(\beta^{(1)} \mid \beta^{(2)})_G \triangleq \frac{1}{2} \sum_{(j,k)\in\mathbb{B}} \beta^{(1)}(j,k)\beta^{(2)}(j,k),$$

$F$ and $G$ sont des espaces euclidiens de dimensions $n$ et $n(n-1)/2$, respectivement. On est alors conduit à introduire les opérateurs

$$A : \mathbb{R} \to F, \quad (A\omega)(j) \triangleq \omega \quad (\forall j \in \mathbb{A});$$

et

$$B : F \to G, \quad (B\alpha)(j,k) \triangleq \alpha(j) - \alpha(k) \quad (n > 1).$$

Leurs adjoints sont explicitement donnés par les relations [3, 1] :

$$A^*\alpha = \sum_{j\in\mathbb{A}} \alpha(j), \qquad (B^*\beta)(j) = \sum_{\substack{k\in\mathbb{A}\\ k\neq j}} \beta(j,k).$$

En désignant par $I$ l'opérateur identité de $F$, l'on a

$$P + Q = I,$$

où

$$P \triangleq \frac{AA^*}{n}, \qquad Q \triangleq \frac{B^*B}{n}.$$

L'espace nul de $B$, $\ker B$, est l'ensemble des fonctions constantes sur $\mathbb{A}$ : $\ker B = A\mathbb{R}$. Il est facile de montrer que $P$ est la projection sur ce sous-espace ; $Q$ est donc la projection de $F$ sur l'image de $B^*$. Ce sous-espace,

$$\check{F} \triangleq B^*G = (\ker B)^\perp,$$

qui est l'espace des phases pupillaires effectives, est l'ensemble des fonctions $\alpha \in F$ telles que $\sum_{j\in\mathbb{A}} \alpha(j) = 0$ : le domaine de la fonctionnelle de calibration $c$.

Conformément à la terminologie utilisée en théorie algébrique des graphes [2], on dit que $B^*B$ est l'opérateur laplacien de $\mathscr{H}$ : $L(\mathscr{H}) = B^*B$. Pour étendre cette définition à n'importe quel graphe $\mathscr{G} \triangleq (\mathscr{A}, \mathscr{W})$, où $\mathscr{W}$ est un sous-ensemble de $\mathscr{B}$, il est commode d'introduire la fonction caractéristique du sous-ensemble $\mathbb{W}$ de $\mathbb{B}$ correspondant à $\mathscr{W}$. Dans le cas non-trivial où $\mathbb{W}$ n'est pas vide, cette fonction est définie comme suit :

$$w \triangleq \begin{cases} 1 & \text{sur } \mathbb{W}\,; \\ 0 & \text{ailleurs (sur } \mathbb{B}). \end{cases}$$

Lorsque $\mathbb{W}$ est vide, $w$ est identiquement nul sur $\mathbb{B}$, par définition. Dans les deux cas, $L(\mathscr{G})$ est défini comme étant l'opérateur semi-défini positif (non-négatif) :

$$L(\mathscr{G}) \triangleq (wB)^*(wB) = B^*wB.$$

Plus précisément, en théorie algébrique des graphes, la notation $L(\mathscr{G})$ désigne la matrice de $B^*wB$ exprimée dans la base standard de $F$. L'élément diagonal $a_{jj}$ de cette matrice est égal au nombre de lignes de base de $\mathscr{W}$ ayant le $j$ ième élément pupillaire de $\mathscr{A}$ comme extrémité. De même, les éléments de matrice non-diagonaux $a_{jk}$ s'avèrent être égal à $-1$ ou 0, suivant qu'il existe ou non une ligne de base de $\mathscr{W}$ reliant les éléments pupillaires correspondants. C'est la raison pour laquelle, l'on dit également que $L(\mathscr{G})$ est la matrice de connectivité de $\mathscr{G}$.

La décomposition d'un graphe en ses composantes connexes induit une décomposition de $F$ de la forme

$$F = \oplus_{r\geq 1} F_r .$$

La matrice de $L(\mathscr{G})$ exprimée relativement aux sous-espaces $F_r$ est bloc-diagonale. En d'autres termes, les composantes connexes peuvent être traitées indépendamment. Il en résulte naturellement des propriétés particulières pour les valeurs propres et les espaces propres de $L(\mathscr{G})$.

La notion de graphe complémentaire s'avère également jouer un rôle clé ; précisons ce point. Dans le cas non-trivial où $n$ est supérieur à 1, désignons par $\mathscr{W}^{\mathrm{c}}$ le complément de $\mathscr{W}$ dans $\mathscr{B}$, et par $\mathbb{W}^{\mathrm{c}}$ le sous-ensemble correspondant de $\mathbb{B}$. Les graphes $\mathscr{G} \triangleq (\mathscr{A}, \mathscr{W})$ et $\mathscr{G}^{\mathrm{c}} \triangleq (\mathscr{A}, \mathscr{W}^{\mathrm{c}})$, sont dits être complémentaires. Cette complémentarité se traduit par la propriété algébrique

$$L(\mathscr{G}) + L(\mathscr{G}^{\mathrm{c}}) = L(\mathscr{H}) \qquad (n > 1).$$

Comme $L(\mathscr{H}) = B^*B = nQ = nI - nP$, les décompositions en valeurs propres de $L(\mathscr{G})$ et $L(\mathscr{G}^{\mathrm{c}})$ se déduisent l'une de l'autre, très simplement.

Dans ce qui suit, la restriction à $\check{F}$ d'un opérateur quelconque $K$ de $F$ est notée $\check{K}$.

## 3 Algorithmique de calibration de phase

La fonctionnelle de calibration $c$, qui est une fonction de $\check{F}$ dans $\mathbb{R}$, peut être redéfinie à un facteur constant près :

$$c(\alpha) \triangleq \frac{1}{4} \sum_{(j,k)\in\mathbb{B}_{\mathrm{e}}} \left|V_{\mathrm{e}}(j,k) - V(j,k)\exp\bigl(\mathrm{i}(B_{\mathrm{e}}\alpha)(j,k)\bigr)\right|^2 \times \varpi(j,k).$$

Le choix du facteur 1/4 simplifie des formules ultérieures. Soit $\mathbf{G}_{\mathrm{e}}$ l'espace des fonctions hermitiennes $\zeta$ à valeurs sur $\mathbb{B}_{\mathrm{e}}$. Muni du produit scalaire,

$$\begin{aligned} \langle \zeta_1 \mid \zeta_2 \rangle &\triangleq \sum_{(j,k)\in\mathbb{B}_{\mathrm{e}}} \overline{\zeta}_1(j,k)\,\zeta_2(j,k)\,\varpi(j,k) \\ &= \sum_{(j,k)\in\mathbb{B}_{\mathrm{e}}} \Re\left\{\overline{\zeta}_1(j,k)\,\zeta_2(j,k)\right\}\varpi(j,k), \end{aligned}$$

$\mathbf{G}_{\mathrm{e}}$ est un espace de Hilbert réel ($\Re$ signifie partie réelle ; de même, plus loin, $\Im$ signifie partie imaginaire). En désignant par $\|\cdot\|$ la norme correspondante, $c$ peut s'écrire sous la forme plus concise

$$c(\alpha) = \frac{1}{4}\|V_{\mathrm{e}} - V\exp(\mathrm{i}B_{\mathrm{e}}\alpha)\|^2.$$

Considérons à présent le développement quadratique de $c$ en un point de phase donné $\alpha$ :

$$q\colon \check{F} \to \mathbb{R}, \quad q(\eta) \triangleq c(\alpha) + \bigl(c'(\alpha) \mid \eta\bigr)_F + \frac{1}{2}\bigl(c''(\alpha)\,\eta \mid \eta\bigr)_F.$$

Il est facile de montrer que le gradient et le hessien de $c$ sont explicitement donnés par les formules

$$c'(\alpha) = B_{\mathrm{e}}^*\bigl[\varpi\,\Im\bigl\{V\,\overline{V}_{\mathrm{c}}\bigr\}\bigr],$$

et

$$c''(\alpha)\eta = B_{\mathrm{e}}^*\bigl[\varpi\,\Re\bigl\{V\,\overline{V}_{\mathrm{c}}\bigr\}\bigr]B_{\mathrm{e}}\,\eta,$$

où

$$V_{\mathrm{c}} \triangleq V_{\mathrm{e}}\exp(-\mathrm{i}B_{\mathrm{e}}\alpha).$$

Il est clair que $V_{\mathrm{c}}$ peut être vu comme étant la version calibrée de $V_{\mathrm{e}}$ au point de phase $\alpha$ considéré.

Nos techniques de calibration de phase sont fondées sur le principe des méthodes de région de confiance [6]. L'itération de base est de la forme traditionnelle $\alpha := \alpha + \eta$, l'originalité de ce type de méthode étant essentiellement ceci : à chaque itération, l'on choisit $\eta$ de telle sorte que la plus faible valeur de $q$ dans la plus grande boule possible soit précisément $q(\eta)$. On évite ainsi les points critiques qui ne sont pas des minima locaux. Le degré de confiance dans la relation $c(\alpha + \eta) \simeq q(\eta)$ est contrôlé tout au long de la procédure via le test d'Armijo [6] ; précisons ce point.

En posant

$$c \triangleq c(\alpha), \quad g \triangleq c'(\alpha), \quad \check{H} \triangleq c''(\alpha),$$

l'on a

$$q\colon B^*G \to \mathbb{R}, \quad q(\eta) = c + (g \mid \eta)_F + \frac{1}{2}(\check{H}\eta \mid \eta)_F.$$

Considérons à présent la fonctionnelle :

$$q_t(\eta) \triangleq q(\eta) + \frac{1}{2}t\|\eta\|_F^2 \qquad (t \geq 0).$$

L'on voit que

$$q_t(\eta) = c + (g \mid \eta)_F + \frac{1}{2}(\check{H}_t\eta \mid \eta)_F, \quad \check{H}_t \triangleq \check{H} + t\check{I},$$

où $\check{I}$ est l'opérateur identité de $\check{F}$. Le gradient de $q_t(\eta)$ est égal à $g + \check{H}_t\eta$. Soit $\mu$ la plus petite valeur propre de $\check{H}$. Dès lors que $t$ est plus grand qu'une certaine valeur seuil $t_0$ dépendant de $\mu$, $\check{H}_t$ est défini positif. Désignons alors par $\eta_t$ la solution de l'équation $g + \check{H}_t\eta = 0$ :

$$\eta_t = -\check{H}_t^{-1}g \qquad (t > t_0).$$

Dans la boule de $\check{F}$ centrée sur l'origine, de rayon $\|\eta_t\|_F$, la plus petite valeur de $q$ est atteinte pour $\eta = \eta_t$. Plus précisément, quel que soit $\eta \neq \eta_t$ dans cette boule, l'on a $q(\eta) > q(\eta_t)$. En effet, quel que soit $\eta \neq \eta_t$ dans $\check{F}$,

$$q(\eta) + \frac{1}{2}t\|\eta\|_F^2 > q(\eta_t) + \frac{1}{2}t\|\eta_t\|_F^2$$

*i.e.*,

$$q(\eta) > q(\eta_t) + \frac{1}{2}t\bigl(\|\eta_t\|_F^2 - \|\eta\|_F^2\bigr) \qquad (t \geq 0).$$

Étant donné un nombre positif $a < 1$ (par exemple 0.5), le test d'Armijo consiste à vérifier si la condition suivante est satisfaite ou non :

$$c(\alpha) - c(\alpha + \eta_t) > a\,[q(0) - q(\eta_t)] \qquad (0 < a < 1).$$

Comme $(\check{H} + t\check{I})\eta_t = -g$, l'on a

$$\begin{aligned} q(0) - q(\eta_t) &= -(g \mid \eta_t)_F - \frac{1}{2}(\check{H}\eta_t \mid \eta_t)_F \\ &= \frac{1}{2}\bigl[t\|\eta_t\|_F^2 - (g \mid \eta_t)_F\bigr]. \end{aligned}$$

Si ce test est satisfait, $\eta_t$ est un pas d'itération possible. Autrement, $\|\eta_t\|_F$ est trop grand. Comme $\|\eta_t\|_F$ est une fonction décroissante de $t$, $t$ doit être alors augmenté. En principe au moins, la valeur initiale de $t$ doit donc être choisie aussi petite que possible.

Il résulte de l'expression de $c''$ que $\check{H}$ est l'opérateur :

$$\check{H}\colon \check{F} \to \check{F}, \quad \check{H}\eta = B^*hB\eta,$$

où

$$h \triangleq \begin{cases} \varpi\,\Re\{V\,\overline{V}_{\mathrm{c}}\} & \text{sur } \mathbb{B}_{\mathrm{e}}\,; \\ 0 & \text{ailleurs sur } \mathbb{B}. \end{cases}$$

La condition $\min_{(j,k)\in\mathscr{B}} h(j,k) > 0$ est une condition suffisante pour que $\check{H}$ soit défini positif. Quand cette condition est satisfaite, la valeur initiale de $t$ peut être nulle.

Dès lors que $t$ est suffisamment grand, les équations $\check{H}_t \eta = -g$ peuvent être résolues de façon itérative, à l'aide de la méthode des gradients conjugués. Dans la mise en œuvre correspondante, les espaces de Krylov peuvent être également utilisés pour calculer $\mu$ [5]. La valeur seuil $t_0$ peut être ainsi facilement déterminée.

Partant d'un point de phase donné $\alpha$, l'application de la méthode de région de confiance fournit alors un minimum local. En fait, il peut exister plusieurs minima de ce type, et le minimum global ne peut être trouvé qu'en utilisant des points d'initialisation aléatoires. Dans ce contexte, la théorie algébrique des graphes suggère que le principe des méthodes de région de confiance soit mis en œuvre de façon plus subtile.

Par exemple, lorsqu'on est loin d'un minimum local, il est recommandé de relaxer ce principe en utilisant des approximations de $\check{H}$ et donc de $\check{H}_t$. L'approche que nous avons adoptée est fondée sur la remarque suivante : les valeurs de la fonction $h$ impliquée dans la définition de $\check{H}$ peuvent toujours être considérées comme étant plus ou moins regroupées autour d'une valeur supérieure $t_2$ sur un certain sous-ensemble $\mathbb{W}$ de $\mathbb{B}$, et d'une valeur inférieure $t_1 < t_2$ sur le sous-ensemble complémentaire $\mathbb{W}^{\mathrm{c}}$. On est alors conduit à considérer des approximations de $h$ de la forme

$$\widetilde{h} = t_2 w + t_1 w^{\mathrm{c}} = (t_2 - t_1) w + t_1 .$$

Il est clair que $\widetilde{h}$ est égal à $t_2$ sur $\mathbb{W}$, et à $t_1$ sur $\mathbb{W}^{\mathrm{c}}$. Il en résulte que

$$\check{H}_t \eta \simeq (t_2 - t_1) \left( B^* w B \, \eta + \frac{n t_1 + t}{t_2 - t_1} \eta \right) .$$

L'approximation correspondante de $\check{H}_t$ est donc de la forme

$$\widetilde{H}_t = \varkappa \check{L}_\tau(\mathcal{G}) ,$$

où

$$\check{L}_\tau(\mathcal{G}) \triangleq \check{L}(\mathcal{G}) + \tau \check{I}, \qquad \mathcal{G} = (\mathcal{A}, \mathcal{W}),$$

et

$$\varkappa \triangleq t_2 - t_1 , \qquad \tau = \frac{n t_1 + t}{t_2 - t_1} .$$

Il est important de noter que la définition du graphe $\mathcal{G}$ impliqué dans cette approximation ne dépend que du point de phase $\alpha$ considéré.

L'originalité et l'efficacité de nos algorithmes résultent alors du fait que dans la plupart des cas, l'action de $[\check{L}_\tau(\mathcal{G})]^{-1}$ peut se décomposer en des opérations irréductibles très simples. Ces opérations s'effectuent au points de terminaison d'un certain arbre de décomposition qui se construit de la façon suivante : $\mathcal{G}$, ou son complémentaire $\mathcal{G}^{\mathrm{c}}$, est décomposé en composantes connexes, le complément de chacune de ces composantes étant à son tour décomposé. Dans le processus récursif correspondant, les points de terminaison apparaissent chaque fois que la composante connexe considérée est, ou dégénérée (*i.e.* réduite à un seul élément pupillaire), ou telle que son complément soit également connexe.

En raison du caractère assez exotique de ces problèmes de calibration de phase, les algébristes ne se sont jamais penchés sur l'algorithmique en question (cf. la liste des références du dernier article de revue dans ce domaine [2]). Ils n'ont donc pas exhibé les propriétés sous-jacentes à ces manipulations élémentaires.

En ce qui concerne les applications potentielles, et au delà de l'intérêt de cette approche sur le plan technique, cette nouvelle application de la théorie algébrique des graphes apporte en filigrane une meilleure compréhension de l'imagerie à clôture de phase [3]. Les développements correspondants seront présentés dans des revues appropriées.

## Références


[1] A. Lannes, 'Phase and amplitude calibration in aperture synthesis. Algebraic structures,' Inverse Problems, **7** (1991), 261–298.

[2] R. Merris, 'A survey of graph Laplacians,' *Linear and Multilinear Algebra*, **39** (1995), 19–31.

[3] A. Lannes, 'Remarkable algebraic structures of phase closure imaging and their algorithmic implications in aperture synthesis,' *JOSA A*, **7** (1990), 500–512.

[4] A. Lannes, E. Anterrieu and K. Bouyoucef, 'Fourier Interpolation and Reconstruction via Shannon-type Techniques ; Part I : Regularization principle,' *J. Mod. Optics*, **41** (1994), 1537–1574.

[5] A. Lannes, E. Anterrieu and K. Bouyoucef, 'Fourier Interpolation and Reconstruction via Shannon-type Techniques ; Part II : Technical developments and applications,' *J. Mod. Optics*, **43** (1996), 105–138.

[6] J. Moré, 'Recent developments in algorithms and software for trust region methods,' in Mathematical Programming, the State of the Art, A. Bachem, M. Grötschel, and B. Korte, eds., Springer-Verlag, Berlin (1983), 258–287.