

# Échantillonnage efficace en imagerie Doppler

Laurent Desbat<sup>(1)</sup> et Catherine Mennessier<sup>(2)</sup>

<sup>(1)</sup>TIMC-IMAG, UMR CNRS 5525,  
IAB, faculté de Médecine, UJF  
38706 La Tronche, France

<sup>(2)</sup>LAOG, Observatoire de Grenoble,  
Université Joseph Fourier BP 53  
F-38041 Grenoble Cedex 9, France

## RÉSUMÉ

L'objectif de l'échantillonnage efficace est de minimiser le nombre de points de mesures pour la reconstruction d'une image à résolution donnée. L'échantillonnage efficace en tomographie classique est généralisé à la transformée de Radon invariante par rotation dans le cas de fonctions poids polynômiales. Des simulations numériques et l'application à l'imagerie Doppler dans des cas particuliers d'inclinaison de l'étoile, illustrent ce résultat.

## ABSTRACT

A function is said to be efficiently sampled if, for a given resolution, the smallest number of data points is used for its reconstruction. The classical efficient sampling results in tomography are generalized to rotation invariant Radon transform with polynomial weight. Numerical experiments as well as applications to Doppler imaging for two particular stellar inclination angles are presented.

## 1 Imagerie Doppler

L'imagerie Doppler [7, 15] vise à reconstruire la distribution du flux à la surface d'une étoile en rotation sur elle-même. Certaines raies (lithium, calcium...) émises à une longueur d'onde caractéristique  $\lambda_0$  par cette étoile sont observées à l'aide d'un télescope et d'un spectromètre.

Du fait de la rotation, la fréquence des raies émises en chacun des points de l'étoile est décalée par effet Doppler. Le décalage est donné par  $\Delta\lambda(\phi, \zeta)/\lambda_0 = v(\phi, \zeta)/c_e$  où  $c_e$  est la célérité de la lumière et  $v(\phi, \zeta)$  est la composante, suivant l'axe de visée  $o_3$ , de la vitesse au point  $\zeta$  à la surface de l'étoile (par normalisation, la sphère unité) à la phase  $\phi$ . On désigne par  $o_2$  le vecteur unitaire perpendiculaire à  $o_3$  et à l'axe de rotation de l'étoile (s'ils sont confondus, il n'y a pas d'effet Doppler). Soit  $d\phi/dt$  la vitesse angulaire, on montre facilement :

$$\begin{aligned} v(\phi, \zeta) &= (d\phi/dt)(\sin \alpha, 0, \cos \alpha)^t \wedge \zeta \cdot o_3 \\ &= (d\phi/dt)\zeta_{o_2} \sin \alpha. \end{aligned}$$

Ainsi, le décalage Doppler est proportionnel à la composante du vecteur  $\zeta$  sur l'axe  $o_2$ . On appelle courbe d'iso-vitesse l'ensemble des points à la surface de l'étoile qui, pour une position "angulaire"  $\phi$  donnée de l'étoile, engendrent le même décalage Doppler, c'est à dire, ont la même vitesse projetée sur l'axe de visée et donc ont même coordonnée  $\zeta_{o_2}$ .

Ainsi, on observe une raie élargie par rapport à la raie d'émission d'une étoile qui serait immobile. Un point du spectre (dont l'abscisse représente le décalage en longueur d'onde) est donc caractéristique d'une courbe d'iso-vitesse sur l'étoile (voir Fig. 1).

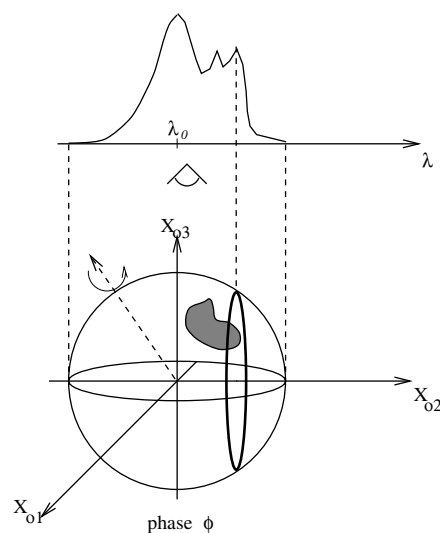


FIG. 1 — Principe de l'imagerie Doppler : la rotation de l'étoile engendre un décalage spectral par effet Doppler. Ainsi, le signal émis peut être localisé spatialement sur une courbe d'iso-vitesse (iso-décalage Doppler) représentée en trait plein. On montre que les courbes d'iso-vitesse sont des cercles parallèles au plan défini par l'axe de visée et l'axe de rotation de l'étoile.

Soit  $V(\phi)$  la demi-sphère visible depuis l'observateur, alors le problème inverse consiste à reconstruire le flux  $T(\zeta)$  à partir des mesures :

$$m(\phi, \lambda) = \int_{V(\phi)} H_0(\lambda - \Delta\lambda(\phi, \zeta), T(\zeta)) I_0(T(\zeta)) \times A_{cb}(\zeta \cdot o_3) \zeta \cdot o_3 d\zeta,$$

où  $A_{cb}(t) = 1 - \varepsilon + \varepsilon t$  est la fonction d'assombrissement centre-bord,  $H_0$  est le profil intrinsèque de la raie.

En adoptant le modèle à deux températures [1] l'inconnue devient le facteur de remplissage  $f$  qui vérifie, après déconvolution [8] par  $H_0$  :

$$m(\phi, s) = H_0(s) * S(\phi, s),$$

$$S(\phi, s) = \int_{\substack{\zeta \cdot o_2 = s \\ \zeta \cdot o_3 \geq 0}} f(\zeta) (1 - \varepsilon + \varepsilon \zeta \cdot o_3) \zeta \cdot o_3 d\zeta \quad (1)$$

## 2 Échantillonnage efficace en tomographie classique

Soit  $\mathbf{K}$  le support essentiel de la transformée de Fourier d'une fonction à échantillonner suivant un schéma engendré par une matrice non singulière  $W$ , c'est à dire sur l'ensemble de points  $\{Wl, l \in \mathbb{Z}^2\}$ , la généralisation de la condition d'échantillonnage, sur  $W$ , de non recouvrement de Nyquist-Shanon [11] est que les ensembles  $\mathbf{K} + 2\pi W^{-1}l, l \in \mathbb{Z}^2$  doivent être disjoints deux à deux. Cette généralisation de schémas sur des grilles orthogonales à des schémas sur des treillis est intéressante en tomographie.

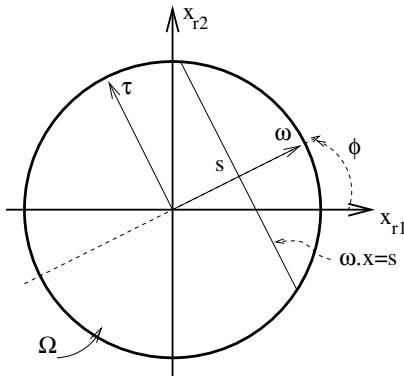


FIG. 2 — Paramètres de la transformée de Radon.

En tomographie 2D, on cherche à reconstruire une fonction  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$  à partir de sa transformée de Radon :

$$g(\phi, s) = \int_{\omega \cdot x = s} f(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(s\omega + t\tau) dt,$$

où  $\omega = (\cos \phi, \sin \phi)^t \in S^1, \phi \in [0, 2\pi], s \in \mathbb{R}$ , voir Fig. 2. On définit les transformées de Fourier 1D et 2D de  $g$  et  $f$  par :

$$\hat{g}(\phi, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-is\sigma} g(\phi, s) ds,$$

et

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-ix \cdot \xi} f(x) dx$$

Le  $k^{\text{ième}}$  coefficient de Fourier de  $\hat{g}(\phi, \sigma)$  est défini par :  $\hat{g}_k(\sigma) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ik\phi} \hat{g}(\phi, \sigma) d\phi, k \in \mathbb{Z}$ . Si  $f$  est essentiellement  $b$ -bande limitée ( $\int_{|\xi| > b} |\hat{f}(\xi)| d\xi$  négligeable), le support essentiel de  $\hat{g}_k(\sigma)$  est contenu dans l'ensemble  $[14, 10]$  :

$$\mathbf{K} = \{(k, \sigma) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{R}; |\sigma| < b, |k| < \max(|\sigma|/\vartheta, (1/\vartheta - 1)b)\}$$

où  $0 < \vartheta < 1$  est un paramètre de contrôle de la décroissance exponentielle de  $|\hat{g}_k(\sigma)|$  en dehors de  $\mathbf{K}$ .

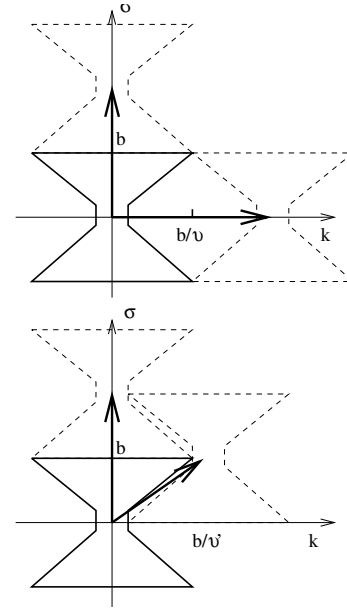


FIG. 3 — Ensembles  $\mathbf{K} + 2\pi W_S^{-1}k$  (gauche) et  $\mathbf{K} + 2\pi W_I^{-1}k$  (droite).

Les grilles respectivement standard et entrelacée sont alors engendrées par les matrices  $W_S$  et  $W_I$  suivantes :

$$W_S = \begin{pmatrix} \frac{\pi}{P} & 0 \\ 0 & \frac{2}{Q} \end{pmatrix} \quad W_I = \begin{pmatrix} \frac{2\pi}{P} & \frac{-\pi}{P} \\ 0 & \frac{2}{Q} \end{pmatrix}$$

où le nombre de points d'échantillonnage  $P$  de la variable angulaire et le nombre de points d'échantillonnage  $Q$  par projection satisfont :  $b \leq P\vartheta, b \leq \pi Q/2$  pour la grille  $W_S$  et  $b \leq P\vartheta', b \leq \pi Q/2$  pour la grille  $W_I$  (voir figure 3). Alors, les valeurs optimales de  $P$  et  $Q$  sont :  $\pi Q/2 = b, 2P = \pi Q/\vartheta$  pour  $W_S$  et  $\pi Q/2 = b, 2P = \pi Q/\vartheta'$  pour  $W_I$  (voir figure 3). On notera que  $\det W_I \approx 2 \det W_S$ , c'est à dire que la grille entrelacée est presque deux fois plus efficace que la grille standard pour échantillonner la transformée de Radon 2D d'une fonction.

Les géométries entrelacées ont été introduites par Cormack à l'aide d'arguments géométriques très élégants [3]. Les conditions d'échantillonnage efficace pour les géométries en éventail sont dues à Natterer [10]. Des schémas efficaces moins réguliers ont été proposés par Faridani dans [5, 6], voir aussi [4].

### 3 Transformée de Radon généralisée invariante par rotation et imagerie Doppler

La transformée de Radon 2D invariante par rotation est définie par :

$$g(\phi, s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(s\omega + t\tau)w(s, t)dt,$$

**Proposition 3.1** — Si la fonction poids  $w(s, t)$ , associée à la transformée de Radon généralisée  $g$  de  $f$ , est un polynôme de degré  $L + M$  en  $s$  et  $t$ ,  $w(s, t) = \sum_{l,m=0}^{L,M} a_{l,m} s^l t^m$ , si  $\forall l \in \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{Z}$ , tels que  $l \leq L, m \leq M$  et  $-l - m \leq n \leq l + m$ , la fonction  $f(x)|x|^{l+m} e^{-in\psi}$  (avec  $(|x|, \psi)$  coordonnées polaires de  $x \in \mathbb{R}^2$ ) est essentiellement  $b$ -bande limitée, alors le support essentiel de  $\hat{g}_k(\sigma)$  est contenu dans :

$$\mathbf{K} = \{(k, \sigma); |\sigma| < b, |k| < (L+M) + \max(|\sigma|/\vartheta, (1/\vartheta - 1)b)\}.$$

*Démonstration* : D'après le théorème coupe-projection :

$$\begin{aligned} \hat{g}_k(\sigma) &= (2\pi)^{\frac{-3}{2}} \int_0^{2\pi} e^{-ik\phi} \int_{x \in \mathbb{R}^2} e^{-i\sigma\omega \cdot x} f(x) w(x \cdot \omega, x \cdot \tau) dx d\phi \\ &= (2\pi)^{\frac{-3}{2}} \int_{x \in \mathbb{R}^2} f(x) e^{-ik\psi} I(x) dx \end{aligned}$$

avec

$$I(x) = \int_0^{2\pi} e^{-i\sigma|x|\cos\eta - ik\eta} w(|x|(\frac{e^{i\eta} + e^{-i\eta}}{2}), |x|(\frac{e^{-i\eta} - e^{i\eta}}{2i})) d\eta,$$

où  $x = |x|(\cos\psi, \sin\psi)^t$  et  $\eta = \phi - \psi$ . Si  $w(s, t) = \sum_{l,m=0}^{L,M} a_{l,m} s^l t^m$ , alors en remarquant qu'il existe  $c_n \in \mathbb{C}$ ,  $-l - m \leq n \leq l + m$  tel que

$$\left(\frac{e^{i\eta} + e^{-i\eta}}{2}\right)^l \left(\frac{e^{-i\eta} - e^{i\eta}}{2i}\right)^m = \sum_{n=-(l+m)}^{l+m} c_n e^{in\eta}$$

et en utilisant la relation VII(3.16) dans [10] :

$$J_k(x) = \frac{i^{-k}}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ix \cos\phi - ik\phi} d\phi$$

nous obtenons

$$\hat{g}_k(\sigma) = \sqrt{2\pi} \sum_{l,m=0}^{L,M} a_{l,m} \sum_{n=-(l+m)}^{l+m} u_k^{n,l,m}(\sigma)$$

avec

$$u_k^{n,l,m}(\sigma) = \int_{x \in \mathbb{R}^2} f(x) |x|^{l+m} e^{-i(k-n)\psi} i^{k-n} J_{k-n}(-\sigma|x|) dx.$$

Ainsi,  $h^{n,l,m}(x)$  étant définie par :

$$h^{n,l,m}(x) = f(x) |x|^{l+m} c_n e^{-in\psi}$$

on note  $y$ , la transformée de Radon classique de  $h^{n,l,m}$  :

$$y_{n,l,m}(\phi, s) = \int_{x \cdot \omega = s} h^{n,l,m}(x) dx$$

alors, d'après l'égalité p.72 dans [10]

$$\hat{g}_k(\sigma) = \sum_{l,m=0}^{L,M} a_{l,m} \sum_{n=-(l+m)}^{l+m} \widehat{(y_{n,l,m})_{k-n}}(\sigma).$$

On en déduit le support essentiel de  $\hat{g}_k(\sigma)$  donné dans la proposition. ■

Pour illustrer la proposition précédente nous représentons dans la figure 4,  $|\hat{g}_k(\sigma)|$  pour la transformée de Radon classique ( $w(s, t) = 1$ ) de l'indicatrice d'un disque centré en  $(0.8, 0)$  de rayon 0.03 (en haut) et  $|\hat{g}_k(\sigma)|$  pour la transformée de Radon généralisée, avec  $w(s, t) = t^{10}$ , de la même indicatrice de disque (en bas). Un élargissement de spectre suivant l'axe horizontal  $k$  pour  $w(s, t) = t^{10}$  par rapport à  $w(s, t) = 1$  est bien visible, en particulier dans les agrandissements. On remarquera que la fonction  $f$  n'est pas essentiellement  $b$ -bande limitée et donc ne remplit pas les conditions du théorème. Cependant, le résultat reste numériquement vérifié.

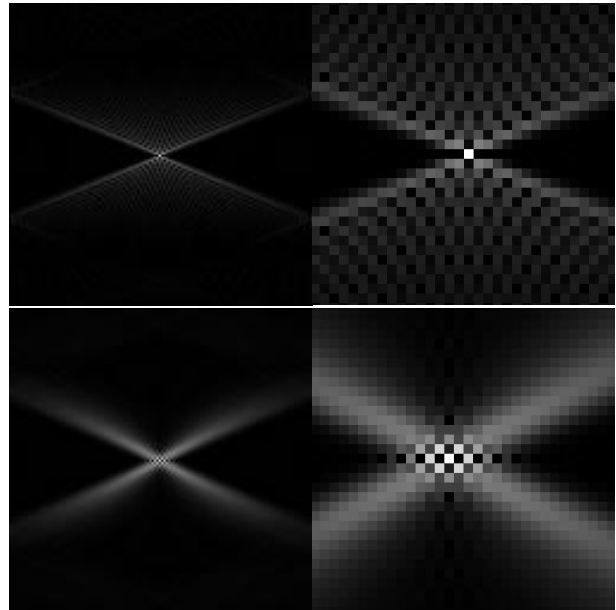


FIG. 4 — Visualisation de  $|\hat{g}_k(\sigma)|$  pour les fonctions poids  $w(s, t) = 1$  (en haut) et  $w(s, t) = t^{10}$  (en bas). Dans la colonne de droite un grossissement de la partie centrale souligne l'élargissement de spectre suivant l'axe horizontal  $k$ .

#### 3.1 Imagerie Doppler à inclinaison nulle

C'est un cas d'école puisque, pour tout point de l'étoile, la composante de son vecteur vitesse sur l'axe de visé est nulle et donc, le décalage Doppler qui lui est proportionnel, est nul. Cependant, la géométrie des mesures permet d'identifier, par simple projection des courbes d'iso-vitesse sur le plan du ciel (plan perpendiculaire à l'axe de visé), un problème de transformée de Radon classique. Il suffit de remplacer dans (1)  $o_2$  par  $\omega$  et de faire le changement de variable  $\zeta = (x_1, x_2, \sqrt{1 - (x_1^2 + x_2^2)}) = (x, \sqrt{1 - |x|^2})$  pour se ramener dans le plan du ciel à la transformée de Radon de  $f(x)(1 - \varepsilon + \varepsilon\sqrt{1 - |x|^2})$ . Ainsi, l'échantillonnage entrelacé peut être appliqué.

#### 3.2 Imagerie Doppler à inclinaison à 90°

Dans le cas où l'axe de rotation de l'étoile est  $o_1$ , tout point est visible pendant une demi-période. Du fait qu'un point et son symétrique par rapport à l'équateur de l'étoile se trouvent toujours sur la même courbe d'iso-vitesse, on ne pourra pas les

distinguer l'un de l'autre : c'est l'ambiguïté nord-sud [9]. Les fonctions antisymétriques sont invisibles, c'est à dire dans le noyau de l'opérateur. Ainsi, l'identification se limite à la partie symétrique de la fonction flux recherchée. En introduisant  $g^+(\phi, s) = S(\phi, s) + S(\phi + \pi, -s)$  et en projetant les courbes d'iso-vitesse dans le plan équatorial (plan fixe perpendiculaire à l'axe de rotation), on montre que la mesure est celle d'une transformée de Radon généralisée avec pour fonction poids  $w(s, t) = (1 - \varepsilon)|t| + \varepsilon t^2$ . Ne sachant pas traiter le cas de  $|t|$  du point de vue de l'échantillonnage, la valeur de  $\varepsilon$  est fixée à 1, d'où :

$$\begin{aligned} g(\phi, s) &= \int_{x \cdot \omega = s} f(x)(x \cdot \tau)^2 dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(s\omega + t\tau)t^2 dt \end{aligned}$$

Comme dans [2, 12, 13], en décomposant  $f$  en harmoniques sphériques, on peut montrer qu'elle est identifiable à partir de  $g^+(\phi, s)$ .

Pour  $\varepsilon = 0$ , une transformée de Radon avec une fonction poids polynômiale est obtenue en définissant la mesure par :  $g^-(\phi, s) = S(\phi, s) - S(\phi + \pi, -s)$ . L'équation précédente devient :

$$\begin{aligned} g^-(\phi, s) &= \int_{x \cdot \omega = s} f(x)x \cdot \tau dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(s\omega + t\tau)t dt. \end{aligned}$$

De même il est possible de montrer que toutes les harmoniques de  $f$ , exceptée l'harmonique zéro, sont identifiables à partir de  $g^-(\phi, s)$ . La partie radiale de  $f$  peut alors être reconstruite à partir d'une seule projection  $S(\phi, s)$  à laquelle aura été soustraite la composante non radiale, alors identifiée. Dans un schéma entrelacé, il suffira de prendre les données de deux projections successives pour obtenir, sur la partie radiale, la même résolution que sur la partie non radiale. Ainsi l'échantillonnage entrelacé est suffisant pour reconstruire efficacement  $f$ .

On déduit donc facilement de la proposition du paragraphe précédent que le support de

–  $\widehat{g^+}_k(\sigma)$ , pour  $\varepsilon = 1$ , est contenu dans

$$\mathbf{K}_{DI} = \{(k, \sigma); |\sigma| < b, |k| < 2 + \max(|\sigma|/\vartheta, (1/\vartheta - 1)b)\}.$$

–  $\widehat{g^-}_k(\sigma)$ , pour  $\varepsilon = 0$ , est contenu dans

$$\mathbf{K}_{DI} = \{(k, \sigma); |\sigma| < b, |k| < 1 + \max(|\sigma|/\vartheta, (1/\vartheta - 1)b)\}.$$

## Références

- [1] A.C. Cameron. Surface inhomogeneities on late-type stars. In Mullan D.J. Byrne P.B., editor, *Surface Inhomogeneities on Late-Type Stars*, pages 33–44. Springer, 1992.
- [2] A.M. Cormack. Representation of a Function by Its Line Integrals, with Some Radiological Applications. *J. Appl. Phys.*, 34 :2722–2727, 1963.
- [3] A.M. Cormack. Sampling the Radon transform with beams of finite width. *Phys. Med. Biol.*, 23(6) :1141–1148, 1978.
- [4] L. Desbat. Efficient sampling on coarse grids in tomography. *Inverse Problems*, 9 :251–269, 1993.
- [5] A. Faridani. An application of a multidimensional sampling theorem to computed tomography. In *AMS-IMS-SIAM Conference on Integral Geometry and Tomography*, volume 113, pages 65–80. Contemporary Mathematics, 1990.
- [6] A. Faridani. A generalized sampling theorem for locally compact abelian groups. *Math. Comp.*, 63(207) :307–327, 1994.
- [7] A.V. Goncharsky, V.V. Stepanov, V.L. Khokhlova, and A.G. Iagola. Mapping of chemical elements on the surfaces of ap stars. i solution of the inverse problem of finding local profiles of spectral lines. *Soviet Astronomy*, 26 :690–696, 1982.
- [8] D.F. Gray. *The observation and analysis of stellar photospheres*. Wiley and Sons, 1976.
- [9] M. Kürster. Doppler imaging with a clean-like approach. *Astronomy and Astrophysics*, 274 :851–869, 1993.
- [10] F. Natterer. *The Mathematics of Computerized Tomography*. Wiley, 1986.
- [11] D.P. Petersen and D. Middleton 1962. Sampling and reconstruction of wavenumber-limited functions in N-dimensional euclidean space. *Inf. Control*, 5 :279–323, 1962.
- [12] E.T. Quinto. The Inversibility of Rotation Invariant Radon Transforms. *J. Math. Anal. Appl.*, 91 :510–522, 1983.
- [13] E.T. Quinto. The Inversibility of Rotation Invariant Radon Transforms (erratum) . *J. Math. Anal. Appl.*, 94 :602–603, 1983.
- [14] P.A. Rattey and A.G. Lindgren. Sampling the 2-D Radon transform. *IEEE Trans. ASSP*, 29 :994–1002, 1981.
- [15] S.S.Vogt. Doppler images of rotating stars using maximum entropy image reconstruction. *The Astrophysical Journal*, 321 :496–515, 1987.