

Codage à Protections Inégales et Diffusion

Stéphane Boucheron⁽¹⁾ et Mohammad-Reza Salamatian⁽¹⁾

⁽¹⁾LRI-CNRS, URA CNRS 410,
Bâtiment 490, Université Paris-Sud
91405 Orsay, France
bouchero, salamat@lri.fr

RÉSUMÉ

Les signaux audio-visuels transmis sur les réseaux informatiques sont le résultat d'un codage-source qui hiérarchise les différentes parties du message encodé. Dans un environnement comme INTERNET, il est important de concevoir des codages « canal » prenant en compte les particularités du codage source et conférant au flot de données une résistance aux principales défaillances des réseaux : les pertes de paquets. Nous déterminons les limites informationnelles du codage à protection inégale contre les effacements. En réinterprétant une inégalité récente sur les codes à protection inégale, nous donnons d'abord une caractérisation simple des débits accessibles sur un canal de diffusion à effacements avec messages dégradés. Nous montrons ensuite l'optimalité du multiplexage par juxtaposition et entrelacement. Puis nous discutons le problème de la dégradation gracieuse sur un canal de diffusion, nous montrons que lorsque la fonction de débit-distorsion dépend logarithmiquement de la distorsion, on peut garantir l'existence d'un schéma de raffinements successifs approximatif.

ABSTRACT

Broadcasting video sequences over digital networks rely on compression techniques that organize encoded information in a hierarchical manner and on unreliable transport protocols. In lossy environments like the INTERNET, channel-coding should take into account this source-coding induced hierarchy. This notes determines the information-theoretical limitations of unequal error protection coding in lossy networks. Revisiting an inequality on Priority Encoding Transmission codes, we provide a very simple characterization of accessible rates on lossy broadcast channels with degraded message sets. We then show that multiplexing by superposition and interleaving is optimal with respect to error exponents. Finally, we discuss graceful degradation over lossy networks and show that the shape of the rate distortion-function may approximately warrant the possibility of successive refinements, hence of graceful degradation over lossy networks.

1 Introduction

La diffusion de séquences vidéo sur un réseau comme INTERNET s'appuie sur deux types de techniques : des normes de compression (MPEG), un protocole de transport comme UDP qui ne garantit pas un acheminement fiable des paquets [11, 2]. Dans un signal vidéo comprimé selon une des normes MPEG [11], un groupe d'images est transmis sous forme d'une suite de trames de trois types I, B, P. Et lorsque la trame I (intracodée) n'est pas récupérée, les autres trames P, B ne sont d'aucune utilité. Si le protocole de transport utilisé n'est pas fiable, quelques paquets représentant ces trames risquent d'être perdus : sur certaines « liaisons » réalisées sur l'INTERNET, ces fréquences de pertes peuvent atteindre 20% [2, 9]. La recherche de délais de transmission stables, la volonté de ne pas compliquer les protocoles de diffusion ont suggéré l'utilisation de codes correcteurs (FEC) plutôt que le recours systématique aux techniques de retransmission sur demande (ARQ). Ces schémas de codage canal doivent tenir compte des normes de compression et donc assurer avant tout l'intégrité des trames I, puis celles des trames P et B. De plus lorsque la communication est une diffusion sur un réseau comme le MBONE [11], la qualité de réception varie largement d'un destinataire à l'autre. Une bonne utilisation du canal doit

assurer une qualité de service proportionnée à la fiabilité de la liaison qui relie source et destinataire.

2 Définitions

Cette note étudie les limites imposées par l'aléa présent dans les réseaux aux possibilités de transmission fiable de données codées hiérarchiquement. Les liaisons INTERNET sont modélisées par des canaux notés V ou W à effacements (*erasure channels*) : les symboles de l'alphabet \mathcal{X} du canal sont les paquets qu'il transporte, on les suppose en nombre fini ; les défaillances du canal sont des pertes de paquets, dues à la congestion des routeurs [2, 9]. La probabilité de perdre un paquet x , notée $W(e|x)$ ne dépend pas du paquet x mais du canal. Dans le modèle le plus simple, les pertes sont indépendantes et identiquement distribuées dans le temps. Il est ensuite possible de raffiner le modèle en considérant des canaux à mémoire où les pertes tendent à intervenir en rafales conformément aux observations expérimentales [2, 9]. Sur le canal W , pour un code à M mots, de longueur n , d'encodeur f , de décodeur ϕ , le taux de pertes irrécupérables est défini par : $e(W, f, \phi) = \mathbb{E}_{m \leq M} \sum_{y, m \neq \phi(y)} W_n(y|f(m))$, les messages m étant équiprobables. Le débit (rendement) du code est $\frac{1}{n} \log_{|\mathcal{X}|} M$. On note $e(n, R, W)$ la probabilité minimale de

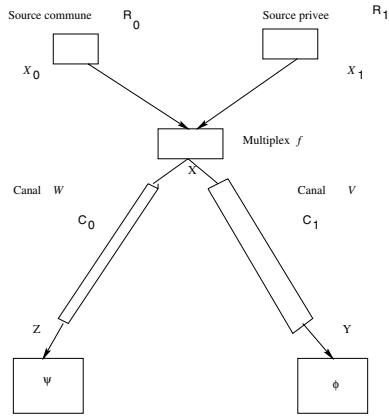


FIG. 1 — Un canal de diffusion asymétrique. Le destinataire nanti doit reconstituer à partir de Y les deux sources (par exemple les trames I et P d'un flot MPEG), le destinataire déshérité essaie de reconstituer à partir de Z la source commune.

pertes irrécupérables d'un code de longueur n , de débit R sur le canal W . La capacité du canal W est le supremum des rendements des codes qui permettent d'atteindre une probabilité de pertes irrécupérables arbitrairement proche de 0. Pour un canal à effacements, la capacité (en nats) est $C = 1 - W(e|.)$ (Elias, 1955).

On peut décrire ainsi le problème de la transmission robuste de trames MPEG proposé par [1] : les flots des trames I, B et P représentent deux sources qui seront supposées indépendantes en première approximation (cf. figure 2). Ces deux sources sont « multipléxées » (éventuellement de façon naïve) par un émetteur et envoyées à deux destinataires reliés à l'émetteur par les canaux V et W de capacités C_0 et C_1 . Peut-on alors transmettre les trames I à un débit R_0 , et les trames P,B à un débit R_1 de façon à ce que Y (resp. Z) permette de reconstituer toutes les trames (resp. les trames I) avec une probabilité arbitrairement grande ? Ce problème est un cas de *diffusion avec ensemble de messages dégradés* ou *canal de diffusion asymétrique* (canal ABC) [5, partie 3, chapitre 4]. Sur un canal ABC, avec un encodeur ϕ , des décodeurs ϕ et ψ , pour un code $\{1..M_0\} \times \{1..M_1\} \rightarrow \mathcal{X}^n$, on distingue deux probabilités de pertes irrécupérables :

$$e_0(f, \phi, \psi, V, W) \triangleq \mathbb{E}_{m_0} \sum_{z, m_0 \neq \psi(z)} W_n(z|f(m_0, m_1)) \text{ et}$$

$$e_1(f, \phi, \psi, V, W) \triangleq \mathbb{E}_{m_0, m_1} \sum_{y, (m_0, m_1) \neq \phi(y)} V_n(y|f(m_0, m_1)).$$

(R_0, R_1) est une paire de débits accessibles ssi on peut rendre $\max(e_0(f, \phi, \psi, V, W), e_1(f, \phi, \psi, V, W))$ arbitrairement petit en utilisant des codes de débits R_0 et R_1 . La réinterprétation d'une extension de la borne des singletons aux codes à protection inégale [1], montre que sur un canal ABC à effacements, les *débits accessibles* dépendent très simplement des capacités des différentes liaisons. Cette question est discutée en section 3. Dans la section suivante, les exposants d'erreur du canal ABC à effacements (*random coding error exponent*, *sphere packing exponent*) sont déterminés, ils permettent d'apprécier le pouvoir des techniques de multiplexage par juxtaposition et entrelacement proposées par exemple dans [1]. Finalement, nous examinons le cas où la technique de

compression n'est plus acceptée a priori, c'est-à-dire où les messages ne sont plus dégradés.

3 Débits accessibles

Le principe du débit partagé, c'est-à-dire l'application d'une technique naïve de multiplexage montre que n -uplets de débits accessibles (R_0, R_1, \dots, R_n) forment une région convexe de \mathbb{R}^n . Cette région contient trivialement les points de la forme $(0, \dots, 0, C_i, 0, \dots, 0)$. La région des débits accessibles **contient** donc la partie de l'orthant positif de \mathbb{R}^n délimitée par l'hyperplan $\sum_{i=1}^n \frac{R_i}{C_i} = 1$. La question posée précédemment est : peut-on faire mieux ?

L'inégalité PET [1] qui suggère le contraire, est une généralisation de la borne des singletons au codage à protection inégale. Introduisons la notion de fonction de priorité [1] : un code $[n, k]$ \mathcal{C} est compatible avec la **fonction de priorité** $(\beta_i)_{i \leq k}$ si lorsque deux messages m et m' diffèrent sur la position i , $(m[i] \neq m'[i])$ alors $d_H(\mathcal{C}(m), \mathcal{C}(m')) \geq n - \beta_i + 1$. Dans [1], il est montré que s'il existe un code compatible avec la fonction de priorité β , alors l'inégalité suivante est vérifiée : $\sum_{i=1}^k \frac{1}{\beta_i} \leq 1$ (Borne PET). Comme la borne des singletons peut être considérée comme une application aux codes de la formule de capacité du canal à effacements, on peut se demander si l'inégalité PET n'est pas une application aux codes à protection inégales d'une inégalité portant sur les canaux ABC à effacements. Modifions les notations lorsqu'il y a deux niveaux de priorité : si e est la longueur, $R_0 e$ (resp. $R_1 e$) est le nombre de bits envoyés à haute priorité, (resp. à basse priorité), et $C_i = \beta_i / e$, alors la borne PET devient une inégalité linéaire : $\sum_{i=0}^1 \frac{R_i}{C_i} \leq 1$.

En fait, cette inégalité linéaire définit les débits accessibles sur le canal ABC à effacements. Le canal ABC possède une solution calculable mais pas explicite [5, 4] :

Théorème 3.1 — *La région des débits accessibles pour le canal ABC (V, W) est formée par les couples positifs (R_0, R_1) tels qu'il existe quatre variables (U, X, Y, Z) vérifiant :*

1. Y et Z sont les images de X par les canaux V et W ;
2. Sachant X, Y et Z sont indépendants de U ;
3. $R_0 + R_1 \leq \min(I(Y \wedge X), I(Y \wedge X|U) + I(U \wedge Z))$;
4. $R_0 \leq I(U \wedge Z)$.

$I(X \wedge Y)$ désigne l'information mutuelle entre X et Y .

Comme la capacité d'un canal formé par un canal quelconque de capacité C mis en série avec un canal à effacements de capacité C^* est $C \times C^*$, on en déduit :

Proposition 3.2 — *Sur un canal de diffusion à effacements et messages dégradés, les débits accessibles sont donnés par :*

$$0 \leq R_i, \quad 1 \geq \sum_i \frac{R_i}{C_i}.$$

Démonstration : L'application du théorème ABC conduit aux deux inégalités suivantes :

$$R_0 + R_1 \leq C_0 I(U \wedge X) + C_1 (1 - I(U \wedge X))$$

$$R_0 \leq C_0 I(U \wedge X),$$

on obtient immédiatement l'inégalité PET. ■

1. Contrairement au canal ABC Gaussien [4], ici, la région dé-

crite par le principe de débit partagé **coïncide donc exactement** avec la région des débits accessibles.

2. La borne PET reste une caractérisation valable lorsque les canaux en jeu sont des canaux à effacements à mémoire ergodiques et stationnaires [3].

4 Limites du multiplexage par juxtaposition et entrelacement

Pour un canal point-à-point W , on appelle *exposant de pertes* un minorant de $-\frac{1}{n} \ln e(n, R, W)$. Pour un canal ABC (V, W) , l'exposant d'erreur est un minorant de $\frac{1}{n} \max[-\ln e_0(f, \phi, \psi, V, W), \ln e_1(f, \phi, \psi, V, W)]$, où (f, ϕ, ψ) est choisi parmi les codes ABC de débits (R_0, R_1) .

Notons $h(x, y) = x \ln x/y + (1-x) \ln(1-x)/(1-y)$ l'entropie relative d'une variable de Bernouilli de paramètre x relativement à une variable de Bernouilli de paramètre y . L'exposant de pertes du canal à effacement est $h(R, C)$ pour $R \geq R_{cr} \triangleq C/(e - (e-1)C)$ et $R_{cr} - R + h(R_{cr}, C)$ pour $R \leq R_{cr}$.

Le principe du débit partagé combiné avec un entrelacement est mis en œuvre dans [1, section IV]. Si l désigne la longueur d'un paquet $\#\mathcal{X} = 2^l$, et si les mots de codes émis comportent n paquets, l'information commune (reps. privée) est encodée avec un débit R'_0 (resp. R'_1) sur un alphabet de taille 2^{l_0} (resp. 2^{l-l_0}). Chaque paquet est constitué par un symbole d'information commune et un symbole d'information privée. R'_0 et R'_1 et l_0 vérifient $R_0 = \frac{l_0}{l} R'_0$ et $R_1 = \frac{l-l_0}{l} R'_1$. Pour minimiser l'ordre de grandeur exponentiel de la probabilité de pertes irrécupérables pour l'un des destinataires, il faut maximiser avec $\frac{R_0}{C_0} \leq \lambda \leq 1 - \frac{R_1}{C_1}$, $\min[h(\frac{R_0}{\lambda}, C_0), h(\frac{R_1}{1-\lambda}, C_1)]$ et utiliser pour les deux types d'informations un code qui réalise l'exposant d'erreur du canal à effacements (un code MDS pour les petites valeurs de n par exemple). On réalise le minimum en choisissant λ^* tel que $h(\frac{R_0}{\lambda^*}, C_0) = h(\frac{R_1}{1-\lambda^*}, C_1)$.

On peut maintenant se demander si cet ordre de grandeur exponentiel est optimal, c'est-à-dire si le codage séparé des deux sources ne limite pas significativement les possibilités de recouvrement. Les exposants de pertes pour le canal ABC sont caractérisés [8]. En appliquant les théorèmes (1,2,3) de [8], on peut déduire la proposition suivante :

Proposition 4.1 — Pour un canal ABC à effacements, le multiplexage par juxtaposition et entrelacement de codes qui réalisent l'exposant de pertes du canal à effacements est optimal.

Cette proposition justifie a posteriori le choix de la simplicité logicielle proposé dans [1], toutefois un bon multiplexage nécessite un réglage fin (qui n'est pas évoqué dans [1]) des codes compensateurs d'effacements qui servent de briques de base au codeur ABC.

5 Dégradation gracieuse

Les propositions (3.2) et (4.1) prennent comme critère de fidélité la probabilité d'erreur et supposent les messages

dégradés. Si on cherche à assurer la dégradation gracieuse pour une source de fonction de débit-distorsion $R(\Delta)$ sur un canal de diffusion (V, W) , on se donne deux niveaux de distorsion $\Delta_0, \Delta_1, \Delta_0 > \Delta_1$, et on se demande si Δ_0, Δ_1 sont des distorsions admissibles sur ce canal. Quand on a affaire à un canal simple (V) , le principe de séparation nous dit que Δ_1 est accessible lorsque $R(\Delta_1) < C_1$, lorsque deux canaux sont en jeu, comme les codes de débit-distorsion peuvent être corrélés de manière complexe, les distorsions accessibles ne sont pas caractérisées.

On peut cependant donner des conditions suffisantes lorsque la source admet un *schéma de raffinements successifs* [6]. Selon [6], le raffinement de Δ_0 à Δ_1 est réalisable s'il existe une suite de codeurs $f_n : \mathcal{X}^n \rightarrow \{1, \dots, 2^{nR(\Delta_0)}\}$ et $g_n : \mathcal{X}^n \rightarrow \{1, \dots, 2^{n(R(\Delta_0)-R(\Delta_1))}\}$ et des fonctions de reconstructions $\phi_n : \{1, \dots, 2^{nR(\Delta_0)}\} \rightarrow \mathcal{X}^n$ et $\psi_n : \{1, \dots, 2^{nR(\Delta_0)}\} \times \{1, \dots, 2^{n(R(\Delta_0)-R(\Delta_1))}\} \rightarrow \mathcal{X}^n$ telles que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} d(X^n, \phi_n(f_n(X^n))) \leq \Delta_0$$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} d(X^n, \psi_n(f_n(X^n), g_n(X^n))) \leq \Delta_1$$

Dans ce cas, Δ_0, Δ_1 sont accessibles sur un canal à effacements si $\frac{R(\Delta_0)}{C_0} + \frac{R(\Delta_1)-R(\Delta_0)}{C_1} \leq 1$. Le raffinement successif n'est pas toujours possible [6], et le théorème (3.1) ne permet pas en général de caractériser les distorsions accessibles [7]. Pour une classe de sources assez générale, la région des distorsions accessibles contient presque toute la région accessible en présence de raffinements successifs.

Le raffinement successif est possible pour les sources Gaussiennes avec distorsion quadratique, les sources exponentielles bilatères avec distorsion absolue [6]. Ces exemples de sources partagent la propriété de posséder une fonction de débit/distorsion en $\Theta(-\log D)$. Cette seule propriété garantit presque la possibilité du raffinement successif. L'argument combine la partie directe du théorème de débit/distorsion de Shannon et une technique de partitionnement utilisé en théorie des processus (cf. [10]).

Proposition 5.1 — Si la fonction de débit-distorsion $R(\Delta)$ est de la forme $R(\Delta) = K - v \log \Delta$ pour $\Delta_0 \leq \Delta \leq \Delta_{\max}$ et si la mesure de distorsion est une distance, alors pour $q, p, \Delta_0 \leq 4^{-q} \leq 4^{-p} \leq \Delta_{\max}$, il existe une famille arborescente de codes (\mathcal{C}_l) de distorsion $\frac{4}{3} \Delta_l$ de débit $R(\Delta_l)$, telle que le surcoût en longueur induit sur \mathcal{C}_l par la contrainte de raffinement successif est au plus $n.v \log \frac{4}{3} + l - p$.

Démonstration : Construction d'une famille des codes de débit/distorsion. On considère $q - p + 1$ niveaux de distorsion $\Delta_l = 4^{-l}$ pour $p \leq l \leq q$. Pour chaque $l, p \leq l \leq q$, on obtient avec une forte probabilité par échantillonnage aléatoire (partie directe du théorème de débit distorsion) un code C_l de longueur n , contenant $2^{n(R(\Delta_l)+\delta)}$ mots, de distorsion maximale inférieure à Δ_l .

Construction des codes arborescents. On construit maintenant une famille de codes \mathcal{C}_l de distorsion $4/3 \Delta_l$ telle que chaque mot de \mathcal{C}_{l+1} apparaisse comme une extension d'un mot de \mathcal{C}_l . On fixe d'abord $\mathcal{C}_q = C_q$. Pour $l = q - 1$ à p , pour chaque mot de \mathcal{C}_{l+1} , on choisit le mot le plus proche dans C_l . A chaque mot m de C_l est alors associée une liste L de mots de \mathcal{C}_{l+1} . Cette liste L est découpée en blocs de $\leq 2.4^{nv}$ éléments. A

chaque bloc est associé une copie m (plusieurs mots de code de \mathcal{C}_l admettent la même reconstruction). C'est cette association qui définit l'arborescence. Chaque niveau de l'arborescence définit un code. On a donc $\#\mathcal{C}_l \leq \frac{\#\mathcal{C}_{l+1}}{2^{4^{nv}}} + \#C_l$. La distorsion de \mathcal{C}_l est inférieure à $4/3 \Delta_l$.

Par induction on vérifie que pour tout l , $\#\mathcal{C}_l \leq 2\#C_l$. Si on souhaite assurer un raffinement successif, il suffit de représenter chaque mot en décrivant la branche qui mène au nœud étiqueté par ce mot. Pour un mot de \mathcal{C}_l , il suffit d'utiliser $\log(\#\mathcal{C}_l) + (l - p)$ bits. L'excédent de longueur, compte tenu de la distorsion garantie pour \mathcal{C}_l , est donc $n.v. \log \frac{4}{3} + l - p$.

■

Corollaire 5.2 — Si X est une source de fonction de débit/distorsion $R(\Delta) = K - v \log \Delta$, pour $\Delta_0 = 4^{-q} \leq \Delta \leq 4^{-p} = \Delta_{\max}$, alors sur un canal ABC à effacements, les distorsions $\Delta_l = 4^{-l}$ ($p \leq l \leq q$) sont accessibles si le récepteur l est relié à la source par un canal de capacité C_l et si l'inégalité suivante est vérifiée :

$$\frac{R(\Delta_p)}{C_p} + \log \frac{8}{3} \sum_{l=p+1}^q \frac{R(\Delta_l) - R(\Delta_{l-1})}{C_l} \leq 1$$

Remerciements. Nous remercions M. de Rougemont (LRI), M. Santha (LRI) et P. Tortelier (CNET) pour leurs conseils et leurs conversations stimulantes. S. Boucheron est soutenu par le contrat WG ESPRIT RAND II, M.R. Salamatian est soutenu par le contrat CNET-Université Paris XI 96 1-B 212.

Références

- [1] A. Albanese, J. Bloemer, J. Edmonds, and M. Luby. Priority Encoding Transmission. *IEEE Transactions on Information Theory*, 42(6) :1737–1744, november 1996.
- [2] J.C. Bolot and A. Vega-Garcia. The case for FEC-based error-control for packet audio in the INTERNET. *ACM Multimedia Systems*, 1996.
- [3] S. Boucheron and K. Salamatian. Codage à protections inégales sur canaux dépendants. Rapport rendu au titre du contrat CNET 96 1-B 212, Avril 1997.
- [4] Tom Cover and Joy Thomas. *Elements of Information theory*. John Wiley and Sons, 1991.
- [5] I. Csiszar and J. Korner. *Information Theory : Coding Theorems for Discrete Memoryless Channels*. Academic Press, 1981.
- [6] W.R. Equitz and T. Cover. Successive refinement of information. *IEEE Transactions on Information Theory*, 37(2) :269–275, march 1991.
- [7] T.S. Han and M. Costa. Broadcast channels with arbitrarily correlated sources. *IEEE Transactions on Information Theory*, 33(5) :641–650, september 1987.
- [8] J. Körner and A. Sgarro. Universally attainable error exponents for broadcast channels with degraded message sets. *IEEE Transactions on Information Theory*, 26(6) :670–679, 1980.
- [9] V. Paxson. *Measurements and Analysis of End-to-End Internet Traffic*. PhD thesis, UC Berkeley, February 1997.
- [10] Michel Talagrand. Sharper Bounds for Gaussian and Empirical Processes. *Annals of Probability*, January 1994.
- [11] A. Tanenbaum. *Computer Networks*. Prentice Hall, 1996.