

# ANALYSE SPECTRALE PAR DECOMPOSITION RECURSIVE EN SOUS-ESPACES PROPRES VIA LES COEFFICIENTS DE REFLEXION

*Frédéric Barbaresco*

THOMSON-CSF AIRSYS

Developpement Radar / Algorithmes & Nouveaux Concepts (RD/RAN)

7/9, rue des Mathurins 92221 Bagneux, FRANCE

Tel : 33.01.40.84.20.04 ; Fax : 33.01.40.84.36.31

e-mail : barbaresco@airsys.thomson.fr

## Résumé

Nous proposons un nouvel algorithme de calcul des éléments propres d'une matrice Toeplitz Hermitienne Complexe, récursivement sur l'ordre de cette matrice, en tenant compte de sa structure particulière, qui transparait à travers son rang de déplacement, comme cela est fait dans l'algorithme d'inversion de Trench. Il est possible d'accélérer l'algorithme en utilisant l'équation de Levinson et en faisant apparaître les coefficients de reflexion. Cet algorithme est rendu robuste en cas de peu d'échantillons de données analysés, en utilisant des coefficients de reflexion régularisés. Nous proposons également un nouveau test statistique robuste basé sur le rapport des log-vraisemblances pour vérifier l'égalité des plus petites valeurs propres, à partir également des coefficients de reflexion qu'il est aussi possible de régulariser pour des jeux de données courts.

## 1. PREAMBULE

Nous présentons dans cet article un nouvel algorithme rapide de calcul des valeurs et vecteurs propres d'une matrice Toeplitz hermitienne complexe, récursivement sur l'ordre de la matrice, à partir des coefficients de reflexion (coefficients de Parcor). Cet algorithme fait intervenir implicitement la notion de rang de déplacement étudiée par Kailath [2], Gueguen [3] et Comon [6]. En effet, l'algorithme est basé sur la structure particulière de la matrice Toeplitz inverse telle qu'elle apparait dans l'algorithme de Trench, qui est comme le rappellent Desbouvries et Gueguen [4][5], une version intégrée de la formule de Gohberg-Semencul [1]. L'algorithme de Trench induit une structure récursive sur l'ordre de la matrice de Toeplitz inverse, qui fait apparaître de façon évidente que l'algorithme de Levinson effectue la factorisation de Cholesky de cette matrice. Nous nous proposons d'utiliser cette structure particulière pour calculer, récursivement sur l'ordre, les valeurs et vecteurs propres de la matrice de Toeplitz, à partir des coefficients autoregressifs [9]. L'algorithme conduit à la recherche parallèle, à l'ordre  $n$ , de  $n$  racines d'une fonction  $F^{(n)}(\eta)$ , correspondant aux valeurs propres associées de la matrice considérée. On montre que  $F^{(n)}(\eta)$  est définie par morceaux à partir des valeurs propres à l'ordre précédent. Ce qui confirme le théorème de Wilkinson qui précise que les valeurs propres de deux matrices imbriquées sont entrelacées. On montre que la dérivée de  $F^{(n)}(\eta)$  est strictement supérieure à l'unité et donc qu'il n'y a qu'une seule racine par morceaux. Il apparaît également que l'inverse de la dérivée de cette fonction  $F^{(n)}(\eta)$ , où elle s'annule, correspond à la projection orthogonale du vecteur de prédiction linéaire sur le vecteur propre associé normalisé par rapport à sa première composante. Il est encore possible de réduire la complexité calculatoire en utilisant l'équation de Levinson, qui permet de calculer les produits scalaires des vecteurs autoregressifs avec les vecteurs propres intervenant dans l'algorithme précédent, récursivement à partir des coefficients de reflexion [10]. On aboutit alors à un algorithme qui calcule les valeurs et vecteurs propres à partir des coefficients de reflexion, ce qui permet l'utilisation de structure treillis aux multiples avantages pour l'analyse en sous-

## Abstract

A new recursive eigendecomposition algorithm of Complex Hermitian Toeplitz matrices is studied. Based on Trench's inversion of Toeplitz matrices from their autoregressive analysis, we have developed a fast recursive iterative algorithm that takes into account the rank-one modification of successive order Toeplitz matrices. To speed up the computational time and to increase numerical stability of this ill-conditioned eigendecomposition in case of very short data records analysis, we have extended this method by introducing reflection coefficients via Levinson equation, that could be easily regularized. Finally, we have developed a new regularized detector using log-likelihood ratio from reflection coefficients in place of eigenvalues previously used.

espaces propres d'une matrice Toeplitz. De plus, en cas de peu de données, la régularisation des coefficients de reflexion [9][10][13] permet de robustifier la décomposition en sous-espaces propres pour une utilisation en analyse spectrale : MUSIC, CAPON, ESPRIT, ... Des algorithmes ont été étudiés qui tiennent compte de la structure de la matrice Toeplitz directe [7][8] comme RISE. L'algorithme que nous proposons est plus robuste et rapide grâce à l'utilisation des coefficients de reflexion. Nous proposons également un nouveau pseudo-spectre à partir de la dérivée de  $F$ , ainsi qu'un nouveau test statistique, plus robuste, sur l'égalité des plus petites valeurs propres, tel que défini dans [11], à partir des coefficients de reflexion et non plus à partir des valeurs propres elles-mêmes.

## 2. DECOMPOSITION EN SOUS-ESPACES PROPRES VIA L'ANALYSE AUTOREGRESSIVE

### 2.1 Equation de Cholesky, Trench et Gohberg-Semencul

L'algorithme de Trench fait apparaître la structure récursive de la matrice de Toeplitz inverse :

$$R_n^{-1} = \Phi_n = \begin{bmatrix} 0 & 0_{l_{xn-1}}^+ \\ 0_{n-1 \times 1} & \Phi_{n-1} \end{bmatrix} + \alpha_{n-1} \cdot T_{n-1} \cdot T_{n-1}^+ \quad (1)$$

$$\text{avec } \alpha_n^{-1} = \left[ -|a_n^{(n)}|^2 \right] \alpha_{n-1}^{-1} \text{ et } T_{n-1} = \begin{bmatrix} 1 \\ A_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & a_1^{(n-1)} & \\ & & \dots & a_{n-1}^{(n-1)} \end{bmatrix}^T$$

Cette simple formulation met en évidence le lien entre l'algorithme de Levinson et la factorisation de Cholesky de la matrice de corrélation inverse :

$$R_n^{-1} = B_n \cdot \Gamma_n \cdot B_n^+ \quad (2) \quad \text{où l'on pose :}$$

$$B_n = \begin{bmatrix} Y_n^{(1)} & \dots & Y_n^{(n)} \end{bmatrix}, \quad Y_n^{(k)} = \begin{bmatrix} 0_{k-1} \\ 1 \\ A_{n-k} \end{bmatrix} \text{ et } \Gamma_n = \text{diag} \{ \alpha_{n-1}, \dots, \alpha_0 \}$$

On déduit également de l'algorithme de Trench que la structure de la matrice de Toeplitz inverse s'écrit :

$$R_n^{-1} = \Phi_n = \begin{bmatrix} \Phi_{n-1} + \alpha_{n-1} \cdot A_{n-1}^{(-)} \cdot A_{n-1}^{(-)+} & \alpha_{n-1} \cdot A_{n-1}^{(-)} \\ \alpha_{n-1} \cdot A_{n-1}^{(-)+} & \alpha_{n-1} \end{bmatrix} \quad (3)$$

avec  $A_{n-1}^{(-)} = J_{n-1} \cdot A_{n-1}^* = \begin{bmatrix} a_{n-1}^{(n-1)*} & \dots & a_1^{(n-1)*} \end{bmatrix}^T$  et  $J_{n-1}$  matrice antidiagonale. Cette structure sera utilisée dans la suite,

Cette propriété apparaît également si l'on étudie la notion de rang de déplacement pour laquelle on définit :

$$\text{soit : } Z_n = \begin{bmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \text{ le rang de déplacement est :}$$

$$\nabla R_n^{-1} = R_n^{-1} - Z_n \cdot R_n^{-1} \cdot Z_n^+ = \alpha_{n-1} \cdot [T_{n-1}^+ \cdot T_{n-1}^- - (Z_n \cdot T_{n-1}^-) (Z_n \cdot T_{n-1}^-)^+]$$

en posant :  $W_n = \sqrt{\alpha_n} \cdot T_n$ , il vient

$$\nabla R_n^{-1} = R_n^{-1} - Z_n \cdot R_n^{-1} \cdot Z_n^+ = W_{n-1} \cdot W_{n-1}^+ - (Z_n \cdot W_{n-1}^-) (Z_n \cdot W_{n-1}^-)^+$$

puis de proche en proche :

$$\nabla^k R_n^{-1} = (Z_n^k \cdot W_{n-1}^-) (Z_n^k \cdot W_{n-1}^-)^+ - (Z_n^{k+1} \cdot W_{n-1}^-) (Z_n^{k+1} \cdot W_{n-1}^-)^+ \quad (4)$$

En sommant l'ensemble des termes, on retrouve l'équation de Gohberg-Semencul qui est la version intégrée de l'algorithme de Trench :

$$R_n^{-1} = Q_n \cdot Q_n^+ - K_n \cdot K_n^+ \text{ avec } Q_n = [W_{n-1} \quad Z_n \cdot W_{n-1} \quad \dots \quad Z_n^{n-1} \cdot W_{n-1}]$$

$$\text{et } K_n = [Z_n \cdot W_{n-1}^- \quad Z_n^2 \cdot W_{n-1}^- \quad \dots \quad Z_n^n \cdot W_{n-1}^-]$$

## 2.2 Décomposition récursive en sous-espaces propres

On arrive au coeur de notre algorithme, qui consiste à utiliser cette structure pour diagonaliser la matrice Toeplitz inverse :

$$\begin{cases} \Phi_n = R_n^{-1} = \begin{bmatrix} \alpha_{n-1} & & \alpha_{n-1} \cdot A_{n-1}^+ \\ \alpha_{n-1} \cdot A_{n-1} & \Phi_{n-1} & \alpha_{n-1} \cdot A_{n-1} \cdot A_{n-1}^+ \end{bmatrix} \\ \Phi_n \cdot X_k^{(n)} = \eta_k^{(n)} \cdot X_k^{(n)} \text{ avec } X_k^{(n)} = \begin{bmatrix} X_{k,1}^{(n)} \\ \dots \\ X_{k,n}^{(n)} \end{bmatrix} \end{cases}$$

Les valeurs et vecteurs propres étant connus à l'ordre précédent, on note :

$$\begin{cases} U_{n-1} = [X_1^{(n-1)} \quad \dots \quad X_{n-1}^{(n-1)}] \text{ avec } U_{n-1}^+ \cdot U_{n-1} = U_{n-1} \cdot U_{n-1}^+ = I_{n-1} \\ U_{n-1}^+ \cdot \Phi_{n-1} \cdot U_{n-1} = \Lambda_{n-1} = \text{diag}\{\dots, \eta_k^{(n-1)}, \dots\} \end{cases}$$

Le calcul des valeurs et vecteurs propres se ramène aux deux relations suivantes, après développement [10] :

$$F^{(n)}(\eta_k^{(n)}) = \eta_k^{(n)} - \alpha_{n-1} + \alpha_{n-1} \cdot \eta_k^{(n)} \cdot \sum_{i=1}^{n-1} \frac{|A_{n-1}^+ \cdot X_i^{(n-1)}|^2}{(\eta_i^{(n-1)} - \eta_k^{(n)})} = 0 \quad (5)$$

$$X_k^{(n)} = \begin{bmatrix} X_{k,1}^{(n)} \\ -\eta_k^{(n)} \cdot X_{k,1}^{(n)} \cdot U_{n-1} \cdot (\Lambda_{n-1} - \eta_k^{(n)} \cdot I_{n-1})^{-1} \cdot U_{n-1}^+ \cdot A_{n-1} \end{bmatrix} \quad (6)$$

Avec comme résultat intermédiaire :  $\alpha_{n-1} \cdot T_{n-1}^+ \cdot X_k^{(n)} = \eta_k^{(n)} \cdot X_{k,1}^{(n)}$  (6')

Les valeurs propres sont donc données par les racines de la fonction  $F^{(n)}(\eta)$ , définie par morceaux en fonction des valeurs propres à l'ordre précédent. On vérifie le théorème de Wilkinson qui prévoyait l'entrelacement des valeurs propres aux ordres successifs :  $0 < \eta_n^{(n)} < \eta_{n-1}^{(n-1)} < \eta_{n-1}^{(n)} < \dots < \eta_2^{(n)} < \eta_1^{(n-1)} < \eta_1^{(n)} < \text{Tr}[\Phi_n]$

$$\text{avec } (1) \Rightarrow \text{Tr}[\Phi_n] = \text{Tr}[\Phi_{n-1}] + \alpha_{n-1} \cdot T_{n-1}^+ \cdot T_{n-1}$$

Il n'existe qu'une racine par morceau  $\eta_{k+1}^{(n-1)}, \eta_k^{(n-1)}$ , puisque

$$\frac{\partial F^{(n)}(\eta)}{\partial \eta} = 1 + \alpha_{n-1} \cdot \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\eta_k^{(n-1)} \cdot |A_{n-1}^+ \cdot X_{k,1}^{(n-1)}|^2}{(\eta_k^{(n-1)} - \eta)^2} > 1 \quad (7)$$

En utilisant la définition de la valeur propre, on montre que la dérivée de  $F(\eta)$  vérifie la relation :

$$\eta_k^{(n)} = X_k^{(n)+} \cdot \Phi_n \cdot X_k^{(n)} \Rightarrow \frac{\partial F^{(n)}(\eta_k^{(n)})}{\partial \eta} = \frac{\alpha_{n-1}}{\eta_k^{(n)} \cdot |X_{k,1}^{(n)}|^2} \quad (8)$$

De façon symétrique, on montre les relations déduites de la seconde formulation déduite de l'algorithme de Trench de la matrice Toeplitz inverse :

$$\text{Si on pose } X_k^{(n)} = [\bar{X}_k^{(n)} \quad X_{k,n}^{(n)}]^T$$

$$\begin{cases} G^{(n)}(\eta_k^{(n)}) = \eta_k^{(n)} - \alpha_{n-1} + \alpha_{n-1} \cdot \eta_k^{(n)} \cdot \sum_{i=1}^{n-1} \frac{|A_{n-1}^- \cdot X_i^{(n-1)}|^2}{(\eta_i^{(n-1)} - \eta_k^{(n)})} = 0 & (9) \\ X_k^{(n)} = \begin{bmatrix} -\eta_k^{(n)} \cdot X_{k,n}^{(n)} \cdot U_{n-1} \cdot (A_{n-1} - \eta_k^{(n)} \cdot I_{n-1})^{-1} \cdot U_{n-1}^+ \cdot A_{n-1}^- \\ X_{k,n}^{(n)} \end{bmatrix} & (10) \end{cases}$$

$$\alpha_{n-1} \cdot T_{n-1}^{(-)+} \cdot X_k^{(n)} = \eta_k^{(n)} \cdot X_{k,n}^{(n)} \quad (10') \quad \text{avec} \quad \frac{\partial G^{(n)}(\eta_k^{(n)})}{\partial \eta} = \frac{\alpha_{n-1}}{\eta_k^{(n)} \cdot |X_{k,n}^{(n)}|^2}$$

(11)

On voit que la complexité peut être encore abaissée si les produits scalaires dans  $F^{(n)}(\eta)$  et  $G^{(n)}(\eta)$  sont calculés récursivement avec l'aide des coefficients de reflexion, ce qui est possible en utilisant l'équation de Levinson à cette étape.

## 3. INTERPRETATION GEOMETRIQUE

### 3.1 Interprétation en terme de projection

Par identification de la matrice de Toeplitz inverse à deux expressions différentes :

$$\Phi_n = \begin{bmatrix} \alpha_{n-1} & & \alpha_{n-1} \cdot A_{n-1}^+ \\ \alpha_{n-1} \cdot A_{n-1} & \Phi_{n-1} & \alpha_{n-1} \cdot A_{n-1} \cdot A_{n-1}^+ \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^n \eta_k^{(n)} \cdot X_k^{(n)} \cdot X_k^{(n)+} \quad (12)$$

Il est possible d'en extraire les deux relations suivantes :

$$\alpha_{n-1} = \sum_{k=1}^n \eta_k^{(n)} \cdot |X_{k,1}^{(n)}|^2 \quad \text{et} \quad T_{n-1} = \sum_{k=1}^n \frac{\eta_k^{(n)} \cdot X_{k,1}^{(n)*}}{\alpha_{n-1}} \cdot X_k^{(n)}$$

En utilisant la dérivée de  $F^{(n)}$ , on se ramène immédiatement à :

$$\sum_{k=1}^n \left( \frac{\partial F^{(n)}(\eta_k^{(n)})}{\partial \eta} \right)^{-1} = 1 \quad \text{et} \quad T_{n-1} = \sum_{k=1}^n \left( \frac{\partial F^{(n)}(\eta_k^{(n)})}{\partial \eta} \right)^{-1} \cdot \frac{X_k^{(n)}}{X_{k,1}^{(n)}} \quad (13)$$

ou l'inverse de la dérivée de  $F^{(n)}(\eta)$ , à la valeur au  $F^{(n)}(\eta)$  s'annule (la valeur propre), apparaît comme le projeté du vecteur de prédiction linéaire  $T$  sur le vecteur propre associé, à la valeur propre considérée, normalisé par sa première composante. De façon symétrique, on montre la relation pour  $G$  avec normalisation par rapport à la dernière composante :

$$\sum_{k=1}^n \left( \frac{\partial G^{(n)}(\eta_k^{(n)})}{\partial \eta} \right)^{-1} = 1 \quad \text{et} \quad T_{n-1}^{(-)} = \sum_{k=1}^n \left( \frac{\partial G^{(n)}(\eta_k^{(n)})}{\partial \eta} \right)^{-1} \cdot \frac{X_k^{(n)}}{X_{k,n}^{(n)}} \quad (14)$$

### 3.2 Résultats complémentaires

En utilisant ce dernier résultat et l'expression, précédemment calculée du vecteur propre (6), on trouve un nouveau rapport :

$$\sum_{k=1}^n \left( \frac{\partial F^{(n)}(\eta_k^{(n)})}{\partial \eta} \right)^{-1} \cdot \frac{1}{(\eta_i^{(n-1)} - \eta_k^{(n)})} = 0 \quad (15)$$

qui s'écrit de façon symétrique en utilisant (10) :

$$\sum_{k=1}^n \left( \frac{\partial G^{(n)}(\eta_k^{(n)})}{\partial \eta} \right)^{-1} \cdot \frac{1}{(\eta_i^{(n-1)} - \eta_k^{(n)})} = 0 \quad (16)$$

### 3.3 Nouvelle expression du coefficient de reflexion

Comme précédemment, par identification à deux expressions de la matrice de Toeplitz inverse, on trouve :

$$\mu_{n-1} = a_{n-1} = \frac{\sum_{k=1}^n \eta_k^{(n)} \cdot X_{k,n}^{(n)} \cdot X_{k,1}^{(n)*}}{\alpha_{n-1}} \quad \text{et} \quad \alpha_{n-1} = \sum_{k=1}^n \eta_k^{(n)} \cdot |X_{k,1}^{(n)}|^2 \quad \text{soit}$$

$$\mu_{n-1} = \frac{2 \cdot \sum_{k=1}^n \eta_k^{(n)} \cdot X_{k,n}^{(n)} \cdot X_{k,1}^{(n)*}}{\sum_{k=1}^n \eta_k^{(n)} \cdot [X_{k,n}^{(n)}]^2 + |X_{k,1}^{(n)}|^2} \approx_{n \gg M} \alpha_n \cdot \text{COV}[X_{k,n}^{(n)}, X_{k,1}^{(n)}] \quad (17)$$

Le coefficient de reflexion apparaît donc comme la covariance (pondérée) entre la première et la dernière ligne de la matrice constituée des vecteurs propres :  $U_{n-1} = [X_1^{(n)} \quad \dots \quad X_n^{(n)}]$

## 4. DECOMPOSITION RECURSIVE EN SOUS-ESPACES PROPRES VIA LES COEFFICIENTS DE REFLEXION

### 4.1 Notations

Afin de mettre en place le nouvel algorithme introduisant l'équation de Levinson, on utilise les notations suivantes :

$$\xi_k^{(n)} = A_n^+ \cdot \begin{pmatrix} X_k^{(n)} \\ X_{k,n}^{(n)} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \gamma_k^{(n)} = A_n^{(-)+} \cdot \begin{pmatrix} X_k^{(n)} \\ X_{k,1}^{(n)} \end{pmatrix} \quad (18)$$

$$f_k^{(n)} = \left[ \frac{\partial F^{(n)}(\eta_k^{(n)})}{\partial \eta} \right]^{-1} \quad \text{et} \quad g_k^{(n)} = \left[ \frac{\partial G^{(n)}(\eta_k^{(n)})}{\partial \eta} \right]^{-1} \quad (19)$$

$$\phi_k^{(n)} = \phi_k^{(n)*} = X_{k,n}^{(n)} \cdot X_{k,1}^{(n)*} \\ \sigma_i^{(n-1)}(\eta_k^{(n)}) = \frac{f_i^{(n-1)} \cdot \gamma_i^{(n-1)*}}{(\eta_i^{(n-1)} - \eta_k^{(n)})} \quad \text{et} \quad \rho_i^{(n-1)}(\eta_k^{(n)}) = \frac{g_i^{(n-1)} \cdot \zeta_i^{(n-1)*}}{(\eta_i^{(n-1)} - \eta_k^{(n)})} \quad (20)$$

#### 4.2 Calcul des valeurs et vecteurs propres

Avec ces nouvelles notations, le calcul des valeurs propres devient, d'après (5) et (9) :

$$\begin{cases} F^{(n)}(\eta_k^{(n)}) = \eta_k^{(n)} - \alpha_{n-1} + (1 - |\mu_{n-1}|^2) \alpha_{n-1}^2 \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\rho_i^{(n-1)} \cdot \zeta_i^{(n-1)}}{\eta_i^{(n-1)}} = 0 \\ G^{(n)}(\eta_k^{(n)}) = \eta_k^{(n)} - \alpha_{n-1} + (1 - |\mu_{n-1}|^2) \alpha_{n-1}^2 \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\sigma_i^{(n-1)} \cdot \gamma_i^{(n-1)}}{\eta_i^{(n-1)}} = 0 \end{cases} \quad (21)$$

pour lesquels, d'après (7), on a :

$$\begin{cases} f_k^{(n)} = \left[ 1 + (1 - |\mu_{n-1}|^2) \alpha_{n-1}^2 \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\rho_i^{(n-1)} \cdot \zeta_i^{(n-1)}}{(\eta_i^{(n-1)} - \eta_k^{(n)})} \right]^{-1} \\ g_k^{(n)} = \left[ 1 + (1 - |\mu_{n-1}|^2) \alpha_{n-1}^2 \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\sigma_i^{(n-1)} \cdot \gamma_i^{(n-1)}}{(\eta_i^{(n-1)} - \eta_k^{(n)})} \right]^{-1} \end{cases} \quad (22)$$

Les vecteurs propres (6) et (10) s'écrivent maintenant :

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} X_k^{(n)} \\ X_{k,1}^{(n)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -\eta_k^{(n)} \cdot (1 - |\mu_{n-1}|^2) \alpha_{n-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_{1,n-1}^{(n-1)} \\ \vdots \\ X_{n-1,n-1}^{(n-1)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \rho_{n-1}^{(n-1)} \\ \vdots \\ \rho_1^{(n-1)} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} X_k^{(n)} \\ X_{k,n}^{(n)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -\eta_k^{(n)} \cdot (1 - |\mu_{n-1}|^2) \alpha_{n-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_{1,1}^{(n-1)} \\ \vdots \\ X_{n-1,1}^{(n-1)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_{n-1}^{(n-1)} \\ \vdots \\ \sigma_1^{(n-1)} \end{bmatrix} \end{cases} \quad (23)$$

#### 4.3 Utilisation de l'équation de Levinson

L'équation de Levinson nous permet d'écrire :

$$T_{n-1} = \begin{bmatrix} 1 \\ A_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ A_{n-2} \\ 0 \end{bmatrix} + \mu_{n-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ A_{n-2}^{(-)} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{n-2} \\ 0 \end{bmatrix} + \mu_{n-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ T_{n-2}^{(-)} \end{bmatrix}$$

ce qui fait apparaître, en utilisant (6'), de nouvelles relations récursives, sur les produits scalaires, suivantes :

$$T_{n-1}^+ \cdot X_k^{(n)} = T_{n-2}^+ \cdot \bar{X}_k^{(n)} + \mu_{n-1}^* \cdot T_{n-2}^{(-)+} \cdot X_k^{(n)} = \frac{\eta_k^{(n)} \cdot X_{k,1}^{(n)}}{\alpha_{n-1}} \\ T_{n-1}^{(-)+} \cdot X_k^{(n)} = T_{n-2}^{(-)+} \cdot X_k^{(n)} + \mu_{n-1} \cdot T_{n-2}^+ \cdot \bar{X}_k^{(n)} = \frac{\eta_k^{(n)} \cdot X_{k,n}^{(n)}}{\alpha_{n-1}}$$

D'où avec les nouvelles notations :

$$\begin{cases} \varphi_k^{(n)} = -\frac{\alpha_{n-1} \cdot g_k^{(n-1)}}{\eta_k^{(n)}} \cdot \left[ 1 + \mu_{n-1}^* \cdot \alpha_{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\rho_i^{(n-1)}}{\eta_i^{(n-1)}} \right] \\ \phi_k^{(n)} = -\frac{\alpha_{n-1} \cdot f_k^{(n-1)}}{\eta_k^{(n)}} \cdot \left[ 1 + \mu_{n-1} \cdot \alpha_{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\sigma_i^{(n-1)}}{\eta_i^{(n-1)}} \right] \end{cases} \quad (24)$$

De même, l'équation de Levinson permet également d'écrire :

$$A_n = \begin{bmatrix} A_{n-1} \\ 0 \end{bmatrix} + \mu_n \cdot \begin{bmatrix} A_{n-1}^{(-)} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{n-1} \\ 0 \end{bmatrix} + \mu_n \cdot T_{n-1}^{(-)}$$

$$A_n^+ \cdot X_k^{(n)} = A_{n-1}^+ \cdot \bar{X}_k^{(n)} + \mu_n^* \cdot T_{n-1}^{(-)+} \cdot X_k^{(n)}$$

$$A_n^{(-)+} \cdot X_k^{(n)} = A_{n-1}^{(-)+} \cdot X_k^{(n)} + \mu_n \cdot T_{n-1}^+ \cdot \bar{X}_k^{(n)}$$

D'où le calcul récursif des modules des produits scalaires que l'on a noté :

$$\begin{cases} \xi_k^{(n)} = \frac{\eta_k^{(n)}}{\alpha_{n-1}} \cdot \left[ \mu_n^* - \alpha_{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\phi_i^{(n-1)} \cdot \zeta_i^{(n-1)*}}{(\eta_i^{(n-1)} - \eta_k^{(n)})} \right] \\ \gamma_k^{(n)} = \frac{\eta_k^{(n)}}{\alpha_{n-1}} \cdot \left[ \mu_n - \alpha_{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\rho_i^{(n-1)} \cdot \gamma_i^{(n-1)*}}{(\eta_i^{(n-1)} - \eta_k^{(n)})} \right] \end{cases} \quad (25)$$

Il apparaît donc que l'on peut maintenant calculer les valeurs et vecteurs propres récursivement à partir des coefficients de réflexion :

$$\mu_{n-1} = a_{n-1}^{(n-1)} = \frac{\sum_{k=1}^n \eta_k^{(n)} \cdot X_{k,n}^{(n)} \cdot X_{k,1}^{(n)*}}{\alpha_{n-1}} = \frac{\sum_{k=1}^n \eta_k^{(n)} \cdot \phi_k^{(n)}}{\alpha_{n-1}} \quad (26)$$

Ceux-ci pouvant être régularisés en cas de peu d'échantillons de données, seront calculés par [9][10][13].

### 5. DEFINITION D'UN NOUVEAU SPECTRE

Un des résultats intermédiaires de la décomposition récursive en sous espaces propres de la matrice de corrélation inverse précédente donne :

$$\alpha_{n-1} \cdot T_{n-1}^+ \cdot X_k^{(n)} = \eta_k^{(n)} \cdot X_{k,1}^{(n)}$$

En utilisant, l'expression (8) de la dérivée de F, on obtient :

$$\alpha_{n-1} |T_{n-1}^+ \cdot X_k^{(n)}|^2 = \frac{\eta_k^{(n)} |X_{k,1}^{(n)}|^2}{\alpha_{n-1}} = \left( \frac{\partial F^{(n)}(\eta_k^{(n)})}{\partial \eta} \right)^{-1} \cdot \eta_k^{(n)}$$

Or, on sait que  $T_{n-1} = [I \quad A_{n-1}]^T$  est orthogonal à l'espace signal :

$$\begin{cases} \text{si } X_k^{(n)} \in E_{\text{signal}} \Rightarrow f_k^{(n)} \cdot \eta_k^{(n)} \text{ faible} \\ \text{si } X_k^{(n)} \in E_{\text{bruit}} \Rightarrow f_k^{(n)} \cdot \eta_k^{(n)} \text{ élevé} \end{cases} \quad \text{avec} \quad f_k^{(n)} = \left( \frac{\partial F^{(n)}(\eta_k^{(n)})}{\partial \eta} \right)^{-1}$$

On définit alors un nouveau pseudo-spectre :

$$S^{(n)}(f) = \frac{1}{\sum_{k=1}^n f_k^{(n)} \cdot \eta_k^{(n)} \cdot |X_k^{(n)+} \cdot e^{(n)}(f)|^2} \quad (27)$$

$$\text{avec} \quad f_k^{(n)} = \left( \frac{\partial F^{(n)}(\eta_k^{(n)})}{\partial \eta} \right)^{-1} \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^n f_k^{(n)} = 1$$

Ce pseudo-spectre est une extension du spectre de CAPON :

$$S^{(n)}(f) = \frac{1}{e^{(n)}(f)^+ \cdot H_n \cdot e^{(n)}(f)}$$

La matrice  $H_n = U_n \cdot \Theta_n \cdot U_n^+$  remplace la matrice  $R_n^{-1} = U_n \cdot \Lambda_n \cdot U_n^+$  avec  $\Theta_n = \text{diag} \{ f_1^{(n)} \cdot \eta_1^{(n)} \quad \dots \quad f_n^{(n)} \cdot \eta_n^{(n)} \}$  et  $\Lambda_n = \text{diag} \{ \eta_1^{(n)} \quad \dots \quad \eta_n^{(n)} \}$

### 6. NOUVEAU TEST STATISTIQUE

On sait d'après [11] qu'il est possible de construire un test statistique pour trouver la dimension de l'espace signal à partir du rapport des vraisemblances. La vraisemblance étant donné par :

$$L(p) = (\pi \cdot e)^{-KN} \cdot [F(p)]^N$$

$$\text{avec} \quad F(p) = |R| = (\hat{\sigma}^2)^{K-p} \cdot \prod_{k=1}^p \hat{\lambda}_k = \left( \frac{1}{K-p} \sum_{i=p+1}^K \hat{\lambda}_i \right)^{K-p} \cdot \prod_{k=1}^p \hat{\lambda}_k$$

Les K-p plus petites valeurs propres approximant la variance du bruit pour un espace signal de dimension K. On définit alors le rapport de vraisemblance entre l'hypothèse d'avoir plus de p fréquences et l'hypothèse d'avoir au maximum p fréquences :

$$\frac{\text{Max}_{p < q \leq K} L(q)}{\text{Max}_{q \leq p} L(q)} = \frac{L(K-1)}{L(p)} = \frac{\left[ \frac{\sum_{i=p+1}^K \hat{\lambda}_i}{K-p} \right]^{K-p}}{\prod_{i=p+1}^K \hat{\lambda}_i}^N$$

Ce test est appelé test sur l'égalité des (K-p) plus petites valeurs propres. Cependant ce test est dégradé par la grande variance d'estimation des valeurs propres dans le cas de peu d'échantillons de données. Aussi, nous proposons un test identique mais basé sur les coefficients de réflexion, dont il est possible de diminuer la variance en cas de peu d'échantillons de données. En effet, on rend alors consistant le test en régularisant les coefficients de réflexion à partir de l'algorithme de Burg régularisé [9][10][13].

Nous allons essayer de retrouver le même critère, mais cette fois-ci calculé à partir des coefficients de reflexion.

En utilisant notre identification de la matrice inverse d'autocorrélation (1), on montre que :

$$|\Phi_n| = \alpha_{n-1} |\Phi_{n-1}| \quad \text{or} \quad |\mathbf{R}_n| = \prod_{i=1}^n \lambda_i^n = |\Phi_n|^{-1}$$

avec  $\alpha_i^{-1} = P^{(i)} = (1 - |\mu_i|^2) \alpha_{i-1}^{-1}$

On a alors  $\frac{|\Phi_n|}{|\Phi_{n-1}|} = \alpha_{n-1} = \frac{|\mathbf{R}_{n-1}|}{|\mathbf{R}_n|}$

On montre donc que le déterminant s'exprime comme suit :

$$|\mathbf{R}_n| = \prod_{i=1}^{n-1} \alpha_i^{-1}$$

Or dans le cas de p fréquences, les erreurs d'estimation du modèle au delà de l'ordre p sont toutes égales (en particulier dans le cas régularisé) à la puissance d'erreur du bruit :

$$|\mathbf{R}_n| = (\hat{\sigma}^2)^{n-p} \cdot \prod_{i=0}^{p-1} \alpha_i^{-1} = \left( \frac{1}{n-p} \sum_{i=p}^{n-1} \alpha_i^{-1} \right)^{n-p} \cdot \prod_{i=0}^{p-1} \alpha_i^{-1}$$

Comme dans le cas précédent, le test de vraisemblance se ramène à :

$$\Lambda(p) = \frac{L(n-1)}{L(p)} = \left[ \frac{\left[ \frac{1}{n-p} \sum_{i=p}^{n-1} \alpha_i^{-1} \right]^{n-p}}{\prod_{i=p}^{n-1} \alpha_i^{-1}} \right]^N$$

Or, on a étant donnée la récurrence sur les  $\alpha$  :

$$\sum_{i=p+1}^n \alpha_i^{-1} = \left[ \prod_{k=1}^p (1 - |\mu_k|^2) \right] \cdot P_0 \cdot \left[ \sum_{i=p+1}^{n-1} \prod_{k=p+1}^i (1 - |\mu_k|^2) \right] \quad \text{et}$$

$$\prod_{i=p}^{n-1} \alpha_i^{-1} = \left[ \prod_{k=p+1}^{n-1} (1 - |\mu_k|^2) \right]^{n-k} \cdot \left[ \prod_{k=1}^p (1 - |\mu_k|^2) \right]^{n-p} \cdot P_0^{n-p}$$

D'où le nouveau test statistique après simplification :

$$\Lambda(p) = \left[ \frac{\left[ \frac{1}{n-p} \cdot \sum_{i=p+1}^{n-1} \prod_{k=p+1}^i (1 - |\mu_k|^2) \right]^{n-p}}{\prod_{k=p+1}^{n-1} (1 - |\mu_k|^2)^{n-k}} \right]^N$$

Il est à remarquer que WATERNAUX [12] a montré que  $\text{Log}(\Lambda(p))$  suit une loi du Khi-deux à  $(N+2)(N+1)/2$  degrés de libertés.

**7. RESULTATS**

On illustre, ici, l'algorithme de calcul récursif sur l'ordre des sous-espaces propres, en montrant l'allure de la courbe  $F^{(n)}(\eta)$  pour  $n=4$ , sur données réelles d'enregistrement de fouillis radar (classiquement modélisable par un AR d'ordre 3). L'avantage de cet algorithme, mise à part sa rapidité, est d'être régularisable implicitement par l'algorithme de Burg régularisé [9][10][13]. Ce qui le rend résistant en cas de peu d'échantillons analysés.

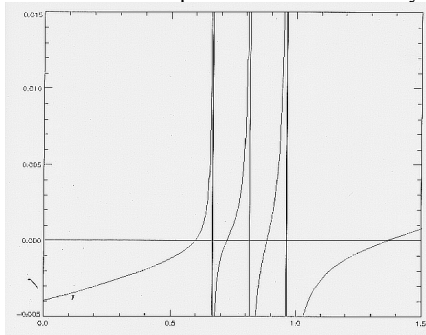
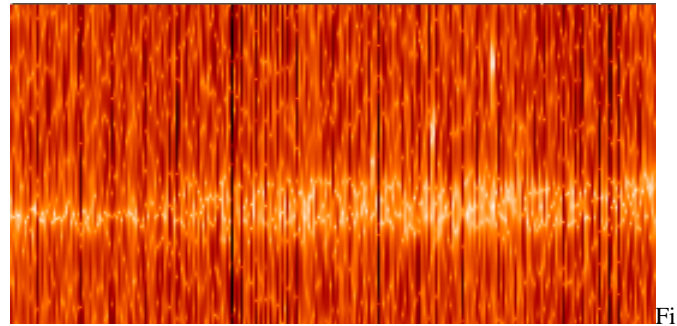


Fig. 1 :  $F^{(4)}(\eta)$  pour 8 échantillons complexes

Nous illustrons, à partir de données réelles, l'effet de la régularisation du coefficient de reflexion sur le calcul récursif des valeurs et vecteurs propres. Pour cela, on visualise le spectre de CAPON, sans et avec régularisation [13], pour un ordre maximum.

$$S_{\text{Capon}}^{(n)}(f) = \frac{1}{e^{(n)}(f)^+ \cdot \Phi_n \cdot e^{(n)}(f)} = \frac{1}{\sum_{k=1}^n \eta_k^{(n)} |X_k^{(n)+} \cdot e^{(n)}(f)|^2}$$



g. 2 : Spectre de CAPON distance/doppler non régularisé

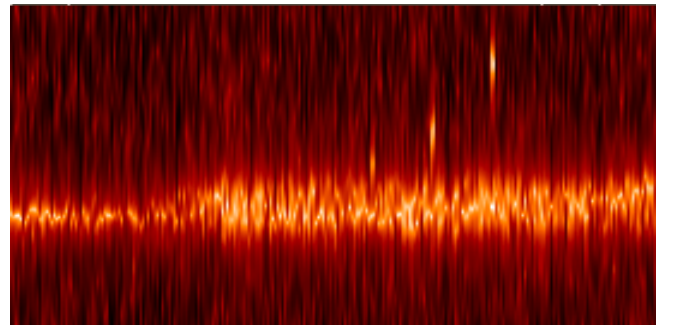


Fig. 3 : Spectre de CAPON distance/doppler régularisé

**8. REFERENCES**

[1] GOHBERG, 'On the Inversion of finite Toeplitz Matrices and their Continuous analogs', Mat. Issled. 7(2), p.201-233, 72  
 [2] KAILATH T. & all, 'Displacement Rank of Matrices and Linear Equations', Journal of Math. Analysis and Appl., n°68, pp.395-407, 1979  
 [3] GUEGUEN C., 'An introduction to Displacement Ranks', Signal Processing, vol. XLV, Lacoume Durrani Stora editors, Elsevier, pp.705-780, 1987  
 [4] DESBOUVRIES F., 'Rangs de déplacement et algorithmes rapides', PhD thesis, Télécom Paris, January 1991  
 [5] DESBOUVRIES F. & GUEGUEN C., 'An Extended Displacement Operator for Weakly Structured Covariance Matrices', Proc. ICASSP, vol.5, pp.21-24, Frisco, Mars 1992  
 [6] COMON Pierre, 'Displacement Rank of Pseudo-Inverses', Proc. ICASSP, vol. 5, pp.49-52, Frisco, Mars 1992  
 [7] COMON Pierre, GOLUB Gene H., 'Tracking a Few Extreme Singular Values and Vectors in Signal Processing', Proc. IEEE, vol.78, n°8, August 1990  
 [8] WILKES D.M., CADZOW A., 'Recursive Eigenspace Decomposition, RISE, and Applications', Digital Signal Processing, vol.4, n°2, pp.79-94, April 1994  
 [9] BARBARESCO F., 'Super Resolution Spectrum Analysis Regularization : Burg, Capon and Ago-antagonistic Algorithms', EUSIPCO-96, pp.2005-8, Trieste, Sept.1996  
 [10] BARBARESCO F., 'Recursive Eigendecomposition via Autoregressive Analysis and Ago-antagonistic Regularization', Proc. ICASSP-97, Munich, Avril 1997  
 [11] BIENVENU G. & KOPP L., 'Optimality of High Resolution Array Processing Using the Eigensystem Approach', IEEE Trans. ASSP, vol.31, n°5, pp.1235-1248, Oct. 1983  
 [12] WATERNAUX C., 'Principal Components in the Nonnormal Case : The Test of Equality of Q roots', Journal of Multivariate Analysis, vol. 14, pp. 323-335, 1984  
 [13] BARBARESCO F., 'Algorithme de Burg Régularisé FSDDS (Fonctionnelle Stabilisatrice de Douceur Spectrale) Comparaison avec l'Algorithme de BURG MFE (Minimum Free Energy)', XVème colloque GRETSI, tome1, pp.29-32, Juan-Les-Pins, Sept. 1995