

# Marge de stabilité des systèmes linéaires : une extension du critère de Routh-Hurwitz

par **B.Taconet, S. Kebairi, A. Djematene, P. Mercy**

Laboratoire d'Informatique du Havre  
Place R. Schuman 76610 LE HAVRE  
e-mail : taconet@iut.univ-lehavre.fr

## RÉSUMÉ

Nous exposons une condition nécessaire et suffisante, portant sur les coefficients d'un polynôme, qui permet de localiser les racines de celui-ci relativement à un secteur angulaire du plan complexe, ce qui généralise le champ de validité du théorème de Routh-Hürwitz qui est limité au cas du demi-plan gauche. Ce résultat théorique permet d'étendre le critère de stabilité absolue de Routh-Hürwitz, utilisé notamment pour le réglage du gain des systèmes asservis linéaires, au cas où l'on souhaite préserver une marge de stabilité réglable, les pôles de la fonction de transfert étant alors situés à l'intérieur du secteur angulaire qui définit la zone de stabilité

## 1 Introduction

Le critère de stabilité de Routh-Hürwitz, établi il y a un siècle environ, fait partie des classiques de l'enseignement des systèmes asservis. Il est utilisé dans le cadre des systèmes linéaires asservis, en général pour montrer qu'il existe une valeur limite du gain d'un amplificateur (ou atténuateur) réglable. Au-delà de cette limite, le système asservi devient instable. L'inconvénient de ce critère est de fournir une borne supérieure, sans aucune précision sur la marge de stabilité obtenue lorsque l'on prend une valeur inférieure. Depuis, bien d'autres diagrammes de représentation et des critères de stabilité s'y rattachant ont été établis : diagramme de Bode, diagramme de Black, lieu de Nyquist, lieu d'Evans, qui permettent d'évaluer graphiquement le degré de stabilité. Assez paradoxalement, il n'existe pas de tel critère de marge de stabilité pour la méthode algébrique de Routh-Hürwitz, pourtant plus ancienne. C'est l'objet du présent article, qui expose comment choisir le gain pour localiser tous les pôles à l'intérieur d'un secteur angulaire du plan complexe.

## 2 Une base normée non orthogonale

Un secteur angulaire du plan, symétrique par rapport à l'axe horizontal, inclus dans le demi-plan gauche (celui des parties réelles négatives) peut être caractérisé par l'angle formé par la demi-droite supérieure avec l'axe horizontal :  $\phi = (\mathbf{1}, \mathbf{m})$  (figure 1).

## ABSTRACT

We present a necessary and sufficient condition, involving the coefficients of a polynomial, which allows to locate the roots inside an angular sector of the complex plane, which extends the field of validity of Routh-Hürwitz theorem, up to now reserved to the case of the left half plane. This result permits to extend the Routh-Hürwitz criterium ruling absolute stability, used for the adjustment of linear systems gain, when it is better to keep a margin of stability. The transfert function poles must then be located inside an angular sector of the complex plane, the opening angle characterising the degree of seached stability.

Les vecteurs unitaires  $\mathbf{1}$  et  $\mathbf{m}$  forment une base normée. Dans la suite, nous aurons besoin d'exprimer les puissances de  $\mathbf{m}$  dans cette base. Nous noterons  $\mathbf{1}$  et  $\mathbf{m}$  ( $\mathbf{m} = \exp(i\phi)$ ) les nombres complexes affixes de ces vecteurs

On montre aisément que :  $\mathbf{m}^2 = 2.m.\cos\phi - 1$

On en déduit : 
$$\begin{pmatrix} \mathbf{m}^n \\ \mathbf{m}^{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cos \phi & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{m}^{n-1} \\ \mathbf{m}^{n-2} \end{pmatrix},$$

puis : 
$$\mathbf{m}^n = \frac{\sin(n\phi)}{\sin \phi} \mathbf{m} - \frac{\sin((n-1)\phi)}{\sin \phi}$$

Cas particuliers :

$\phi = \pi/2$  :  $\mathbf{m}^2 = -1, \mathbf{m}^3 = -\mathbf{m}, \mathbf{m}^4 = 1, \mathbf{m}^5 = \mathbf{m}, \mathbf{m}^6 = -1$  etc.. : demi-plan gauche

$\phi \rightarrow \pi$  :  $\mathbf{m}^n = (-1)^{n+1} \cdot (n.m + (n-1))$  : le secteur se réduit au demi-axe réel gauche

$\phi \rightarrow 0$  :  $\mathbf{m}^n = n.m - (n-1)$  : le secteur se confond avec le plan complexe, en excluant le demi-axe réel droit

$\phi = 2\pi/3$  :  $\mathbf{m}^{3k} = 1; \mathbf{m}^{3k+1} = \mathbf{m}; \mathbf{m}^{3k+2} = \mathbf{m}^2 = -\mathbf{m} - 1$  : les demi-droites font un angle de 30 degrés avec la verticale

## 3 Nombre de racines dans le demi-disque supérieur

Soit  $p(z) = a_n \cdot z^n + a_{n-1} \cdot z^{n-1} + \dots + a_1 \cdot z + a_0$ , tel que  $a_n$  est réel, les autres coefficients étant complexes,  $a_0$  est non nul;

On pose  $p(z) = r(z) + i s(z)$ ,  $r(z)$  et  $s(z)$  étant des polynômes à coefficients réels, et on note  $I(r/s)$  l'indice de Cauchy sur la droite réelle, de moins l'infini à plus l'infini.

On considère le parcours de Jordan, et l'on note  $m$  le nombre de zéros intérieurs au parcours

Le nombre  $N$  de racines dans le demi-disque supérieur est obtenu par la formule [2] :

$N = 0,5 (n - k - I(r/s))$ ;  $k$  est le nombre de zéros réels comptés avec ordre de multiplicité.

L'indice de Cauchy  $I(r/s)$  peut être évalué en formant la séquence de Sturm [2] engendrée par les polynômes  $r(z)$  et  $s(z)$ , par divisions euclidiennes successives, et en examinant les changements de signe des coefficients de plus haut degré des polynômes de la séquence. On peut montrer notamment [2] qu'une condition nécessaire et suffisante pour que le polynôme ait toutes ses racines dans le demi-plan supérieur est que tous les coefficients de poids fort des polynômes de la séquence de Sturm aient même signe. Dans le même ouvrage, l'auteur propose de retrouver les conditions de Routh-Hürwitz en faisant subir une rotation de  $-90$  degrés à la variable  $z$  du polynôme  $p(z)$ , tout en forçant le coefficient de plus haut degré à rester réel :

$$q(z) = i^n \cdot p(-i \cdot z).$$

## 4 Localisation des racines dans un secteur

### Lemme 1:

Soit  $p(z)$  un polynôme à coefficients réels : toutes les racines sont incluses dans un secteur symétrique par rapport à l'axe réel, si et seulement si elles sont incluses dans un des demi-espaces ayant comme support une des demi-droites qui délimite le secteur et qui comprend le secteur ( $90^\circ \leq \phi \leq 180^\circ$ ).

Démonstration

En effet, les racines sont ou sur l'axe réel, ou forment des paires symétriques par rapport à l'axe réel. Par conséquent, si elles sont localisées dans un domaine du plan complexe, elles sont donc localisées dans le plus grand domaine symétrique par rapport à l'axe réel, inclus dans le domaine considéré.

### Lemme 2 :

La séquence de Sturm engendrée par le couple de polynômes  $(r(z), s(z))$ , et celle engendrée par le couple de polynômes  $(r(z) + s(z) \cdot \cos \phi, s(z) \cdot \sin \phi)$ , sont identiques si l'on considère comme identiques deux polynômes qui diffèrent seulement d'un coefficient multiplicateur positif.

Démonstration :

il suffit de vérifier que les restes de la première division euclidienne sont des polynômes équivalents (à un facteur positif près), puisque les diviseurs le sont.

Méthode et justification :

Considérons alors le demi-disque porté par la demi-droite supérieure. Une rotation de  $-\phi$  fait coïncider ce demi-disque avec le demi-disque supérieur. Le polynôme résultant de la rotation de la variable s'écrit alors :

$$q(z) = m^n \cdot p(m^* \cdot z), \text{ avec } m = \exp(i\phi) \text{ et } m^* = \exp(-i\phi),$$

avec :

$$m^k = \frac{\sin(k\phi)}{\sin \phi} m - \frac{\sin((k-1)\phi)}{\sin \phi};$$

on obtient alors en développant, dans la base  $(1, m)$  :

$$q(z) = r(z) + m \cdot s(z) = r(z) + s(z) \cdot \cos \phi + i s(z) \cdot \sin \phi$$

En appliquant le deuxième lemme, on peut donc construire la séquence de Sturm engendrée par le couple  $(r, s)$ .

### Théorème :

Une condition nécessaire et suffisante pour que le polynôme soit stable au sens du secteur angulaire est que tous les coefficients de plus haut degré des polynômes engendrés par la séquence de Sturm aient le même signe.

## 5 Exemples

### 1° exemple

$$p(z) = (z+1)(z+1+i)(z+1-i) = z^3 + 3z^2 + 4z + 2;$$

avec  $\phi = 120$  degrés

$$q(z) = m^3 \cdot (m^{*3} \cdot z^3 + 3m^{*2} \cdot z^2 + 4m^* \cdot z + 2)$$

$$= z^3 + 3m z^2 + 4m^2 z + 2 = z^3 + 3m z^2 + 4(-m-1)z + 2$$

soit, finalement :

$$q(z) = z^3 - 4z + 2 + m(3z^2 - 4z);$$

on tire simplement le couple de polynômes initiaux de la séquence de Sturm:

$$r(z) = z^3 - 4z + 2$$

$$s(z) = 3z^2 - 4z$$

la séquence de Sturm donne :

$$p_0(z) = r(z) = z^3 - 4z + 2;$$

$$p_1(z) = s(z) = 3z^2 - 4z;$$

$$p_2(z) = \frac{20}{9} z + 2;$$

$$p_3(z) = \frac{117}{100};$$

tous les coefficients de poids fort sont de même signe : les racines du polynômes sont toutes à l'intérieur du secteur

## 2° exemple

soit le système asservi décrit par le schéma bloc de la figure 2:

La fonction de transfert en boucle fermée s'écrit :

$$\frac{K}{(p+1)^2(p+2)+K};$$

Lorsque  $K=0$ , tous les pôles sont sur le demi-axe réel négatif :  $K$  est réglable ;

1°)critère de stabilité absolue:  $\varphi = 90$  degrés

$$p(z) = (z+1)^2(z+2) + K = (z^2 + 2z + 1)(z+2) + K = z^3 + 4z^2 + 5z + 2 + K$$

$$q(z) = m^3(m^{*3}z^3 + 4m^{*2}z^2 + 5m^*z + 2 + K)$$

$$\text{soit : } q(z) = z^3 + 4mz^2 - 5z - m(2 + K);$$

on tire les polynômes générateurs de la séquence de Sturm :

$$r(z) = z^3 - 5z,$$

$$s(z) = 4z^2 - (2 + K);$$

la séquence de Sturm donne:

$$p_0(z) = z^3 - 5z;$$

$$p_1(z) = 4z^2 - (2+K);$$

$$p_2(z) = (4,5 - 0,25K)z;$$

$$p_3(z) = 2 + K$$

La seule condition sur le gain est fournie par le coefficient de plus haut degré du polynôme  $p_2(z)$  :  $(p_2(z)/z) > 0 \Rightarrow K < 18$

2°)critère de stabilité renforcée:  $\varphi = 120$  degrés

$$q(z) = m^3(m^{*3}z^3 + 4m^{*2}z^2 + 5m^*z + 2 + K)$$

$$\text{soit : } q(z) = z^3 + 4mz^2 - 5(m+1)z + (2 + K);$$

on tire les polynômes générateurs de la séquence de Sturm :

$$r(z) = z^3 - 5z + (2 + K)$$

$$s(z) = 4z^2 - 5z;$$

La séquence de Sturm donne:

$$p_0(z) = z^3 - 5z + (2 + K);$$

$$p_1(z) = 4z^2 - 5z;$$

$$p_2(z) = 3,4375z - 2 - K;$$

$$p_3(z) = \frac{9,1875 - 4K}{(3,4375)^2} (2 + K);$$

La seule condition sur le gain est fournie par le coefficient de plus haut degré du polynôme  $p_3(z)$  :  $p_3(z) > 0 \Rightarrow K < 2,29$

On constate que la valeur du coefficient d'amplification doit être plus proche de 2,3 que de 18, si l'on veut une marge de stabilité correcte, ce que confirment les études par les autres méthodes citées, et une simulation (non présentées ici).

## 3° exemple

Soit le système asservi décrit par le schéma bloc de la figure 3, qui comprend un pôle réel double et un intégrateur.

La fonction de transfert en boucle fermée s'écrit :

$$\frac{K}{(p+1)^2 p + K};$$

Lorsque  $K=0$ , tous les pôles sont sur le demi-axe réel négatif :  $K$  est réglable ;

1°)critère de stabilité absolue:  $\varphi = 90$  degrés

$$p(z) = (z+1)^2 z + K = (z^2 + 2z + 1)z + K = z^3 + 2z^2 + z + K$$

$$q(z) = m^3(m^{*3}z^3 + 2m^{*2}z^2 + m^*z + K)$$

$$\text{soit : } q(z) = z^3 + 2mz^2 - z - mK;$$

on tire les polynômes générateurs de la séquence de Sturm :

$$r(z) = z^3 - z,$$

$$s(z) = 2z^2 - K;$$

la séquence de Sturm donne:

$$p_0(z) = z^3 - z;$$

$$p_1(z) = 2z^2 - K;$$

$$p_2(z) = (1 - 0,5K)z;$$

$$p_3(z) = K$$

La seule condition sur le gain est fournie par le coefficient de plus haut degré du polynôme  $p_2(z)$  :  $(p_2(z)/z) > 0 \Rightarrow K < 2$

2°)critère de stabilité renforcée :  $\varphi = 120$  degrés

$$q(z) = m^3(m^{*3}z^3 + 2m^{*2}z^2 + m^*z + K)$$

$$\text{soit : } q(z) = z^3 + 2mz^2 - (m+1)z + K;$$

on tire les polynômes générateurs de la séquence de Sturm :

$$r(z) = z^3 - z + K$$

$$s(z) = 2z^2 - z;$$

La séquence de Sturm donne:

$$p_0(z) = z^3 - z + K;$$

$$p_1(z) = 2z^2 - z;$$

$$p_2(z) = 0,75z - K;$$

$$p_3(z) = \frac{9 - 32K}{9} K;$$

La seule condition sur le gain est fournie par le coefficient de plus haut degré du polynôme  $p_3(z)$  :

$$p_3(z) > 0 \Rightarrow K < 0,28125$$

On constate que la valeur du coefficient d'amplification doit être plus proche de 0.28 que de 2, si l'on veut une marge de stabilité correcte.

**Remarques finales**

On peut observer que le calcul du gain limite est aisé lorsque le dénominateur de la fonction de transfert est de degré 3. Au-delà, même pour lorsque la fonction de transfert ne possède pas de zéros,  $K$  est la plus petite racine d'un polynôme de degré supérieur à 1, lorsque  $\phi$  est supérieur à 90 degrés.

Le choix de 120 degrés pour  $\phi$  permet des calculs numériques plus faciles et donne généralement des pôles dominants (pour les fonctions de transfert en boucle ouverte sans "zéros") tels que le dépassement relatif maximum vaut environ 16% (Cas d'un système du second ordre).

La marge de stabilité définie par l'angle  $\phi$  assure que la pseudo-période de la réponse indicielle ne dépasse pas une proportion donnée (fixée par  $\tan(\phi)$ ) de la constante de temps de l'exponentielle décroissante. Elle garantit en quelque sorte la décroissance rapide de la seconde partie du régime transitoire, les pôles dominants conjugués (de faibles parties réelles) étant généralement situés sur les demi-droites délimitant le secteur angulaire. Pour s'assurer d'une stabilité complète, incluant la première phase du régime transitoire, il faudrait donc vérifier que le premier dépassement reste d'une amplitude acceptable, dans le cas général.

**6 Références**

[1] E.J. Routh « Advanced rigid dynamics » pp. 223-231 The Mac Millan Compagny New York 1905  
 [2] P. Henrici « Applied and Computational Complex Analysis », Vol. 1, ch. 6, pp. 443+, Wiley, N.Y., 1988

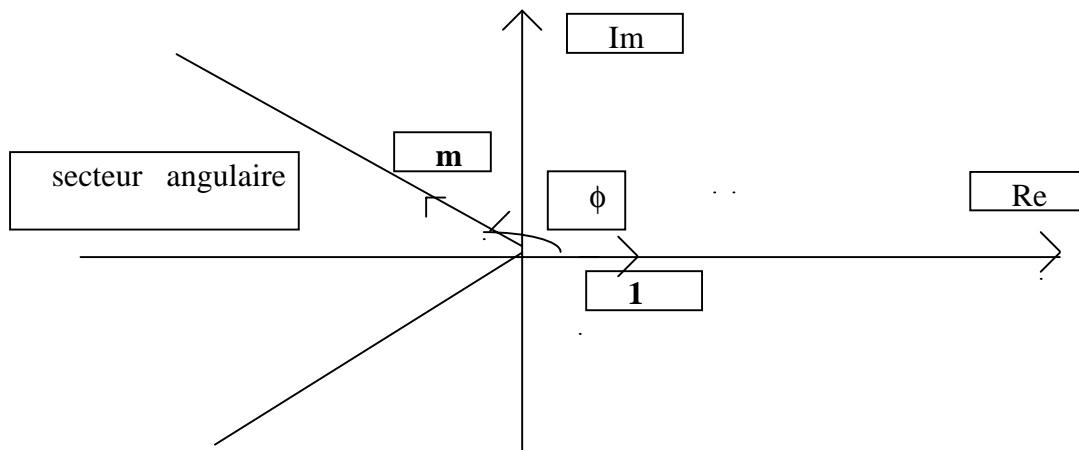


figure 1 : repère normé et secteur angulaire

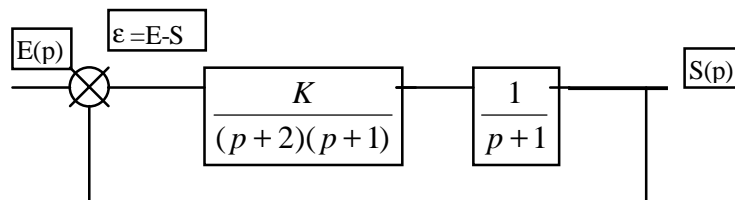


figure 2 : schéma-bloc de l'exemple 2

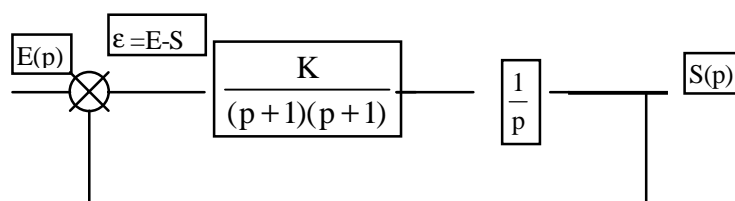


figure 3: schéma-bloc de l'exemple 3