

Estimation Récursive des Cumulants d'Ordre Quatre avec Application à l'Identification

Doulaye Dembélé et Gérard Favier

Laboratoire I3S, CNRS/UNSA, Bât. SPI n^o4, Les Lucioles 1
250, rue Albert Einstein, Sophia Antipolis, F-06560 Valbonne
favier@alto.unice.fr, Doulaye.Dembele@alto.unice.fr

RÉSUMÉ

Les Statistiques d'Ordre Élevé (SOE) sont de plus en plus utilisées dans les applications de traitement du signal. Toutefois, des formules générales d'estimation récursive des cumulants d'ordre supérieur à trois font jusqu'à aujourd'hui défaut. Cet article comble en partie cette lacune en présentant une formule récursive pour l'estimation des cumulants d'ordre quatre. Cette formule est ensuite utilisée dans le cadre de l'identification de modèles paramétriques de type Réponse Impulsionnelle Finie (RIF). Une version moindres carrés de l'algorithme C(Q,k), basée sur cette formule, est proposée. Des résultats de simulation illustrant le comportement de cette méthode d'identification sont présentés.

ABSTRACT

High Order Statistics (HOS) are used nowadays in many signal processing applications. However, general recursive formulae for estimating cumulants of order greater than three are lacking. This paper fills in a gap by presenting a recursive formula for estimating fourth-order cumulants. This formula is then used for the identification of Finite Impulse Response (FIR) models. A least squares form of the C(Q,k) algorithm, based on the proposed formula, is proposed. Some simulation results illustrate the behaviour of this new identification method.

1 Introduction

Les Statistiques d'Ordre Élevé (SOE) sont utilisées dans plusieurs applications de traitement du signal : estimation des paramètres de modèles ARMA (AutoRegressif à Moyenne Ajustée) [12, 8], déconvolution et égalisation aveugle [4, 11], . . . Par SOE, nous entendons les moments ou cumulants d'ordre supérieur à deux et leurs transformées multidimensionnelles de Fourier appelées spectres d'ordre élevé ou polyspectres [3]. En pratique, on utilise les statistiques d'ordre trois quand la loi de la densité de probabilité du processus modélisé est asymétrique et les statistiques d'ordre quatre quand cette loi est symétrique.

Comparativement aux Statistiques du Second Ordre (SSO), les SOE nécessitent une charge de calcul plus élevée. Ceci peut limiter leur utilisation dans certaines applications de traitement du signal. C'est généralement le cas pour les applications en temps réel. Pour les méthodes d'identification non récursive basées sur les SOE, les cumulants sont d'abord estimés à partir des échantillons du signal, puis utilisés dans l'algorithme d'identification. Dans les applications en temps réel et lorsque les paramètres du modèle du processus à identifier peuvent varier au cours du temps, il est nécessaire de réactualiser l'estimation des cumulants.

Après avoir rappelé, dans le d' 2, les définitions des moments et des cumulants d'ordres deux et quatre, nous présentons dans le d' 3, une nouvelle formule récursive et générale pour l'estimation des cumulants d'ordre quatre d'un processus stochastique scalaire, centré et à valeurs réelles ou complexes. Cette formule est ensuite utilisée dans le cadre de l'identification de modèles paramétriques de type Réponse Impulsionnelle Finie (RIF), et

une version moindres carrés de l'algorithme C(Q,k), basée sur cette formule, est proposée dans le d' 4. Des résultats de simulation illustrant le comportement de cette méthode d'identification sont présentés dans le d' 5.

2 Définitions et propriétés

Soit un processus stochastique scalaire, stationnaire, centré, non gaussien et à valeurs complexes $\{y(n)_{n=1,\dots,t}\}$. Nous supposons que tous les cumulants d'ordre inférieur ou égal à k ($k \geq 8$) de ce processus, existent et sont finis. Nous définissons les moments d'ordres deux et quatre par :

$$M_{2y}(\tau) \stackrel{\text{def}}{=} E\{y^*(t)y(t+\tau)\} = M_{2y}^*(-\tau) \quad (1)$$

$$\begin{aligned} M_{2y,d}(\tau) &\stackrel{\text{def}}{=} E\{y(t)y(t+\tau)\} \\ &= M_{2y,d}(-\tau) = M_{2y,c}^*(\tau) \end{aligned} \quad (2)$$

$$M_{4y}(\tau_1, \tau_2, \tau_3) \stackrel{\text{def}}{=} E\{y^*(t)y(t+\tau_1)y^*(t+\tau_2)y(t+\tau_3)\} \quad (3)$$

où $E\{\cdot\}$ est l'opérateur espérance mathématique et $y^*(t)$ désigne le conjugué du nombre complexe $y(t)$. Les cumulants d'ordres deux et quatre du processus $\{y(n)_{n=1,\dots,t}\}$ sont définis comme suit :

$$C_{2y}(\tau) \stackrel{\text{def}}{=} M_{2y}(\tau) \quad (4)$$

$$C_{2y,d}(\tau) \stackrel{\text{def}}{=} M_{2y,d}(\tau) = C_{2y,c}^*(\tau) \quad (5)$$

$$\begin{aligned} C_{4y}(\tau_1, \tau_2, \tau_3) &\stackrel{\text{def}}{=} M_{4y}(\tau_1, \tau_2, \tau_3) - M_{2y}(\tau_1)M_{2y}(\tau_3 - \tau_2) \\ &\quad - M_{2y,c}(\tau_2)M_{2y,d}(\tau_3 - \tau_1) \\ &\quad - M_{2y}(\tau_3)M_{2y}(\tau_1 - \tau_2) \end{aligned} \quad (6)$$

Les cumulants d'ordre quatre vérifient la relation de symétrie suivante :

$$C_{4y}(\tau_1, \tau_2, \tau_3) = C_{4y}(\tau_1 - \tau_2, -\tau_2, \tau_3 - \tau_2) \quad (7)$$

Les définitions (4), (5) et (6) sont également valables pour les processus à valeurs réelles en omettant l'opérateur de conjugaison.

3 Formule d'estimation récursive

Dans la pratique, les moments (ou les cumulants) sont estimés à partir d'un nombre fini d'échantillons du processus observé. Cette estimation est obtenue en remplaçant l'opérateur espérance mathématique qui intervient dans les définitions des moments et des cumulants, par une somme empirique, ce qui suppose que l'hypothèse d'ergodicité est vérifiée. Ainsi, une estimation du cumulants d'ordre quatre basée sur t échantillons du processus $\{y(n)_{n=1, \dots, t}\}$ est donnée par

$$\begin{aligned} \hat{C}_{4y}^t(\tau_1, \tau_2, \tau_3) &= \frac{1}{t} \sum_{s=1}^t y^*(s)y(s+\tau_1)y^*(s+\tau_2)y(s+\tau_3) \\ &\quad - \left(\frac{1}{t} \sum_{s=1}^t y^*(s)y(s+\tau_1) \right) \left(\frac{1}{t} \sum_{s=1}^t y^*(s+\tau_2)y(s+\tau_3) \right) \\ &\quad - \left(\frac{1}{t} \sum_{s=1}^t y^*(s)y^*(s+\tau_2) \right) \left(\frac{1}{t} \sum_{s=1}^t y(s+\tau_1)y(s+\tau_3) \right) \\ &\quad - \left(\frac{1}{t} \sum_{s=1}^t y^*(s)y(s+\tau_3) \right) \left(\frac{1}{t} \sum_{s=1}^t y^*(s+\tau_2)y(s+\tau_1) \right) \end{aligned} \quad (8)$$

ou de façon plus compacte :

$$\begin{aligned} \hat{C}_{4y}^t(\tau_1, \tau_2, \tau_3) &= \hat{M}_{4y}^t(\tau_1, \tau_2, \tau_3) - \hat{C}_{2y}^t(\tau_1)\hat{C}_{2y}^t(\tau_3 - \tau_2) \\ &\quad - \hat{C}_{2y,c}^t(\tau_2)\hat{C}_{2y,d}^t(\tau_3 - \tau_1) - \hat{C}_{2y}^t(\tau_3)\hat{C}_{2y}^t(\tau_1 - \tau_2) \end{aligned} \quad (9)$$

On peut vérifier aisément que la formule suivante permet d'estimer de façon récursive le cumulants d'ordre deux d'un processus stochastique scalaire, stationnaire, centré et à valeurs complexes.

$$\hat{C}_{2y}^t(\tau) = \hat{C}_{2y}^{t-1}(\tau) + \frac{1}{t} \left[y^*(t)y(t+\tau) - \hat{C}_{2y}^{t-1}(\tau) \right] \quad (10)$$

En utilisant la relation (8), on peut montrer que :

$$\begin{aligned} \hat{C}_{4y}^t(\tau_1, \tau_2, \tau_3) &= \hat{C}_{4y}^{t-1}(\tau_1, \tau_2, \tau_3) \\ &\quad + \frac{1}{t} \left[A^t - B^t + C^t - \hat{C}_{4y}^{t-1}(\tau_1, \tau_2, \tau_3) \right] \\ &\quad - \frac{1}{t^2} \left[A^t - B^t + 3C^t \right] \end{aligned} \quad (11)$$

où :

$$\begin{aligned} A^t &= \hat{C}_{2y}^{t-1}(\tau_1)\hat{C}_{2y}^{t-1}(\tau_3 - \tau_2) \\ &\quad + \hat{C}_{2y,c}^{t-1}(\tau_2)\hat{C}_{2y,d}^{t-1}(\tau_3 - \tau_1) \\ &\quad + \hat{C}_{2y}^{t-1}(\tau_3)\hat{C}_{2y}^{t-1}(\tau_1 - \tau_2) \\ B^t &= \hat{C}_{2y}^{t-1}(\tau_1)y^*(t+\tau_2)y(t+\tau_3) \\ &\quad + \hat{C}_{2y,c}^{t-1}(\tau_2)y(t+\tau_1)y(t+\tau_3) \\ &\quad + \hat{C}_{2y}^{t-1}(\tau_3)y^*(t+\tau_2)y(t+\tau_1) \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} &+ \hat{C}_{2y}^{t-1}(\tau_3 - \tau_2)y^*(t)y(t+\tau_1) \\ &+ \hat{C}_{2y,d}^{t-1}(\tau_3 - \tau_1)y^*(t)y^*(t+\tau_2) \\ &+ \hat{C}_{2y}^{t-1}(\tau_1 - \tau_2)y^*(t)y(t+\tau_3) \end{aligned} \quad (13)$$

$$C^t = y^*(t)y(t+\tau_1)y^*(t+\tau_2)y(t+\tau_3) \quad (14)$$

La relation (11) est une formule récursive exacte pour l'estimation des cumulants d'ordre quatre d'un processus stochastique scalaire stationnaire, centré et à valeurs complexes. La valeur estimée à l'instant t du cumulants d'ordre quatre est ainsi obtenue à partir de la valeur estimée précédente additionnée à deux termes de correction proportionnels à $\frac{1}{t}$ et à $\frac{1}{t^2}$ respectivement. Pour de grandes valeurs de t ($t \rightarrow \infty$), A^t , B^t et C^t sont finis et le terme de correction proportionnel à $\frac{1}{t^2}$ peut être négligé comparativement à celui en $\frac{1}{t}$. D'où, la formule simplifiée suivante pour l'estimation récursive des cumulants d'ordre quatre :

$$\begin{aligned} \hat{C}_{4y}^t(\tau_1, \tau_2, \tau_3) &= \hat{C}_{4y}^{t-1}(\tau_1, \tau_2, \tau_3) \\ &\quad + \frac{1}{t} \left[A^t - B^t + C^t - \hat{C}_{4y}^{t-1}(\tau_1, \tau_2, \tau_3) \right] \end{aligned} \quad (15)$$

Les quantités A^t et B^t sont elles-mêmes calculées récursivement en utilisant la formule (10).

De la formule (15), nous obtenons une formule de calcul récursif du kurtosis ($\hat{K}_y^t \stackrel{\text{def}}{=} \hat{C}_{4y}^t(0, 0, 0)$) du processus $\{y(n)_{n=1, \dots, t}\}$, en posant ($\tau_1 = \tau_2 = \tau_3 = 0$), soit :

$$\hat{K}_y^t = \hat{K}_y^{t-1} + \frac{1}{t} \left[A_0^t - B_0^t + C_0^t - \hat{K}_y^{t-1} \right] \quad (16)$$

avec :

$$A_0^t = 2 \left(\hat{C}_{2y}^{t-1}(0) \right)^2 + \left| \hat{C}_{2y,c}^{t-1}(0) \right|^2 \quad (17)$$

$$\begin{aligned} B_0^t &= 4\hat{C}_{2y}^{t-1}(0)|y(t)|^2 + \hat{C}_{2y,c}^{t-1}(0)y^2(t) \\ &\quad + \hat{C}_{2y,d}^{t-1}(0)(y^*(t))^2 \end{aligned} \quad (18)$$

$$C_0^t = |y(t)|^4 \quad (19)$$

Dans le cas d'un processus stochastique scalaire, stationnaire, centré et à valeurs réelles, en posant $\left(\hat{C}_{2y}^{t-1}(0) \right)^2 = \hat{C}_{2y}^{t-1}(0)y^2(t)$ dans (16), nous aboutissons à la formule proposée dans [2].

4 Application à l'identification

Au cours des dix dernières années, de nombreux algorithmes basés sur les SOE ont été proposés dans la littérature pour l'identification des modèles RIF [1, 5, 6, 9, 10, 12]. À la différence des SSO, les SOE permettent de lever l'indétermination relative à la phase. Elles sont également utilisées en raison de leur insensibilité à un bruit additif Gaussien. La plupart des algorithmes décrits sont du type "traitement en bloc des données". En utilisant la formule (15), une stratégie d'estimation récursive des coefficients d'un modèle RIF basée sur l'utilisation des cumulants d'ordre quatre peut être proposée :

1) Initialisation :

Estimation des cumulants d'ordres deux et quatre utilisés par la méthode d'identification, à partir d'un bloc de données. $\hat{C}_{4y}^0(\tau_1, \tau_2, \tau_3)$, $\hat{C}_{2y}^0(\tau_1)$ et $\hat{C}_{2y,d}^0(\tau_1)$ où $(\tau_1, \tau_2, \tau_3) = (0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(., ., .)$,

2) Début de la boucle de calcul,

3) Utilisation de la formule (15) pour réactualiser les estimés des cumulants,

- 4) Utilisation de l'algorithme d'identification pour obtenir les paramètres estimés
- 5) Si une nouvelle donnée est disponible, incrémenter le temps ($t \leftarrow t + 1$) et aller à l'étape 3), sinon aller à l'étape 6),
- 6) Fin.

Dans la stratégie d'identification récursive présentée ci-dessus, les paramètres estimés ne sont pas calculés récursivement. Il est bien connu que les méthodes basées sur les SOE donnent des résultats satisfaisants (faibles biais et variance) si le nombre des échantillons utilisés est élevé. Notons que la stratégie présentée ci-dessus est générale. Nous allons nous intéresser maintenant au cas particulier d'un processus du type Moyenne Ajustée (MA).

Soit $\{y(n)\}$ la sortie d'un filtre RIF ($h(i) = 0$ si $i \notin [0, Q]$) :

$$y(n) = \sum_{i=0}^Q h(i)w(n-i) + v(n) \quad (20)$$

où $\{w(n)\}$ est un processus stochastique scalaire, stationnaire, centré, non-Gaussien, à valeurs indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d.) et de kurtosis ($\gamma_{4w} \stackrel{\text{def}}{=} C_{4w}(0, 0, 0)$) non nul ; $\{v(n)\}$ est une séquence de bruit additif Gaussien indépendante de $\{w(n)\}$; $h(i)$ ($i = 0, \dots, Q$) sont les coefficients inconnus de la réponse impulsionnelle (r.i.) du système. En utilisant la définition (6) et la relation (20), il est facile de montrer la relation de Bartlett - Brillinger - Rosenblatt reliant les cumulants d'ordre quatre aux coefficients de la r.i. du système [3] :

$$C_{4y}(\tau_1, \tau_2, \tau_3) = \gamma_{4w} \sum_{k=s_1}^{s_2} h^*(k)h(k+\tau_1)h^*(k+\tau_2)h(k+\tau_3) \quad (21)$$

$$\text{où : } \begin{cases} s_1 = \leftarrow \max(0, -\tau_1, -\tau_2, -\tau_3) \\ s_2 = \min(Q, Q - \tau_1, Q - \tau_2, Q - \tau_3) \end{cases}$$

Dans la dérivation de (21) nous avons utilisé le fait que les cumulants d'ordre supérieur à deux d'un processus Gaussien sont nuls. La relation (21) est à la base de plusieurs méthodes d'identification de modèle RIF [10, 5, 7]. Pour illustrer la stratégie d'identification récursive proposée, nous considérons la solution explicite proposée par Giannakis [10] et sa version Moindres Carrés que nous allons décrire.

4.1 Algorithme C(Q,k) [10]

L'algorithme C(Q,k) proposé par Giannakis [10] est une solution explicite pour l'estimation des coefficients de la r.i. d'un processus RIF. En posant $\tau_2 = Q$ dans (21), nous obtenons :

$$C_{4y}(\tau_1, Q, \tau_3) = \gamma_{4w} h^*(0)h(\tau_1)h^*(Q)h(\tau_3) \quad (22)$$

En posant $\tau_3 = k$ et en choisissant $h(0) = 1$, on peut montrer la formule suivante :

$$h(k) = \frac{C_{4y}(\tau_1, Q, k)}{C_{4y}(\tau_1, Q, 0)}, \quad k = 1, 2, \dots, Q, \quad (23)$$

La relation (23) est appelée algorithme C(Q,k), le choix de l'argument τ_1 étant libre. Dans [10], τ_1 est choisi constant. Dans la suite nous faisons varier la valeur de τ_1 de façon à obtenir un système surdimensionné d'équations linéaires algébriques.

4.2 Algorithme LS-C(Q,k)

En faisant varier τ_1 entre 0 et Q dans la relation (23) et en utilisant la relation de symétrie (7), nous obtenons des équations qui peuvent se mettre sous la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} C_{4y}(-Q, -Q, -Q)I_Q \\ C_{4y}(1-Q, -Q, -Q)I_Q \\ \vdots \\ C_{4y}(0, -Q, -Q)I_Q \\ C_{4y}(-Q, -Q, 1-Q) \dots C_{4y}(-Q, -Q, 0) \\ C_{4y}(1-Q, -Q, 1-Q) \dots C_{4y}(1-Q, -Q, 0) \\ \dots C_{4y}(0, -Q, 0) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} h(1) \\ h(2) \\ \dots \\ h(Q) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{4y}(-Q, -Q, 1-Q) \dots C_{4y}(-Q, -Q, 0) \\ C_{4y}(1-Q, -Q, 1-Q) \dots C_{4y}(1-Q, -Q, 0) \\ \dots C_{4y}(0, -Q, 0) \end{bmatrix}^T \quad (24)$$

où I_Q est la matrice identité d'ordre Q .

L'algorithme LS-C(Q,k) résulte de l'application des moindres carrés pour la résolution du système surdimensionné (24).

5 Simulations

Les résultats de simulation présentés dans ce paragraphe concernent deux choix de τ_1 . Le premier choix ($\tau_1 = 0$) correspond à l'algorithme C(Q,k) standard et le second choix ($\tau_1 = 0, 1, \dots, Q$) correspond à l'algorithme LS-C(Q,k). Ces résultats permettent de comparer les deux algorithmes.

L'entrée utilisée, $w(n)$, est un signal de communication PAM (Pulse Amplitude Modulation) à deux niveaux (± 1). Le rapport signal à bruit SNR est fixé à 10dB. Deux modèles ont été simulés. Nous notons par N le nombre total des échantillons traités et par M le nombre des échantillons utilisés pour initialiser la procédure d'identification récursive. Des simulations du type Monte Carlo basées sur 20 séquences de bruit différentes ont été utilisées.

Exemple 1 : $h(1) = -1.4$, $h(2) = 0.48$; $N = 10000$, $M = 200$. Cet exemple correspond à un processus à déphasage minimal. Les zéros associés sont égaux à 0.6 et 0.8. Les estimés des coefficients sont représentés sur les figures 1 et 2.

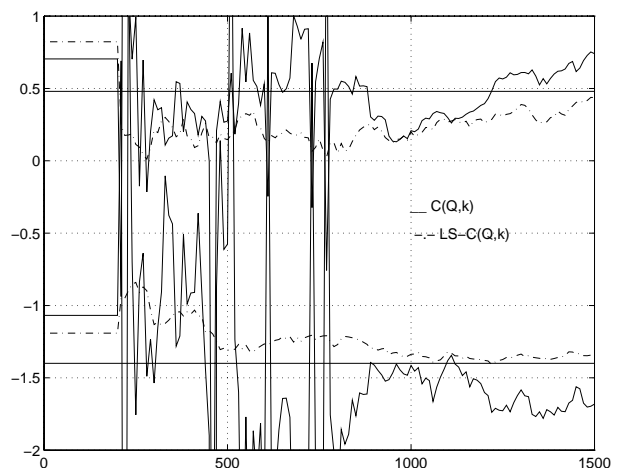


FIG. 1 — Exemple 1, 1500 premières itérations, vrais coefficients (lignes horizontales) et leurs estimés

Exemple 2 : $h(1) = -2.05$, $h(2) = 1.0$; $N = 10000$, $M = 200$. Cet exemple correspond à un processus à déphasage nonminimal. Les zéros associés sont égaux à 0.8 et 1.25. Les estimés des coefficients sont représentés sur les figures 3 et 4.

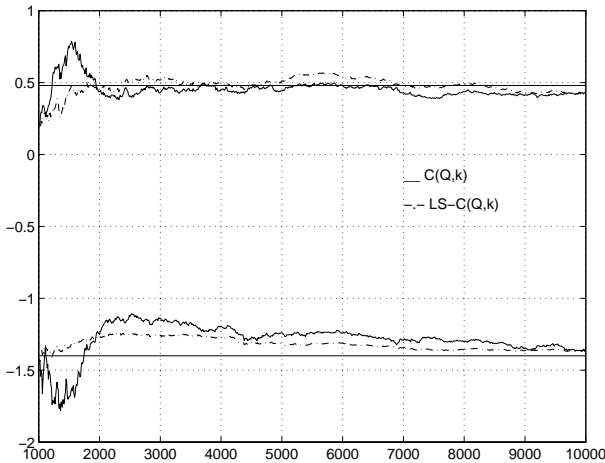


FIG. 2 — Exemple 1, vrais coefficients (lignes horizontales) et leurs estimés

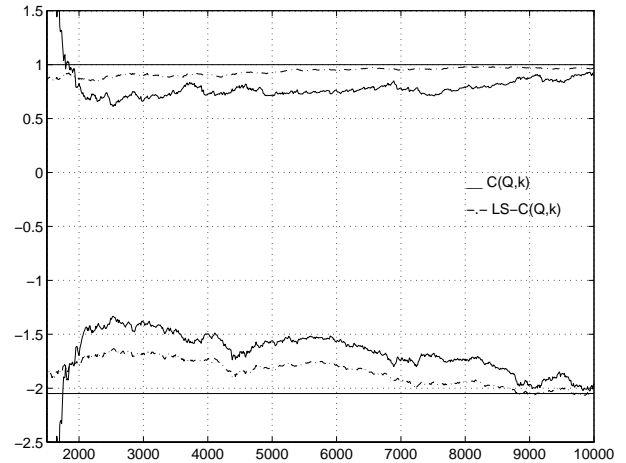


FIG. 4 — Exemple 2, vrais coefficients (lignes horizontales) et leurs estimés

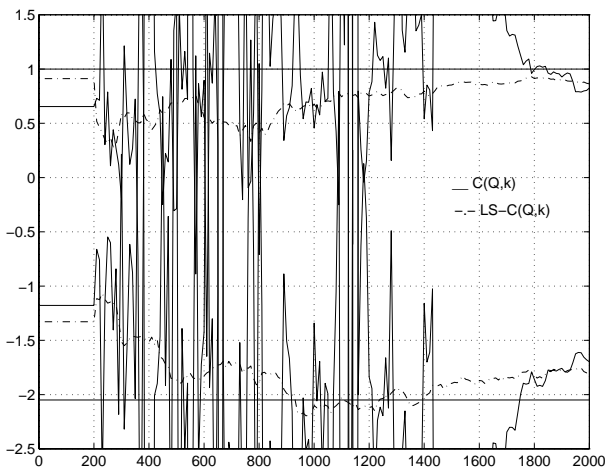


FIG. 3 — Exemple 2, 2000 premières itérations, vrais coefficients (lignes horizontales) et leurs estimés

Les résultats de simulation montrent que la formule récursive d'estimation (15) des cumulants d'ordre quatre et la stratégie d'identification proposées fournissent de meilleurs résultats que l'algorithme standard $C(Q,k)$. Cette amélioration des performances est très sensible au niveau du régime transitoire.

6 Conclusion

Dans cet article, nous avons présenté une nouvelle formule récursive pour l'estimation des cumulants d'ordre quatre d'un processus stochastique scalaire, stationnaire, centré et à valeurs réelles ou complexes. Puis nous avons proposé une stratégie générale pour l'identification de modèle RIF basée sur l'utilisation de cette formule. Une version Moindres Carrés de l'algorithme $C(Q,k)$ a été présentée et testée en simulation. Une comparaison avec l'algorithme $C(Q,k)$ standard a été faite, montrant l'amélioration des performances apportée par l'utilisation de la formule récursive de l'estimation des cumulants d'ordre quatre.

Références

[1] S. A. Alshebeili, A. N. Venetsanopoulos, and A. E. Cetin. Cumulant Based Identification Approaches for Nonmini-

um Phase FIR Systems. *IEEE SP*, 41(4) :1576–1588, April 1993.

- [2] P.-O. Amblard and J.-M. Brossier. Adaptive Estimation of the Fourth-Order Cumulant of a White Stochastic Process. *Signal Processing*, 42 :37–43, 1995.
- [3] D. R. Brillinger and M. Rosenblatt. Computation and Interpretation of k^{th} -Order Spectra. In *Spectral Analysis of Time Series*, B. Harris Editor, pages 189–232. New York : Wiley, 1967.
- [4] H.-H. Chiang and C. L. Nikias. Adaptive Deconvolution and Identification of Non-Minimum Phase FIR Systems Based on Cumulants. *IEEE AC*, 35(1) :36–47, January 1990.
- [5] P. Comon. MA Identification Using Fourth Order Cumulants. *Signal Processing*, 26(3) :381–388, March 1992.
- [6] D. Dembélé. *Identification de Modèles ARMA Linéaires à l'Aide de Statistiques d'Ordre Élevé. Application à l'Égalisation Aveugle*. PhD thesis, Université de Nice Sophia Antipolis, Juillet 1995.
- [7] D. Dembélé and G. Favier. A New FIR System Identification Method Based on Fourth-Order Cumulants : Application to Blind Equalization. *Journal of the Franklin Institute*, 334B(1) :117–133, January 1997.
- [8] G. Favier, D. Dembélé, and J. L. Peyre. ARMA Identification Using High-Order Statistics Based Linear Methods : A Unified Presentation. In *EUSIPCO, Edinburg*, pages 203–207, September 1994.
- [9] J. A. Fonollosa and J. Vidal. System Identification Using a Linear Combination of Cumulants Slices. *IEEE SP*, 41(7) :2405–2412, July 1993.
- [10] G. B. Giannakis. Cumulants : A Powerful Tool in Signal Processing. *Proc. of the IEEE*, 75(9) :1333–1334, September 1987.
- [11] D. Hatzinakos and C. L. Nikias. Blind Equalization Using a Tricepstrum Based Algorithm. *IEEE COM*, 39(5) :669–682, May 1991.
- [12] J. M. Mendel. Tutorial on Higher Order Statistics (Spectra) in Signal Processing and System Theory : Theoretical Results and Some Applications. *Proc. of the IEEE*, 79(3) :278–305, March 1991.