

# Egalisation autodidacte d'un signal modulé en fréquence

Dominique Nussbaum

TDF-C2R

1, rue Marconi 57070 Metz, France

Tel : (33) 03 87 20 75 93 - fax : (33) 03 87 76 33 63

e-mail : dnussbaum@c2r.tdf.fr

## RÉSUMÉ

Nous traitons du problème de l'égalisation autodidacte d'un canal linéaire dans le cas d'un signal modulé en fréquence ou en phase. Le problème de l'annulation d'interférences canal adjacent est aussi abordé. Dans cet article, nous proposons une structure récursive, basée sur le critère de Godard [1], et qui utilise la stratégie d'égalisation par prédiction et rétroprédiction proposée par Macchi et al [2]. La nouvelle structure est comparée au CMA classique, et les résultats obtenus montrent la supériorité de l'approche récursive par rapport à l'approche transversale dans l'égalisation de canaux à trajets multiples. Enfin, la structure récursive présente des performances équivalentes au CMA pour l'annulation d'interférences.

## ABSTRACT

We deal with the problem of blind equalization of a linear channel in the case of a phase or frequency modulated signal. The problem of cancelling interference is also treated. This paper presents a new recursive structure based on Godard's criterion [1] for blind equalization, which employs the strategy proposed by Macchi and al [2]. The new scheme is compared to the one of its transversal counterpart, the classical CMA, and the results indicate that recursive structure exhibits superior performances to that of its transversal counterpart in the case of multipath propagation. At last, in the presence of interference, the performances of the both schemes are equivalent.

## 1. Description du problème

La radiodiffusion à modulation de fréquence est appréciée car elle offre une bonne qualité d'écoute. Cependant, cette qualité peut être dégradée par la présence de trajets multiples et de signaux brouilleurs. Les trajets multiples sont dus à la réflexion du signal sur des obstacles (immeubles, montagnes), ce phénomène étant particulièrement gênant en milieu montagneux. Les signaux brouilleurs peuvent être dus à une forte densité d'émetteurs, en particulier dans les zones fortement urbanisées. Pour combattre ces phénomènes néfastes, il est possible d'insérer un dispositif d'égalisation dans un récepteur numérique.

## 2. Etat de l'art

Pour égaliser le canal, une des méthodes les plus utilisées aujourd'hui consiste à utiliser le fait que la modulation de fréquence est réalisée à enveloppe constante. Les algorithmes utilisant cette propriété ont été introduits pour la première fois par Godard [1], puis étudiés par Treichler [3] pour les signaux modulés en phase ou en fréquence. L'égalisation basée sur le critère de module constant (Constant Modulus Algorithm, CMA) consiste à filtrer le signal par l'intermédiaire d'un filtre à Réponse Impulsionnelle Finie (RIF) puis de minimiser la déviation du module de cette sortie par rapport à une constante. Ainsi, on minimise une fonction coût du type :

$$J_{p,q}(n) = (|z(n)|^p - 1)^q \quad (2.1)$$

où  $z(n)$  est la sortie du filtre,  $p$  et  $q$  étant des entiers.

Les fonctions coût les plus utilisées sont  $J_{2,2}(n)$  et  $J_{1,2}(n)$ .

Ce type d'égaliseur est capable de combattre à la fois les trajets multiples et les signaux brouilleurs. Malheureusement, la structure RIF utilisée classiquement dans les CMA exige un nombre important de coefficients, d'où une complexité importante et de faibles performances en terme de poursuite lorsque le canal est variable.

Pour pallier à ces difficultés, certains chercheurs ont étudié ces dernières années des structures récursives [2],[5] car il est bien connu que, de manière générale, les filtres à Réponse Impulsionnelle Infinie (RII) modélisent mieux un système (ou un canal) que les filtres RIF, et avec un nombre moins élevé de coefficients. Dans cet article, nous nous proposons d'adapter les nouvelles structures d'égaliseurs non transverses au cas d'un signal analogique modulé en fréquence.

## 3. Structure d'égalisation récursive

Un signal modulé en fréquence peut s'écrire :

$$s(t) = A \cos[2\pi f_p t + \varphi(t)] \quad (3.1)$$

$$\text{avec } \varphi(t) = 2\pi \Delta f \int_{-\infty}^t m(\lambda) d\lambda \quad (3.2)$$

où  $A$  représente le module du signal,  $f_p$  est la fréquence porteuse comprise entre 88 et 108 MHz,  $\Delta f$  est l'excursion de fréquence (75 kHz) et  $m(\lambda)$  est le signal modulant normalisé (compris dans l'intervalle [-1;1]). Ce signal est échantillonné et transposé en bande de base, nous calculons alors le signal complexe équivalent bande de base.

La stratégie d'égalisation proposée est basée sur une modélisation de la fonction de transfert du canal proposée par O. Macchi et al [2]. Celle-ci consiste à séparer les parties à minimum et à maximum de phase.

Un canal à minimum de phase et ayant  $P$  zéros s'écrit de la manière suivante :

$$C^I(z) = \prod_{i=1}^P (1 - z_i^I z^{-1}) \quad \text{avec } |z_i^I| < 1 \quad (3.3)$$

De même, pour un canal à maximum de phase :

$$C^E(z) = \prod_{i=1}^Q (z^{-1} - (z_i^E)^{-1}) \quad \text{avec } |z_i^E| > 1 \quad (3.4)$$

Un canal à phase mixte peut s'écrire :

$$C(z) = f C^I(z) C^E(z) \quad (3.5)$$

où  $f$  est une constante multiplicative complexe.

Les deux parties sont égalisées séparément (fig.1) par l'intermédiaire d'un rétroprédicteur (pour la partie à maximum de phase) et d'un prédicteur (pour la partie à minimum de phase). L'ajustement en amplitude est effectuée par l'intermédiaire d'un contrôle automatique de gain. Cette approche a pour principal intérêt d'égaliser parfaitement des zéros intérieurs du canal très proches du cercle unité. On introduit par ailleurs une non linéarité dans la partie prédictive, de manière similaire à l'égaliseur à retour de décision (DFE). La prise de décision étant remplacée par la non linéarité  $T(z(n))$  classique du CMA :

$$T(z(n)) = \frac{z(n)}{|z(n)|} (2|z(n)| - |z(n)|^3) \quad \text{pour } J_{2,2}(n)$$

$$\text{et } T(z(n)) = \frac{z(n)}{|z(n)|} \quad \text{pour } J_{1,2}(n)$$

Une telle boucle récursive peut être utilisée dans une structure de type DFE (CMA-DFE, fig.2), mais cet égaliseur présente un inconvénient grave. Il peut converger vers des minima globaux stables et non désirables [5]. L'Egaliseur par Prédiction et Rétroprédiction (EPR) permet d'éviter ces minima par l'introduction du CAG dans la boucle récursive (fig.1). Ainsi,  $g(n) = 0$  n'est pas une solution de la minimisation du critère de module constant (si le filtre  $\mathbf{B}(n)$  a des valeurs finies). Lorsque le signal d'erreur devient négligeable, l'égaliseur devient

linéaire et sa fonction de transfert s'écrit alors :

$$\frac{S(z)}{X(z)} = \frac{g(z^{-L} + R(z))}{1 + gB(z)} \quad (3.6)$$

Or, pour un CMA-DFE, la fonction de transfert est :

$$\frac{S(z)}{X(z)} = \frac{F'(z)}{1 + B'(z)} \quad (3.7)$$

Si l'on compare ces deux structures,

-  $gB(z)$  et  $B'(z)$  d'une part, et  $g(z^{-L} + R(z))$  et  $F'(z)$  d'autre part, jouent le même rôle en terme d'égalisation,

- le CMA-DFE possède un degré de liberté supplémentaire puisque  $g(n)$  est réel dans la structure proposée (ce n'est absolument pas gênant dans le cas d'un signal modulé en fréquence),

- les fonctions coût ont une forme radicalement différentes dans la mesure où les minima globaux stables sont supprimés pour l'EPR.

## 4. Algorithmes d'adaptation

Soit  $\mathbf{X}(n) = [x(n), x(n-1), \dots, x(n-L+1)]^t$  le vecteur des  $L$  dernières entrées du système,  $\mathbf{R}(n) = [r_0(n), r_1(n), \dots, r_{L-1}(n)]^t$  le rétroprédicteur,  $\mathbf{S}(n) = [s(n-1), \dots, s(n-N)]^t$  le vecteur d'entrée du prédicteur et  $\mathbf{B}(n) = [b_1(n), \dots, b_N(n)]^t$  le prédicteur. On choisit de minimiser la fonction coût :

$$J(n) = J_{1,2}(n) = (|z(n)| - 1)^2 \quad (4.1)$$

avec

$$y(n) = x(n-L) + \sum_{i=0}^{L-1} r_i(n)x(n-i) - \sum_{j=1}^N b_j(n)s(n-j)$$

et

$$z(n) = g(n)y(n) \quad (4.2)$$

Pour adapter les filtres, nous choisissons l'approche classique du gradient stochastique, et nous cherchons donc le gradient de la fonction coût.

On a d'après (4.1) :

$$\nabla(J(n)) = 2(|z(n)| - 1) \nabla(|z(n)|) \quad (4.3)$$

et

$$\nabla(|z(n)|) = \frac{\nabla(|z(n)|^2)}{2|z(n)|} = g^2(n) \frac{\nabla(|y(n)|^2)}{2|z(n)|} \quad (4.4)$$

Par ailleurs,

$$\nabla(|y(n)|^2) = y^*(n)\nabla(y(n)) + y(n)\nabla(y^*(n)) \quad (4.5)$$

Le gradient complexe par rapport aux coefficients du rétroprédicteur s'écrit :

$$\nabla r_k = \frac{\partial}{\partial r_{kr}} + j \frac{\partial}{\partial r_{ki}} \quad \text{pour } k = 0, 1, \dots, L-1$$

On a

$$\frac{\partial y(n)}{\partial r_{kr}} = x(n-k) - \sum_{j=1}^N b_j(n) \frac{\partial s(n-j)}{\partial r_{kr}} \quad (4.6)$$

et

$$\frac{\partial y(n)}{\partial r_{ki}} = jx(n-k) - \sum_{j=1}^N b_j(n) \frac{\partial s(n-j)}{\partial r_{ki}} \quad (4.7)$$

Avec (4.6) et (4.7) :

$$\frac{\partial y(n)}{\partial r_k} = -\sum_{j=1}^N b_j(n) \frac{\partial s(n-j)}{\partial r_k} \quad (4.8)$$

De même,

$$\frac{\partial y^*(n)}{\partial r_k} = 2x^*(n-k) - \sum_{j=1}^N b_j^*(n) \frac{\partial s^*(n-j)}{\partial r_k} \quad (4.9)$$

On voit que l'expression exacte du gradient se révèle assez complexe, nous faisons donc l'hypothèse simplificatrice que les variations des éléments de  $S(n)$  par rapport au coefficients du filtre sont négligeables devant les éléments du vecteur d'entrée  $x(n-k)$ .

Cette approximation peut paraître forte a priori, mais trouve sa justification dans la pratique [6]. De plus, cette simplification conduit à des algorithmes d'une complexité calculatoire voisine de celle du CMA transverse.

D'après (4.4), (4.5), (4.8) et (4.9)

$$\frac{\partial |z(n)|}{\partial r_k} = g^2(n) \frac{1}{2|z(n)|} 2y(n)x^*(n-k) \quad (4.10)$$

Posons par ailleurs

$$e(n) = z(n) - s(n) = g(n) y(n) \left(1 - \frac{1}{|z(n)|}\right) \quad (4.11)$$

On obtient enfin avec (4.3), (4.10) et (4.11) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial J(n)}{\partial r_k} &= 2(|z(n)|-1)g^2(n) \frac{1}{|z(n)|} y(n)x^*(n-k) \\ &= 2 g(n) e(n) x^*(n-k) \end{aligned} \quad (4.12)$$

Ainsi, on adapte le rétroprédicteur à l'aide de l'équation :

$$\mathbf{R}(n+1) = \mathbf{R}(n) - \delta_R g(n)e(n)\mathbf{X}^*(n) \quad (4.13)$$

De même, pour le prédicteur :

$$\mathbf{B}(n+1) = \mathbf{B}(n) + \delta_B g(n)e(n)\mathbf{S}^*(n) \quad (4.14)$$

Le contrôle automatique de gain est adapté suivant :

$$g(n+1) = g(n) - \delta_g \{|z(n)|^2 - 1\} \quad (4.15)$$

Cette adaptation peut aussi prendre la forme suivante :

$$G(n+1) = G(n) - \delta_g \{|z(n)|^2 - 1\} \quad (4.16)$$

$$\text{et } g(n+1) = \sqrt{|G(n+1)|} \quad (4.17)$$

## 5. Résultats de simulations

Pour quantifier les performances des différents égaliseurs, nous avons choisi de mesurer la déformation du spectre du signal après démodulation.

On définit le taux de distorsion du signal de la manière suivante :

$$D = 100 \times \sqrt{1 - \frac{\left(\sum_{i=1}^N a_i b_i\right)^2}{\left(\sum_{i=1}^N a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^N b_i^2\right)}} \quad (5.1)$$

où  $a_i$  et  $b_i$  sont les valeurs absolues des transformées de Fourier Discrètes du signal modulant original (équation 3.2) et du signal égalisé après démodulation. Avec cette formule, on note que les déformations subies par le signal sont inaudibles en dessous d'un taux de distorsion de 10% environ.

Pour comparer les différentes structures en présence de multi-trajets, nous simulons un canal de Porat et Friedlander [4]. De plus, nous rajoutons un bruit blanc gaussien tel que le rapport porteur sur bruit (C/N) soit de 40 dB. L'adjonction du bruit seul (le canal étant idéal par ailleurs) induit un taux de distorsion de 9 %.

La figure 3 montre l'amélioration de la convergence et de l'état stable obtenus avec la nouvelle structure. En effet, le taux de distorsion après convergence est voisin de celui que l'on aurait atteint avec le bruit seul.

Dans un deuxième temps, nous avons cherché à quantifier le gain en terme de sélectivité (capacité d'un récepteur à faire la discrimination entre un signal utile et des signaux interférents) apporté par un égaliseur. Pour cela, le signal utile est brouillé par un interférent sinusoïdal tel que le rapport signal utile sur brouilleur soit de -20 dB. La figure 4 montre les déformations dues au brouilleur en fonction de l'écart en fréquence. L'égalisation permet une très nette amélioration de la sélectivité, sauf dans le cas (extrême) où l'écart en fréquence est nul. On remarque par ailleurs que les performances du CMA et de la nouvelle structure sont voisines. Lorsque l'écart de fréquence est faible (< 50 kHz), les égaliseurs ne parviennent pas à supprimer entièrement le brouilleur, phénomène qui avait déjà été observé et expliqué par Treichler [3].

## 6. Conclusions

Finalement, nous pouvons mettre en évidence les points suivants :

- dans le cas d'une propagation par multitrajets, la nouvelle structure permet d'égaliser plus efficacement le canal qu'un égaliseur transverse, tout en évitant le problème des minima stables et non désirables.

- tout comme le CMA classique, le nouvel égaliseur améliore très nettement les performances en terme de sélectivité d'un récepteur à modulation de fréquence.

## REFERENCES

- [1] D.M. Godard, « Self-recovering equalization and carrier tracking in two-dimensional data communications systems », IEEE Trans. Commun., vol. COM-28, Nov. 1980.

[2] O. Macchi, C.A.F. Da Rocha, J.M.T. Romano, « Egalisation adaptative autodidacte par rétroprédiction et prédiction », Actes du 14<sup>ème</sup> Colloque GRETSI, Juan-les-Pins, pp. 491-494, Sep. 1993.  
 [3] J.R. Treichler and B.G. Agee, « A new approach to multipath correction of constant modulus signals », IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing, vol. ASSP-31, pp. 459-472, Apr. 1983.

[4] B. Porat, B. Friedlander, « Blind equalization of digital communication channels using high-order moments », IEEE Trans. on Signal Processing, vol.39, pp. 522-526, Feb. 1991.  
 [5] C.B. Papadias, A. Paulraj, « Decision-Feedback Equalization and Identification of Linear Channels Using Blind Algorithms of the Bussgang Type » Proc ICC 96, pp. 335-340.  
 [6] Shynk, « Adaptive IIR Filtering », IEEE ASSP Magazine, pp. 4-21, April 1989.

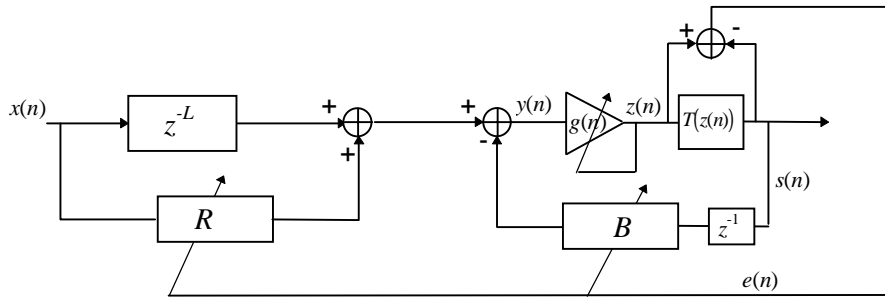


Figure 1 : égaliseur linéaire par prédiction et rétroprédiction

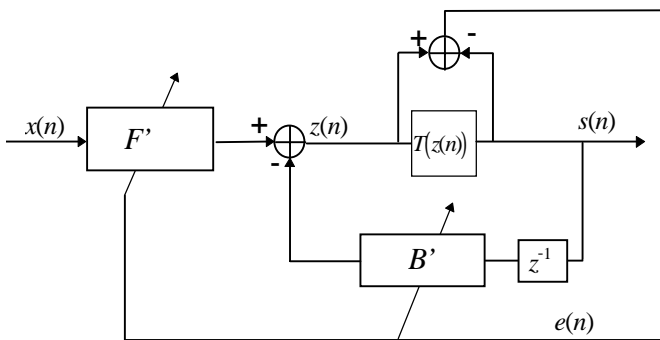


Figure 2 : schéma bloc d'un CMA-DFE

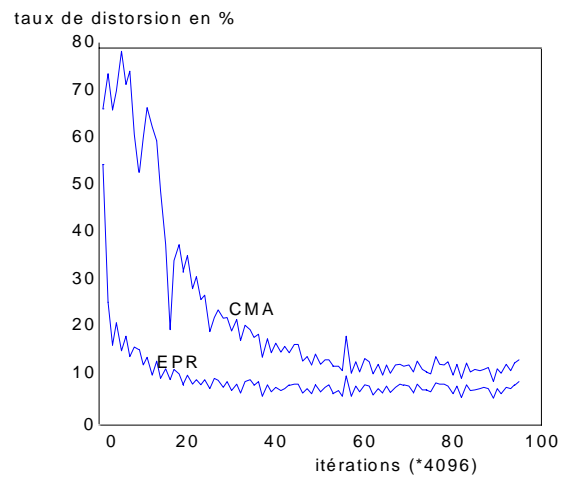


Figure 3 : comparaison du comportement de l'EPR avec le CMA transverse

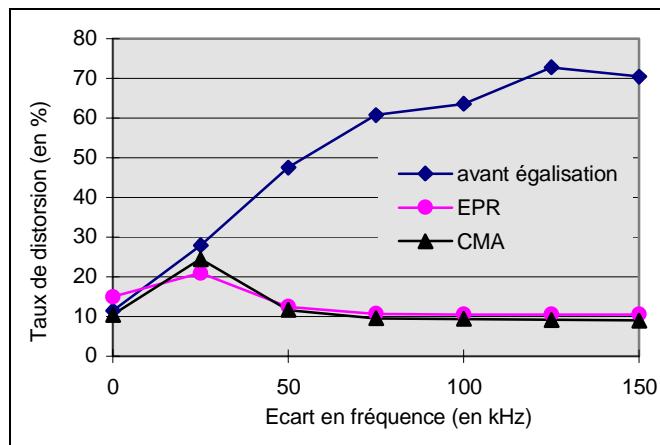


Figure 4 : gain en sélectivité par égalisation