

Séparation autodidacte de sources temporellement corrélées

Jean-François CAVASSILAS, Bernard XERRI et Gilles CHABRIEL

Groupe d'Etudes des Signaux et Systèmes MS-GESSY/ISITV
Avenue Georges POMPIDOU BP 56 - 83162 LA VALETTE DU VAR Cedex

RÉSUMÉ

La méthode de séparation aveugle, proposée dans le cadre de mélange instantané de sources indépendantes, est basée sur la recherche de solutions d'un système linéaire aux valeurs propres : $MX = \lambda RX$. On montre que, si l'on choisit la matrice R égale à la matrice $M^{(2k)}$, dérivée $2k^{\text{ième}}$ de la matrice d'intercovariance M des observations, on assure l'obtention d'une solution par une méthodologie robuste et stable.

On présente des simulations dans des situations défavorables telles que le mélange de sources gaussiennes aux fonctions de corrélations proches.

ABSTRACT

We propose a new resolution of the blind separation system with instantaneous mixture of statistically independent signals. Our method is based on eigen vectors decomposition of the following linear system : $MX = \lambda RX$. If R is chosen as $M^{(2k)}$, the $2k$ th derivative crosscorrelation matrix M of the observations, we show that the solutions is obtained without difficulty.

We present simulations with severe conditions, like gaussian signals mixture with near correlations.

1 Modèle de séparation de sources à mélange instantané

Le modèle de séparation de sources suppose, quel que soit l'instant t , l'existence de p signaux sources notés $x_i(t)$ pour $i = \{1, \dots, p\}$ dont on observe p mélanges linéaires instantanés, appelés signaux captés et notés $y_i(t)$.

Nous admettrons par hypothèse que les p sources $x_i(t)$ sont stationnaires au second ordre, de moyenne nulle, mutuellement décorréélées et qu'aucune d'entre elles n'est à corrélation microscopique. Nous admettrons enfin que la fonction d'autocorrélation de chacune des sources est indéfiniment dérivable.

Le modèle du mélange s'écrit pour chaque observation $y_i(t)$, $i \in \{1, \dots, p\}$:

$$y_i(t) = \sum_{k=1}^p a_i^k x_k(t).$$

Sous une forme matricielle, nous écrivons :

$$Y(t) = AX(t), \quad (1)$$

où les p composantes du vecteur $Y(t)$ représentent les signaux captés, les p signaux sources sont rassemblés dans le vecteur $X(t)$ et les coefficients a_i^k du mélange forment une matrice notée A que nous supposons, par hypothèse inversible.

Indéterminations Le principe général de la séparation de sources consiste à appliquer une transformation (ou une suite de transformations) aux observations pour obtenir des signaux $z_i(t) = \sum_{k=1}^p s_i^k y_k(t)$ statistiquement indépendants et proportionnels aux signaux sources.

Parce que les sources sont supposées non observables, il subsiste des indéterminations inhérentes au problème posé. On

montre facilement qu'il est impossible de récupérer l'ordre k et la puissance σ_k^2 de chaque source $x_k(t)$. Les signaux seront toutefois considérés comme séparés si la matrice S rassemblant les coefficients s_i^k vérifie l'égalité :

$$H \stackrel{\text{def}}{=} SA = DP \quad (2)$$

où D est une matrice diagonale, inversible, et P une matrice de permutation. Une telle matrice S sera dite *séparante*.

L'indétermination sur la puissance permet, sans perdre en généralité, de considérer les sources comme étant à puissance unité, l'autocovariance $R_X(0) = E[X(t)X(t)^T]$ sera donc la matrice identité I_p .

2 Principe de l'identification du mélange au second ordre

2.1 Analyse en composantes principales et blanchiment

L'analyse en composantes principales des observations exploite la matrice d'autocovariance $R_Y(0)$ de ces dernières afin d'assurer l'annulation de la covariance $E[z_i(t)z_j(t)]$, $\forall i \neq j$.

Il s'agit de trouver une matrice W de telle sorte que le processus $\underline{Y}(t) = WY(t)$ soit spatialement décorrélé. On impose, en outre, à la matrice W de normaliser le problème de séparation, on parlera usuellement de blanchiment des signaux captés. Puisque l'on peut toujours considérer les sources de puissance unité, la condition de blanchiment s'écrit alors :

$$I_p = E[(WY(t))(WY(t))^T]$$

$$\begin{aligned}
&= \mathbf{E} [WAX(t)X(t)^T A^T W^T] \\
&= WAA^T W^T.
\end{aligned} \tag{3}$$

Posons :

$$U = WA. \tag{4}$$

L'équation (3) montre que la matrice U est unitaire. Le filtre blanchisseur W décorrèle les observations et ramène le mélange des sources à un mélange unitaire. La condition de décorrélacion entre les composantes de $\underline{Y}(t)$ est donc nécessaire mais non suffisante, elle ne permet d'identifier la matrice des coefficients s_i^k qu'à une matrice unitaire U près. Pour que la séparation de sources puisse être achevée, il faut identifier la rotation manquante U .

2.1.1 Algorithme SOBI [1]

Les matrices $R_{\underline{Y}}(\tau)$ des observations blanchies s'écrivent par définition :

$$\forall \tau \neq 0, R_{\underline{Y}}(\tau) = WR_Y(\tau)W^T$$

D'après (4), on obtient la relation :

$$\forall \tau \neq 0, R_{\underline{Y}}(\tau) = WAR_X(\tau)A^T W^T = UR_X(\tau)U^T.$$

Les matrices d'intercovariance $R_X(\tau)$ des sources colorées étant diagonales, U est donc une base propre pour toutes les matrices $R_{\underline{Y}}(\tau)$, $\forall \tau$.

La matrice U peut être déterminée de manière unique dans le cas où il est possible de trouver une valeur particulière τ_p de τ telle que la matrice $R_{\underline{Y}}(\tau_p)$ ne possède pas de valeurs propres multiples.

Si les fonctions d'autocorrélation des sources normalisées en puissance sont différentes, il est fort probable d'atteindre une valeur τ_p assurant la non dégénérescence des valeurs propres. Toutefois l'obtention de cette valeur n'est pas assurée.

Une alternative intéressante consiste à diagonaliser conjointement dans une même base U , un ensemble de matrices $[R_{\underline{Y}}(\tau_1), R_{\underline{Y}}(\tau_2), \dots, R_{\underline{Y}}(\tau_k)]$ pour différentes valeurs de τ choisies *a priori*. La technique de diagonalisation conjointe de matrices normales a été introduite dans [6]. Il s'agit d'une généralisation de la méthode de JACOBI de diagonalisation d'une seule matrice hermitienne. On recherche une transformation unitaire diagonalisant au mieux (au sens d'un critère quadratique) un ensemble de matrices normales.

Après détermination de U , les sources sont ensuite restaurées en calculant le produit :

$$Z(t) = U^T \underline{Y}(t) = U^T WY(t).$$

L'algorithme complet de séparation de sources a été baptisé *SOBI* (Second Order Blind Identification) par l'auteur.

2.1.2 Un problème de recherche d'éléments propres d'un faisceau de matrices

Une démarche similaire due à [2] consiste à construire une matrice M par sommation pondérée de matrices d'intercovariance des signaux captés :

$$M = \sum_{\tau} \alpha_{\tau} R_Y(\tau), \text{ avec } \tau \neq 0,$$

où les $\{\alpha_{\tau}\}$ sont des scalaires choisis de sorte que M soit définie positive. L'algorithme permettant de trouver les scalaires $\{\alpha_{\tau}\}$ est décrit dans [7].

On procède ensuite à la diagonalisation généralisée du faisceau de matrices constitué par la matrice M et la matrice d'autocovariance des observations $R_Y(0)$ en résolvant l'équation aux valeurs propres :

$$MV = R_Y(0)V\Delta, \text{ où } \Delta \text{ est une matrice diagonale.}$$

On peut montrer, ici encore, que la matrice V s'identifie, à une transposée près, à une matrice séparante au sens de (2) du mélange A dans le cas où $R_Y(0)^{-1}M$ n'admet pas de valeurs propres multiples.

2.2 Méthode proposée (IMISO I)

La technique d'identification de mélanges instantanés au second ordre (IMISO) que nous proposons, s'inscrit dans le cadre des deux méthodes précédentes tout en présentant la vertu d'être optimale et plus robuste.

Appelons $R_Y(\tau)$ la matrice d'intercovariance des observations ; nous écrivons :

$$R_Y(\tau) = \mathbf{E} [Y^T(t)Y(t+\tau)] = \mathbf{A}\mathbf{E} [X^T(t)X(t+\tau)]\mathbf{A}^T$$

soit encore :

$$R_Y(\tau) = \mathbf{A} \begin{bmatrix} \Gamma_{x_1}(\tau) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \Gamma_{x_p}(\tau) \end{bmatrix} \mathbf{A}^T.$$

Avec ces notations, les fonctions $\Gamma_{x_i}(\tau)$ représentent les fonctions d'autocorrélation inconnues des sources. Par hypothèse, les fonctions $\Gamma_{x_i}(\tau)$ sont indéfiniment dérivables. Il en est de même pour la matrice $R_Y(\tau)$.

Appelons alors $R_Y^{(2)}(\tau)$ la dérivée seconde par rapport à la variable τ de la matrice $R_Y(\tau)$:

$$R_Y^{(2)}(\tau) = \mathbf{A} \begin{bmatrix} \frac{d^2\Gamma_{x_1}(\tau)}{d\tau^2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \frac{d^2\Gamma_{x_p}(\tau)}{d\tau^2} \end{bmatrix} \mathbf{A}^T.$$

Ecrivons les conditions nécessaires de décorrélacion entre chaque source réestimée $z_i(t)$, il vient :

$$\forall \tau, \forall i \neq j, \Gamma_{z_i z_j}(\tau) = \mathbf{E} [z_i(t)z_j(t+\tau)] = 0.$$

En développant $\forall \tau, \forall i \neq j$,

$$\Gamma_{z_i z_j}(\tau) = \sum_k \sum_l s_i^k s_j^l \mathbf{E} [y_k(t)y_l(t+\tau)] = 0. \tag{5}$$

Si l'on pose les vecteurs :

$$\begin{aligned}
S_i &= [s_i^1, s_i^2, \dots, s_i^p]^T, \\
S_j &= [s_j^1, s_j^2, \dots, s_j^p]^T,
\end{aligned}$$

l'équation (5) se réécrit sous une forme matricielle :

$$\forall \tau, \forall i \neq j, S_i^T R_Y(\tau) S_j = 0.$$

Développons en série de Taylor la matrice $R_Y(\tau)$ au voisinage de zéro.

En remarquant que tous les termes contenant des ordres de dérivation impairs sont nuls en raison de la symétrie, par rapport à τ , des termes $\Gamma_{x_i}(\tau)$, il vient, $\forall \tau, \forall i \neq j$:

$$\begin{aligned} S_i^T \left[R_Y(0) + \frac{\tau^2}{2!} \left[\frac{d^2 R_Y(\tau)}{d\tau^2} \right]_{\tau=0} + \dots \right. \\ \left. \dots + \frac{\tau^{2k}}{k!} \left[\frac{d^{2k} R_Y(\tau)}{d\tau^{2k}} \right]_{\tau=0} + \dots \right] S_j = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

La condition (6) est équivalente au système d'équations suivant :

$$\begin{aligned} S_i^T R_Y(0) S_j &= 0, \\ S_i^T \left[\frac{d^2 R_Y(\tau)}{d\tau^2} \right]_{\tau=0} S_j &= 0 \\ \forall k \in \{2, \dots, \infty\}, S_i^T \left[\frac{d^{2k} R_Y(\tau)}{d\tau^{2k}} \right]_{\tau=0} S_j &= 0. \end{aligned} \quad (7)$$

La théorie des faisceaux de matrices [5] affirme que quelle que soit la valeur k_0 du paramètre k , le système de deux équations :

$$\begin{aligned} S_i^T R_Y(0) S_j &= 0, \\ S_i^T \left[\frac{d^{2k_0} R_Y(\tau)}{d\tau^{2k_0}} \right]_{\tau=0} S_j &= 0 \end{aligned} \quad (8)$$

offre de façon unique p solutions linéairement indépendantes si trois conditions sont vérifiées :

- Les deux matrices $R_Y(0)$ et $R_Y^{(2k_0)}(0)$ sont symétriques ;
- Au moins l'une d'entre elles est définie positive ;
- Il n'existe aucune ligne de $R_Y(0)$ qui soit proportionnelle à une ligne de $R_Y^{(2k_0)}(0)$.

$R_Y(0)$ et $R_Y^{(2k_0)}(0)$ sont toutes deux symétriques définies positives, ce qui valide les deux premières conditions. Pour que la troisième condition ne soit pas vérifiée, il faudrait que les fonctions d'autocorrélation normalisées de chaque source possèdent le même développement limité au second ordre au voisinage de zéro. Cette éventualité est par hypothèse peu vraisemblable.

Dans ces conditions, on montre facilement que si l'on forme la matrice $V = [S_1, S_2, \dots, S_p]$, on peut identifier les vecteurs S_i comme étant les p solutions indépendantes et non orthogonales, associées aux valeurs propres nécessairement différentes et positives de l'équation aux valeurs propres suivante :

$$R_Y(0)V = R_Y^{(2k_0)}(0)V\Delta, \quad (9)$$

où Δ est une matrice diagonale.

On peut montrer que la matrice $S = V^T$ est une inverse du mélange A au sens de (2).

Ainsi, la résolution du système réduit (8) au moyen de (9) résoud de façon générale le système (7), c'est en ce sens que la méthode est qualifiée d'optimale.

Dans la pratique, pour minimiser les erreurs d'estimation au niveau des dérivées, nous poserons en priorité $k_0 = 1$. La matrice Z rassemblant des signaux *statistiquement indépendants* et *proportionnels* aux signaux sources peut être obtenue en formant le produit : $Z(t) = SY(t)$.

2.3 Algorithme composite améliorant les performances (IMISO II)

Un résultat remarquable exploité dans l'algorithme SOBI est le fait que les matrices d'autocovariance des observations blanchies $R_Y(\tau)$ possèdent la même base propre U quel que soit le retard τ .

Il est facile de constater que les matrices $R_Y^{(2k)}(0)$ possèdent la même propriété et diagonalisent toutes dans la base propre U quel que soit l'ordre de dérivation $2k$. Dans ces conditions, la matrice S satisfaisant (2) est donnée par $S = U^T W$ où W est la matrice de blanchiment décrite précédemment. La base U peut être déterminée après blanchiment des signaux captés en diagonalisant conjointement un ensemble de matrices d'autocovariance dérivées.

Il est ainsi théoriquement possible de séparer des sources possédant des fonctions d'autocorrélation identiques à l'ordre $2k_0$ pour peu que l'on puisse estimer correctement la matrice $R_Y^{(2(k_0+1))}(0)$.

Dans tous les cas, l'utilisation de plusieurs matrices de covariance dérivées des observations blanchies accroît la robustesse du traitement de façon très significative.

2.4 Résultats

Les performances du traitement sont quantifiées au moyen d'un indice [4] fonction de la matrice globale $H = SA$ associant mélange et démélange, et défini par :

$$\begin{aligned} ind(H) \stackrel{\text{def}}{=} & \frac{1}{2} \left[\sum_i \left(\sum_j \frac{|h_{ij}|^2}{\max_i |h_{ii}|^2} - 1 \right) \right. \\ & \left. + \sum_j \left(\sum_i \frac{|h_{ij}|^2}{\max_j |h_{jj}|^2} - 1 \right) \right]. \end{aligned}$$

Cet indice non négatif sera nul si H a un seul élément non nul par ligne et par colonne, c'est à dire si H satisfait à (2). Une faible valeur traduira que l'on est proche de la solution cherchée.

Nous présentons une première série de simulations numériques dans le cas de deux sources. Chaque source à temps discret $x_i(k)$ est synthétisée par filtrage FIR passe-bas d'une séquence de 4096 variables aléatoires indépendantes de densité de probabilité gaussienne.

On donne les filtres :

$$T_1(z) = 0.0033 + 0.0590z^{-1} + 0.2492z^{-2} + 0.3770z^{-3} \\ + 0.2492z^{-4} + 0.0590z^{-5} + 0.0033z^{-6},$$

$$T_2(z) = 0.0050 + 0.1075z^{-1} + 0.3875z^{-2} \\ + 0.3875z^{-3} + 0.1075z^{-4} + 0.0050z^{-5},$$

et le mélange :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1.1 & 1.2 \end{bmatrix}.$$

Les algorithmes SOBI, IMISO I et IMISO II sont testés par des simulations de Monte Carlo. Nous reportons dans le tableau (1) la valeur moyenne et la variance de l'indice de performance établies pour 500 réalisations indépendantes des signaux $x_1(k)$ et $x_2(k)$.

Algorithme	$E[ind(H)]$	$Var[ind(H)]$
SOBI	0.044 3	$2.83e^{-2}$
IMISO I	0 .0107	$2.28e^{-4}$
IMISO II	0.0016	$3.67e^{-6}$

Tableau 1. Résultats

Une deuxième série de simulations est menée dans un cas de figure proche de la dégénérescence. Les sources $x_1(k)$ et $x_2(k)$ sont obtenues en filtrant deux signaux blancs gaussiens respectivement par les filtres FIR passe bas T_1' et T_2' . Les fonctions de transfert de T_1' et T_2' sont de même ordre et leur fréquence de coupure sont très proches. La figure 2.4 présente sur un même graphique le module du gain complexe de chacun des filtres T_1' et T_2' .

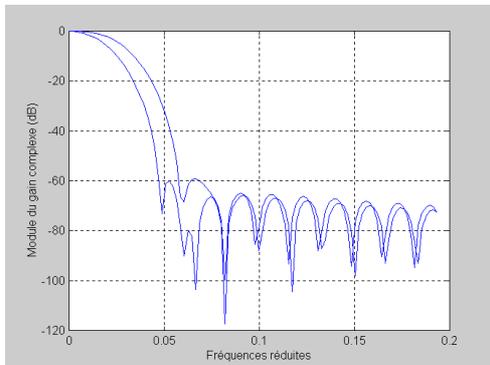


FIG. 1 — Module du gain complexe des filtres T_1' et T_2'

Le tableau (2) affiche les performances respectives de chaque algorithme pour 500 réalisations indépendantes des signaux $x_1(k)$ et $x_2(k)$.

Algorithme	$E[ind(H)]$	$Var[ind(H)]$
SOBI	1.1387	0.6743
IMISO I	0 .0651	0.0123
IMISO II	0.0537	0.0076

Tableau 2. Résultats

Des valeurs propres proches de la dégénérescence ont sérieusement affecté les performances de l'algorithme SOBI.

Les algorithmes IMISO I et IMISO II affichent des résultats satisfaisants avec un net avantage pour le traitement avec IMISO II. Dans IMISO II, la diagonalisation conjointe des matrices d'autocovariance dérivées à l'ordre deux et à l'ordre quatre permet de résister théoriquement à des configurations où les fonctions d'intercorrélation des sources ont un développement identique à l'ordre deux.

2.5 Conclusion

Les traitements SOBI, IMISO I et IMISO II permettent de répondre au problème de la séparation d'un mélange instantané de sources colorées à partir des seules statistiques du second ordre des observations. Aucune hypothèse n'est alors faite sur les densités de probabilité de chaque source. L'utilisation de la matrice de covariance et de sa dérivée d'ordre $2k_0$ produit un système d'équations indépendantes rendant le traitement optimal. Dans la pratique, la diagonalisation conjointe de plusieurs matrices de covariance dérivées rend la méthode robuste même lorsque les densités spectrales de puissance des sources sont très proches.

3 Bibliographie

- 1 Adel BELOUHRANI. "Séparation autodidacte de sources : Algorithmes, Performances et Application à des signaux expérimentaux". Doctorat ENST 1995.
- 2 P. COMON. P.LACOUME. "Statistiques d'ordre supérieur". Cours de l'école d'été de physique des Houches. Septembre 1993.
- 3 A. SOULOUMIAC et J.F. CARDOSO, "Comparaison de méthodes de séparation de sources". GRETSI, Juans les Pins, France, 1991.
- 4 E. MOREAU and N. THIRION. "Multichannel blind signal deconvolution using high order statistics" in Proc. IEEE SP Workshop on SSAP, Corfu, Greece, pp336-339, Jun 1996.
- 5 GANTMACHER F.R. "Théorie des matrices", tome 1, pages 311-315.
- 6 J.F. CARDOSO et A. SOULOUMIAC, "Jacobi angles for simultaneous diagonalization"
- 7 T. LANG, I. YUJIRO, L. RUEY-WEN, "A finite step global convergence algorithm for the parameter estimation of multichannel." MA processes transaction on Signal Processing, vol.40, n°10 octobre 1992