

# Évaluation de méthodes de traitement d'antenne en reconstruction d'image appliquée au contrôle non destructif

Ali Mohammad-Djafari et Yassin Khayi

Laboratoire des Signaux et Systèmes (CNRS-SUPELEC-UPS)

École Supérieure d'Électricité

Plateau de Moulon, 91192 Gif-sur-Yvette Cedex, France

Tél : 01-69 85 17 41 Fax : 01-69 41 30 60 E-mail : djafari@lss.supelec.fr

## RÉSUMÉ

L'objet de ce travail est la reconstruction de la forme d'un défaut dans un milieu homogène en tomographie X pour des applications en contrôle non destructif (CND). Lorsque le contour du défaut est modélisé par un polygône on peut relier les coordonnées de ses sommets aux projections. On peut alors estimer ces coordonnées soit en utilisant les moments des projections soit directement les projections. Dans une des étapes du premier cas on trouve un problème mathématique semblable à celui du traitement d'antenne. C'est pourquoi, dans ce papier, nos objectifs sont :

- l'établissement d'un lien explicite entre les problèmes de la reconstruction de la forme d'un objet polygônale en tomographie et celui du traitement d'antenne ;
- l'évaluation de performances des méthodes de traitement d'antenne pour la résolution de ce problème ;
- la proposition d'une nouvelle méthode fondée sur l'approche bayésienne pour l'estimation des coordonnées des sommets du polygône directement à partir des projections.

## ABSTRACT

This work concerns the shape reconstruction from X ray tomographic projection data in non destructive testing applications. When the contour of a homogeneous default in a homogeneous background is modelled with a polygône, one can relate its vertices coordinates to the projection data. One can then estimate them either from the moments of projection or directly from the projection data. In one of the steps in the first case, a mathematical inversion problem arises which is similar to the antenna array processing (AAP) problem. That is why, in this paper we fixed the following objectives :

- Establishment of an explicite link between the AAP and this tomographic image reconstruction problem ;
- Evaluation of the AAP methods for the resolution of this problem ;
- Proposition of a new method based on Bayesian estimation approach to estimate directly the vertices coordinates of the polygône from the projection data.

## 1 Introduction

La reconstruction d'image en tomographie à rayon X consiste à déterminer l'objet  $f(x, y)$  à partir de ses projections

$$p(r, \phi) = \int f(x, y) \delta(r - x \cos \phi - y \sin \phi) dx dy \quad (1)$$

où  $(x, y)$  sont les coordonnées cartésiennes d'un point dans un espace 2-D,  $f(x, y)$  l'objet recherché et  $\phi$  est l'angle d'incidence. Dans certaines applications de CND, on cherche un défaut (trou d'air, inclusion) dans un milieu homogène (métal). Cette recherche se fait en général en trois étapes : détection, localisation et caractérisation.

Les techniques actuelles sont capables d'effectuer les deux premières étapes, mais la détermination précise de la forme du défaut reste encore du domaine de la recherche.

L'objet de ce travail est de proposer une nouvelle méthode de reconstruction pouvant être utilisée en pratique (i.e. à coût de calcul peu élevé). L'idée de base est de reconstruire le contour du défaut plutôt que l'ensemble du volume qui le contient.

En effet, dans le cas d'un objet compact :

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } (x, y) \in P \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (2)$$

au lieu d'estimer  $f$  (la reconstruction pixel par pixel), il suffit de rechercher le contour  $\partial P$  de l'objet. L'originalité de ce

travail est de modéliser le contour de l'objet par un polygône et d'estimer les coordonnées de ses sommets  $\{z_j = (x_j, y_j), j = 1, \dots, N\}$  à partir des projections.

Cette idée n'est pas nouvelle. Milanfar, Wilski et al. [1, 2] ont déjà utilisé un tel modèle et ont essayé d'estimer les  $z_j$  à partir des projections. Mais, dans leur travail ils ont essayé de relier les  $z_j$  aux moments des projections et ont établi des conditions sur le nombre de projections nécessaires pour l'identifiabilité de la solution.

Curieusement, la relation mathématique liant les moments des projections aux coordonnées des sommets de polygône ressemble à la relation qui lie les mesures du champs reçu sur une antenne aux directions d'arrivées des ondes en traitement d'antennes.

Les objectifs de ce travail sont :

1. Rappeler les relations qui permettent de lier les moments des projections aux  $z_j$  et montrer l'analogie avec le traitement d'antenne ;
2. Évaluer les performances des méthodes classiques du traitement d'antenne pour la résolution de ce problème de tomographie ;
3. Proposer une nouvelle méthode de reconstruction fondée sur l'approche bayésienne.

## 2 Reconstruction d'un objet de forme polygônale

La principale idée de cette approche consiste à établir une relation entre les moments de la fonction  $f(x, y)$  :

$$\mu_{pq} = \int_P f(x, y) x^p y^q dx dy. \quad (3)$$

et les moments des projections :

$$h_k(\phi) = \int_{-1}^1 p(r, \phi) r^k dr \quad (4)$$

L'obtention d'une telle relation repose sur l'équation

$$\int_{-1}^1 p(r, \phi) F(r) dr = \int_P f(x, y) F(x \cos \phi + y \sin \phi) dx dy \quad (5)$$

où en remplaçant  $f(x, y)$  de l'équation (2) et  $F(r) = r^k$ , on obtient :

$$h_k(\phi) = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \cos^{k-j}(\phi) \sin^j(\phi) \mu_{k-j, j}. \quad (6)$$

D'autre part, les moments géométriques  $\mu_{pq}$  sont reliés aux moments harmoniques de  $f(x, y)$  :

$$c_k = \int f(x, y) z^k dx dy \quad \text{avec} \quad z = x + iy \quad (7)$$

par

$$c_k = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} i^j \mu_{k-j, j}. \quad (8)$$

qui sont reliés eux mêmes aux coordonnées  $z_j = (x_j + iy_j)$  du polygone décrivant le contour  $\partial P$  de l'objet par :

$$\tau_k = \sum_{j=0}^N a_j z_j^k \quad \text{avec} \quad \tau_k = k(k-1)c_{k-2}, \quad (9)$$

et où

$$a_j = \frac{i}{2} \left( \frac{\bar{z}_{j-1} - \bar{z}_j}{z_{j-1} - z_j} - \frac{\bar{z}_j - \bar{z}_{j+1}}{z_j - z_{j+1}} \right). \quad (10)$$

Ainsi, nous avons, d'un coté, la relation explicite (6) liant les moments des projections aux moments de l'objet et d'autre coté, la relation (9) liant les moments de l'objet aux coordonnées des sommets du polygone décrivant son contour. C'est ainsi qu'on peut proposer une méthode de reconstruction en suivant les étapes suivantes :

- 1- Calculer les  $h_k(\phi)$  à partir des projections  $p(r, \phi)$  ;
- 2- Calculer les moments géométriques  $\mu_{k,j}$  à partir des  $h_k(\phi)$  (relation 6) ;
- 3- Calculer les  $c_k$ , puis les  $\tau_k$  à partir des  $\mu_{k-j, j}$  ;
- 4- Calculer les sommets de polygone  $z_j$  à partir des  $\tau_k$  (relation 9).

Notons que les étapes 1 et 3 ne posent aucune difficulté car il s'agit de relations directes, tandis que les étapes 2 et 4 nécessitent une inversion et il faut bien étudier les conditions d'existence et d'unicité de leurs solutions. C'est d'ailleurs l'inversion de l'étape 4 qui est au coeur du sujet de cet article car c'est cette équation que l'on retrouve en traitement d'antenne.

## 3 Lien avec le traitement d'antenne

En traitement d'antenne le signal mesuré par chaque antenne est modélisé par

$$y_k = \sum_{j=1}^n a_j z_j^k + v_k, \quad k = 0, \dots, N-1 \quad (11)$$

où les  $z_j$  représentent les directions d'arrivées des sources et les  $a_j$  leurs amplitudes. En comparant l'équation (9) avec cette équation, on peut voir que mathématiquement les deux problèmes sont identiques.

|                        | $\tau_k$            | $z_j$                            | $a_j$                  |
|------------------------|---------------------|----------------------------------|------------------------|
| reconstruction d'image | moments harmoniques | coordonnées sommets              | ?                      |
| Traitement d'antenne   | Mesures             | Direction d'arrivées des sources | Amplitudes des sources |

C'est pourquoi, nous avons voulu évaluer les performances de méthodes du traitement d'antenne pour la résolution de ce problème. Nous avons utilisé essentiellement deux types de méthodes : celles de Prony et celles dite du type "Matrix Pencil" qui sont décrites ici très brièvement.

Écrivant l'équation (9) pour  $k = 0, 1, \dots, M$  on a :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ z_1 & z_2 & \dots & z_N \\ z_1^2 & z_2^2 & \dots & z_N^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z_1^{M-1} & z_2^{M-1} & \dots & z_N^{M-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau_0 \\ \tau_1 \\ \tau_2 \\ \vdots \\ \tau_{M-1} \end{pmatrix}$$

ou encore

$$\mathbf{Za} = \boldsymbol{\tau}. \quad (12)$$

La méthode de Prony [3] s'appuie sur le fait que les  $z_j$  sont les zéros du polynome

$$P(z) = \prod_{i=0}^N (z - z_i) = \sum_{i=0}^N p_i z^{N-i}, \quad p_0 = 1, \quad (13)$$

où les coefficients  $\{p_i, i = 1, \dots, N\}$  sont solution de

$$\begin{pmatrix} \tau_0 & \dots & \tau_{N-1} \\ \tau_1 & \dots & \tau_N \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \tau_{M-N-1} & \dots & \tau_{M-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_N \\ p_{N-1} \\ \vdots \\ p_1 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \tau_N \\ \tau_{N+1} \\ \vdots \\ \tau_{M-1} \end{pmatrix},$$

ou encore

$$\mathbf{Tp} = -\mathbf{h}. \quad (14)$$

On montre alors que lorsque  $M \geq 2N - 1$  la matrice  $\mathbf{T}$  est de rang  $N$ . L'équation (14) est la base des méthodes de Prony qui consiste à former la matrice  $\mathbf{T}$  et le vecteur  $\mathbf{h}$  à partir des données  $\tau_k$ , à estimer  $\mathbf{p}$  à partir de cette équation et à calculer les  $z_j$  en cherchant les racines de  $P(z) = 0$ . Pour résoudre (14) nous avons utilisé soit

$$\hat{\mathbf{p}} = -(\mathbf{T}^t \mathbf{T})^{-1} \mathbf{T}^t \mathbf{h} \quad (15)$$

soit

$$\hat{\mathbf{p}} = -(\mathbf{T}^t \mathbf{T} + \sigma_{\min} \mathbf{I})^{-1} \mathbf{T}^t \mathbf{h}, \quad (16)$$

où  $\sigma_{\min}$  est la plus petite valeur singulière de la matrice  $[\mathbf{T}, \mathbf{h}]$ .

Les méthodes dites de “matrix pencil” [4, 5, 6] sont fondées sur la définition des matrices

$$T_0 = \begin{pmatrix} \tau_{N-1} & \tau_{N-2} & \cdots & \tau_0 \\ \tau_N & \tau_{N-1} & \cdots & \tau_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tau_{2M-2} & \tau_{2M-3} & \cdots & \tau_{2M-N-1} \end{pmatrix},$$

et

$$T_1 = \begin{pmatrix} \tau_N & \tau_{N-1} & \cdots & \tau_1 \\ \tau_{N-1} & \tau_N & \cdots & \tau_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tau_{2M-1} & \tau_{2M-2} & \cdots & \tau_{2M-N} \end{pmatrix}$$

et sur le fait que les  $z_j$  sont les valeurs propres  $T_0 - zT_1$ .

## 4 Évaluation des performances de méthodes du traitement d’antenne

Pour évaluer l’utilité et les performances de méthodes de traitement d’antenne pour la résolution de ce problème de reconstruction d’image, nous avons procédé de manière suivante :

- 1- Créer un objet en définissant les  $z_j$  ;
- 2- Calculer ses projections  $p$  (eq. 1) et ajouter du bruit ;
- 3- Calculer les différents moments  $h_k$  (eq. 4), puis  $\mu_{k,j}$  (eq. 6), puis  $c_k$  (eq. 8) et  $\tau_k$  (eq. 9) ;
- 4- Appliquer les méthodes de traitement d’antenne utilisant les  $\tau_k$  pour estimer les  $z_j$  (eq. 9) ;
- 5- Comparer les résultats de reconstruction avec l’objet du départ.

Notons aussi que lorsque le polygone est convexe, une fois les coordonnées de ses sommets déterminées on peut construire le polygone sans ambiguïté. Ceci n’est plus vrai pour un polygone non-convexe et il faut une procédure supplémentaire pour l’ordonnement des sommets et la construction du polygone. Pour ceci on peut utiliser la relation supplémentaire (10) qui existe entre  $a_j$  et  $z_j$  (venant du théorème de Green dans le plan complexe et les équations de Cauchy-Riemann pour les fonctions analytiques [7, 8]). En effet, une fois les  $z_j$  calculés, on peut calculer les  $a_j$  de deux façons : la première utilisant l’équation (9) et la deuxième la relation (10). On peut alors choisir comme solution le couple le plus proche (distance euclidienne minimum) et ainsi déterminer l’ordonnement des sommets du polygone.

Les simulations sont portées sur 3 images composées d’un seul objet polygonal avec différentes formes de contour : un triangle ( $N = 3$ ) et deux objets non convexes  $N = 4$  et  $N = 6$ . Les résultats de reconstruction sont influencés par plusieurs paramètres, le nombre de projection  $N_p$ , le nombre de moments  $N_m$  et le rapport signal sur bruit. Pour chaque objet, nous avons considéré trois situations :

- a)  $N_p = N_m = 2N - 2$  et  $SNR = 50db$  ;
- b)  $N_p > N_m = 2N - 2$  et  $SNR = 30db$  ;
- c)  $N_p > N_m > 2N - 2$  et  $SNR = 20db$ .

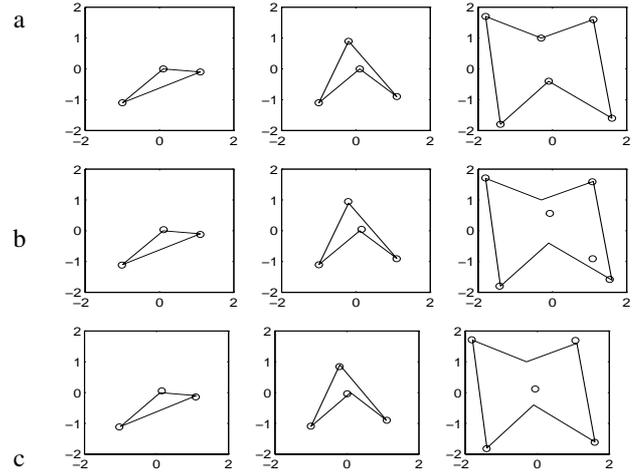


Fig. 1 : Les résultats de reconstructions avec différents paramètres : - Objet initial, o Les sommets reconstruits.

## 5 Conclusions et proposition d’une nouvelle méthode

Nous avons établi une relation explicite entre un problème de reconstruction d’image en tomographie X et celui du traitement d’antenne. Nous avons voulu savoir si les méthodes classiques du TA pouvaient être utilisées pour la résolution de ce problème. Le principal résultat de cette étude est que ces méthodes ne peuvent pas être utilisées dans des applications pratiques de la reconstruction d’image. La principale cause est dans le fait que, dans cette approche, on n’utilise que les moments des projections.

Pour remédier à cette difficulté, nous avons récemment proposé une méthode de reconstruction ([9, 10]) utilisant directement les projections et non pas leurs moments. Cette méthode est fondée sur l’approche bayésienne de la régularisation et la solution est définie comme l’estimée au sens du MAP, ce qui ramène le problème à celui de la minimisation d’un critère de la forme

$$J(z) = \|p - h(z)\|^2 + \lambda\Omega(z), \quad (17)$$

où  $p$  représente les données,  $z = x + iy$  les inconnues,  $h(z)$  le modèle direct et  $\Omega(z)$  le modèle *a priori* qui est choisi

$$\Omega(z) = \sum_{j=1}^N |z_{j-1} - z_j + z_{j+1}|^2 \quad (18)$$

Ce choix qui est fait pour favoriser les contours doux peut être interprété soit en terme de la loi *a priori* et un modèle markovien pour les  $z_j$  soit comme un terme de régularisation. En effet,  $|z_{j-1} - z_j + z_{j+1}|^2$  mesure la distance entre le sommet  $z_j$  et le point milieu du segment reliant les sommets voisins  $z_{j-1}$  et  $z_{j+1}$ . La principale difficulté de cette approche se trouvent dans le fait que  $h(z)$  n’est pas linéaire en  $z$  et par conséquent le critère  $J(z)$  n’est pas quadratique en  $z$ , d’où la possibilité de minima locaux. Nous avons envisagé deux solutions : le recuit simulé et ICM.

La figure 2 montre un exemple de résultat que nous avons pu obtenir.

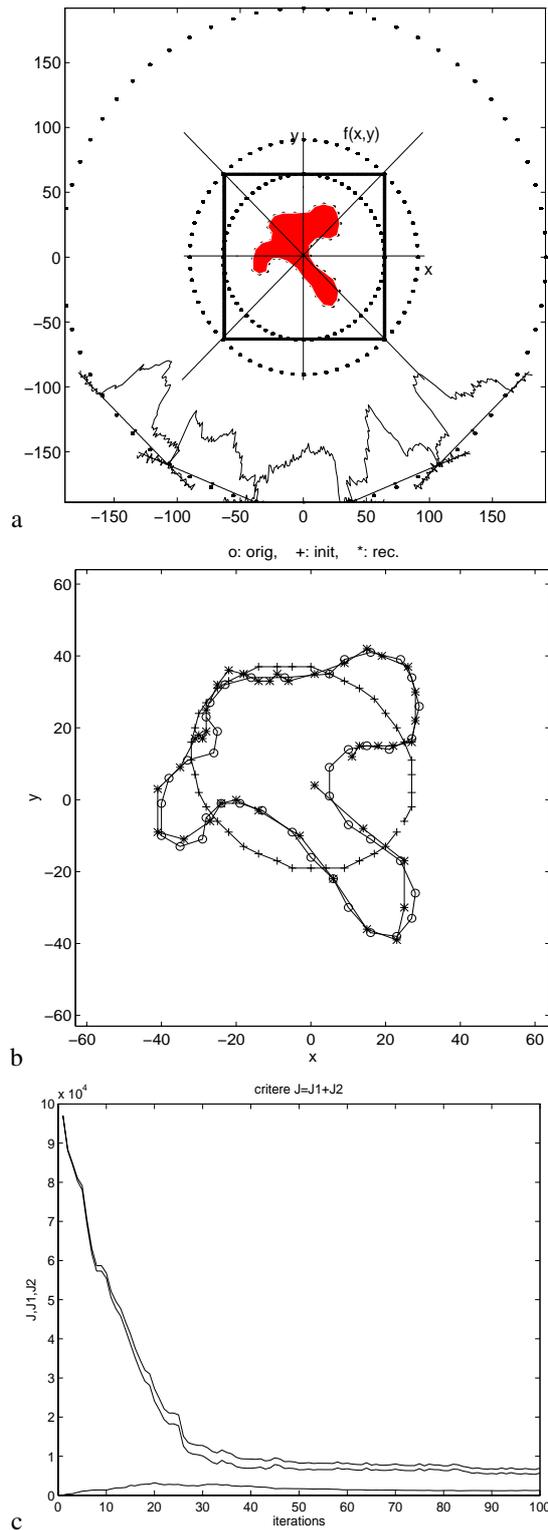


Fig. 2 : Reconstruction tomographique pour une application en CND.

a) Objet original et 5 projections limitées en angles entre -45 et 45 degrés.

b) Reconstruction modélisant le défaut par un polygone avec  $N = 40$  sommets. o : Objet original, + : Initialisation  
\* : Résultat de reconstruction.

c) Évolution du critère  $J(z) = J_1(z) + \lambda J_2(z)$  au cours des iterations.

## 6 Conclusions

La principale conclusion de ce travail est que les méthodes classiques du traitement d'antenne ne conviennent pas pour la résolution de ce problème de la reconstruction de forme d'un objet à partir de ses projections en tomographie X. Deux principales raisons sont :

- Premièrement, les contraintes d'identifiabilité (ou d'inversibilité des relations 6 et 9) sont trop restrictives en pratique. En effet lorsqu'on a un nombre faible de projections, cette approche ne permet de reconstruire que des objets de formes très simples.
- Deuxièmement, dans cette approche on n'utilise pas la totalité des informations contenues dans les données, car seules les moments des projections sont utilisées.

Partant de ce constat, nous avons présenté une approche différente qui comble ces deux lacunes. En effet, la méthode présentée utilise directement les données et comme le montre un exemple de résultat de simulations, même avec un nombre très faible de projections le résultat de la reconstruction de cet objet polygonal avec un nombre de sommet bien plus grande que le nombre de projections semble bien satisfaisant.

## Références

- [1] P. Milanfar, *Geometric Estimation and Reconstruction from Tomographic Data*. PhD thesis, MIT, Dept. of Electrical Eng., 1993.
- [2] P. Milanfar, W. Karl, and A. Wilsky, "A moment-based variational approach to tomographic reconstruction," *IEEE Transactions on Image Processing*, vol. 25, no. 9, pp. 772–781, 1994.
- [3] H. Ouibrahim, "Prony, Pisarenko, and the matrix pencil : A unified presentation," *IEEE Transactions on Acoustics Speech and Signal Processing*, vol. ASSP-37, no. 1, p. 133, 1989.
- [4] M. Zoltowski and D. Stavrinos, "Sensor array signal processing via a procrustes rotations based eigenanalysis of the ESPRIT data pencil," *IEEE Transactions on Acoustics Speech and Signal Processing*, vol. ASSP-37, no. 6, p. 832, 1989.
- [5] S. Prasac and B. Chandna, "Direction-of-arrival estimation using rank revealing QR factorization," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 39, pp. 1224–1229, 1991.
- [6] J. Demmel and B. Kågström, "The generalized Schur decomposition of an arbitrary pencil  $A - \lambda B$  : Robust software with error bounds and applications. Part I : Theory and algorithms," *ACM Transactions on Mathematical Software*, vol. 19, pp. 160–174, 1993.
- [7] P. Davis, "Triangle formulas in the complex plane," *Mathematics of Computation*, vol. 18, no. 569–577, 1964.
- [8] P. Davis, "Plane regions determined by complex moments," *Journal of Approximation Theory*, vol. 19, no. 148–153, 1977.
- [9] A. Mohammad-Djafari, "Image reconstruction of a compact object from a few number of projections," in *IASTED, Int. Conf. on Signal and Image Processing (SIP'96)*, (Orlando, Florida, USA), pp. 325–329, 1996.
- [10] A. Mohammad-Djafari, "A Bayesian approach to shape reconstruction of a compact object from a few number of projections," in *Maximum Entropy and Bayesian Methods*, (MaxEnt96, Aug. 96, Berg-en-Dal, South Africa), Kluwer Academic Publishers, 1996.