Algunas condiciones para la obtención de negaciones sobre los Conjuntos Tipo 2

Pablo Hernández[1], Susana Cubillo[2], Carmen Torres[2]

[1] Departamento de Matemática y Física,
Univ. Nacional Experimental del Táchira (UNET),
San Cristóbal, Táchira, Venezuela
phernandezv@unet.edu.ve
[2] Departamento de Matemática Aplicada,
Univ. Politécnica de Madrid (UPM),
28660 Boadilla del Monte, Madrid, España
{scubillo,ctorres}@fi.upm.es

Resumen En Hernández et. al. (2014) se presentó, a partir del “Principio de Extensión” de Zadeh, un conjunto de operadores en $[0,1]$, exponiendo algunas condiciones bajo las que dichas operaciones son negaciones en **L** (conjunto de las funciones normales y convexas de [0,1] en [0,1]. Además, **L** es un subconjunto del conjunto de los grados de pertenencia de los conjuntos borrosos de tipo 2). En el presente trabajo, se define un conjunto de operaciones más general que el estudiado en el referido artículo, y se establecen algunas condiciones suficientes para que sean negaciones y negaciones fuertes sobre **L**.
Palabras Clave: Conjuntos borrosos de tipo 2, funciones de [0,1] en [0,1], funciones normales y convexas, negaciones, negaciones fuertes.

1. Introducción

Los conjuntos borrosos de tipo 2 (T2FSs) fueron introducidos por L.A. Zadeh en 1975 [14], como una extensión de los conjuntos borrosos de tipo 1 (FSs). Mientras que en estos últimos el grado de pertenencia de un elemento al conjunto viene determinado por un valor real entre 0 y 1, en el caso de los T2FSs el grado de pertenencia de un elemento es un conjunto borroso en [0,1], es decir, un T2FS queda determinado por una función de pertenencia $\mu : X \rightarrow \mathbf{M}$, donde $\mathbf{M} = [0,1]^{[0,1]} = Map([0,1],[0,1])$ es el conjunto de las funciones de [0,1] en [0,1] (ver [9] , [10]). El hecho de que la función de pertenencia de los conjuntos de tipo 2 sea un nuevo conjunto borroso, los hace más adecuados para modelizar la incertidumbre ([7], [9], [8]). En este sentido, existen diversos estudios en los que se muestran las ventajas de este tipo de conjuntos ([1], [11]).

Desde que los T2FSs fueron introducidos, se han extendido a dichos conjuntos (ver, por ejemplo, [3], [2], [6], [9], [10], [12]), a partir del “Principio de Extensión” de Zadeh, muchas de las definiciones, operaciones, propiedades y resultados obtenidos en los FSs. En efecto, en todas aquellas aplicaciones (sistemas de inferencia, sistemas experto, sistemas de control, reconocimiento de imágenes,...) en los que se encuentre ventajoso el utilizar información tipo-2, es imprescindible poder contar con elementos matemáticos que modelicen lo más adecuadamente posible la información del experto en cada caso particular. Entre estos elementos se encuentra el operador negación, que modeliza el complementario de un conjunto, concepto esencial en diversas aplicaciones; por ejemplo, si en una imagen se quiere diferenciar un objeto de su entorno (complementario de dicho objeto). Por ello, no es algo obvio el análisis de las posibles negaciones que puedan elegirse, según el caso concreto. En este sentido, en [6] se hizo un estudio detallado acerca de las negaciones sobre los T2FSs. Por una parte, se propusieron unos axiomas de negación y negación fuerte sobre **M** y sobre **L** (subconjunto de **M**, de las funciones normales y convexas). Por otra, se obtuvieron, de acuerdo al principio de extensión, familias de negaciones y negaciones fuertes sobre **L**.

El presente trabajo se dedica a profundizar en el estudio de las negaciones, tanto en **M**, como en **L**, obteniendo nuevos resultados que mejoran los presentados en estudios anteriores. En particular, se definen nuevos operadores por medio del Principio de Extensión de Zadeh, y se analizan condiciones necesarias y suficientes para que verifiquen los axiomas de negación y negación fuerte en **M** y en **L**.

El artículo se organiza como sigue: en la Sección 2, Subsección 2.1 se recuerdan las definiciones, conceptos básicos y propiedades de los FSs y T2FSs, necesarios para seguir el trabajo. En la Subsección 2.2 se exponen algunos conceptos y resultados realizados por otros autores en relación con las negaciones en los conjuntos borrosos, se muestran los principales resultados de [6] acerca de las negaciones sobre los T2FSs, y se presentan algunas propiedades de las negaciones fuertes en **L**.

La Sección 3 se dedica al estudio de un conjunto de operadores sobre **M**, más general que el estudiado en [6], y se encuentran algunas condiciones que aseguran que dichos operadores satisfacen determinadas propiedades en **M**. En la Sección 4 se exponen algunas conclusiones.

2. Preliminares

2.1. Definiciones y Propiedades de los FSs y T2FSs

En todo el trabajo se denotará por X un conjunto no vacío que representará el universo de discurso. Además, $\leq$ denotará la relación usual de orden en el retículo de los números reales.

Definición 1 *([13]) Un conjunto borroso de tipo 1 (FS),* A*, queda caracterizado por una función de pertenencia μ_A,*

$$\mu_A : X \to [0,1],$$

donde $\mu_A(x)$ es el grado de pertenencia de un elemento $x \in X$ al conjunto A.

Definición 2 *([10]) Un conjunto borroso de tipo 2 (T2FS),* A*, queda caracterizado por una función de pertenencia:*

$$\mu_A : X \to \boldsymbol{M} = [0,1]^{[0,1]} = Map\,([0,1],[0,1]).$$

Esto es, $\mu_A(x)$ es un conjunto borroso en el intervalo $[0,1]$, y es el grado de pertenencia de un elemento $x \in X$ al conjunto A. Por tanto,

$$\mu_A(x) = f_x, \quad donde\ f_x : [0,1] \to [0,1].$$

Se denota por $F_2(X)$, $F_2(X) = Map(X, \boldsymbol{M})$, al conjunto de todos los conjuntos borrosos de tipo 2 sobre X.

En [12], se justifica que las operaciones sobre $Map(X,\mathbf{M})$ se pueden definir de forma natural a partir de las operaciones sobre **M**, verificando las mismas propiedades.

Por tanto, en este artículo trabajaremos en **M**, ya que todos los resultados se pueden extender directa y fácilmente a $Map(X,\mathbf{M})$.

Definición 3 *([5], [12], [3]) En **M** se definen las operaciones $\sqcup$ (unión), $\sqcap$ (intersección), $\neg$ y los elementos $\bar{0}$ y $\bar{1}$ de la siguiente forma:*

$$(f \sqcup g)(x) = sup\{f(y) \wedge g(z) : y \vee z = x\},$$

$$(f \sqcap g)(x) = sup\{f(y) \wedge g(z) : y \wedge z = x\},$$

$$\neg f(x) = sup\{f(y) : 1 - y = x\} = f(1-x),$$

$$\bar{0}(x) = \begin{cases} 1 \ si \ x = 0 \\ 0 \ si \ x \neq 0 \end{cases}, \quad \bar{1}(x) = \begin{cases} 1 \ \ si \ x = 1 \\ 0 \ si \ x \neq 1. \end{cases},$$

donde $\vee$ y $\wedge$ son las operaciones máximo y mínimo, respectivamente, en el retículo $[0,1]$.

El álgebra $\mathbb{M} = (\mathbf{M}, \sqcup, \sqcap, \neg, \bar{0}, \bar{1})$ no tiene estructura de retículo, ya que no se cumple la ley de absorción [5], [12]. Sin embargo, las operaciones $\sqcup$ y $\sqcap$ cumplen las propiedades requeridas para definir, cada una de ellas, un orden parcial sobre **M**.

Definición 4 *([10], [12]) En **M** se definen los dos órdenes parciales siguientes:*

$$f \sqsubseteq g \quad si \ f \sqcap g = f; \ \ f \preceq g \quad si \ f \sqcup g = g.$$

En general, estos dos órdenes no coinciden.

A continuación se considerará **L**, subconjunto de las funciones normales y convexas de **M**. Recordemos que:

Definición 5 *Una función $f \in \boldsymbol{M}$ es normal si $sup\{f(x) : x \in [0,1]\} = 1$. Si además, $f(x) = 1$ para algún $x \in [0,1]$, entonces se dice que es normalizada (o fuertemente normal).*

Denotamos por **N** el conjunto de todas las funciones normales en **M**, y por $\mathbf{N}^*$ al conjunto de todas las normalizadas. Evidentemente $\mathbf{N}^* \subset \mathbf{N}$.

Definición 6 *Una función $f \in \boldsymbol{M}$ es convexa, si para cualquier $x \leq y \leq z$, se cumple que $f(y) \geq f(x) \wedge f(z)$.*

Llamamos **C** el conjunto de todas las funciones convexas en **M**.

El conjunto de todas las funciones normales y convexas de **M** será denotado por **L**, y el de todas las normalizadas y convexas, por $\mathbf{L}^*$. Obviamente $\mathbf{L}^* \subset \mathbf{L}$. En **L**, los órdenes parciales $\sqsubseteq$ and $\preceq$ coinciden. El álgebra $\mathbb{L} = (\mathbf{L}, \sqcup, \sqcap, \neg, \bar{0}, \bar{1})$ es un subálgebra de $\mathbb{M}$, y es además un retículo acotado ($\bar{0}$ y $\bar{1}$ son el mínimo y el máximo, respectivamente) y completo (ver [4], [5], [10], [12]). Esta característica nos va a permitir construir, de forma adecuada, algunas operaciones, y en particular negaciones,

Con el fin de facilitar las operaciones sobre **M**, en trabajos anteriores se presentaron la definición y teorema siguientes:

Definición 7 *([5], [12], [3]) Si $f \in \boldsymbol{M}$, se definen $f^L, f^R \in \boldsymbol{M}$ como*

$$f^L(x) = sup\{f(y) : y \leq x\}, \quad f^R(x) = sup\{f(y) : y \geq x\}.$$

Obsérvese que f^L y f^R son monótonas creciente y decreciente, respectivamente.

Teorema 8 *([4], [5]) Sean $f, g \in \boldsymbol{L}$. $f \sqsubseteq g$ si y sólo si*

$$g^L \leq f^L \ \text{ y } \ f^R \leq g^R.$$

2.2. Negaciones en L

Recordemos la definición de negación en [0,1].

Definición 9 *A una función decreciente $n : [0,1] \to [0,1]$, tal que $n(0) = 1$ y $n(1) = 0$, se le denomina negación. Si, además, se cumple que $n(n(x)) = x$ para todo $x \in [0,1]$, entonces se dice que es una negación fuerte.*

Esta subsección se dedica a repasar y extender el estudio realizado en [6] sobre las negaciones en el marco de los T2FSs con grados de pertenencia en **L**.

La Definición 9 nos sugiere una extensión de la definición de negación a cualquier conjunto parcialmente ordenado (poset) con elementos mínimo y máximo (acotado).

Definición 10 *Sea un conjunto A, y un orden parcial en A, $\leq_A$, tal que $(A, \leq_A)$ tiene elemento mínimo $Min_{\leq_A}$ y elemento máximo $Max_{\leq_A}$. Una negación en $(A, \leq_A)$ es una función $N : A \to A$, tal que N es decreciente, $N(Min_{\leq_A}) = Max_{\leq_A}$ y $N(Max_{\leq_A}) = Min_{\leq_A}$. Si además satisface que $N(N(x)) = x$, para todo $x \in A$, se dice que es negación fuerte.*

Teniendo en cuenta las propiedades que satisface la operación $\neg$ en **M**, es sencillo constatar que $\neg$ no cumple todos los axiomas de negación fuerte en **M**, pero sí en el retículo $(\mathbf{L}, \sqsubseteq)$ (ver [12]). Por otra parte, en la búsqueda de nuevas negaciones en $(\mathbf{L}, \sqsubseteq)$, se han obtenido ya algunos resultados que presentamos a continuación.

Definición 11 *([6]) Sean $f \in \boldsymbol{M}$, y n una negación sobreyectiva en [0,1]. Se define la operación N_n asociada a n como*

$$(N_n(f))(x) = sup\{f(y) : n(y) = x\}.$$

Obsérvese que $N_n = \neg$, cuando n es la negación estándar $n = 1 - id$. Además, para que N_n esté bien definida es necesario que n sea sobreyectiva (y por tanto, continua).

Entre los resultados más importantes obtenidos por los autores, se tienen los siguientes.

Teorema 12 *([6]) Sea la operación N_n asociada a n, negación sobreyectiva en $[0,1]$. Entonces, para todo $f \in \boldsymbol{M}$*

1. $(N_n(f))^L = N_n(f^R),\ (N_n(f))^R = N_n(f^L)$.
2. $(N_n(f))(x) = f(n(x)) \Leftrightarrow$ *n es fuerte.*
3. N_n *es una negación sobre* $\mathbf{L}$.
4. N_n *es una negación fuerte (involutiva) sobre* $\mathbf{L}$ *si y sólo si n es fuerte.*

Definición 13 *Dado* $a \in [0,1]$*, la función característica de a es* $\bar{a} : [0,1] \to [0,1]$*, donde*

$$\bar{a}(x) = \begin{cases} 1 & si\ x = a \\ 0 & si\ x \neq a \end{cases}$$

Denotamos por $\mathbf{J} \subset \mathbf{M}$ el conjunto de todas las funciones características de los elementos de [0,1], es decir, $\mathbf{J} = \{\bar{a} : [0,1] \to [0,1] :\ a \in [0,1]\}$.

Definición 14 *Dado* $[a,b] \subseteq [0,1]$*, la función característica de* $[a,b]$ *es* $\overline{[a,b]} : [0,1] \to [0,1]$*, donde*

$$\overline{[a,b]}(x) = \begin{cases} 1 & si\ x \in [a,b] \\ 0 & si\ x \notin [a,b] \end{cases}$$

Sea $\mathbf{K} \subset \mathbf{M}$ el conjunto de todas las funciones características de subintervalos cerrados de $[0,1]$.

Después del estudio realizado en [6] sobre N_n, nos podemos preguntar si cualquier negación fuerte en $\mathbf{L}$, que coincida con la negación N_n en $\mathbf{J}$ y en $\mathbf{K}$, ha de ser exactamente N_n . La respuesta es negativa y nos viene dada por el siguiente resultado.

Teorema 15 *Sea* N_n *la negación asociada a la negación fuerte n, y sea* α *cualquier isomorfismo de orden en* $[0,1]$*. Definimos la función* $\phi : L \to L$*, expresada de la siguiente forma. Dada* $f \in L$*, y un punto* $z_f \in [0,1]$ *tal que f es creciente en* $[0,z_j]$ *y decreciente en* $[z_j,1]$*, definimos*

$$(\phi(f))(x) = \begin{cases} \alpha(f(n(x))) & si\ n(x) \in [0,z_j] \\ \alpha^{-1}(f(n(x))) & si\ n(x) \in [z_j,1] \end{cases}$$

Entonces ϕ *es una negación fuerte en* $\mathbf{L}$*, que coincide con* N_n *en* $\mathbf{J}$ *y en* $\mathbf{K}$*, pero no en todo* $\mathbf{L}$*.*

Por otra parte, vamos a generalizar la Definición 11, en orden a encontrar nuevas negaciones.

Definición 16 *Sean los operadores* $\phi : [0,1] \to [0,1]$ *sobreyectivo, y* $\star : [0,1] \to [0,1]$*. Se define la operación* $\lambda_{\star,\phi} : \mathbf{M} \to \mathbf{M}$*, como*

$$(\lambda_{\star,\phi}(f))(x) = \sup\{\star(f(y)) : \phi(y) = x\}.$$

Obsérvese que si $\star = id$ y ϕ es una negación sobreyectiva sobre [0,1], el operador $\lambda_{\star,\phi}$ es justamente la operación N_ϕ presentada anteriormente.

Respecto a este nuevo operador, podemos establecer un primer resultado en $\mathbf{L}$.

Teorema 17 *Si* ϕ *es una negación fuerte en* $[0,1]$*, entonces*

$$\lambda_{\star,\phi} \text{ es negación fuerte en } (\boldsymbol{L}, \sqsubseteq) \text{ si y sólo si } \star \text{ es la identidad}$$

3. Algunas propiedades de $\lambda_{\star,\phi}$

Aunque el último teorema de la sección anterior se ha referido a la restricción del operador $\lambda_{\star,\phi}$ al conjunto **L**, dicho operador ha sido definido en todo **M**. Por ello nuestro objetivo en el resto del trabajo es obtener resultados en este conjunto más extenso. A lo largo de la sección, $\star$ y ϕ serán las operaciones presentadas en la Definición 16, recordando que ϕ es sobreyectiva.

Comenzaremos con algunas proposiciones, cuya demostración es directa.

Proposición 18 *Si $\star$ es creciente, entonces $\lambda_{\star,\phi}$ es creciente respecto al orden usual de las funciones ($f \leq g$ si y sólo si $f(x) \leq g(x), \forall x$), y si $\star$ es decreciente, también lo es $\lambda_{\star,\phi}$, respecto al mismo orden.*

Proposición 19 *Sea $\star$ tal que $\star(0) = 0$ y $\star(1) = 1$. Se tiene que*
- Si $\phi(0) = 1$, entonces $\lambda_{\star,\phi}(\bar{0}) = \bar{1}$, y
- Si $\phi(1) = 0$, entonces $\lambda_{\star,\phi}(\bar{1}) = \bar{0}$.

Proposición 20 *- Si $\star(0) = 0$, entonces $\lambda_{\star,\phi}(0) = 0$.*
- Si $\star(0) = 1$, entonces $\lambda_{\star,\phi}(0) = 1$.
- Si $\star(1) = 1$, entonces $\lambda_{\star,\phi}(1) = 1$.
- Si $\star(1) = 0$, entonces $\lambda_{\star,\phi}(1) = 0$.

Proposición 21 *Si $\star$ es continua por la izquierda en 1, y $\star(1) = 1$, entonces $\lambda_{\star,\phi}$ es cerrada en **N**.*

Demostración. Si f es normal, entonces $sup\{f(x) : x \in [0,1]\} = 1$. Se tiene que,

$$sup\{(\lambda_{\star,\phi}(f))(w) : w \in [0,1]\} = sup\{sup\{\star(f(x)) : \phi(x) = w\} : w \in [0,1]\}$$

$$= sup\{\star(f(x)) : \phi(x) \in [0,1]\}.$$

Dado que ϕ es sobreyectiva, $\star$ es continua por la izquierda en 1, y $\star(1) = 1$, entonces

$$sup\{(\lambda_{\star,\phi}(f))(w) : w \in [0,1]\} = sup\{\star(f(x)) : x \in [0,1]\} = 1,$$

esto es, $\lambda_{\star,\phi}(f)$ es normal.

Proposición 22 *Si $\star(1) = 1$, entonces $\lambda_{\star,\phi}$ es cerrada en $\mathbf{N}^*$.*

Demostración. Similar a la demostración realizada en la Proposición 21.

Proposición 23 *Sea ϕ decreciente. Entonces $\lambda_{\star,\phi}$ es cerrada en **C**, si y sólo si $\star$ es creciente.*

Demostración. "$\Leftarrow$ " Sean $u, v, w \in [0,1]$, tal que $u \leq v \leq w$; y sean los conjuntos X, Y, Z, donde $X = \{x \in [0,1] : \phi(x) = w\}$, $Y = \{y \in [0,1] : \phi(y) = v\}$ y $Z = \{z \in [0,1] : \phi(z) = u\}$.

Teniendo en cuenta que ϕ es decreciente, se tiene que $x \leq y \leq z$ para todo $x \in X$, $y \in Y$ y $z \in Z$. Entonces tenemos que

$$(\lambda_{\star,\phi}(f))(u) = sup\{\star(f(z)) : \phi(z) = u\} = sup\{\star(f(z)) : z \in Z\},$$

$$(\lambda_{\star,\phi}(f))(v) = sup\{\star(f(y)) : \phi(y) = v\} = sup\{\star(f(y)) : y \in Y\},$$

$$(\lambda_{\star,\phi}(f))(w) = sup\{\star(f(x)) : \phi(x) = w\} = sup\{\star(f(x)) : x \in X\}.$$

Si f es convexa, se cumple que $f(y) \geq f(x) \wedge f(z)$, para todo $x \in X, y \in Y, z \in Z$, y como $\star$ es creciente (incluyendo el caso en que la imagen de $\star$ es constante para todo el dominio), entonces, $\star(f(y)) \geq \star(f(x)) \wedge \star(f(z))$; veamos que esto implica que

$$sup\{\star(f(y)) : y \in Y\} \geq sup\{\star(f(x)) : x \in X\} \wedge sup\{\star(f(z)) : z \in Z\};$$

supongamos que, $sup\{\star(f(y)) : y \in Y\} < sup\{\star(f(x)) : x \in X\} \wedge sup\{\star(f(z)) : z \in Z\}$, se tiene

$$sup\{\star(f(y)) : y \in Y\} < sup\{\star(f(x)) : x \in X\} \text{ y}$$
$$sup\{\star(f(y)) : y \in Y\} < sup\{\star(f(z)) : z \in Z\},$$

luego existe $x_0 \in X$ y $z_0 \in Z$ tal que $sup\{\star(f(y)) : y \in Y\} < \star(f(x_0))$ y $sup\{\star(f(y)) : y \in Y\} < \star(f(z_0))$, y así para todo $y \in Y$, se tiene que

$$\star(f(y)) < \star(f(x_0)) \wedge \star(f(z_0)),$$

en contra de la hipótesis $\star(f(y)) \geq \star(f(x)) \wedge \star(f(z))$, para todo $x \in X, y \in Y, z \in Z$.

Por tanto,

$$(\lambda_{\star,\phi}(f))(v) \geq (\lambda_{\star,\phi}(f))(w) \wedge (\lambda_{\star,\phi}(f))(u).$$

Con lo que $\lambda_{\star,\phi}(f)$ es convexa.

"$\Rightarrow$ "Sea $\star$ no creciente (excluyendo el caso en que la imagen de $\star$ es constante). Se tiene que existen $a, b \in [0,1]$ tal que $a < b$ y $\star(a) > \star(b)$. Sea v un valor particular en [0,1], y sean todos los valores $u, w \in [0,1]$, tal que $u < v < w$. Sean los conjuntos X, Y, Z, donde $X = \{x \in [0,1] : \phi(x) = w\}$, $Y = \{y \in [0,1] : \phi(y) = v\}$ y $Z = \{z \in [0,1] : \phi(z) = u\}$. Teniendo en cuenta que ϕ es decreciente, y $u < v < w$, se tiene que $x < y < z$ para todo $x \in X$, $y \in Y$ y $z \in Z$. Sea $f \in \mathbf{M}$ tal que $f(t) = b$, $\forall t \in Y$, y $f(t) = a$, en otro caso. Resulta trivial demostar que $f \in \mathbf{C}$. Entonces tenemos que

$$(\lambda_{\star,\phi}(f))(u) = sup\{\star(f(z)) : \phi(z) = u\} = sup\{\star(f(z)) : z \in Z\} = \star(a),$$

$$(\lambda_{\star,\phi}(f))(v) = sup\{\star(f(y)) : \phi(y) = v\} = sup\{\star(f(y)) : y \in Y\} = \star(b)$$

$$(\lambda_{\star,\phi}(f))(w) = sup\{\star(f(x)) : \phi(x) = w\} = sup\{\star(f(x)) : x \in X\} = \star(a).$$

En este caso $(\lambda_{\star,\phi}(f))(v) < (\lambda_{\star,\phi}(f))(u) \wedge (\lambda_{\star,\phi}(f))(w)$, y $\lambda_{\star,\phi}$ no es convexa.

Observación 24 *Si ϕ es decreciente y sobreyectiva en [0,1], y $\star$ es cualquier automorfismo en [0,1], entonces, de acuerdo a la Proposición 23, $\lambda_{\star,\phi}$ es cerrada en $\boldsymbol{C}$.*
Si ϕ es decreciente y sobreyectiva en [0,1], y $\star$ es cualquier negación en [0,1], entonces, $\lambda_{\star,\phi}$ no es cerrada en $\boldsymbol{C}$.

Ejemplo 25 *Sea ϕ una negación fuerte en [0,1], con punto fijo $p = 0{,}5$, y $\star$ la operación en [0,1],*

$$\star(x) = \begin{cases} 0 & \textit{si } x = 0{,}7 \\ 1 & \textit{en otro caso} \end{cases}.$$

Y sea $f \in \boldsymbol{C}$,

$$f(x) = \begin{cases} 0{,}7 & \textit{si } x = 0{,}5 \\ 0{,}3 & \textit{en otro caso} \end{cases},$$

aquí

$$(\lambda_{\star,\phi}(f))(x) = \begin{cases} 0 & \textit{si } x = 0{,}5 \\ 1 & \textit{en otro caso} \end{cases},$$

luego, no es convexa.

Proposición 26 *Sea ϕ creciente, entonces $\lambda_{\star,\phi}$ es cerrada en $\boldsymbol{C}$ si y sólo si $\star$ es creciente.*

Demostración. Similar a la demostración anterior.

Corolario 27 *Sea ϕ monótona, y $\star$ continua por la izquierda en 1, y $\star(1) = 1$, entonces $\lambda_{\star,\phi}$ es cerrada en $\boldsymbol{L}$, si y sólo si $\star$ es creciente.*

Sea ϕ monótona, y $\star(1) = 1$, entonces $\lambda_{\star,\phi}$ es cerrada en $\boldsymbol{L}^*$, si y sólo si $\star$ es creciente.

Proposición 28 *Sea ϕ decreciente, y $\star$ creciente,*

- Si $\star$ es continua por la izquierda en 1, y $\star(1) = 1$, entonces $\lambda_{\star,\phi}$ es decreciente en $(\boldsymbol{L}, \sqsubseteq)$.

- Si $\star(1) = 1$, entonces $\lambda_{\star,\phi}$ es decreciente en $(\boldsymbol{L}^*, \sqsubseteq)$.

Demostración. La clausura en **L** se deduce del Corolario 27.
Por otra parte, debemos comprobar que para todo $f, g \in \mathbf{L}$ tales que $f \sqsubseteq g$, se verifica $\lambda_{\star,\phi}(g) \sqsubseteq \lambda_{\star,\phi}(f)$. Es decir, que $(\lambda_{\star,\phi}(f))^L \leq (\lambda_{\star,\phi}(g))^L$ y que $(\lambda_{\star,\phi}(g))^R \leq (\lambda_{\star,\phi}(f))^R$. Veamos la primera desigualdad, teniendo en cuenta que $f^R \leq g^R$. Para ello debemos comprobar que para tudo $u \in [0,1]$, es

$$sup\{\star(f(y)) : y \leq u\} \leq sup\{\star(g(y)) : y \leq u\}$$

Al ser ϕ sobreyectiva, existe x tal que $u = \phi(x)$. Sea $z_x = inf\{y : \phi(y) = u = \phi(x)\ \}$. Tenemos que $sup\{f(y) : y \geq z_x\} \leq sup\{g(y) : y \geq z_x\}$.
Por ser $\star$ creciente y ϕ decreciente,

$$sup\{\star(f(y)) : y \geq z_x\} \leq sup\{\star(g(y)) : y \geq z_x\}$$

$$sup\{\star(f(y)) : \phi(y) \leq \phi(z_x)\} \leq sup\{\star(g(y)) : \phi(y) \leq \phi(z_x)\}$$

$$sup\{\star(f(y)) : \phi(y) \leq u\} \leq sup\{\star(g(y)) : \phi(y) \leq u\}$$

para todo $u \in [0,1]$. Por tanto,

$$(\lambda_{\star,\phi}(f))^L \leq (\lambda_{\star,\phi}(g))^L.$$

La otra desigualdad se demuestra de forma similar, teniendo en cuenta que $g^L \leq f^L$.
Finalmente, $\lambda_{\star,\phi}(g) \sqsubseteq \lambda_{\star,\phi}(f)$, para todo $f,g \in \mathbf{L}$, tal que $f \sqsubseteq g$.

La demostración de la segunda afirmación es similar.

Proposición 29 *Sea ϕ creciente, y $\star$ creciente,*
- Si $\star$ es continua por la izquierda en 1, y $\star(1) = 1$, entonces $\lambda_{\star,\phi}$ es creciente en $(\boldsymbol{L}, \sqsubseteq)$.
- Si $\star(1) = 1$, entonces $\lambda_{\star,\phi}$ es creciente en $(\boldsymbol{L}^*, \sqsubseteq)$.

Demostración. Similar a la demostración de la Proposición 28.

Teorema 30 *Si $\star$ es continua por la izquierda en 1, $\star(0) = 0$, $\star(1) = 1$ y ϕ es una negación sobreyectiva en $[0,1]$, entonces*

$$\lambda_{\star,\phi} \text{ es negación en } (\boldsymbol{L}, \sqsubseteq) \text{ si y sólo si } \star \text{ es creciente}$$

4. Conclusiones

En este artículo, primeramente se han presentado algunos resultados nuevos sobre las negaciones fuertes en $\mathbf{L}$ (conjunto de las funciones de $[0,1]$ en $[0,1]$ normales y convexas). En particular, se han obtenido negaciones que coinciden en las funciones características de los singleton y de los intervalos cerrados con las N_n, definidas en trabajos anteriores.
Por otra parte, se ha definido, a partir de las operaciones sobre $[0,1]$, $\star$ y ϕ, la familia de operadores $\lambda_{\star,\phi}$ sobre $\mathbf{M}$ (conjunto de funciones de $[0,1]$ en $[0,1]$), caracterizando aquéllos que son negaciones fuertes en $\mathbf{L}$, cuando ϕ es negación fuerte.
Finalmente, se han obtenido algunas condiciones suficientes sobre $\star$ y ϕ, para que $\lambda_{\star,\phi}$ verifique algunas propiedades, tanto en $\mathbf{L}$, como en $\mathbf{L}^*$ (conjunto de las funciones de $[0,1]$ en $[0,1]$ normalizadas y convexas).

Agradecimientos

Este trabajo ha sido parcialmente subvencionado por la Universidad Politécnica de Madrid.

Referencias

1. Coupland, S., Gongora, M., John, R., Wills, K.: A comparative study of fuzzy logic controllers for autonomous robots. Proc. IPMU, Paris (France), 1332–1339 (2006).
2. Gera, Z., Dombi, J.: Exact calculations of extended logical operations on fuzzy truth values. Fuzzy Sets and Systems, 159(11), 1309–1326 (2008).

3. Gera, Z., Dombi, J.: Type-2 implications on non-interactive fuzzy truth values. Fuzzy Sets and Systems, 159(22), 3014–3032 (2008).
4. Harding, J., Walker, C., Walker, E.: Convex normal functions revisited. Fuzzy Sets and Systems, 161, 1343–1349 (2010).
5. Harding, J., Walker, C., Walker, E.: Lattices of convex normal functions. Fuzzy Sets and Systems, 159, 1061–1071 (2008).
6. Hernández, P., Cubillo, S., Torres-Blanc, C.: Negations on Type-2 Fuzzy Sets. Fuzzy Sets and Systems, 252, 111–124 (2014).
7. Klement, P., Mesiar, R., Pap, E.: Triangular Norms. Trends in Logic. Studia Logica Library, 8, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands (2000).
8. Linda, O., Manic, M.: Monotone Centroid Flow Algorithm for Type Reduction of General Type-2 Fuzzy Sets. IEEE Trans. Fuzzy Systems, 20(5), 805–819 (2012).
9. Mendel, J., Jhon, R.: Type-2 fuzzy sets made Simple. IEEE Trans. Fuzzy Systems, 10(2), 117–127, (2002).
10. Mizumoto, M., Tanaka, K.: Some properties of fuzzy sets of type-2. Information Control, 31, 312–340 (1976).
11. Wagner, C., Hagras, H.: Toward general type-2 fuzzy logic systems based on zSlices. IEEE Trans. Fuzzy Systems, 18(4), 637–660, (2010).
12. Walker, C., Walker, E.: The algebra of fuzzy truth values. Fuzzy Sets and Systems, 149, 309–347 (2005).
13. Zadeh, L.: Fuzzy sets. Information Control, 20, 301–312 (1965).
14. Zadeh, L.: The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning-I. Information Sciences, 8, 199–249 (1975).