



# Journal of Materials and Engineering Structures

## Research Paper

### Analyse statique des plaques en matériaux composites "Cas d'un FGM typique céramique/métal" dans des environnements thermiques

Static analysis of composite material plates "Case of a typical ceramic/metal FGM" in thermal environments

**Bachir Boudierba <sup>a,\*</sup>, Abdelrahmane Bekaddour Benyamina <sup>b</sup>**

<sup>a</sup> Département des Sciences et de la Technologie, Centre Universitaire El-Wancharissi, Ben Hamouda, Tissemsilt, Algérie

<sup>b</sup> Département de Génie civil, Université Ibn Khaldoun, BP 78 Zaaroura, 14000 Tiaret, Algérie

#### ARTICLE INFO

Historique de l'article :

Recu : 20 octobre 2017

Révisé : 10 mars 2018

Accepté : 10 mars 2018

Mots clés:

Cisaillement transverse

Comportement thermique

FGM

Keywords :

Transverse shear

Thermal behavior

FGM

#### RESUME

Le changement brutal des propriétés des matériaux à travers l'interface entre les différents matériaux peut provoquer de fortes contraintes inter-laminaires menant à la délimitation, au craquage et à d'autres mécanismes de dommages. Pour remédier à ces défauts, des matériaux à gradient fonctionnel (FGM), au sein de laquelle les propriétés des matériaux varient sans cesse, ont été proposés. L'objectif de cet article est d'analyser le comportement thermomécanique en flexion des plaques épaisses (FGM) en céramique/métal. Ce travail présente un modèle employant une nouvelle fonction de cisaillement transverse. Les résultats numériques obtenus par la présente analyse sont présentés et comparés à ceux disponibles dans la littérature. On peut conclure que cette théorie est efficace et simple pour l'analyse statique des plaques FGM dans des environnements thermiques.

#### ABSTRACT

The abrupt change in the properties of composite materials across the interface between different materials can cause strong inter-laminar stresses leading to delineation, cracking and other damage mechanisms. To remedy these defects, functional gradient materials (FGM), in which the properties of materials vary constantly, have been proposed. The purpose of this paper is to analyze the thermomechanical bending behavior of ceramic / metal thick plates (FGM). This work presents a model employing a new transverse shear function. The numerical results obtained by the present analysis are presented and compared with those available in the literature. It can be concluded that this theory is effective and simple for static analysis of FGM plates in thermal environments.

\* Corresponding author. Tel.: +213 773386093.

E-mail address: [bouderbabachir38@yahoo.fr](mailto:bouderbabachir38@yahoo.fr)

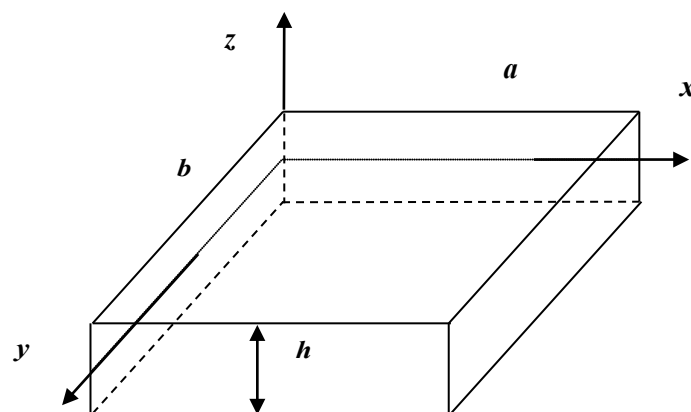
## 1 Introduction

Le concept de la FGM a été proposé en 1984 par un groupe de spécialistes des matériaux, à Sendai, au Japon, pour les barrières thermiques ou propriétés de blindage de chaleur [1]. Au début le FGM a été conçu comme un matériau de barrière thermique pour l'application dans l'aérospatiale et les réacteurs de fusion. Plus tard, les FGMs ont été développés pour les industries militaires, automobile, biomédicale et les semi-conducteurs et comme un élément de structure générale dans des environnements thermiques élevés. Le FGM est l'un des matériaux à haute température de pointe pour les environnements haute température capable de résister à des températures extrêmes. Les matériaux à gradient de propriétés (FGM) sont inhomogènes à l'échelle microscopique, dans lequel les propriétés mécaniques varient de façon régulière et de façon continue d'une surface à l'autre. Ceci est réalisé en faisant varier progressivement la fraction volumique des matériaux constitutifs, ces matériaux sont fabriqués à partir d'un mélange de céramique et de métal ou d'une combinaison de différents matériaux. Le constituant de la matière céramique fournit la résistance à haute température en raison de sa faible conductivité thermique et protège le métal de l'oxydation. Le constituant de métal ductile, d'autre part, empêche la rupture provoquée par contraintes dues au gradient à haute température dans un très court laps de temps. En outre, un mélange d'une céramique et d'un métal avec une fraction de volume variant de façon continue peuvent être facilement fabriqués [2-5] Un certain nombre de revues traitant de divers aspects de la FGM ont été publiés au cours des dernières années [2-10]. Dans cet article une nouvelle théorie raffinée hyperbolique de déformation de cisaillement de plaque est utilisée. La fonction hyperbolique en termes de coordonnées de l'épaisseur est utilisée dans le champ de déplacement pour tenir compte de la déformation de cisaillement. L'originalité de la théorie est qu'elle ne nécessite pas un facteur de correction de cisaillement, satisfaisant la nullité de contrainte de cisaillement aux surfaces supérieure et inférieure de la plaque. Des exemples numériques sont présentés pour illustrer la précision et l'efficacité de la présente théorie en comparant les résultats obtenus avec ceux calculés à l'aide de diverses autres théories.

### 1.1 Formulation théorique

#### 1.1.1 Configuration géométrique et hypothèses de base

Considérons une plaque rectangulaire en FGM d'épaisseur  $h$ , d'une longueur  $a$  suivant la direction de  $x$ , et de largeur  $b$  suivant la direction de  $y$ , comme indiqué sur la fig. 1.



**Fig. 1. Système d'axe et géométrie pour les plaques rectangulaires en FGM.**

La présente théorie raffinée de déformation de cisaillement hyperbolique de la plaque employée par El Meiche et al. [11] représente la distribution hyperbolique de la contrainte de cisaillement transversale, et satisfait la nullité de ces contraintes sur les surfaces supérieures et inférieures de la plaque sans utiliser des facteurs de correction de cisaillement. Le nombre de fonctions inconnues est seulement quatre, tandis que cinq ou plus dans le cas des autres théories de déformation de cisaillement (voir tableau I).

La présente théorie proposée, est basée sur l'hypothèse que les déplacements axiale et transversale sont constitués d'une partie de flexion et une autre de cisaillement de telle sorte que la composante de flexion ne contribue pas dans les efforts de cisaillement et de même, la composante de cisaillement ne contribue pas dans les moments de flexions.

**Tableau 1. Modèles des déplacements.**

Modèle	Théorie	Fonction de cisaillement transverse	Fonctions inconnues
CPT	La théorie classique des plaques	$\xi(z) = 0$	3
FSDPT	La théorie de déformation de cisaillement du premier ordre (Reissner, [12])	$\xi(z) = z$	5
PSDPT	la théorie de déformation de cisaillement parabolique (Reddy, [13])	$\xi(z) = z \left( 1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right)$	5
SSDPT	la théorie de déformation de cisaillement trigonométrique (Touratier, [14])	$\xi(z) = \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right)$	5
Présente	la théorie raffinée de déformation de cisaillement hyperbolique	$\xi(z) = \frac{\frac{h}{\pi} \sinh\left(\frac{\pi z}{h}\right) - z}{\cosh\left(\frac{\pi}{2}\right) - 1}$	4

**1.1.2 Cinématique et équations constitutives et d'équilibres**

En se basant sur les hypothèses précédentes, le champ de déplacement est obtenu comme suit :

$$\begin{aligned}
 U(x, y, z) &= u_0(x, y) - z \frac{\partial w_b}{\partial x} - \xi(z) \frac{\partial w_s}{\partial x} \\
 V(x, y, z) &= v_0(x, y) - z \frac{\partial w_b}{\partial y} - \xi(z) \frac{\partial w_s}{\partial y} \\
 W(x, y, z) &= w_b(x, y) + w_s(x, y)
 \end{aligned} \tag{1}$$

Les relations cinématiques peuvent être obtenues comme suit :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} k_x^b \\ k_y^b \\ k_{xy}^b \end{Bmatrix} + \xi(z) \begin{Bmatrix} k_x^s \\ k_y^s \\ k_{xy}^s \end{Bmatrix}, \tag{2a}$$

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = \Psi(z) \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^s \\ \gamma_{xz}^s \end{Bmatrix} \tag{2b}$$

Avec :

$$\Psi(z) = 1 - \frac{df(z)}{dz} \tag{3a}$$

Où :

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ \varepsilon_x \\ 0 \\ \varepsilon_y \\ 0 \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial x} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} k_x^b \\ k_y^b \\ k_{xy}^b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w_b}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \quad (3b)$$

$$\begin{Bmatrix} k_x^s \\ k_y^s \\ k_{xy}^s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w_s}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^s \\ \gamma_{xz}^s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial w_s}{\partial y} \\ \frac{\partial w_s}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (3c)$$

Les propriétés matérielles  $P$  de la plaque en FGM telles que le module d'Young  $E$ , le coefficient de Poisson  $\nu$ , et le coefficient de dilatation thermique  $\alpha$  sont déterminés par :

$$P(z) = P_M + (P_C - P_M) \left( \frac{1}{2} + \frac{z}{h} \right)^p \quad (4)$$

Où :  $P_C$  et  $P_M$  sont les propriétés correspondantes de la céramique et du métal, respectivement, et  $p$  l'exposant (l'indice) de la fraction volumique qui prend des valeurs supérieures ou égales à zéro.

Les relations constitutives linéaires sont :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x - \alpha \Delta T \\ \varepsilon_y - \alpha \Delta T \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (5a)$$

$$\begin{Bmatrix} \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{44} & 0 \\ 0 & Q_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} \quad (5b)$$

Où :  $(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{yx})$  et  $(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx})$  sont les termes des contraintes et des déformations, respectivement.

Les coefficients de rigidité peut être exprimée par :

$$Q_{11} = Q_{22} = \frac{E(z)}{1-\nu^2}, Q_{12} = \frac{\nu E(z)}{1-\nu^2} \quad (6a)$$

$$Q_{44} = Q_{55} = Q_{66} = \frac{E(z)}{2(1+\nu)} \quad (6b)$$

La distribution de la température appliquée à travers l'épaisseur est prise en charge, elle est donnée comme suit :

$$T(x, y, z) = T_1(x, y) + \frac{z}{h} T_2(x, y) + \frac{1}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) T_3(x, y) \quad (7)$$

Les équations d'équilibre sont obtenues à partir du principe des déplacements virtuels :

$$\begin{aligned} \delta u_0 &: \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = 0 \\ \delta v_0 &: \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} = 0 \\ \delta w_b &: \frac{\partial^2 M_x^b}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^b}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^b}{\partial y^2} + q = 0 \\ \delta w_s &: \frac{\partial^2 M_x^s}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^s}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^s}{\partial y^2} + \frac{\partial S_{xz}^s}{\partial x} + \frac{\partial S_{yz}^s}{\partial y} + q = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

Les résultantes des contraintes N, M et S sont définis par :

$$\begin{Bmatrix} N_x & N_y & N_{xy} \\ M_x^b & M_y^b & M_{xy}^b \\ M_x^s & M_y^s & M_{xy}^s \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) \begin{Bmatrix} 1 \\ z \\ \xi(z) \end{Bmatrix} dz \quad (9)$$

$$(S_{xz}^s, S_{yz}^s) = \int_{-h/2}^{h/2} (\tau_{xz}, \tau_{yz}) \Psi(z) dz \quad (10)$$

Ou bien comme suit :

$$\begin{Bmatrix} N \\ M^b \\ M^s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B & B^s \\ B & D & D^s \\ B^s & D^s & H^s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon \\ k^b \\ k^s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} N^T \\ M^{bT} \\ M^{sT} \end{Bmatrix}, S = A^s \gamma \quad (11)$$

Avec :  $A_{ij}$ ,  $B_{ij}$ , etc., sont les termes de la matrice de la rigidité de la plaque, définis par :

$$\begin{Bmatrix} A_{11} & B_{11} & D_{11} & B_{11}^s & D_{11}^s & H_{11}^s \\ A_{12} & B_{12} & D_{12} & B_{12}^s & D_{12}^s & H_{12}^s \\ A_{66} & B_{66} & D_{66} & B_{66}^s & D_{66}^s & H_{66}^s \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{11} (1, z, z^2, \xi(z), z \xi(z), \xi^2(z)) \begin{Bmatrix} 1 \\ \nu \\ \frac{1-\nu}{2} \end{Bmatrix} dz \quad (12a)$$

$$(A_{22}, B_{22}, D_{22}, B_{22}^s, D_{22}^s, H_{22}^s) = (A_{11}, B_{11}, D_{11}, B_{11}^s, D_{11}^s, H_{11}^s), A_{44}^s = A_{55}^s = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E(z)}{2(1+\nu)} [\Psi(z)]^2 dz \quad (12b)$$

La contrainte et le moment résultant :  $N_x^T = N_y^T$ ,  $M_x^{bT} = M_y^{bT}$ ,  $M_x^{sT} = M_y^{sT}$  dus aux charges thermiques sont définies respectivement par :

$$\begin{Bmatrix} N_x^T \\ M_x^{bT} \\ M_x^{sT} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E(z)}{1-\nu} \alpha(z) T \begin{Bmatrix} 1 \\ z \\ \xi(z) \end{Bmatrix} dz \quad (12c)$$

## 2 Solution exacte pour les plaques FGM

Les plaques rectangulaires sont généralement classées en fonction du type de support utilisé. Nous considérons ici la solution exacte de l'équation (8) pour une plaque FGM simplement appuyée. Pour résoudre ce problème, « Navier » suppose que les charges transversales mécaniques et thermiques  $q_i$  et  $T_i$  sont données sous la forme d'une double série de Fourier comme suit :

$$\begin{Bmatrix} q \\ T_i \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} q_0 \\ t_i \end{Bmatrix} \sin(\lambda x) \sin(\mu y), \quad (i = 1, 2, 3) \quad (13)$$

Avec :  $\lambda = \pi / a$ ,  $\mu = \pi / b$ ,  $q_0$  et  $t_i$  sont constants.

Suite à la procédure de la solution Navier, nous supposons la solution suivante :

$$\begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_b \\ w_s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} U_{mn} \cos(\lambda x) \sin(\mu y) \\ V_{mn} \sin(\lambda x) \cos(\mu y) \\ W_b \sin(\lambda x) \sin(\mu y) \\ W_s \sin(\lambda x) \sin(\mu y) \end{Bmatrix}, \quad (14)$$

Où :  $U_{mn}, V_{mn}, W_b$ , et  $W_s$  sont des paramètres arbitraires à déterminer sous condition que la solution de l'équation (14) satisfait les équations d'équilibre (8). On obtient l'équation opérateur suivante :

$$[\Gamma] \{\Delta\} = \{F\} \quad (15)$$

Avec :  $\{\Delta\} = \{U_{mn}, V_{mn}, W_b, W_s\}^t$  et  $[\Gamma]$  est la matrice symétrique donnée par :

$$[\Gamma] = \begin{bmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} & \Gamma_{13} & \Gamma_{14} \\ \Gamma_{12} & \Gamma_{22} & \Gamma_{23} & \Gamma_{24} \\ \Gamma_{13} & \Gamma_{23} & \Gamma_{33} & \Gamma_{34} \\ \Gamma_{14} & \Gamma_{24} & \Gamma_{34} & \Gamma_{44} \end{bmatrix} \quad (16)$$

Dans la quelle :

$$\begin{aligned} \Gamma_{11} &= -(A_{11}\lambda^2 + A_{66}\mu^2) \\ \Gamma_{12} &= -\lambda \mu (A_{12} + A_{66}) \\ \Gamma_{13} &= \lambda [B_{11}\lambda^2 + (B_{12} + 2B_{66}) \mu^2] \\ \Gamma_{14} &= \lambda [B_{11}^s\lambda^2 + (B_{12}^s + 2B_{66}^s) \mu^2] \\ \Gamma_{22} &= -(A_{66}\lambda^2 + A_{22}\mu^2) \\ \Gamma_{23} &= \mu [(B_{12} + 2B_{66}) \lambda^2 + B_{22}\mu^2] \\ \Gamma_{24} &= \mu [(B_{12}^s + 2B_{66}^s) \lambda^2 + B_{22}^s\mu^2] \\ \Gamma_{33} &= -(D_{11}\lambda^4 + 2(D_{12} + 2D_{66})\lambda^2\mu^2 + D_{22}\mu^4) \\ \Gamma_{34} &= -(D_{11}^s\lambda^4 + 2(D_{12}^s + 2D_{66}^s)\lambda^2\mu^2 + D_{22}^s\mu^4) \\ \Gamma_{44} &= -(H_{11}^s\lambda^4 + 2(H_{11}^s + 2H_{66}^s)\lambda^2\mu^2 + H_{22}^s\mu^4 + A_{55}^s\lambda^2 + A_{44}^s\mu^2) \end{aligned} \quad (17)$$

Les composantes du vecteur de la force généralisée sont donnés par :

$$\begin{aligned} F_1 &= \lambda \left( A^T t_1 + B^T t_2 + {}^a B^T t_3 \right) \\ F_2 &= \mu \left( A^T t_1 + B^T t_2 + {}^a B^T t_3 \right) \\ F_3 &= -q_0 - h \left( \lambda^2 + \mu^2 \right) \left( B^T t_1 + D^T t_2 + {}^a D^T t_3 \right) \\ F_4 &= -q_0 - h \left( \lambda^2 + \mu^2 \right) \left( {}^s B^T t_1 + {}^s D^T t_2 + {}^s F^T t_3 \right) \end{aligned} \quad (18)$$

Où :

$$\left\{ A^T, B^T, D^T \right\} = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E(z)}{1-\nu} \alpha(z) \{1, \bar{z}, \bar{z}^2\} dz \quad (19a)$$

$$\left\{ {}^a B^T, {}^a D^T \right\} = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E(z)}{1-\nu} \alpha(z) \bar{\Psi}(z) \{1, \bar{z}\} dz \quad (19b)$$

$$\left\{ {}^s B^T, {}^s D^T, {}^s F^T \right\} = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E(z)}{1-\nu} \alpha(z) \bar{\xi}(z) \{1, \bar{z}, \bar{\Psi}(z)\} dz \quad (19c)$$

Dans laquelle :

$$\bar{z} = z / h, \bar{\xi}(z) = \xi(z) / h \text{ et } \bar{\Psi}(z) = \frac{1}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \quad (20)$$

### 3 Validation analytique et Résultats numériques

Pour la plaque en FGM, les propriétés matérielles utilisées dans la présente étude sont :

- Métal(Aluminium) :

$$E_M = 70 \text{ (GPa)} ; \nu = 0.3 ; \alpha_M = 23 \times (10^{-6} / C^\circ)$$

- Céramique (Zirconia) :

$$E_C = 151 \text{ (GPa)} ; \nu = 0.3 ; \alpha_C = 10 \times (10^{-6} / C^\circ)$$

Des résultats numériques sont présentés en termes des contraintes et la flèche (déflexion) non-dimensionnels.

Les différents paramètres non-dimensionnels utilisés sont :

- La flèche centrale :

$$\bar{w} = \frac{10^2 D}{a^4 q_0} w\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$$

- La contrainte axiale :

$$\bar{\sigma}_x = \frac{1}{10^2 q_0} \sigma_x\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{h}{2}\right)$$

- La contrainte de cisaillement transversale :

$$\bar{\tau}_{xz} = -\frac{1}{10 q_0} \tau_{xz}\left(0, \frac{b}{2}, 0\right)$$

- La coordonnée d'épaisseur :

$$\bar{z} = z / h, D = \frac{h^3 E_C}{12(1-\nu^2)}$$

Les résultats numériques sont donnés et représentés dans les figures 2- 10 en utilisant la présente théorie raffinée de déformation de cisaillement hyperbolique (RHSdT), elle n'exige pas de facteur de correction de cisaillement et le nombre

de fonctions inconnues pour la présente théorie d'ordre élevé est seulement quatre. Nous notons que le facteur de correction de cisaillement est pris  $K = 5/6$  dans la théorie de déformation de cisaillement du premier ordre (FSDPT).

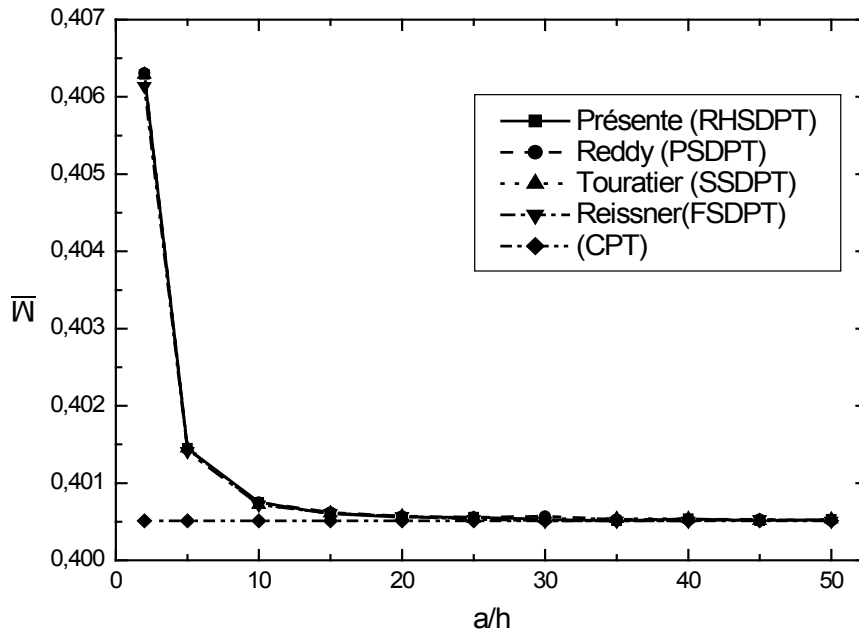


Fig. 2. Variation de la flèche non dimensionnelle ( $\bar{W}$ ) à travers l'épaisseur d'une plaque FGM carrée ( $p = 2$ ) pour les différentes théories et pour différents rapports d'élancement ( $a / h$ ) avec ( $q_0 = 100, t_i = 0$ ).

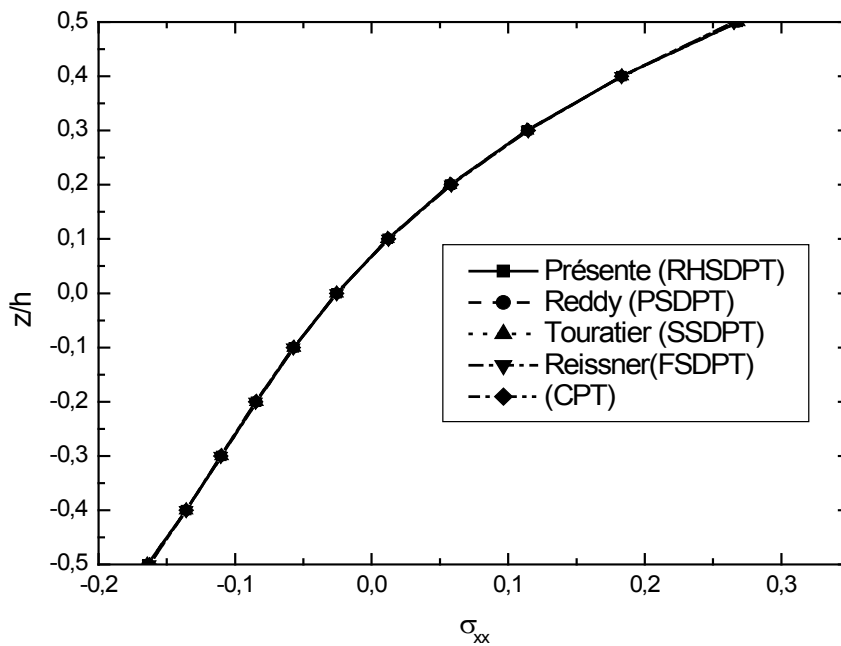


Fig. 3. Variation de la contrainte axiale non dimensionnelle ( $\bar{\sigma}_{xx}$ ) à travers l'épaisseur d'une plaque FGM carrée ( $p = 2$ ) pour les différentes théories avec ( $q_0 = 100, t_i = 0$ ).

La relation entre la présente théorie et les différentes théories de déformation de cisaillement à ordre élevé et du premier ordre et la théorie classique pour les plaques (PSDPT, SSDPT, FSDPT, CPT) est illustrée dans les figures 2- 10. Ces figures donnent également les effets de la variation des valeurs de l'indice de la fraction volumique  $p$  et la distribution du champ thermique sous forme (uniforme, linéaire et non linéaire) sur la flèche (adimensionnelle) et les contraintes pour une plaque FGM rectangulaire. Il est clair que la flèche diminue tant que le rapport d'élancement ( $a / h$ ) augmente.



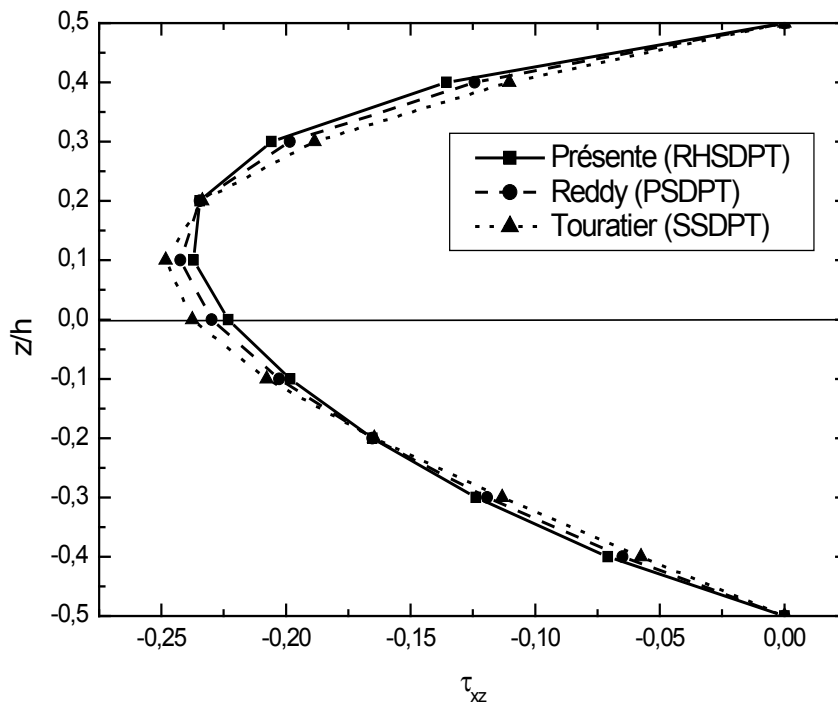


Fig. 4. Variation de la contrainte de cisaillement non dimensionnelle ( $\tau_{xz}$ ) à travers l'épaisseur d'une plaque FGM carrée ( $p = 2$ ) pour les différentes théories avec ( $q_0 = 100, t_i = 0$ ).

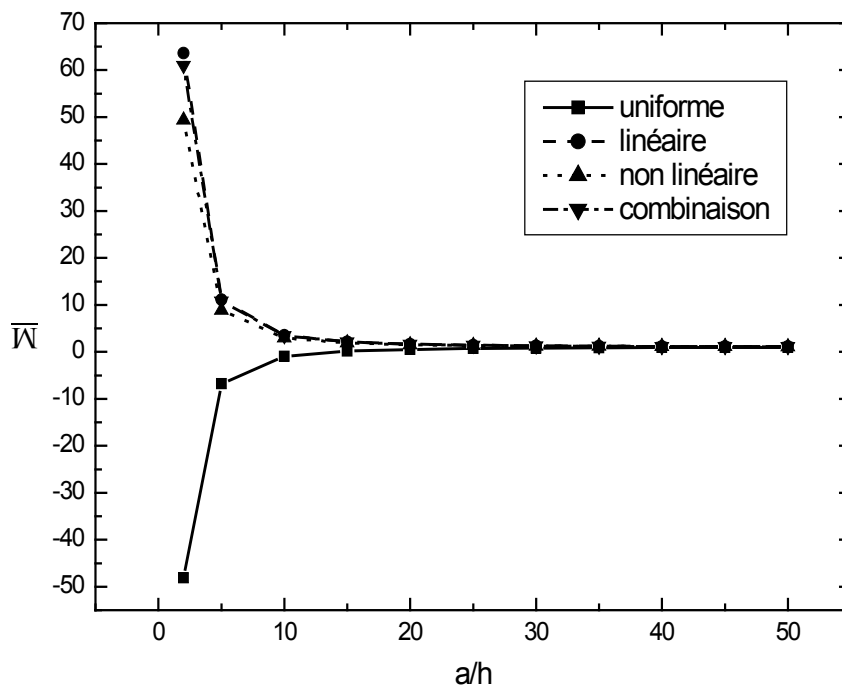


Fig. 5. L'effet de la charge thermique sur la flèche centrale adimensionnelle ( $w$ ) d'une plaque FGM rectangulaire ( $p = 2$ ) pour les différents rapports d'élancement ( $a / h$ ) avec ( $b = 2a, q_0 = 100$ ).

Les figures 2-4 représentent un excellent accord de la présente théorie avec les autres théories de déformation de cisaillement à ordre élevé pour une plaque FGM rectangulaire soumise à une charge mécanique.

Pour les figures 9-10, il est important d'observer que les contraintes pour une plaque entièrement en céramique ne sont pas les mêmes que pour une plaque entièrement en métal. Ceci est parce que la plaque est soumise à un champ de température.

La contrainte axiale ( $\bar{\sigma}_x$ ), est représentée sur les figures 5 et 9. On peut voir que les contraintes de compression maximales se produisent à un point à proximité de la surface supérieure tandis que les contraintes de traction maximales sont à un point proche de la surface inférieure de la plaque en FGM.

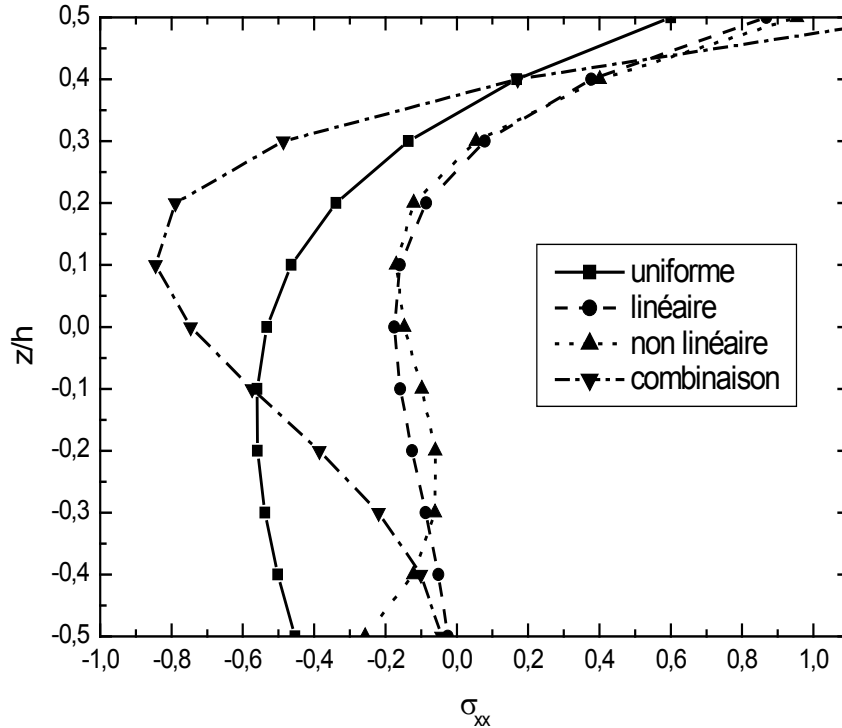


Fig. 6. L'effet de la charge thermique sur la contrainte axiale non dimensionnelle ( $\bar{\sigma}_x$ ) d'une plaque FGM rectangulaire ( $p = 2$ ) pour les différents rapports d'élanement ( $a / h$ ) avec ( $b = 2a, q_0 = 100$ ).

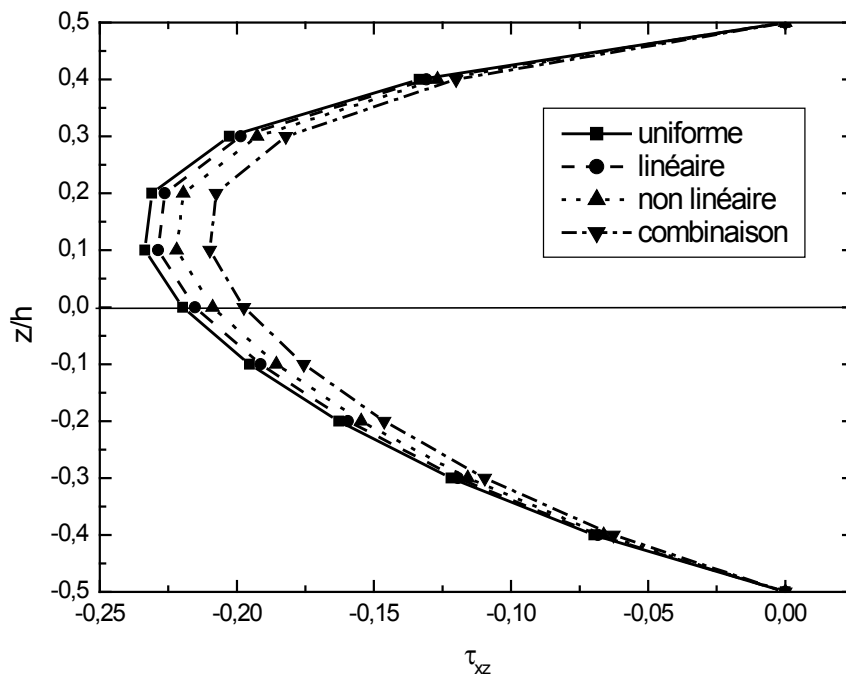


Fig. 7. L'effet de la charge thermique sur la contrainte de cisaillement non dimensionnelle ( $\bar{\tau}_{xz}$ ) d'une plaque FGM rectangulaire ( $p = 2$ ) pour les différents rapports d'élanement ( $a / h$ ) avec ( $b = 2a, q_0 = 100$ ).

Les figures 6 et 10 illustrent les distributions à travers l'épaisseur de la contrainte de cisaillement ( $\bar{\tau}_{xz}$ ) d'une plaque FGM carrée et rectangulaire sous des charges thermiques. Les valeurs maximales de ( $\bar{\tau}_{xz}$ ) se produisent à ( $\bar{z} \cong 0.1$ ) de la plaque en FGM et non pas au centre de la plaque comme dans le cas homogène. La flèche, les deux contraintes axiales et les contraintes de cisaillement augmentent avec l'augmentation de la charge thermique.

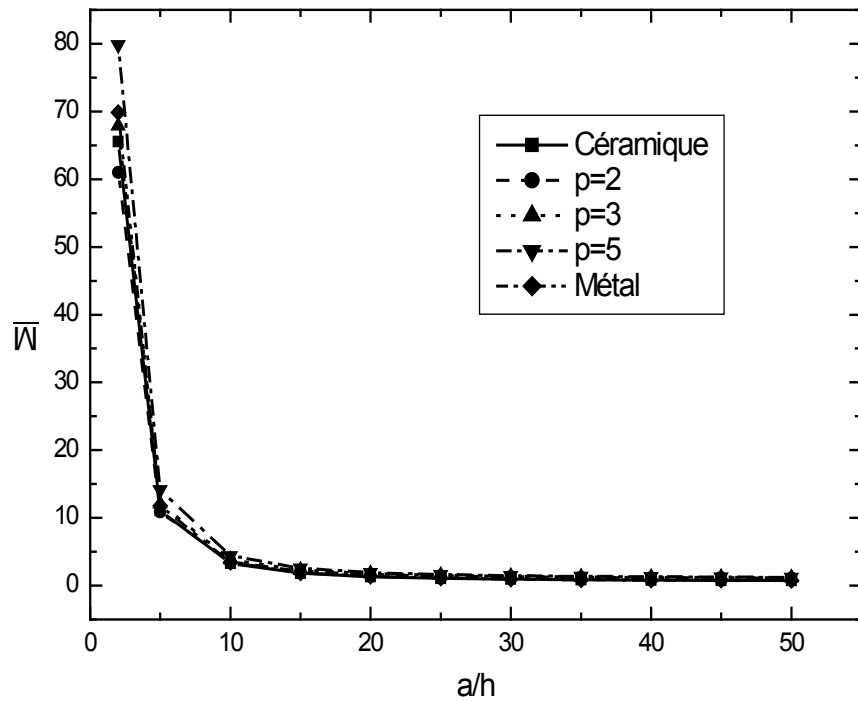


Fig. 8. L'effet de l'indice de la fraction volumique  $p$  sur la flèche centrale adimensionnelle ( $\bar{w}$ ) d'une plaque FGM rectangulaire pour les différents rapports d'élancement ( $a/h$ ) avec ( $t_i = 10, b = 2a, q_0 = 100$ ).

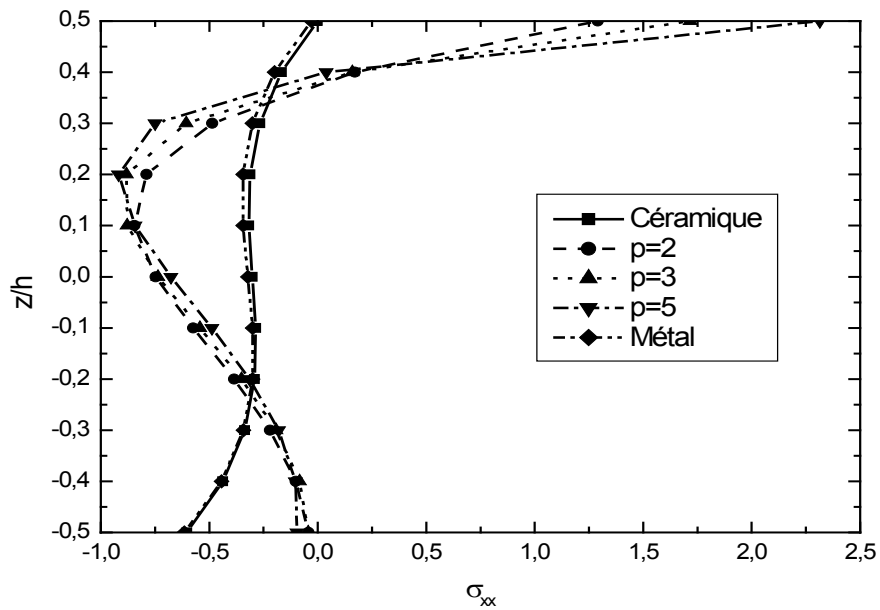


Fig. 9. L'effet de l'indice de la fraction volumique  $p$  sur la contrainte axiale non dimensionnelle ( $\bar{\sigma}_x$ ) d'une plaque FGM rectangulaire avec ( $t_i = 10, b = 2a, q_0 = 100$ ).

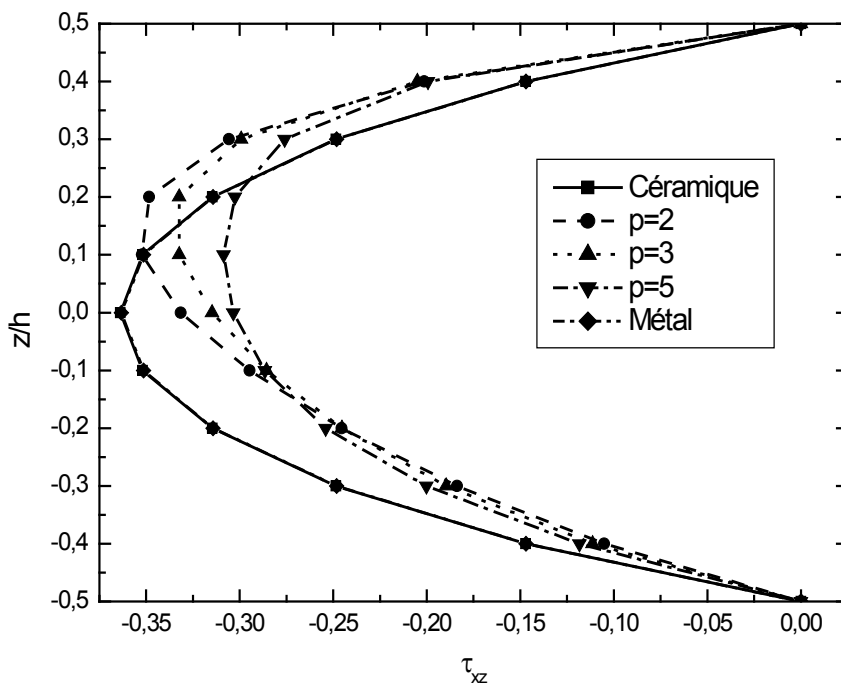


Fig. 10. L'effet de l'indice de la fraction volumique  $p$  sur la contrainte de cisaillement non dimensionnelle ( $\bar{\tau}_{xz}$ ) d'une plaque FGM rectangulaire avec ( $t_i = 10$ ,  $b = 2a$ ,  $q_0 = 100$ ).

#### 4 Conclusion

Dans ce travail, nous avons présenté les résultats numériques de l'analyse statique des plaques en matériaux composites à propriétés spécifiques "Cas d'un FGM typique céramique/métal" dans des environnements thermiques, en utilisant la théorie raffinée de déformation de cisaillement hyperbolique (RHSDT). La présente théorie à une forte similitude avec la théorie classique des plaques dans de nombreux aspects, n'exige pas de facteur de correction de cisaillement, et donne une description hyperbolique de la contrainte de cisaillement à travers l'épaisseur tout en remplissant la condition de contrainte de cisaillement nulle sur les bords libres. En plus, la présente théorie indique un excellent accord avec la théorie conventionnel SSDPT [14-15] et la théorie du troisième ordre PSDPT [13]. Les gradients dans les propriétés matérielles jouent un rôle important dans la détermination de la réponse des plaques en FGM. Toutes les études comparatives ont montré que les flèches et les contraintes obtenues en utilisant la présente théorie raffinée (avec quatre inconnus) et d'autres théories de déformation de cisaillement à ordre élevé (cinq inconnus) sont presque identiques. Par conséquent, on peut dire que la théorie proposée est non seulement précise mais également simple pour étudier et analyser la réponse thermomécanique en flexion des plaques épaisses en FGM. Les matériaux composites à gradients de propriétés fabriqués à partir d'un mélange céramique/métal sont capables de résister à des températures extrêmes. Le mélange de la céramique et de métal avec variation continue de la fraction volumique peut éliminer les problèmes d'interface des plaques épaisses ou sandwiches et les distributions des contraintes sont ainsi lisses.

#### REFERENCES

- [1]- M. Koizumi, FGM activities in Japan. Compos. Part B-Eng. 28(1-2) (1997) 1-4. doi:10.1016/S1359-8368(96)00016-9.
- [2]- M.J. Pindera, S.M. Arnold, J. Aboudi, D. Hui, Use of Composites in Functionally Graded Materials. Invited paper, In: Functionally Graded, Advanced Composites Materials Symposium, University of Virginia, Charlottesville, U.S.A., 1993, Composites Eng. 4(1994) 1-145.
- [3]- M.J. Pindera, J. Aboudi, S.M. Arnold, W.F. Jones, Use of Composites in Multi-Phased and Functionally Graded Materials. Composites Eng. 5(1995) 743-974.
- [4]- A.J. Markworth, K.S. Ramesh, W.P. Parks Jr, Modeling Studies Applied to Functionally Graded Materials. J. Mater. Sci. 30(9) (1995) 2183-2193. doi :10.1007/BF01184560.

- 
- [5]- M.J. Pindera, J. Aboudi, A.M. Glaeser, S.M. Arnold, Use of Composites in Multi-Phased and Functionally Graded Materials. *Compos. Part B-Eng.* 28(1997) 1–175.
- [6]- S. Suresh, A. Mortensen, *Fundamentals of Functionally Graded Materials*. IOM Communications, Book Series, Institute of Materials (Great Britain) 698, London, 1998
- [7]- Y. Miyamoto, W.A. Kaysser, B.H. Rabin, A. Kawasaki, R.G. Ford, *Functionally Graded Materials: Design, Processing and Applications*. Ed. Y. Miyamoto, W.A. Kaysser, B.H. Rabin, A. Kawasaki, R.G. Ford, Springer Science, 1999. doi:10.1007/978-1-4615-5301-4.
- [8]- G.H. Paulino, Z.H. Jin, R.H. Dodds Jr, Failure of Functionally Graded Materials. *Compr. Struct. Integrity.* 2(2003) 607–644. doi:10.1016/B0-08-043749-4/02101-7.
- [9]- N. Noda, Thermal Stresses in Functionally Graded Material, *J. Therm. Stresses* 22(4-5) (1999) 477–512. doi:10.1080/014957399280841.
- [10]- O.V.D. Biest, M. Gasik, J. Vleugels, *Functionally Graded Materials VIII : FGM2004*, Trans Tech Publications Ltd, Materials Science Forum, Uetikon-Zuerich, Vols. 492–493.
- [11]- N. El Meiche, A. Tounsi, N. Ziane, I. Mechab, E.A. Adda Bedia, A new hyperbolic shear deformation theory for buckling and vibration of functionally graded sandwich plate. *Int. J. Mech. Sci.* 53(4) (2011) 237–247. doi:10.1016/j.ijmecsci.2011.01.004.
- [12]- E. Reissner, On transverse bending of plates, including the effect of transverse shear deformation. *Int. J. Solids Struct.* 11(5) (1975) 569–573. doi:10.1016/0020-7683(75)90030-X.
- [13]- J.N. Reddy, A simple higher-order theory for laminated composite plates. *J. Appl. Mech.* 51(4) (1984) 745–752. doi:10.1115/1.3167719.
- [14]- M. Touratier, An efficient standard plate theory. *Int J. Eng. Sci.* 29(8) (1991) 901–916. doi:10.1016/0020-7225(91)90165-Y.
- [15]- A.M. Zenkour, The refined sinusoidal theory for FGM plates on elastic foundations. *Int. J. Mech. Sci.* 51(11-12) (2009) 869–880. doi:10.1016/j.ijmecsci.2009.09.026.