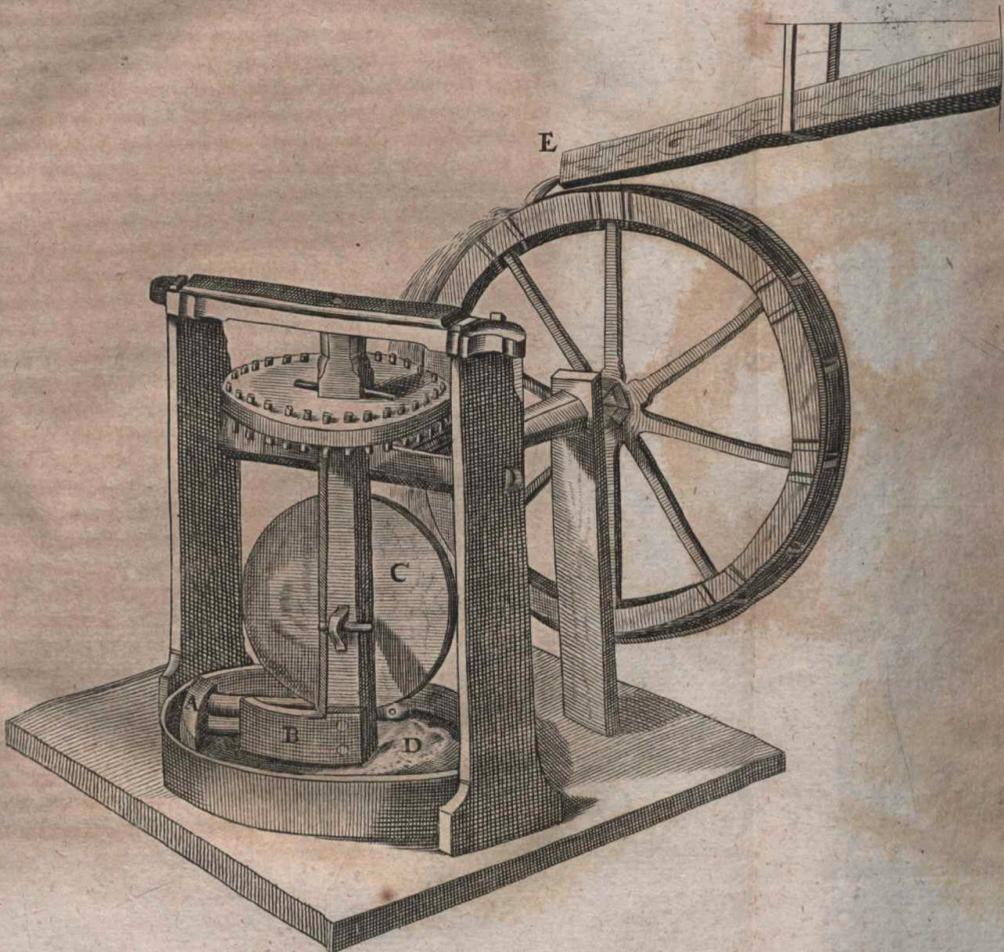


GIOVANNA VITTORI, PAOLO BLONDEAUX

NOTE DI IDRODINAMICA

TAB. IV. ad A. 1709 M. Febr. pag. 78.





GIOVANNA VITTORI, PAOLO BLONDEAUX

NOTE DI IDRODINAMICA



Realizzazione Editoriale

GENOVA UNIVERSITY PRESS

Piazza della Nunziata, 6 - 16124 Genova

Tel. 010 20951558

Fax 010 20951552

e-mail: ce-press@liste.unige.it

e-mail: labgup@arch.unige.it

<http://gup.unige.it/>

Gli autori rimangono a disposizione per gli eventuali diritti sulle immagini pubblicate.
I diritti d'autore verranno tutelati a norma di legge.

Riproduzione vietata, tutti i diritti riservati dalla legge sul diritto d'autore

ISBN: 978-88-9775-2-96-7 (versione a stampa)



(versione eBook)

ISBN: 978-88-97752-98-1 (versione eBook)

Finito di stampare Dicembre 2017



Indice

Lo schema di continuo	9
1.1 La densità in un punto	11
Forze di massa e di superficie	13
Fluidi in quiete	18
3.1 L'equazione integrale della statica	19
3.2 L'equazione puntuale della statica	19
3.3 Fluidi in quiete rispetto a un sistema di riferimento non inerziale	20
Statica dei fluidi a densità costante	23
4.1 Fluido in quiete rispetto a un sistema di riferimento inerziale	23
4.2 Fluido in quiete rispetto a un sistema di riferimento non inerziale	26
4.2.1 Fluido in moto di corpo rigido sottoposto a una accelerazione lineare costante	27
4.2.2 Fluido in moto di corpo rigido sottoposto a una velocità angolare costante	28
L'equazione di stato	31
Statica dei gas perfetti	34
Fenomeni di interfaccia	36
7.1 La tensione superficiale	36
7.2 Il salto di pressione attraverso una superficie gobba	37
7.3 Continuità della pressione attraverso una superficie piana	38
La spinta su una superficie piana	40
8.1 Spinta su una superficie piana soggetta a un campo di pressione costante	40
8.2 Spinta su una superficie piana soggetta all'azione di un fluido con densità costante	41
8.3 Esercizi sulla determinazione della spinta su una superficie piana	47
La spinta su una superficie gobba	56
9.1 Esercizi sulla determinazione della spinta su una superficie gobba	60

La tensione in un fluido in movimento	63
Analisi dimensionale	66
11.1 Il teorema π nei problemi di idrodinamica	72
Similitudine e modelli	73
Descrizione del moto	77
13.1 Alcune grandezze cinematiche	80
13.2 La derivata materiale di una grandezza integrata su un volume materiale	81
I principi della meccanica dei fluidi	84
14.1 Il principio di conservazione della massa	84
14.2 Il principio della quantità di moto	85
14.3 Il principio del momento della quantità di moto	87
Le correnti fluide	92
Equazione di continuità per una corrente	97
Equazione del moto per una corrente	101
Perdite di carico distribuite	106
18.1 Formule semplificate per il calcolo delle perdite distribuite	109
Problemi relativi a condotte a sezione circolare	111
Perdite di Borda	116
Perdite concentrate	120
Problemi relativi ad alcuni semplici impianti	124
Le reti idrauliche	134
23.1 Semplici problemi di verifica di una rete idraulica	135
23.2 Verifica delle reti idrauliche: il metodo di Hardy-Cross	140
Teorema di Bernoulli per le correnti	146
24.1 Il venturimetro e altri misuratori di portata	147

Fluidi ideali e teorema di Bernoulli	151
25.1 Efflusso da luci - applicazione del teorema di Bernoulli	153
25.2 Pressione di ristagno - applicazione del teorema di Bernoulli	156
25.3 Tubo di Pitot	158
Teoria delle turbine Pelton	160

Prefazione

I corsi di Idrodinamica, Meccanica dei Fluidi, Idraulica intendono fornire agli studenti di diversi corsi di laurea le basi per lo studio della dinamica dei fluidi, cioè gli strumenti utili per la descrizione del moto dei fluidi e per la predizione del loro movimento conoscendo le forze esercitate su di essi. I corsi citati hanno in comune i principi fondamentali e le equazioni di base, differenziandosi per i problemi particolari analizzati in dettaglio.

Queste note hanno lo scopo di accompagnare gli studenti durante i corsi di Idrodinamica e Idraulica offerti rispettivamente agli allievi dei corsi di laurea (di 1° livello) in Ingegneria Civile e Ambientale e Ingegneria Navale della Scuola Politecnica dell'Università di Genova. Esse sono altresì utilizzate, tutte o in parte, per i corsi di Meccanica dei Fluidi del corso di laurea in Ingegneria Chimica.

La forma di queste note è sintetica. In esse vengono riassunti i contenuti fondamentali delle lezioni svolte, cercando di seguire, per quanto possibile, la loro cronologia. Esse devono essere intese come un ausilio alla preparazione dell'esame che presuppone la frequenza al corso e un approfondimento dei temi trattati su testi facilmente reperibili nella biblioteca della Scuola Politecnica.

Lezione 1. Lo schema di continuo

I fluidi, come tutta la materia, hanno una struttura discontinua essendo formati da molecole (insieme di atomi) poste a distanze grandi rispetto alle loro dimensioni e animate da elevate velocità relative. In un punto arbitrario dello spazio non è quindi possibile definire con precisione le proprietà di un fluido (della materia) perché in tale punto potrebbe non esserci fluido (materia) o potrebbe trovarsi una particolare molecola dotata di una sua massa, di una sua velocità

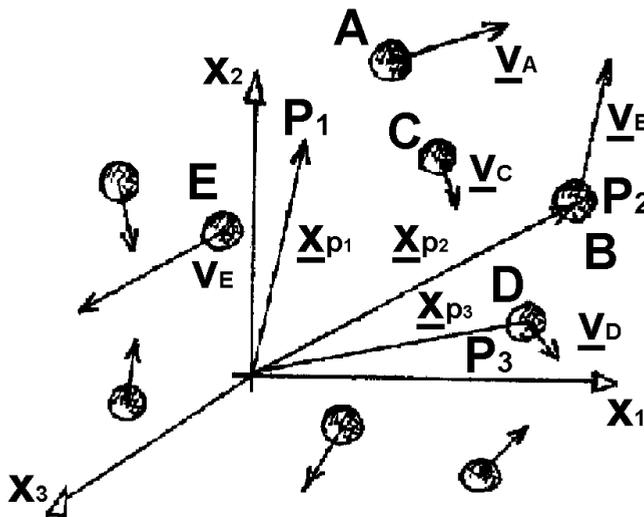


Figura 1.1

Esempio:

Nel punto P_1 , individuato dal vettore posizione \underline{x}_{p1} ⁽¹⁾ non è possibile definire

⁽¹⁾Una lettera in grassetto indica un vettore, una grandezza cioè individuata da un modulo, una direzione e un verso. Quindi v indica un vettore le cui componenti, rispetto a un sistema di riferimento Cartesiano costituito dagli assi x_1 , x_2 e x_3 , sono rispettivamente v_1 , v_2 e v_3 .

alcuna velocità non essendo presente alcuna molecola. Nel punto P_2 , occupato all'istante in esame dalla particella B, possiamo definire la velocità v_B che tuttavia è molto diversa dalla velocità v_D presente nel punto P_3 ove transita la particella D.

Ciò che avviene a livello molecolare non è però di nostro interesse. È possibile prescindere da questo carattere discontinuo della materia, se si prende in considerazione un volume che contiene un numero elevato di molecole e si definiscono delle grandezze medie. Ad esempio possiamo definire la densità ρ_1 associata al volume V_1 come il rapporto fra la massa M_1 in esso contenuta e il volume stesso.

$$\rho_1 = \frac{M_1}{V_1}$$

Similmente possiamo definire

$$\rho_2 = \frac{M_2}{V_2}$$

e in generale

$$\rho_1 \neq \rho_2$$

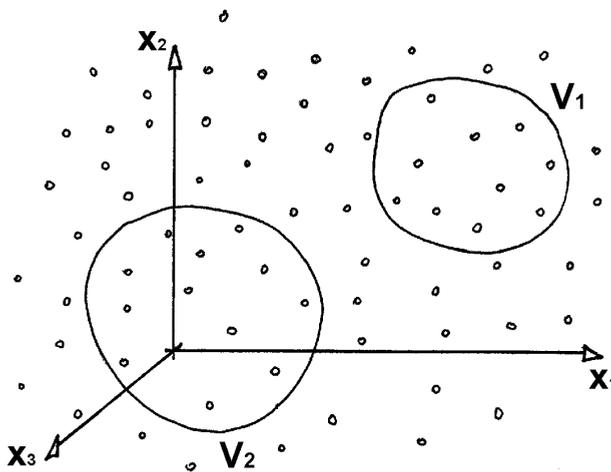


Figura 1.2

1.1 La densità in un punto

Consideriamo un punto P nello spazio individuato dal vettore posizione $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ e un volume $\Delta V'$ che racchiude il punto P. Procedendo come prima possiamo associare al volume $\Delta V'$ una densità $\rho_{\Delta V'}$:

$$\rho_{\Delta V'} = \frac{\Delta M'}{\Delta V'}$$

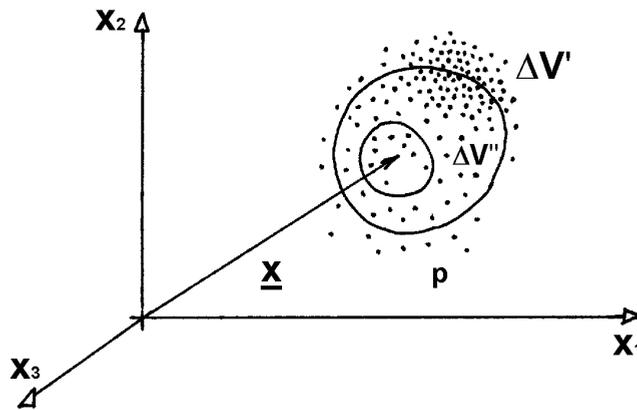


Figura 1.3

Scegliendo un altro volume $\Delta V''$ otterremo un valore della densità diverso: $\rho''_{\Delta V''}$. La densità ρ nel punto individuato dal vettore \mathbf{x} è definita come il limite di $\rho_{\Delta V}$ per ΔV tendente a valori piccoli (ϵ)

$$\rho(\mathbf{x}) = \lim_{\Delta V \rightarrow \epsilon} \frac{\Delta M}{\Delta V}.$$

La dimensione del volume ϵ deve essere piccola rispetto alle dimensioni di interesse ma comunque molto maggiore della distanza media fra molecole. L'andamento qualitativo di ρ in funzione di ΔV è rappresentato in figura 1.4 ove d rappresenta la distanza media fra le molecole.

La densità dei fluidi varia con la temperatura e la pressione a cui sono sottoposti. Tale variazione è consistente per i gas ma piuttosto debole per i liquidi. Se la densità di un fluido non dipende dalla pressione e dalla temperatura, il fluido è detto **incomprimibile** (e indilatabile). Come si vedrà nel capitolo 5, i liquidi, se sottoposti a variazioni di pressione e di temperatura modeste, possono essere

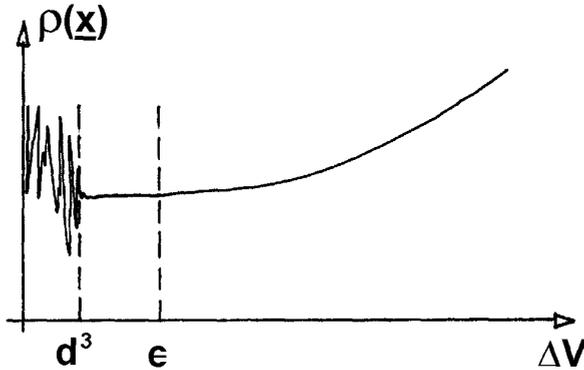


Figura 1.4

trattati come fluidi incompressibili. Le dimensioni ⁽²⁾ della densità sono quelle di una massa divisa per un volume

$$[\rho] = ML^{-3}$$

e l'unità di misura nel sistema internazionale è il Kg/m³. La densità di alcuni fluidi è riportata in una nota relativa al capitolo 5.

In modo analogo a quanto fatto per la densità, possiamo definire qualunque altra grandezza F di interesse, che risulterà una funzione continua della variabile \mathbf{x} (funzione continua dello spazio). In questo modo il fluido (materia) assume una struttura "continua". Considerando che le caratteristiche del fluido (materia) dipendono anche dal tempo, in generale avremo:

$$F = F(\mathbf{x}, t) = F(x_1, x_2, x_3, t)$$

con

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} F(\mathbf{x}, t) = F(\mathbf{x}_0, t)$$

$$\lim_{t \rightarrow t_0} F(\mathbf{x}, t) = F(\mathbf{x}, t_0)$$

essendo F una qualunque proprietà.

⁽²⁾Come si vedrà meglio nel capitolo 11, la dimensione di una grandezza fisica è l'entità che accomuna tutte le grandezze che hanno la stessa natura. Ad esempio, se si considerano il diametro di una sfera, la lunghezza di un corso d'acqua e la lunghezza di un condotto, tutte queste quantità hanno in comune la dimensione lunghezza (L). In meccanica dei fluidi si utilizzano tre dimensioni fondamentali di base, atte cioè a descrivere le dimensioni di tutte le altre grandezze: M (massa), L (lunghezza) e T (tempo)

Lezione 2. Forze di massa e di superficie

Le molecole che costituiscono la materia esercitano delle forze sulle molecole circostanti che vengono suddivise in due categorie:

- 1) forze a corto raggio
- 2) forze a lungo raggio

Le prime (forze a corto raggio) assumono valori significativi solo quando le molecole si trovano a distanza dell'ordine delle loro dimensioni. Le seconde (forze a lungo raggio) decadono molto lentamente e rimangono significative anche quando le molecole sono a distanze rilevanti, cioè molto maggiori delle loro dimensioni.

Utilizzando lo schema di continuo illustrato nella capitolo 1, si tiene conto delle precedenti osservazioni sperimentali, introducendo due categorie di forze:

- 1) forze di superficie
- 2) forze di massa

Le prime (forze di superficie) sono proporzionali alla superficie considerata e sono il risultato delle forze molecolari di corto raggio. Le seconde (forze di massa) sono invece proporzionali alla massa presa in considerazione e sono il risultato delle forze molecolari di lungo raggio.

Consideriamo un volume V di un continuo (fluido) e una sua parte V' . Denotiamo rispettivamente con S e S' le superfici che delimitano V e V' .

Attraverso una porzione piccola dS' (a rigori infinitesima) di normale \mathbf{n} (uscite dal volume) della superficie S' , il continuo (fluido) all'esterno di S' di esercita una forza $d\mathbf{F}$ (anch'essa piccola e a rigori infinitesima) sul continuo (fluido) all'interno. Se raddoppiamo dS' la forza raddoppierà. Come detto precedentemente

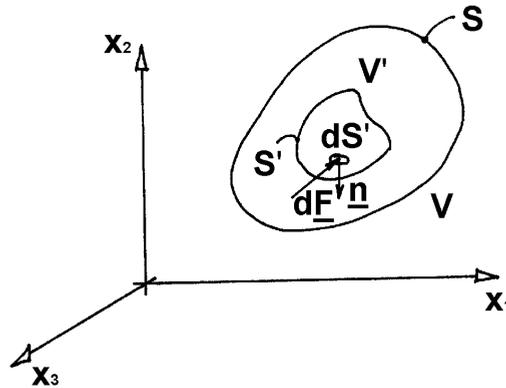


Figura 2.1

la forza è proporzionale alla superficie. Avremo quindi

$$d\mathbf{F} = t dS.$$

La quantità vettoriale t si dice tensione.

Le dimensioni della tensione t sono quelle di una forza divisa per una superficie

$$[t] = ML^{-1}T^{-2}.$$

L'unità di misura è il $\text{Kg m}^{-1} \text{s}^{-2}$, ⁽¹⁾ o anche il $(\text{Kg m s}^{-2})\text{m}^{-2} = \text{Nm}^{-2}$ denominata anche **pascal** (Pa). Nell'ingegneria vengono ancor oggi utilizzate unità di misura diverse. In particolare:

- il chilogrammo forza su metro quadro: $1 \text{ Kg}_f / \text{m}^2 = 9.81 \text{ N/m}^2 = 9.81 \text{ Pa}$
- un'atmosfera normale: $1 \text{ Atm} = 1,01325 \times 10^5 \text{ Pa}$
- un bar: $1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa}$.

La tensione t in generale dipende dalla posizione x della superficie infinitesima dS' , dal tempo t (non confondere t =tensione con t =tempo) e dalla normale n . In uno stesso punto e allo stesso tempo due superfici infinitesime di ugual area dS' e diversa normale n saranno caratterizzate da valori diversi della tensione

$$d\mathbf{F}^{(1)} = t^{(1)} dS'$$

⁽¹⁾ Kg indica il chilogrammo massa, m indica il metro, s indica il secondo, N indica il newton

$$d\mathbf{F}^{(2)} = \mathbf{t}^{(2)} dS''.$$

Si ha quindi

$$\mathbf{t} = \mathbf{t}(\mathbf{x}, t, \mathbf{n})$$

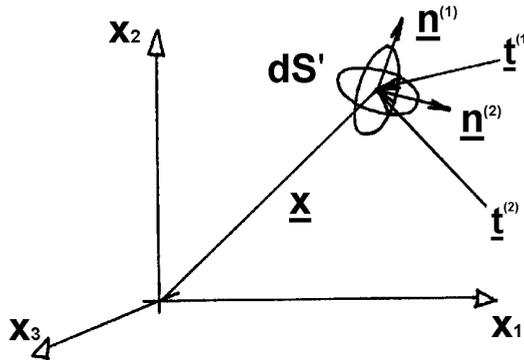


Figura 2.2

La forza $d\mathbf{F} = \mathbf{t}dS'$ descrive completamente l'azione che il continuo (fluido) all'esterno di V esercita su quello all'interno attraverso la superficie dS' (ASSIOMA DI CAUCHY). Volendo determinare la forza complessiva (risultante) che il continuo (fluido) all'esterno di S' esercita su quello all'interno è necessario:

- 1) suddividere la superficie S' in parti infinitesime dS'
- 2) valutare su ciascuna parte la forza infinitesima $d\mathbf{F}$ esercitata dall'esterno: $d\mathbf{F} = \mathbf{t}dS'$
- 3) sommare tutti i contributi individuati

$$\mathbf{F} = \int_{S'} \mathbf{t}dS'.$$

L'azione che il continuo contenuto in V' esercita su quello posto esternamente è pari a $-\mathbf{F}$.

La forza $\mathbf{F} = \int_{S'} \mathbf{t}dS'$ rappresenta l'azione del continuo (fluido) all'esterno di V' (ma nelle immediate vicinanze di S') sul continuo all'interno. Tuttavia altra materia esiste anche a distanze elevate (molto maggiori delle dimensioni di V') e tali da non consentirne la rappresentazione nella figura.

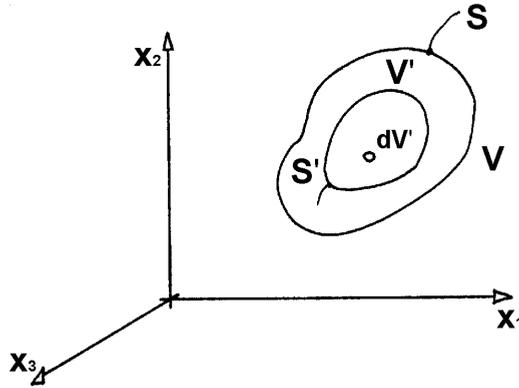


Figura 2.3

Considerando una porzione piccola dV' (a rigori infinitesima) del volume V' , si assume che la materia molto distante da dV' e non rappresentata in figura eserciti una forza $d\mathbf{G}$ sul continuo contenuto in dV' proporzionale alla sua massa. Se raddoppiamo dV' e quindi la massa in considerazione, la forza raddoppierà. Come detto precedentemente la forza è proporzionale alla massa. Per quanto illustrato nel capitolo 1, la massa dM contenuta in dV' è esprimibile come

$$dM = \rho dV'$$

avremo quindi

$$d\mathbf{G} = \mathbf{f} \rho dV'$$

La quantità vettoriale \mathbf{f} è detta campo di forze.

Le dimensioni del campo di forze \mathbf{f} sono quelle di una forza divisa per una massa cioè quelle di un'accelerazione.

$$[\mathbf{f}] = LT^{-2}$$

L'unità di misura di \mathbf{f} è il $m s^{-2}$. Il campo di forze \mathbf{f} in generale dipende dalla posizione \mathbf{x} e dal tempo t .

Volendo determinare la forza complessiva (risultante) che la materia lontana da V' esercita sul continuo (fluida) in esso contenuto è necessario:

- 1) Suddividere il volume V' in parti infinitesime dV' .
- 2) Valutare su ciascuna parte la forza infinitesima $d\mathbf{G}$ ⁽²⁾ esercitata dall'esterno:

$$d\mathbf{G} = \mathbf{f}\rho dV'.$$

- 3) Sommare tutti i contributi individuati:

$$\mathbf{G} = \int_{V'} \rho \mathbf{f} dV'.$$

⁽²⁾Benché possano essere considerati diversi campi di forze, il campo di forze che verrà preso in considerazione nel corso è il campo di forze gravitazionale ($\mathbf{f}=\mathbf{g}$). Il vettore \mathbf{g} è diretto verticalmente verso il basso e ha un valore che è lecito assumere costante e pari a 9.81 ms^{-2} .

Lezione 3. Fluidi in quiete

Come illustrato nel Capitolo 2, la tensione \underline{t} all'interno di un continuo (fluido) dipende non solo dalla posizione individuata dal vettore \underline{x} e dal tempo t ma anche dall'orientamento della superficie infinitesima dS' presa in esame.

In generale

$$\underline{t} = \underline{t}(\underline{x}, t, \underline{n}).$$

Nei fluidi in quiete, tuttavia, la tensione assume una forma particolarmente semplice (ASSIOMA DI EULERO). In particolare \underline{t} risulta sempre ortogonale alla superficie in considerazione e diretta verso la superficie:

$$\underline{t} = -p\underline{n}.$$

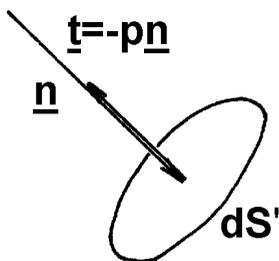


Figura 3.1

La quantità scalare p si dice **pressione**.

Le dimensioni della pressione sono uguali a quelle della tensione ($[p]=ML^{-1}T^{-2}$) così come le unità di misura (si ricordi che la normale è adimensionale).

La pressione p in generale dipende dalla posizione \mathbf{x} e dal tempo t :

$$p = p(\mathbf{x}, t).$$

3.1 L'equazione integrale della statica

Consideriamo un volume di fluido V in quiete rispetto a un sistema di riferimento inerziale (x_1, x_2, x_3) e una sua porzione arbitraria V' . Per il principio della quantità di moto (la derivata della quantità di moto di una massa in movimento rispetto al tempo è uguale alla risultante delle forze esercitate sulla massa dall'esterno), la risultante delle forze che l'esterno esercita su V' deve annullarsi. Infatti in un fluido in quiete la quantità di moto è sempre nulla, essendo nulla la velocità. Per quanto esposto nel capitolo 2, la risultante \mathbf{R} delle forze esercitate dall'esterno su V' sarà

$$\mathbf{R} = \int_{S'} \mathbf{t} dS' + \int_{V'} \rho \mathbf{f} dV'$$

o, tenendo conto che $\mathbf{t} = -p \mathbf{n}$,

$$\mathbf{R} = - \int_{S'} p \mathbf{n} dS' + \int_{V'} \rho \mathbf{f} dV'.$$

Deve quindi risultare

$$\mathbf{R} = 0 \quad \text{oppure} \quad \int_{S'} p \mathbf{n} dS' = \int_{V'} \rho \mathbf{f} dV'.$$

L'equazione precedente è detta **equazione integrale della statica** e deve valere qualunque volume V' .

3.2 L'equazione puntuale della statica

L'equazione della statica in forma integrale, ottenuta rispetto a un sistema di riferimento inerziale, può essere trasformata utilizzando il teorema del gradiente⁽¹⁾ che porge:

⁽¹⁾Questo risultato segue banalmente osservando che $p\mathbf{n} = p\mathbf{I} \cdot \mathbf{n}$ (dove \mathbf{I} è la matrice identità) e applicando il teorema di Gauss (detto anche teorema della divergenza)

$$\int_S (p\mathbf{I}) \cdot \mathbf{n} dS = \int_V \nabla \cdot (p\mathbf{I}) dV = \int_V \nabla p dV.$$

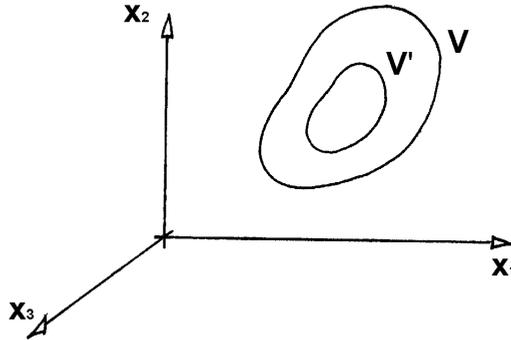


Figura 3.2

$$\int_{S'} (pn) dS' = \int_{V'} \nabla p dV'.$$

Si ottiene quindi

$$\int_{V'} (\nabla p - \rho \mathbf{f}) dV' = 0.$$

Considerando che l'equazione della statica in forma integrale vale qualunque porzione V' di V si consideri, l'equazione precedente può essere soddisfatta solo se si annulla la funzione integranda; se cioè

$$\nabla p = \rho \mathbf{f}.$$

L'equazione precedente, detta **equazione puntuale della statica**, è un'equazione vettoriale che corrisponde a tre equazioni scalari

$$\frac{\partial p}{\partial x_1} = \rho f_1; \quad \frac{\partial p}{\partial x_2} = \rho f_2; \quad \frac{\partial p}{\partial x_3} = \rho f_3.$$

Essa descrive come cambia nello spazio la pressione p . Tale equazione può essere integrata una volta noto il campo di forze \mathbf{f} e l'equazione di stato che lega la densità allo stato del fluido.

3.3 Fluidi in quiete rispetto a un sistema di riferimento non inerziale

Si considerino due sistemi di riferimento. Il primo sistema di riferimento (O, x, y, z) è inerziale mentre il secondo sistema di riferimento (O', x', y', z') non

è inerziale, cioè trasla con velocità \mathbf{U} e ruota con velocità angolare $\boldsymbol{\Omega}$ rispetto al primo (figura 3.3).

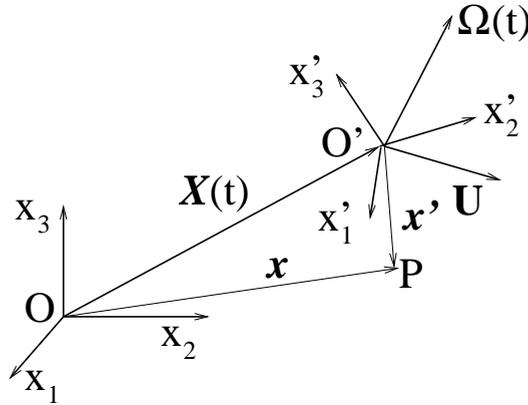


Figura 3.3

L'accelerazione di una particella fluida nel sistema di riferimento inerziale è legata all'accelerazione misurata nel sistema non inerziale dalla seguente relazione:

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}' + \frac{d\mathbf{U}}{dt} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}' + \frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt} \times \mathbf{x}' + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}')$$

dove le quantità relative al sistema di riferimento non inerziale sono indicate con un apice. Se la particella fluida è in quiete rispetto al sistema di riferimento non inerziale, le quantità \mathbf{a}' e \mathbf{u}' risultano nulle e dunque:

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{U}}{dt} + \frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt} \times \mathbf{x}' + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}').$$

Le equazioni della statica, scritte nel sistema di riferimento non inerziale, risultano differenti da quelle viste precedentemente, che sono valide per un fluido in quiete rispetto a un sistema di riferimento inerziale. In particolare l'equazione integrale della statica, riferita al volume V' , solidale con il sistema di riferimento (O', x', y', z') risulterà:

$$\int_{S'} p \mathbf{n} dS' = \int_{V'} \rho (\mathbf{f} - \mathbf{a}) dV',$$

mentre l'equazione puntuale della statica da utilizzare è:

$$\nabla' p = \rho (\mathbf{f} - \mathbf{a})$$

dove:

$$\nabla' p = \left(\frac{\partial p}{\partial x'}, \frac{\partial p}{\partial y'}, \frac{\partial p}{\partial z'} \right).$$

Nel capitolo 4 sono presentati due esempi di calcolo della distribuzione della pressione in un fluido a densità costante quando il fluido è in quiete rispetto a due particolari sistemi di riferimento non inerziali.

Lezione 4. Statica dei fluidi a densità costante

In molte circostanze, discusse nel capitolo 5, la densità di un fluido può essere considerata costante. Qualora il campo di forze sia quello gravitazionale, è possibile integrare facilmente l'equazione puntuale della statica e ottenere la distribuzione spaziale della pressione.

4.1 Fluido in quiete rispetto a un sistema di riferimento inerziale

Consideriamo il fluido, all'interno del contenitore in figura 4.1, supposto di densità costante ρ . Il campo di forze sia quello gravitazionale e l'accelerazione sia diretta verticalmente verso il basso. L'equazione puntuale della statica porge

$$\frac{\partial p}{\partial x_1} = 0; \quad \frac{\partial p}{\partial x_2} = -\rho g; \quad \frac{\partial p}{\partial x_3} = 0$$

e impone quindi che la pressione non dipenda né da x_1 né da x_3 : **la pressione è costante su un piano orizzontale.**

La seconda equazione si trasforma in un'equazione alle derivate ordinarie che può essere facilmente integrata

$$\frac{dp}{dx_2} = -\rho g \implies p = -\rho g x_2 + c_1 = -\gamma x_2 + c_1.$$

La pressione aumenta linearmente all'aumentare della profondità. Il valore della costante c_1 può essere determinato solo se è nota la pressione in un punto. Il prodotto $\gamma = \rho g$ è detto **peso specifico** e le sue dimensioni sono quelle di una forza divisa per un volume:

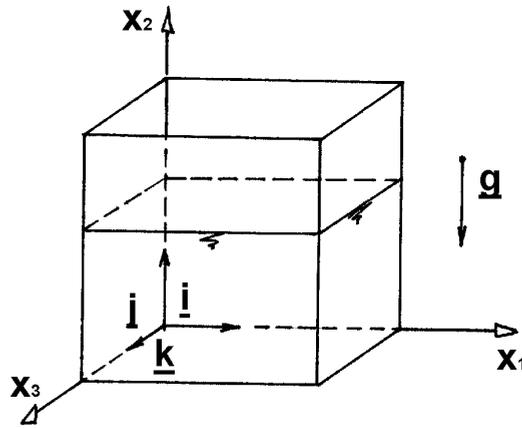


Figura 4.1

$$[\gamma] = ML^{-3}LT^{-2} = ML^{-2}T^{-2}$$

L'unità di misura è il $N\ m^{-3}$. Nell'ingegneria viene talvolta utilizzato il chilogrammo forza su metro cubo: $1\ Kg_f\ m^{-3} = 9.81\ N\ m^{-3}$.

Con riferimento agli assi in figura 4.2, denotiamo con p_0 la pressione nel piano che risulta essere l'interfaccia fra due fluidi. Non consideriamo per il momento il fluido sovrastante, che possiamo pensare essere aria, e focalizziamo l'attenzione su quello sottostante di peso specifico γ . Al fine di analizzare un caso reale possiamo pensare quest'ultimo come acqua. Si ha dunque:

$$p = p_0 - \gamma z.$$

Essendo ρ ⁽¹⁾ pari a $1000\ Kg/m^3$ ed essendo p_0 pari alla pressione atmosferica cioè circa $1.013 \cdot 10^5\ Pa$, l'andamento della pressione è quello riportato in figura 4.3. La pressione raddoppia a una profondità di circa 10 m mentre diviene $3\ p_0$ a una profondità di circa 20 m e così via. Dal grafico risulta evidente quanto già detto in precedenza e sintetizzato dalla formula: la pressione aumenta in modo lineare con la profondità. **La distribuzione della pressione in un fluido incompressibile in quiete è idrostatica.**

⁽¹⁾La densità ρ dell'acqua, che in generale dipende dalla pressione e dalla temperatura (vedi capitolo 5), in molti casi può essere assunta costante e pari a $1000\ Kg/m^3$. Il peso specifico γ risulta quindi pari a $9810\ N/m^3$. Talvolta γ viene espresso in chilogrammi forza su metro cubo. In questo caso si ha $\gamma = 1000\ Kg_f/m^3$.

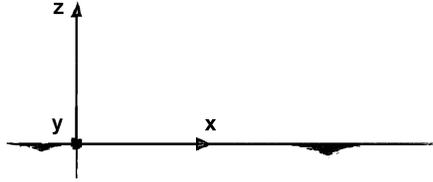


Figura 4.2

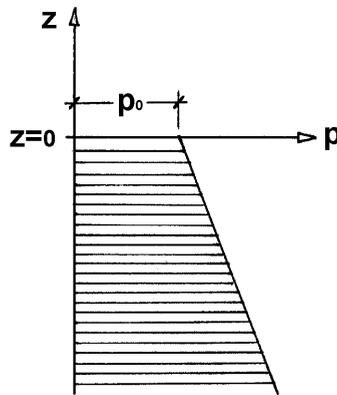


Figura 4.3

Per motivi che saranno chiari nel seguito, introduciamo la quantità

$$h = z + \frac{p}{\gamma}$$

detta **carico piezometrico**. Le dimensioni del carico piezometrico sono quelle di una lunghezza

$$[h] = L$$

e quindi la sua unità di misura è il metro (m). **In un fluido in quiete h risulta costante**. Si ha infatti:

$$h = z + \frac{c_1 - \gamma z}{\gamma} = \frac{c_1}{\gamma}$$

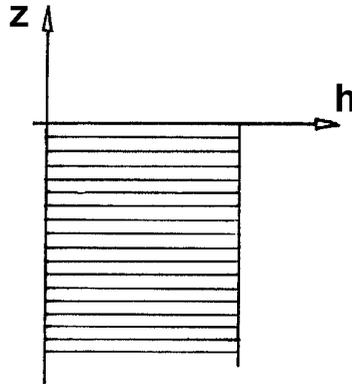


Figura 4.4

La figura 4.4 mostra l'andamento del carico piezometrico in un fluido in quiete. Il carico piezometrico h rappresenta l'energia meccanica posseduta dal fluido per unità di peso. Essa si compone di energia potenziale per unità di peso (z) ed energia di pressione per unità di peso (p/γ).

L'equazione della statica per un fluido a densità costante soggetto al campo di forze gravitazionale

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g = -\gamma$$

porge anche

$$p_A - p_B = -\gamma (z_A - z_B).$$

Cioè la differenza di pressione fra due punti è pari a γ per la differenza di quota. Chiaramente il punto a quota più bassa ha la pressione maggiore.

4.2 Fluido in quiete rispetto a un sistema di riferimento non inerziale

Nel seguito sono presentati due esempi in cui, sulla base di quanto esposto precedentemente, viene calcolata la distribuzione della pressione in un fluido in

quiete rispetto a un sistema di riferimento non inerziale.

4.2.1 Fluido in moto di corpo rigido sottoposto a una accelerazione lineare costante

Si consideri un fluido in quiete rispetto a un sistema di riferimento che accelera, come il caso mostrato in figura 4.5 in cui un contenitore è sottoposto a un moto accelerato con accelerazione a allineata con l'asse y . All'interno del contenitore è presente un fluido che risulta in quiete rispetto a un sistema di assi solidali con il contenitore. L'equazione puntuale della statica, espressa in un sistema di riferimento non inerziale, in questo caso porge:

$$\nabla' p = -\rho g \mathbf{k} - \rho a \mathbf{j}$$

dove $\nabla' p = \left(\frac{\partial p}{\partial x'}, \frac{\partial p}{\partial y'}, \frac{\partial p}{\partial z'} \right)$ che, proiettata nelle direzioni degli assi coordinati, consente di ottenere un sistema di equazioni alle derivate parziali che si può integrare facilmente, ottenendo la distribuzione della pressione all'interno del serbatoio:

$$p(x', y', z') = -\rho a y' - \rho g z' + c_2.$$

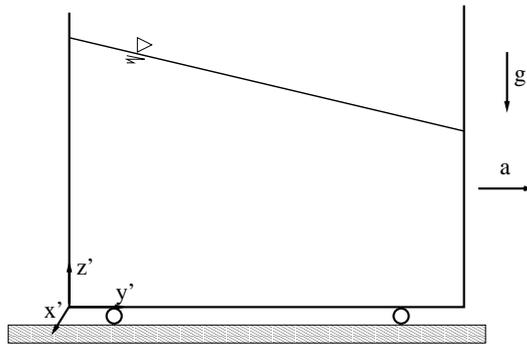


Figura 4.5

Si noti che, fissato il valore di y' , la pressione ha la distribuzione lineare (idrostatica) rispetto alla direzione verticale mostrata in figura 4.6. Con semplici passaggi algebrici è facile mostrare che i piani con pressione costante pari a p_c sono individuati dall'equazione:

$$z' = \frac{c_2 - p_c}{\rho g} - \frac{a}{g} y'$$

dove c_2 è una costante il cui valore si calcola, noto il volume di liquido presente all'interno del serbatoio, ipotizzando che il liquido non esca dal recipiente. Ipotizzando la larghezza del recipiente unitaria, indicate con h_0 l'altezza del liquido quando il recipiente è fermo e con l la sua lunghezza, si ottiene:

$$c_2 = p_{atm} + \gamma \left[h_0 + \frac{al}{2g} \right]$$

da cui si ricava l'equazione dell'interfaccia:

$$z' = h_0 + \frac{a}{g} \left[\frac{l}{2} - y' \right]$$

la cui forma è mostrata in figura 4.6.

La pressione risulta quindi:

$$p(x', y', z') = p_{atm} - \rho a y' + \rho g \left(h_0 + \frac{al}{2g} - z' \right).$$

Si noti che, considerando un valore assegnato di z , cioè in un piano orizzontale, al crescere del valore di y il valore della pressione diminuisce.

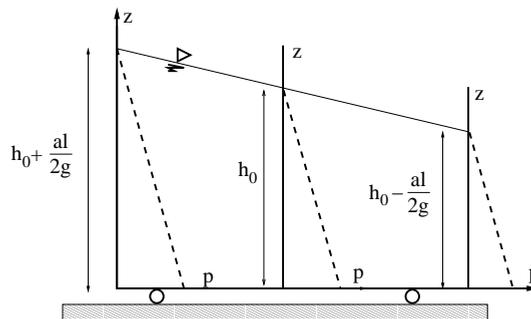


Figura 4.6

4.2.2 Fluido in moto di corpo rigido sottoposto a una velocità angolare costante

Si consideri un recipiente cilindrico di raggio R contenente un fluido incomprimibile che ruota, con velocità angolare costante ω , attorno al proprio asse. Il pannello a sinistra della figura 4.7 mostra il recipiente prima dell'inizio del moto

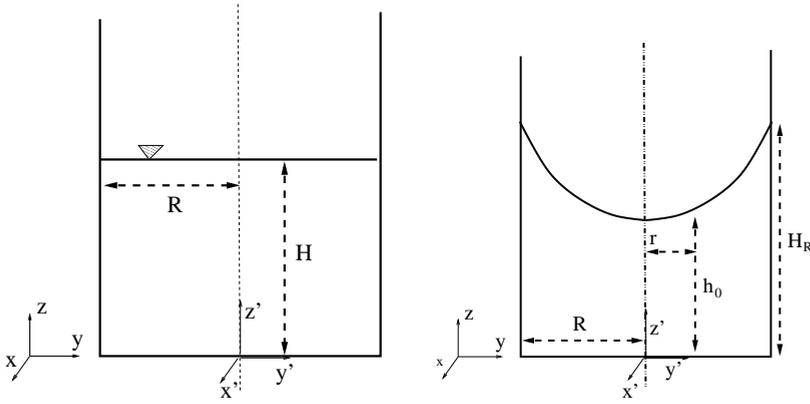


Figura 4.7

mentre il pannello a destra mostra il recipiente in rotazione quando il fluido al suo interno è in quiete rispetto al sistema di riferimento non inerziale (x', y', z') solidale con il recipiente.

Considerata la particolare geometria del problema in esame, è opportuno introdurre un sistema di coordinate cilindriche (r, θ, z') , rispetto al quale l'equazione puntuale della statica diviene:

$$\nabla' p = \rho [-g \mathbf{i}_{z'} + r\omega^2 \mathbf{i}_r] \quad (4.1)$$

dove $\nabla' p = \left(\frac{\partial p}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta}, \frac{\partial p}{\partial z'} \right)$ e \mathbf{i}_r e $\mathbf{i}_{z'}$ sono i versori degli assi r e z' .

L'equazione puntuale della statica (4.1) è equivalente al sistema di equazioni differenziali:

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \rho r \omega^2; \quad \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} = 0; \quad \frac{\partial p}{\partial z'} = -\rho g$$

che possono essere facilmente integrate per ottenere:

$$p(r, \rho, z) = \rho \frac{r^2 \omega^2}{2} - \rho g z + C.$$

È facile mostrare che le superfici caratterizzate dal valore costante della pressione p_c sono descritte dall'equazione:

$$z' = \frac{C - p_c}{\rho g} + \frac{r^2 \omega^2}{2g}.$$

L'interfaccia tra il fluido e l'aria ha la forma simile a quella mostrata nel pannello a destra della figura 4.1. La pressione cresce linearmente al crescere dell'affondamento del punto considerato.

L'altezza massima è raggiunta dal liquido per $r = R$ e risulta pari a:

$$H_R = \frac{C - p_{atm}}{\rho g} + \frac{R^2 \omega^2}{2g}$$

mentre l'altezza minima si realizza in $r = 0$ e risulta pari a:

$$h_0 = \frac{C - p_{atm}}{\rho g}.$$

Il valore della costante C che compare nelle due espressioni precedenti si calcola supponendo che il liquido non fuoriesca dal recipiente in rotazione, imponendo l'uguaglianza del volume del fluido contenuto nel serbatoio fermo e nel serbatoio in rotazione:

$$\pi R^2 H = \int_0^R 2\pi r z' dr$$

da cui, svolgendo i calcoli si ottiene:

$$C = p_{atm} + \rho g H - \frac{1}{4} \rho \omega^2 R^2$$

e quindi:

$$H_R = H + \frac{\omega^2 R^2}{4g} \quad h_0 = H - \frac{\omega^2 R^2}{4g}$$

$$p = p_{atm} + \rho g (H - z) + \rho \frac{\omega^2}{2} \left(r^2 - \frac{R^2}{2} \right).$$

Lezione 5. L'equazione di stato

Per i cosiddetti fluidi termodinamici, lo stato del fluido (le sue caratteristiche) dipende da due variabili, dette variabili di stato. Le due variabili di stato possono essere scelte arbitrariamente, essendo tutte le altre caratteristiche del fluido legate alle due scelte da equazioni dette “equazioni di stato”. Spesso come variabili di stato vengono scelte:

1) la pressione p

2) la temperatura T

si ha quindi:

$$\rho = \rho(p, T)$$

che è l'equazione di stato che lega la densità alla pressione e alla temperatura. L'equazione evidenzia che variando la pressione e/o la temperatura varia la densità del fluido. Ogni fluido è caratterizzato da una diversa equazione; cioè la sua densità può variare in modo più o meno significativo al variare della pressione e della temperatura.

In forma differenziale l'equazione di stato può essere scritta nella forma:

$$d\rho = \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right) dp + \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right) dT.$$

L'equazione precedente può essere riscritta introducendo il coefficiente di comprimibilità isoterma e quello di dilatabilità isobaro.

- Coefficiente di comprimibilità isoterma:

$$\epsilon^{-1} = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)$$

- Coefficiente di dilatabilità isobaro:

$$\alpha = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)$$

L'equazione diviene:

$$d\rho = \rho (\epsilon^{-1} dp - \alpha dT) .$$

Essendo proprietà del fluido, ϵ e α a loro volta dipendono da p e T . Tuttavia, se le variazioni di p e T non sono elevate, ϵ e α possono essere considerati costanti e pari a ϵ_0 e α_0 . Segue:

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{\rho} &= \epsilon_0^{-1} dp - \alpha_0 dT \\ &\Downarrow \\ \ln \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right) &= \epsilon_0^{-1} (p - p_0) - \alpha_0 (T - T_0) \\ &\Downarrow \\ \rho &= \rho_0 e^{\epsilon_0^{-1}(p-p_0) - \alpha_0(T-T_0)} \end{aligned}$$

ove ρ_0 è la densità alla pressione p_0 e alla temperatura T_0 .

L'equazione precedente può essere considerata come equazione di stato in quelle situazioni in cui le variazioni di p e T non sono rilevanti.

Per valori della pressione e della temperatura pari a quelli ambientali (es.: $p=1,013 \cdot 10^5$ Pa, $T=20^\circ$ C), i valori di ϵ_0 e α_0 per l'acqua sono molto grandi e molto piccoli rispettivamente ($\epsilon_0 = 2.178 \cdot 10^9$ N/m², $\alpha_0 = 20.66 \cdot 10^{-5}$ K⁻¹). Per variazioni di pressione piccole rispetto a ϵ_0 e per variazioni di temperatura piccole rispetto a α_0^{-1} , è possibile approssimare $e^{\epsilon_0^{-1}(p-p_0) - \alpha_0(T-T_0)}$ con 1 e considerare il valore di ρ costante e pari a ρ_0 .

Considerazioni analoghe possono essere fatte anche per altri fluidi tenendo presente che per assumere $\rho \cong \rho_0$ è necessario che siano piccole (molto minori di 1) le quantità $(p - p_0) / \epsilon_0$ e $\alpha_0 (T - T_0)$.

Esistono altre forme di equazione di stato, valide per casi particolari. Ad esempio per un gas perfetto che subisce una trasformazione isoterma l'equazione di stato diviene

$$\frac{p}{\rho} = \frac{p_0}{\rho_0}$$

essendo p_0 e ρ_0 la pressione e la densità di riferimento. ⁽¹⁾

⁽¹⁾A temperatura $T=15^\circ$ C e pressione $p=1.013 \cdot 10^5$ Pa si ha:

Densità dell'acqua uguale a $9.99 \cdot 10^2$ Kg/m³

Densità dell'olio lubrificante uguale a $8.67 \cdot 10^2$ Kg/m³

Densità dell'aria uguale a 1.22 Kg/m³

Densità del mercurio uguale a $1.36 \cdot 10^4$ Kg/m³

Lezione 6. Statica dei gas perfetti

L'equazione puntuale della statica impone:

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g.$$

Utilizzando l'equazione di stato dei gas perfetti a temperatura costante (capitolo 5), si ottiene:

$$\frac{dp}{dz} = -\frac{p\rho_0}{p_0}g$$

↓

$$\frac{dp}{p} = -\frac{\rho_0 g}{p_0} dz = -\frac{\gamma_0}{p_0} dz$$

↓

$$\ln\left(\frac{p}{p_0}\right) = -\frac{\gamma_0}{p_0}(z - z_0)$$

↓

$$p = p_0 e^{-\frac{\gamma_0(z-z_0)}{p_0}}.$$

Se consideriamo aria a una temperatura di 15°C e assumiamo p_0 pari a 1.013 10^5 Pa con $z_0=0$, il valore di γ_0 risulta pari a 12. N/m³. La figura 6.1 riporta l'andamento qualitativo di p e di ρ con la quota.

Se tuttavia le variazioni di quota sono modeste (per esempio se $z - z_0$ è inferiore a 100 m.), la quantità $\gamma_0(z - z_0)/p_0$ risulta molto minore di uno ($\gamma(z - z_0)/p_0 = 1.2 \cdot 10^{-2}$ per $z - z_0 = 100$ m) e sia la pressione che la densità possono essere assunte costanti. Infatti per valori piccoli di $\gamma_0(z - z_0)/p_0$ si può scrivere:

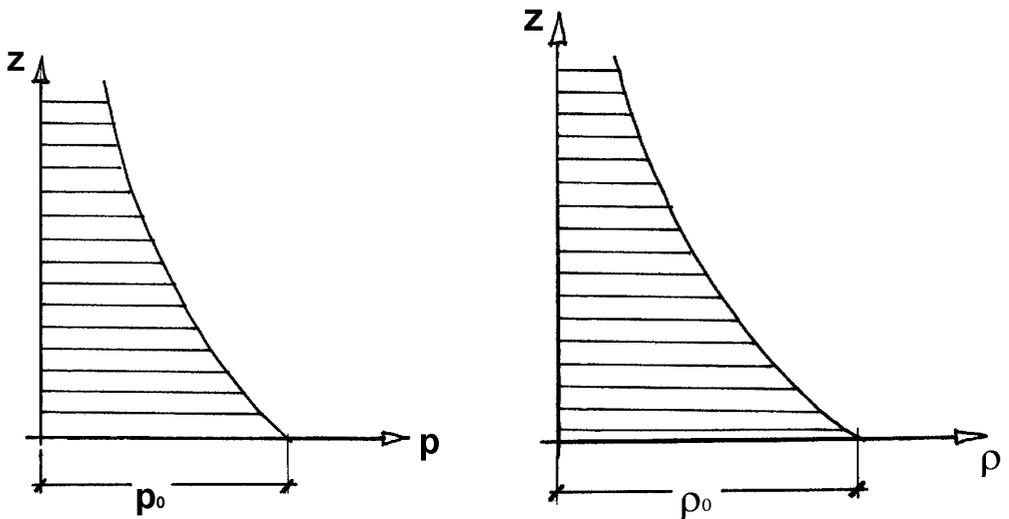


Figura 6.1

$$p \cong p_0 \left[1 - \frac{\gamma_0 (z - z_0)}{p_0} + \frac{1}{2} \left(\frac{\gamma (z - z_0)}{p_0} \right)^2 + \dots \right].$$

Quindi se $(z - z_0)$ è pari a 100 m o inferiore, p può essere assunta pari a p_0 con un errore di ordine 10^{-2} o minore. E per questo motivo che nei problemi che noi affronteremo, in cui le variazioni di quota sono modeste, riterremo la pressione atmosferica costante con la quota.

Lezione 7. Fenomeni di interfaccia

7.1 La tensione superficiale

I fenomeni che hanno luogo all'interfaccia fra due fluidi sono molto complessi e legati alla struttura molecolare della materia. Cerchiamo di dare una semplice spiegazione di tali fenomeni. Con riferimento alla figura 7.1 supponiamo che la

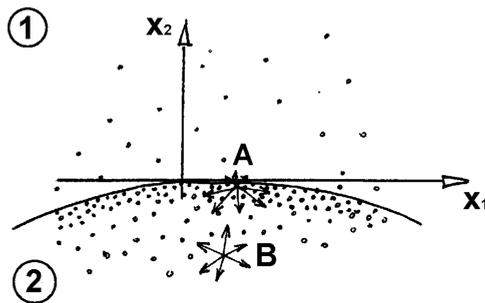


Figura 7.1

densità del fluido ① sia inferiore a quella del fluido ②. La particella B del fluido 2 è attirata dalle particelle limitrofe. Anche la particella A del fluido ② è attirata dalle particelle limitrofe. Tuttavia, essendo la densità del fluido ① inferiore a quella del fluido ②, la forza risultante sulla particella A non sarà nulla ma diretta verso il basso. È evidente quindi che, perché sia possibile una situazione di equilibrio, in prossimità della superficie le particelle tenderanno a formare uno strato più denso. Situazione analoga si avrà nel fluido ①.

A livello macroscopico il fenomeno può essere schematizzato assumendo che l'interfaccia sia una superficie soggetta a uno stato di tensione. Con riferimento alla figura 7.2, la superficie S sia l'interfaccia fra due fluidi e C una curva chiusa su S che abbraccia l'origine O degli assi cartesiani (x_1, x_2, x_3) . Il fenomeno de-

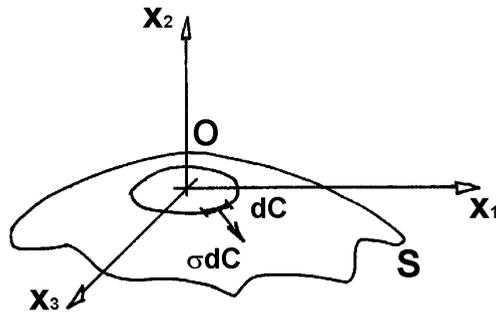


Figura 7.2

scritto precedentemente può essere schematizzato pensando che sul tratto dC , la superficie esterna alla zona delimitata dalla curva C eserciti una forza, sulla superficie all'interno, di modulo pari a σdC , diretta ortogonalmente all'elemento di linea dC e tangente alla superficie. La quantità σ è detta **tensione superficiale** ed è una proprietà dell'interfaccia fra due fluidi. Esisterà quindi la tensione superficiale aria-acqua, aria-olio, olio-acqua ma non la tensione superficiale di un singolo fluido. Dimensionalmente la tensione superficiale è una forza per unità di lunghezza

$$[\sigma] = MLT^{-2}L^{-1} = MT^{-2}.$$

L'unità di misura della tensione superficiale è il Nm^{-1} o alternativamente il $Kgf\ m^{-1}$.

Nel seguito sono riportati alcuni valori della tensione superficiale di diversi liquidi a contatto con l'aria a una temperatura di 15°C e alla pressione di un'atmosfera

Acqua	$7.3 \cdot 10^{-2} N/m$
Glicerina	$7.1 \cdot 10^{-2} N/m$
Benzene	$2.8 \cdot 10^{-2} N/m$
Mercurio	$47.3 \cdot 10^{-2} N/m$

7.2 Il salto di pressione attraverso una superficie gobba

Qualora l'interfaccia fra due fluidi non sia piana, la pressione p_1 all'interfaccia nel fluido ① sarà diversa dalla pressione p_2 all'interfaccia nel fluido ②. È possibile mostrare che il salto di pressione $\Delta p = p_1 - p_2$ è pari a:

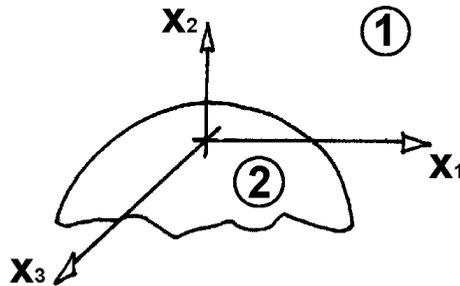


Figura 7.3

$$\pm \sigma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

essendo R_1 e R_2 i raggi principali di curvatura nel punto in considerazione. La pressione sarà maggiore sul fluido che si trova dalla parte concava della superficie.

7.3 Continuità della pressione attraverso una superficie piana

Consideriamo l'interfaccia piana fra due fluidi rispettivamente di peso specifico γ_1 e γ_2 e analizziamo l'equilibrio di un cilindro a sezione circolare (vedi figura 7.4) di area Ω e altezza $2a$ per metà immerso nel primo fluido e per l'altra metà immerso nel secondo fluido. Si denoti con p_1 la pressione (costante per quanto visto precedentemente nel capitolo 4) sulla base superiore del cilindro e con p_2 la pressione sulla base inferiore. Il fluido all'esterno del cilindro eserciterà quindi una forza verso il basso pari a $p_1\Omega$ dovuta alla somma di tante forze infinitesime $p_1 d\Omega$ esercitate sull'area infinitesima $d\Omega$. Analogamente sarà presente una forza verso l'alto pari a $p_2\Omega$. Infine, sempre nella direzione verticale, è presente il peso del fluido contenuto dentro al cilindro pari a $\gamma_1\Omega a + \gamma_2\Omega a$. Non esiste altra forza nella direzione verticale; quindi l'equilibrio in tale direzione impone che:

$$p_2\Omega = p_1\Omega + a\Omega (\gamma_1 + \gamma_2).$$

Nel limite di a tendente a zero si ottiene

$$p_1 = p_2$$

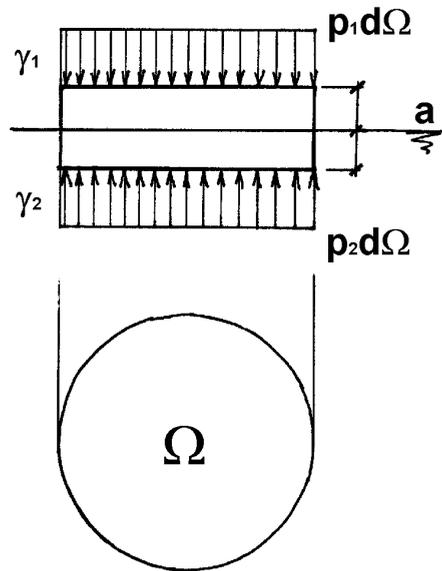


Figura 7.4

Dunque all'interfaccia, la pressione nel fluido 1 è uguale alla pressione del fluido 2.

Lezione 8. La spinta su una superficie piana

8.1 Spinta su una superficie piana soggetta a un campo di pressione costante

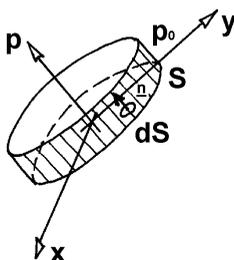


Figura 8.1

In primo luogo mostriamo, come assunto precedentemente nel capitolo 7, che la spinta prodotta da una distribuzione di pressione costante p_0 su una superficie piana S (vedi figura 8.1) è una forza \mathbf{F} ortogonale alla superficie stessa diretta verso la superficie e di modulo pari al valore della pressione per l'area della superficie. Per quanto esposto nel capitolo 2 e nel capitolo 3 si ha:

$$\mathbf{F} = \int_S -p \mathbf{n} dS.$$

Nella situazione in esame $p = p_0$ e \mathbf{n} sono costanti. Segue dunque

$$\mathbf{F} = -p_0 \mathbf{n} \int_S dS = -\mathbf{n} p_0 S.$$

La forza F è quindi diretta come n , ha verso opposto e il suo modulo è pari a $p_0 S$.

8.2 Spinta su una superficie piana soggetta all'azione di un fluido con densità costante

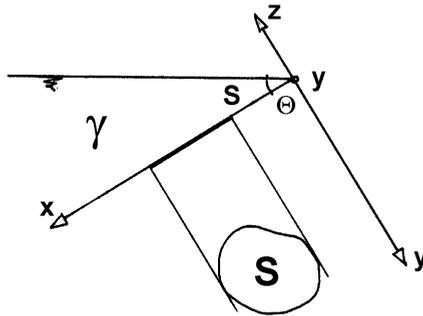


Figura 8.2

Consideriamo ora il problema illustrato in figura 8.2 dove a sinistra del piano (x, y) è presente un liquido di peso specifico γ . Al di sopra del liquido e a destra della superficie è presente aria supposta a pressione costante pari alla pressione atmosferica p_{atm} . Nel disegno è anche raffigurato il piano (x, y) ribaltato sul foglio in modo tale da visualizzare la superficie S in esso contenuta.

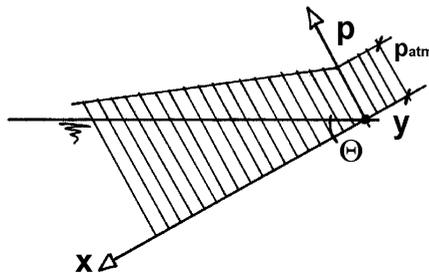


Figura 8.3

Si voglia determinare la forza esercitata dal liquido sulla superficie. Nella figura 8.3 è rappresentato l'andamento della pressione sul piano (x, y) . Da quanto esposto nel capitolo 4 emerge che:

$$p = p_{atm} + \gamma x \sin \theta$$

Volendo determinare la forza esercitata dal liquido sulla superficie S , è necessario determinare

$$\mathbf{F} = \int_S -p \mathbf{n} dS = \int_S -(p_{atm} + \gamma x \sin \theta) \mathbf{n} dS.$$

Tenendo conto che \mathbf{n} è costante, la forza \mathbf{F} può essere scomposta facilmente in due parti

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = -\mathbf{n} p_{atm} S - \mathbf{n} \int_S \gamma x \sin \theta dS.$$

La forza $\mathbf{F}_1 = -\mathbf{n} p_{atm} S$ è bilanciata dalla forza, uguale e contraria, esercitata dall'aria sulla superficie. Per questo motivo il problema di determinare \mathbf{F} viene trasformato nella determinazione di \mathbf{F}_2

$$\mathbf{F}_2 = \int_S -(p - p_{atm}) \mathbf{n} dS.$$

La pressione p diminuita della pressione atmosferica è detta **pressione relativa** (p_r).

Considerando che l'uso della pressione relativa è più diffuso di quello della pressione assoluta, nella rimanente parte di questo capitolo e nel capitolo seguente indicheremo con p la pressione relativa e con \mathbf{F} la forza da essa indotta.

Dalla relazione

$$\mathbf{F} = -\mathbf{n} \int_S \gamma x \sin \theta dS$$

emerge chiaramente che **la forza \mathbf{F} è ortogonale alla superficie (la direzione di \mathbf{F} coincide con quella di \mathbf{n}) è diretta dal liquido verso la superficie e ha intensità F pari a**

$$\int_S \gamma x \sin \theta dS = \gamma \sin \theta \int_S x dS = \gamma \sin \theta x_G S = p_G S^{(1)}$$

ove con il pedice G si sono indicate quantità riferite al baricentro G della superficie. Da quanto ricavato emerge inoltre che **l'intensità della forza esercitata dal**

⁽¹⁾ $\int_S x dS$ è detto **momento statico** della superficie S rispetto all'asse y . Si ha quindi $\int_S x dS = x_G S$ essendo x_G la coordinata x del baricentro della superficie S .

liquido sulla superficie può essere ricavata moltiplicando l'area della superficie per il valore della pressione (relativa) nel baricentro della superficie stessa.

Nel seguito ricaviamo le coordinate x_G, y_G del baricentro di alcune semplici superfici piane.

1) Rettangolo

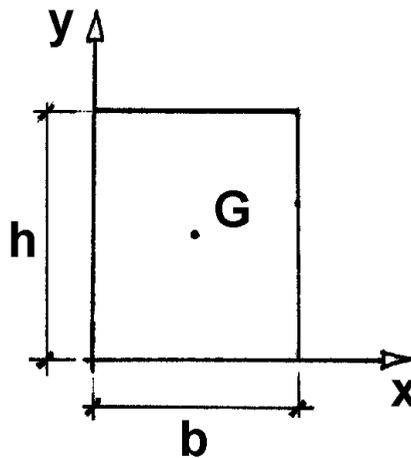


Figura 8.4

$$x_G = \frac{1}{S} \int_S x dS = \frac{1}{bh} \int_0^h \left(\int_0^b x dx \right) dy = \frac{h \frac{1}{2} b^2}{bh} = \frac{b}{2}$$

$$y_G = \frac{1}{S} \int_S y dS = \frac{1}{bh} \int_0^b \left(\int_0^h y dy \right) dx = \frac{b \frac{1}{2} h^2}{bh} = \frac{h}{2}$$

2) Triangolo

$$y_G = \frac{1}{S} \int_S y dS = \frac{2}{bh} \int_0^h \int_{\frac{y}{m}}^{\frac{(h-mb)}{mh} + b} y dx dy$$

$$y_G = \frac{2}{bh} \int_0^h y \left[b + y \left(\frac{h-mb}{mh} - \frac{1}{m} \right) \right] dy = \frac{2}{bh} \left[b \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{3} \frac{(h-mb-h)}{mh} \right]$$

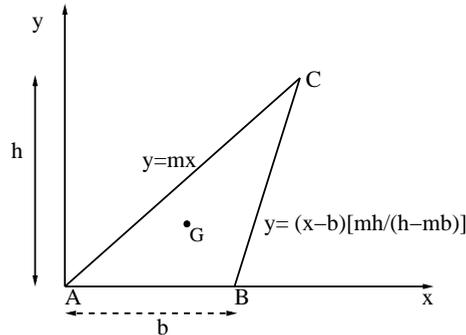


Figura 8.5

$$= \frac{2}{bh} \left[\frac{bh^2}{2} - \frac{mbh^2}{3m} \right] = \frac{3bh^2 - 2bh^2}{3bh} = \frac{h}{3}$$

La coordinata y_G non dipende dal valore di m !

Ripetendo il calcolo ruotando il triangolo è facilmente verificabile che la distanza del baricentro G dalla base è sempre pari a un terzo dell'altezza, relativa alla base, qualunque lato sia scelto come base.

3) Semicerchio

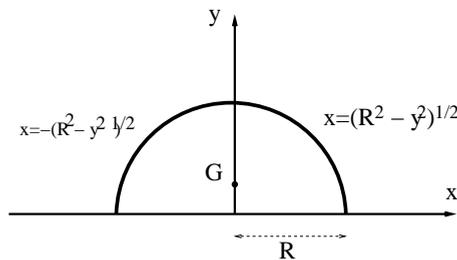


Figura 8.6

$$y_G = \frac{1}{S} \int_S y dS = \frac{2}{\pi R^2} \int_0^R \int_{-\sqrt{R^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-y^2}} y dx dy$$

$$= \frac{2}{\pi R^2} \int_0^R 2y \sqrt{R^2-y^2} dy = \frac{2}{\pi R^2} \left[-\frac{2}{3} (R^2-y^2)^{3/2} \right]_0^R = \frac{4}{3\pi} R.$$

Nota la direzione, il verso e il modulo della forza F , per risolvere completamente il problema è necessario determinare la retta di applicazione di F . La forza F de-

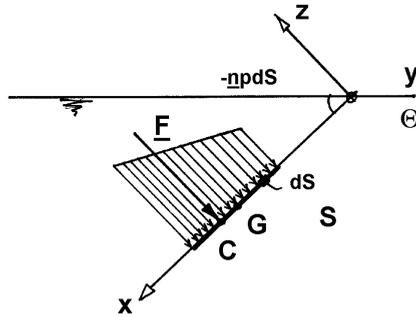


Figura 8.7

ve essere infatti equivalente alla somma delle forze infinitesime $-npdS$ esercitate dal fluido sulle superfici infinitesime dS che compongono S . F sarà equivalente se avrà la stessa risultante e lo stesso momento rispetto a un qualsiasi polo. Indicando con C il punto di incontro della retta di applicazione di F con la superficie S si deve avere

$$Fx_c = \int_S pxdS \quad Fy_c = \int_S pydS$$

essendo (x_c, y_c) le coordinate del punto C detto **centro di spinta**.

Le formule precedenti, insieme alla relazione

$$F = \int pdS$$

precedentemente ricavata, evidenziano che le coordinate (x_c, y_c) coincidono con le coordinate del baricentro del cosiddetto solido delle pressioni, cioè di un solido, nello spazio (x, y, p) , individuato dall'intersezione delle superfici $p = 0$ e $p = \gamma x \sin \theta$ con un cilindro a generatrici parallele all'asse p e con una direttrice coincidente con il contorno di S (vedi figura 8.7).

È importante anche notare che il valore di F coincide con il volume del solido delle pressioni.

I risultati illustrati precedentemente suggeriscono una procedura semplice e rapida per il calcolo della forza F e della sua retta di applicazione

1) Nello spazio (x, y, p) , con il piano (x, y) contenente la superficie S e l'asse p a esso ortogonale, tracciare l'andamento di $p(x, y)$.

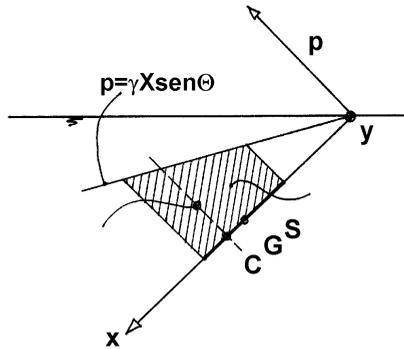


Figura 8.8

- 2) Individuare il solido delle pressioni.
- 3) Scomporre il solido delle pressioni in parti di cui sia semplice valutare il volume e la posizione del baricentro.
- 4) Valutare il volume V_i ($i = 1, 2, \dots, N$) delle N parti così individuate.
- 5) Valutare le coordinate (x_{ci}, y_{ci}) dei baricentri degli N volumi.
- 6) Calcolare la forza \mathbf{F} :

$$\mathbf{F} = \sum_{i=1}^N (-V_i \mathbf{n}).$$

- 7) Calcolare le coordinate (x_c, y_c) del centro di spinta

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^N (V_i x_{ci})}{\sum_{i=1}^N V_i}; \quad y_c = \frac{\sum_{i=1}^N (V_i y_{ci})}{\sum_{i=1}^N V_i}.$$

Consideriamo le relazioni già ottenute e discusse

$$Fx_c = \int_S p x dS \quad Fy_c = \int_S p y dS.$$

Discende:

$$x_c = \frac{\int_S p x dS}{F} = \frac{\int_S p x dS}{\int_S p dS} = \frac{\int_S \gamma x^2 \sin \theta dS}{\int_S \gamma x \sin \theta dS} = \frac{\int_S x^2 dS}{\int_S x dS} = \frac{\int_S x^2 dS}{x_G S}.$$

La quantità $\int_S x^2 dS$ è il momento d'inerzia della superficie S rispetto all'asse y e viene indicato con J_{yy} . È inoltre noto che $J_{yy} = J_{y_G y_G} + S x_G^2$, essendo $J_{y_G y_G}$ il momento d'inerzia rispetto ad un asse parallelo all'asse y e passante per il baricentro G . Segue:

$$x_c = \frac{J_{yy}}{x_G S} = \frac{S x_G^2 + J_{y_G y_G}}{x_G S} = x_G + \frac{J_{y_G y_G}}{x_G S}.$$

Tale risultato mostra in particolare che il centro di spinta è sempre a una profondità maggiore o al più uguale al baricentro. In modo analogo si mostra che

$$y_c = \frac{\int_S p y dS}{\int_S p dS} = \frac{\int_S \gamma x y \sin \theta dS}{\int_S \gamma x \sin \theta dS} = \frac{\int_S x y dS}{\int_S x dS} = \frac{J_{xy}}{x_G S} = y_G + \frac{J_{x_G y_G}}{x_G S}$$

essendo J_{xy} e $J_{x_G y_G}$ i momenti centrifughi della superficie S rispetto agli assi x, y e ad assi a essi paralleli passanti per il baricentro G di S .

Resta da sottolineare che **le formule precedentemente ricavate sono valide per una distribuzione continua di p e con riferimento a un sistema di assi coordinati tali che la pressione si annulli nell'origine e lungo tutto l'asse y .**

8.3 Esercizi sulla determinazione della spinta su una superficie piana

Esercizio 1

Si consideri il serbatoio in figura 8.9 riempito di un liquido di densità ρ e si determini il momento \mathbf{M} necessario a mantenere in equilibrio la paratoia ABCD incernierata (e quindi in grado di ruotare ma non traslare) lungo il lato AD.

Dati:

$a = 0.5\text{m}$, $b = 0.7\text{m}$, $c = 0.2\text{m}$ $\rho = 1000 \text{ Kg/m}^3$ (acqua).

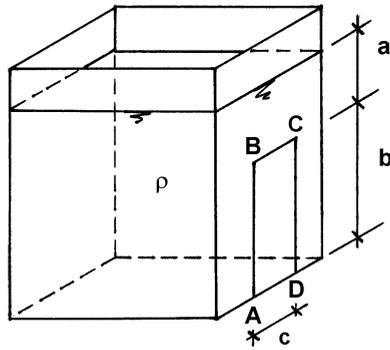


Figura 8.9

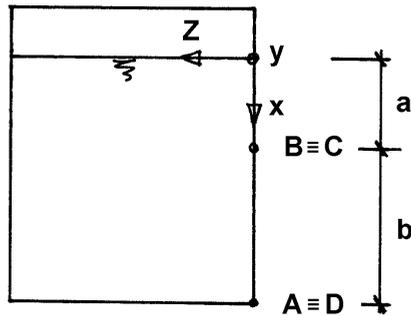


Figura 8.10

Soluzione: Si introduca il sistema di riferimento in figura. Si ha:

$$p = \rho g x.$$

Quindi il solido delle pressioni è quello riportato nella figura 8.11 insieme a una sua semplice scomposizione.

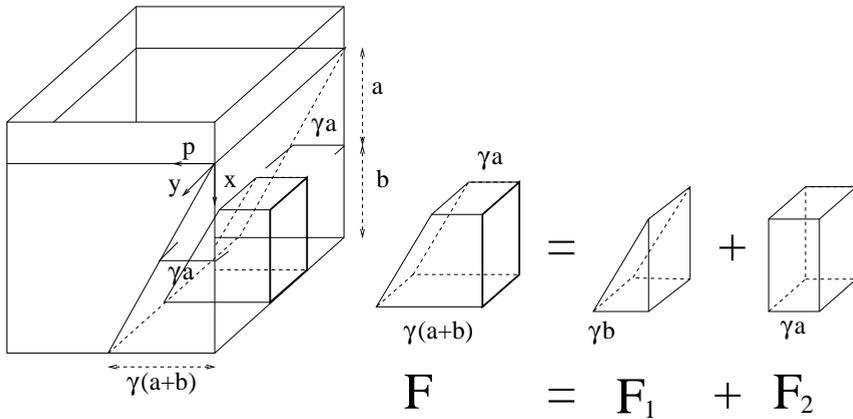


Figura 8.11

Emerge quindi che

$$F = F_1 + F_2 = \gamma \frac{b^2 c}{2} + \gamma abc.$$

Il risultato ottenuto coincide con la relazione

$$F = p_G S.$$

Infatti la pressione nel baricentro G della superficie è pari a

$$p_G = \gamma \left(a + \frac{b}{2} \right),$$

mentre

$$S = bc$$

Segue

$$F = \gamma abc + \gamma \frac{b}{2} bc,$$

che coincide con la relazione già trovata.

Sapendo che il baricentro di un triangolo si trova a una distanza dalla base pari a un terzo dell'altezza e che il baricentro di un rettangolo si trova a una distanza dalla base pari a metà dell'altezza è facile verificare che

$$x_c = \frac{F_1 x_{C1} + F_2 x_{C2}}{F}$$

$$x_c = \frac{\frac{\gamma b^2 c}{2} \left(a + \frac{2}{3} b \right) + \gamma abc \left(a + \frac{b}{2} \right)}{\gamma \frac{b^2 c}{2} + \gamma abc} = \frac{\frac{b}{2} \left(a + \frac{2}{3} b \right) + a \left(a + \frac{b}{2} \right)}{a + \frac{b}{2}} =$$

$$\frac{\frac{b}{2} \left(a + \frac{b}{2} + \frac{b}{6} \right) + a \left(a + \frac{b}{2} \right)}{a + \frac{b}{2}} = \frac{\left(a + \frac{b}{2} \right) \left(a + \frac{b}{2} \right) + \frac{b^2}{12}}{a + \frac{b}{2}} = \left(a + \frac{b}{2} \right) + \frac{\frac{b^2}{12}}{a + \frac{b}{2}}$$

Il valore di x_G appena determinato coincide con quello ricavabile dalla relazione

$$x_c = x_G + \frac{J_{y_G y_G}}{x_G S},$$

sapendo che il momento d'inerzia di un rettangolo rispetto ad un asse baricentrale è pari a un dodicesimo del prodotto della base con il cubo dell'altezza.

Segue infine che la forza \mathbf{F} è ortogonale alla superficie (quindi parallela all'asse z), diretta verso la superficie e di intensità pari a:

$$\begin{aligned} F &= (9.81 \times 1000 \times 0.5 \times 0.7 \times 0.2 + 9.81 \times 1000 \times 0.35 \times 0.7 \times 0.2) N \\ &= 1167 N \end{aligned}$$

Il momento da applicare per mantenere in equilibrio la paratoia sarà un vettore diretto lungo l'asse y , nel verso positivo, di modulo pari a

$$M = F(a + b - x_c) = F \left(a + b - a - \frac{b}{2} - \frac{\frac{b^2}{12}}{a + \frac{b}{2}} \right).$$

È facile verificare che la quantità precedente coincide con:

$$M = \gamma \frac{b^2 c b}{2 \cdot 3} + \gamma abc \frac{b}{2} = \gamma cb^2 \left[\frac{b}{6} + \frac{a}{2} \right].$$

Segue quindi:

$$M = 9.81 \times 1000 \times 0.2 \times 0.7^2 \times \left[\frac{0.7}{6} + \frac{0.5}{2} \right] \text{ N m} = 353 \text{ N m}.$$

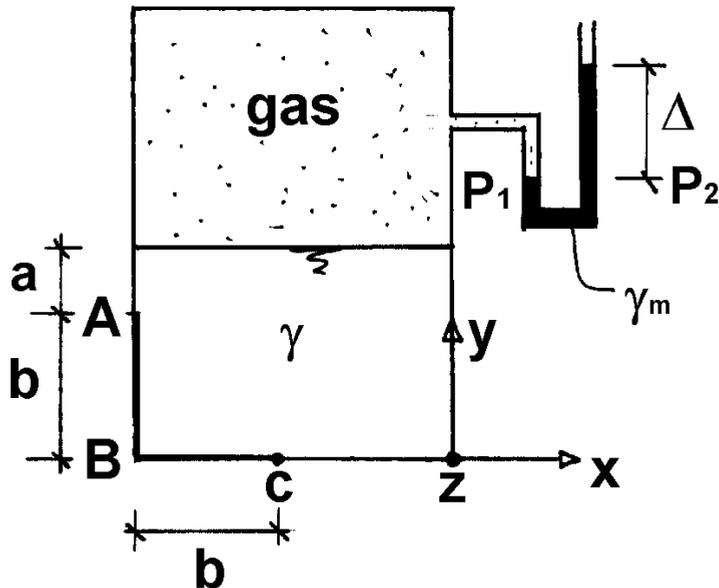


Figura 8.12

Esercizio 2

Assumendo il problema piano e la larghezza unitaria, determinare il momento necessario a mantenere in equilibrio la paratoia ABC incernierata in C. Si trascuri il peso specifico del gas (si assuma quindi costante la sua pressione). La pressione del gas viene misurata attraverso il tubo manometrico contenente il liquido di peso specifico γ_m rilevando il dislivello Δ . Sia γ il peso specifico del liquido all'interno del serbatoio.

Dati: $\gamma = 1000 \text{ Kg}_f/\text{m}^3$, $\gamma_m = 13000 \text{ Kg}_f/\text{m}^3$, $\Delta = 5 \text{ cm}$, $a = 25 \text{ cm}$, $b = 35 \text{ cm}$.

Soluzione: Il momento M per bilanciare l'azione del fluido è un vettore ortogonale al piano del disegno ($M = (0, 0, M)$) e con una componente M_z negativa. Focalizziamo ora l'attenzione sul calcolo del modulo di M . Con riferimento alla

figura 8.12 la pressione p_0 nel gas è pari alla pressione nel punto P_1 che a sua volta è uguale alla pressione nel punto P_2 . Si ha dunque:

$$p_0 = \gamma_m \Delta.$$

Sulla superficie AB la distribuzione di pressione sarà dunque quella rappresentata in figura 8.13. Sulla superficie BC la distribuzione di pressione sarà quella

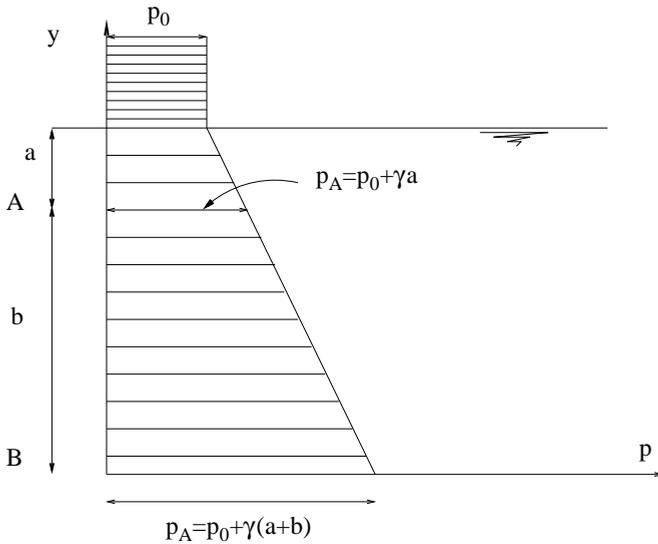


Figura 8.13

mostrata in figura 8.14

La forza esercitata dal liquido sulla superficie AB sarà dunque orizzontale diretta da destra verso sinistra e pari alla somma di due contributi $F_1 + F_2$

$$F_1 = p_A b = (p_0 + \gamma a) b$$

$$F_2 = (p_B - p_A) \frac{b}{2} = \gamma \frac{b^2}{2}.$$

Il primo contributo (F_1) è applicato a una distanza da B pari a $b/2$, il secondo (F_2) è applicato a una distanza da B pari a $b/3$. Sulla superficie BC la distribuzione di pressione è costante e quindi il liquido eserciterà una forza diretta verticalmente verso il basso di intensità

$$F_3 = p_B b = [p_0 + \gamma(a + b)] b.$$

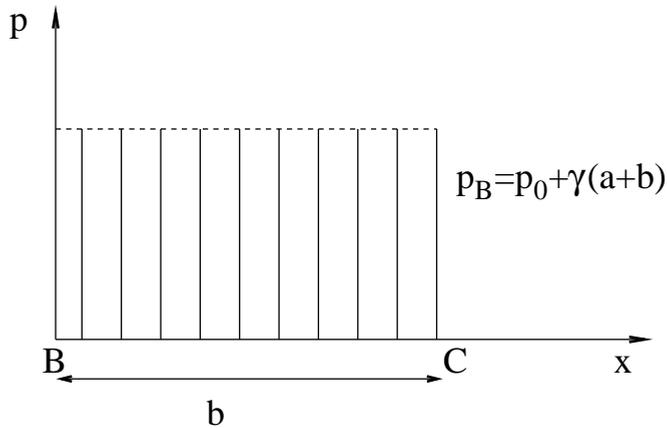


Figura 8.14

Inoltre F_3 è applicata a una distanza da C pari a $\frac{b}{2}$. Il modulo di M risulterà quindi

$$\begin{aligned}
 M &= F_1 \frac{b}{2} + F_2 \frac{b}{3} + F_3 \frac{b}{2} = (p_0 + \gamma a) \frac{b^2}{2} + \gamma \frac{b^3}{6} + [p_0 + \gamma(a+b)] \frac{b^2}{2} = \\
 &= p_0 b^2 + \gamma a b^2 + \gamma \frac{2}{3} b^3 = [13000 \times 0.05 \times (0.35)^2 + 1000 \times 0.25 \times (0.35)^2 + \\
 &\quad 1000 \times \frac{2}{3} \times (0.35)^3 b] \text{ Kg}_f\text{m} = 139 \text{ Kg}_f\text{m}
 \end{aligned}$$

Esercizio 3

Assumendo il problema piano e la larghezza unitaria, calcolare la forza esercitata dai due fluidi in figura 8.15 sulla superficie AB. Siano γ_1 e γ_2 il peso specifico del fluido sovrastante e sottostante rispettivamente.

Dati: $\gamma_1 = 800 \text{ Kg}_f/\text{m}^3$; $\gamma_2 = 1000 \text{ Kg}_f/\text{m}^3$; $a = 0.5 \text{ m}$; $b = 0.3 \text{ m}$; $\theta = \pi/4$

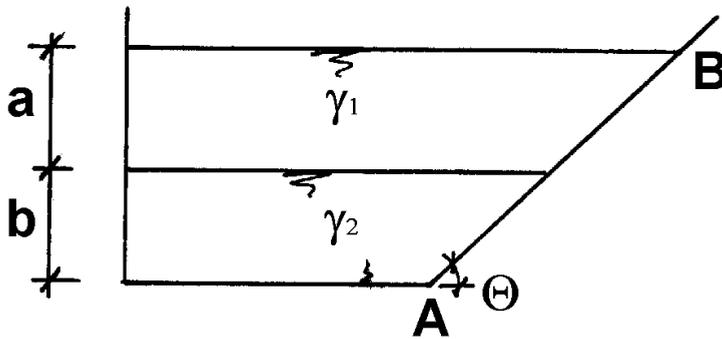


Figura 8.15

Soluzione: Con riferimento agli assi in figura 8.16, la distribuzione di pressione risulta descritta da:

$$p = \gamma_1 x \sin \theta \quad \text{per } x \leq \frac{a}{\sin \theta} \quad (8.1)$$

$$p = \gamma_1 a + \gamma_2 \left(x - \frac{a}{\sin \theta} \right) \sin \theta \quad \text{per } x \geq \frac{a}{\sin \theta}. \quad (8.2)$$

È conveniente scomporre il solido delle pressioni come indicato in figura 8.16.

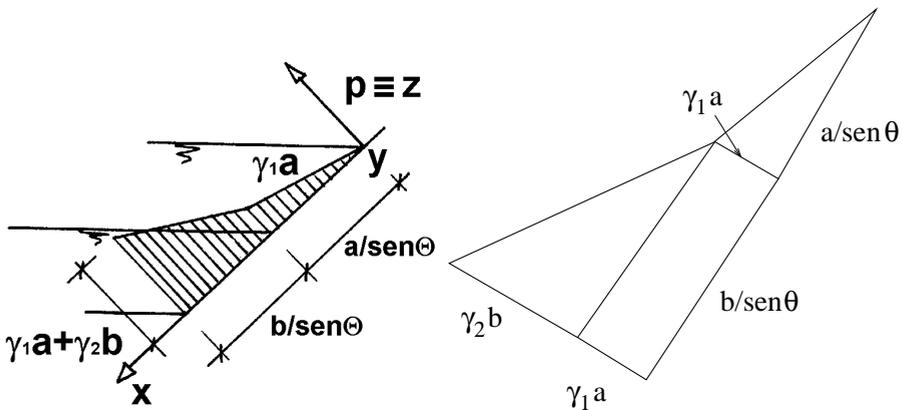


Figura 8.16

Risulterà dunque:

$$F = \gamma_1 \frac{a^2}{2 \sin \theta} + \gamma_1 \frac{ab}{\sin \theta} + \gamma_2 \frac{b^2}{2 \sin \theta}.$$

Sostituendo i valori numerici:

$$F = \left(800 \times \frac{0.5}{\sin \frac{\pi}{4}} \left[\frac{0.5}{2} + 0.3 \right] + 1000 \times \frac{0.3^2}{2 \sin \frac{\pi}{4}} \right) \text{Kg}_f = 375 \text{Kg}_f.$$

Per determinare la retta di azione della forza F , è necessario calcolare la coordinata x_c del centro di spinta. Si calcola quindi dapprima il momento, per unità di larghezza, della distribuzione di forze rispetto all'asse y . Facendo riferimento alla scomposizione del solido delle pressioni illustrata prima, si ha:

$$\begin{aligned} M &= \frac{1}{2} \gamma_1 a \frac{a}{\sin \theta} \frac{2}{3} \frac{a}{\sin \theta} + \gamma_1 a \frac{b}{\sin \theta} \left(\frac{a}{\sin \theta} + \frac{1}{2} \frac{b}{\sin \theta} \right) + \\ &\quad + \gamma_2 b \frac{1}{2} \frac{b}{\sin \theta} \left(\frac{a}{\sin \theta} + \frac{2}{3} \frac{b}{\sin \theta} \right) = \\ &= \left(\frac{1}{2} \times 800 \times \frac{2}{3} \times \frac{(0.5)^3}{\sin^2 \pi/4} + 800 \times 0.5 \times \frac{0.3}{\sin \pi/4} \times \left[\frac{0.5}{\sin \pi/4} + \frac{1}{2} \frac{0.3}{\sin \pi/4} \right] \right. \\ &\quad \left. + 1000 \times \frac{1}{2} \frac{(0.3)^2}{\sin \pi/4} \left[\frac{0.5}{\sin \pi/4} + \frac{2}{3} \frac{0.3}{\sin \pi/4} \right] \right) \text{Kg}_f \text{m} \\ &= 47 \text{Kg}_f \text{m} + 156 \text{Kg}_f \text{m} + 63 \text{Kg}_f \text{m} \cong 266 \text{Kg}_f \text{m} \end{aligned}$$

e quindi si impone che M sia uguale al momento della forza risultante F

$$F x_c = M$$

che porge:

$$x_c = \frac{M}{F} = \frac{266 \text{Kg}_f \text{m}}{375 \text{Kg}_f} \cong 0.71 \text{m}.$$

Lezione 9. La spinta su una superficie gobba

Come illustrato nel capitolo 2 e nel capitolo 3, la forza esercitata da un fluido in quiete su una superficie S risulta

$$\mathbf{F} = \int_S -pn dS.$$

Mentre per una superficie piana \mathbf{n} è indipendente dalla posizione sulla superficie e quindi è costante, facilitando la valutazione dell'integrale, nel caso di una superficie gobba \mathbf{n} risulta variabile. Non è possibile illustrare una procedura generale per la valutazione dell'integrale, considerando che essa dipende dalla forma della superficie. Consideriamo il caso particolare illustrato in figura 9.1 (assunto piano). Poniamoci l'obbiettivo di determinare la forza \mathbf{F} esercitata dal liquido di peso specifico γ sulla superficie AB assunta di larghezza unitaria. In primo luogo è opportuno valutare separatamente la componente lungo la direzione x e quella lungo la direzione y .

$$F_x = \int_S -pn_x dS$$
$$F_y = \int_S -pn_y dS$$

Per valutare gli integrali è conveniente utilizzare un sistema di coordinate polari con l'origine nel punto O . Nel generico punto P della superficie AB si ha:

$$\mathbf{n} = (-\cos \theta, -\sin \theta).$$

Si noti che la normale \mathbf{n} è diretta verso l'interno del fluido perché si vuole calcolare l'azione del fluido sulla parete. Inoltre $dS = R d\theta$ avendo assunto la larghezza della superficie unitaria. Infine la pressione p nel punto P risulterà

$$p = \gamma [a + R - R \sin \theta] = \gamma a + \gamma R (1 - \sin \theta).$$

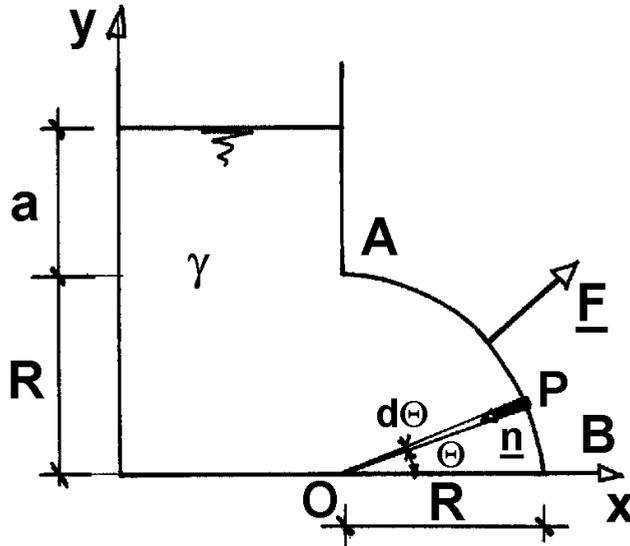


Figura 9.1

Segue quindi:

$$\begin{aligned}
 F_x &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} -[\gamma a + \gamma R(1 - \sin \theta)](-\cos \theta) R d\theta = \\
 &= \gamma(a + R) R [\sin \theta]_0^{\frac{\pi}{2}} + \gamma R^2 \frac{1}{4} [\cos 2\theta]_0^{\frac{\pi}{2}} = \\
 &= \gamma(a + R) R - \frac{\gamma R^2}{2} = \gamma \left(a + \frac{R}{2} \right) R
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 F_y &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} -[\gamma a + \gamma R(1 - \sin \theta)](-\sin \theta) R d\theta = \\
 &= -\gamma(a + R) R [\cos \theta]_0^{\frac{\pi}{2}} - \gamma R^2 \left[\frac{\theta}{2} - \frac{1}{4} \sin 2\theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \\
 &= \gamma(a + R) R - \gamma \frac{\pi R^2}{4}
 \end{aligned}$$

Nel caso in esame si è riusciti facilmente a valutare gli integrali che forniscono F_x e F_y . Tuttavia quando la geometria del problema è più complessa, la valutazione di \mathbf{F} utilizzando l'espressione $\int_s -p \mathbf{n} dS$ può risultare difficile.

Una procedura alternativa che spesso consente il rapido calcolo di \mathbf{F} è quella illustrata nel seguito.

1) Utilizzando superfici piane e la superficie gobba in esame, isolare un volume di fluido.

2) Determinare le forze $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \dots, \mathbf{F}_N$ che il fluido all'esterno del volume esercita sulle superfici piane.

3) Calcolare la forza \mathbf{F} esercitata dal fluido sulla superficie gobba, imponendo l'equilibrio del volume isolato in precedenza, su cui l'esterno esercita le forze di superficie $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2 \dots \mathbf{F}_N, -\mathbf{F}$ e la forza peso \mathbf{G} .

Risulterà

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i - \mathbf{F} + \mathbf{G} = 0.$$

Da cui

$$\mathbf{F} = \mathbf{G} + \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i.$$

Al fine di illustrare chiaramente la procedura, applichiamola al problema considerato precedentemente. Consideriamo il volume di fluido delimitato dalla superficie gobba $AA'B'B$, dalle superfici piane $AA'O'O$, $OO'B'B$, OAB , $O'A'B'$. Considerando l'orientamento delle superfici piane e indicando con $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$, i versori degli assi x, y, z rispettivamente, è facile vedere che:

$$\mathbf{F}_1 = F_1 \mathbf{i}; \quad \mathbf{F}_2 = F_2 \mathbf{j}; \quad \mathbf{F}_3 = -F_3 \mathbf{k}; \quad \mathbf{F}_4 = F_4 \mathbf{k}; \quad \mathbf{G} = -G \mathbf{j}.$$

L'equilibrio del volume considerato alla traslazione lungo i tre assi impone:

$$F_x = F_1; \quad F_y = F_2 - G; \quad F_z = F_4 - F_3,$$

avendo denotato con (F_x, F_y, F_z) le componenti del vettore \mathbf{F} . Utilizzando i risultati illustrati nel capitolo 8 è possibile determinare F_1, F_2, F_3 . Si ha:

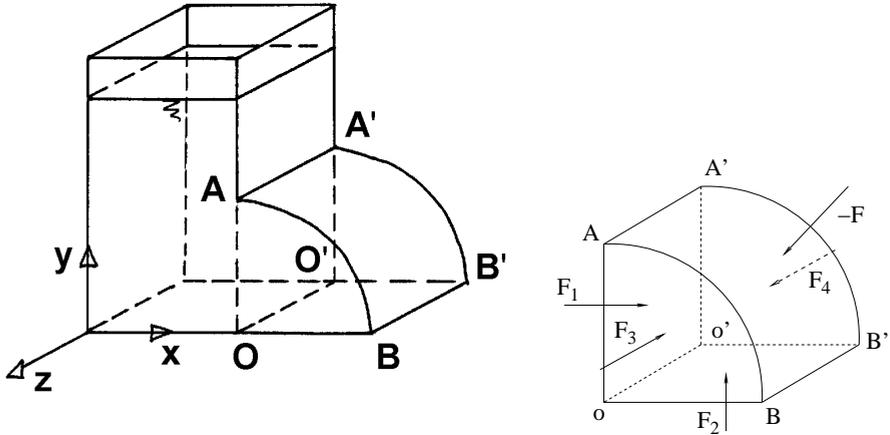


Figura 9.2

$$F_1 = \gamma \left(a + \frac{R}{2} \right) R; \quad F_2 = \gamma (a + R) R;$$

$$F_3 = F_4 = \gamma \left(a + R - \frac{4R}{3\pi} \right) \frac{\pi R^2}{4}.$$

Inoltre:

$$G = \gamma \frac{\pi R^2}{4}.$$

Segue

$$F_x = \gamma \left(a + \frac{R}{2} \right) R; \quad F_y = \gamma (a + R) R - \gamma \frac{\pi R^2}{4}; \quad F_z = 0.$$

I risultati ottenuti coincidono con quelli ricavati precedentemente.

Nel caso di una superficie gobba, il sistema equivalente alla somma delle forze infinitesime $-pndS$ è in generale fornito da una forza e da una coppia. Per individuare la retta di applicazione di \mathbf{F} e il valore della coppia è necessario imporre l'equilibrio alla rotazione del volume in esame rispetto ai tre assi. Nel nostro caso, considerando che le forze infinitesime passano per la retta OO' e per la simmetria del problema, si può affermare che la forza \mathbf{F} passa per la retta OO' in un punto equidistante da O e da O' e il valore della coppia è nullo.

9.1 Esercizi sulla determinazione della spinta su una superficie gobba

Esercizio 1

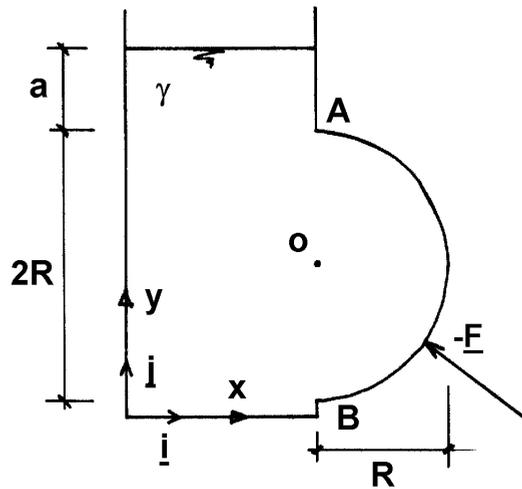


Figura 9.3

Si consideri il problema piano rappresentato in figura 9.3 e costituito dalla determinazione della forza F esercitata dal fluido di peso specifico γ sulla superficie AB supposta di larghezza unitaria.

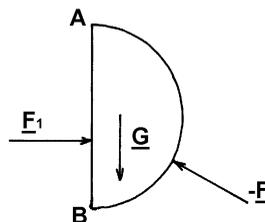


Figura 9.4

Soluzione: si consideri il volume isolato dalla superficie gobba AB e dalla superficie piana AB , come evidenziato nella figura 9.4. Per quanto spiegato

precedentemente:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{G}.$$

Da cui

$$F_x = F_1 = \gamma (a + R) 2R$$

$$F_y = G = \gamma \frac{\pi R^2}{2}$$

con

$$\mathbf{F}_1 = F_1 \mathbf{i}; \quad \mathbf{G} = -G \mathbf{j}; \quad \mathbf{F} = F_x \mathbf{i} - F_y \mathbf{j}.$$

È evidente inoltre che la forza passa per il punto O.

Esercizio 2

Si consideri il problema piano rappresentato in figura 9.5 e costituito dalla determinazione della forza \mathbf{F} esercitata dal fluido di peso specifico γ sulla superficie AB supposta di larghezza unitaria.

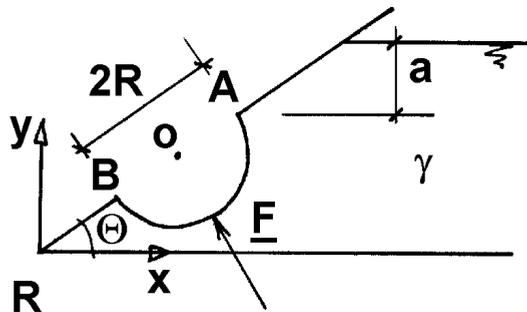


Figura 9.5

Soluzione: il modo più rapido per risolvere il problema è quello di considerare il serbatoio evidenziato nella figura 9.6 e imporre l'equilibrio del volume tratteggiato e costituito dalla superficie gobba AB e da quella piana AB . Su tale volume l'esterno eserciterà le seguenti forze: \mathbf{F} , \mathbf{F}_1 , \mathbf{G} .

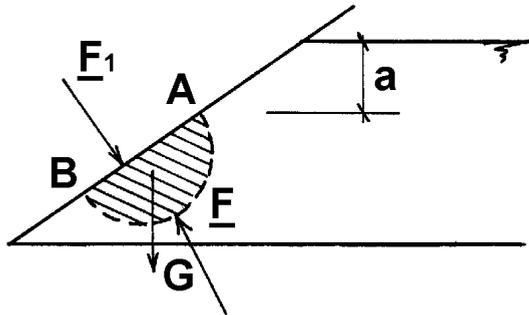


Figura 9.6

Si ha inoltre:

$$\mathbf{F} = (-F_x, F_y); \quad \mathbf{F}_1 = (F_1 \sin \theta, -F_1 \cos \theta); \quad \mathbf{G} = (0, -G).$$

Segue

$$\mathbf{F} = -\mathbf{F}_1 - \mathbf{G}$$

$$\mathbf{F} = (-F_x, F_y) = (-F_1 \sin \theta, F_1 \cos \theta) + (0, G)$$

oppure

$$F_x = F_1 \sin \theta, \quad F_y = F_1 \cos \theta + G$$

ove

$$F_1 = \gamma (a + R \sin \theta) 2R$$

$$G = \gamma \frac{\pi R^2}{2}.$$

La forza \mathbf{F} passa per il centro della circonferenza.

Lezione 10. La tensione in un fluido in movimento

Abbiamo visto (capitolo 3) che in un fluido in quiete la tensione t è sempre ortogonale alla superficie. In altre parole se un fluido è in quiete:

$$t = -pn.$$

Nei fluidi in movimento, tuttavia, la direzione di t non coincide con quella di n e in generale si manifestano delle componenti della tensione tangenti alla superficie.

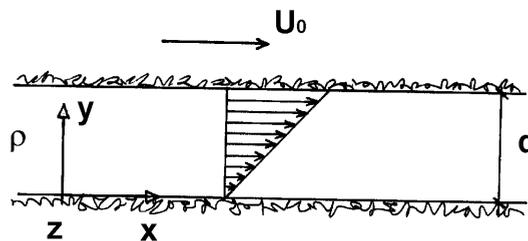


Figura 10.1

Esaminiamo la situazione rappresentata in figura 10.1. Due piastre parallele fra di loro sono poste a una distanza d e costituiscono così un meato riempito di un fluido di densità ρ . La piastra inferiore è ferma mentre quella superiore viaggia con una velocità U_0 in una direzione parallela alla piastra stessa.

Introduciamo il sistema di riferimento in figura 10.1. Se misurassimo il campo di velocità, ci accorgeremmo che la velocità ha un'unica componente nella direzione x che si annulla in corrispondenza di $y = 0$, assume il valore U_0 per $y = d$ e varia linearmente con y :

$$u = \frac{U_0}{d}y.$$

Per mantenere la piastra superiore in movimento con velocità U_0 è necessario applicare una forza nella direzione x che, rapportata alla superficie della piastra, porge un valore che indicheremo con τ . È evidente che il valore di τ è uguale e contrario alla componente nella direzione x della tensione t esercitata dal fluido sulla parete. Misure di mostrano che:

- 1) τ è proporzionale a U_0 .
- 2) τ è inversamente proporzionale a d .

Si ha cioè

$$\tau \propto \frac{U_0}{d}.$$

La costante di proporzionalità dipende dal fluido contenuto all'interno del meato ed è denominata **viscosità dinamica** (μ)

$$\tau = \mu \frac{U_0}{d}.$$

Il legame $\tau = \mu U_0/d$ è valido per i fluidi cosiddetti newtoniani. L'aria, l'acqua e molti fluidi di interesse ingegneristico sono "newtoniani". Per altri fluidi il legame fra τ , U_0 , d può essere più complesso.

Le dimensioni di μ sono quelle di una massa divisa per una lunghezza e per un tempo

$$[\mu] = ML^{-1}T^{-1},$$

mentre l'unità di misura è il Kg/(ms)=Pa s, anche se talvolta viene utilizzato il centipoise (cP), essendo:

$$1 \text{ cP} = 10^{-3} \text{ Kg/(ms)}.$$

La viscosità dinamica di un fluido, essendo una sua proprietà, dipende dallo stato del fluido e quindi dalla pressione e dalla temperatura. Per l'acqua in condizioni ordinarie (pressione atmosferica e temperatura pari a 20°C):

$$\mu = 1 \text{ cP}.$$

Spesso si utilizza la **viscosità cinematica** definita come il rapporto fra la viscosità dinamica e la densità del fluido:

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}.$$

Le dimensioni di ν sono quelle di una lunghezza al quadrato su un tempo

$$[\nu] = L^2/T,$$

mentre l'unità di misura è m^2/s . Anche la viscosità cinematica dipende da pressione e temperatura. Per l'acqua in condizioni ordinarie⁽¹⁾

$$\nu \cong 10^{-6} m^2/s.$$

Il legame $\tau = \mu U_0/d$ è un caso particolare di una relazione più generale che nella geometria in considerazione può scriversi

$$\tau = \mu \frac{du}{dy}.$$

La tensione tangenziale τ può infatti variare al variare di y . In geometrie più complesse la relazione tra t e il campo di moto, detta "legame costitutivo", diviene complessa. Si rimanda lo studente interessato a corsi successivi.

⁽¹⁾Per aria secca a pressione atmosferica alla temperatura di 20°C si ha

$$\mu \cong 1.8 \cdot 10^{-5} \text{ Kg}/(ms)$$

$$\nu \cong 1.5 \cdot 10^{-5} m^2/s$$

Lezione 11. Analisi dimensionale

I problemi a cui siamo interessati e i problemi della fisica in generale, sono caratterizzati dalla ricerca della dipendenza di una grandezza fisica Q_0 dalle altre grandezze fisiche Q_1, Q_2, \dots, Q_N coinvolte nel fenomeno in esame. In altre parole si vuole determinare la funzione f che lega Q_0 a Q_1, Q_2, \dots, Q_N

$$Q_0 = f(Q_1, Q_2, \dots, Q_N).$$

Un esempio tipico in idrodinamica è la ricerca della resistenza (forza nella di-

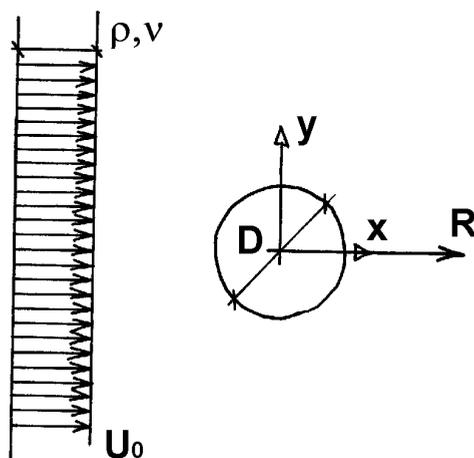


Figura 11.1

rezione del moto) incontrata da un corpo, per esempio una sfera, che avanza in fluido fermo. Utilizzando un sistema di riferimento solidale con il corpo (vedi figura 11.1), il problema è costituito dalla valutazione di R (modulo di \mathbf{R}).

È evidente che il valore di R sarà influenzato:

- _ dalle caratteristiche del fluido (nel caso in esame dalla densità ρ e dalla viscosità cinematica ν)
- _ dalle dimensioni della sfera (il diametro D)
- _ dalla velocità con cui il fluido investe la sfera (U_0).

Si cercherà quindi di valutare la funzione f tale che:

$$R = f(\rho, \nu, D, U_0).$$

È evidente che la funzione f di cui sopra è un caso particolare di quella scritta inizialmente:

$$Q_0 = f(Q_1, Q_2, \dots, Q_N)$$

con

$$Q_0 = R, \quad N = 4, \quad Q_1 = \rho, \quad Q_2 = \nu, \quad Q_3 = D, \quad Q_4 = U_0.$$

Alcune volte è possibile risolvere il problema in esame risolvendo le equazioni che governano il fenomeno. In tal caso è possibile fornire un'espressione analitica di f . In altri casi ciò non è possibile e il legame fra Q_1, Q_2, \dots, Q_N può essere cercato solo attraverso esperienze di laboratorio. Se il valore di N è elevato il numero di esperimenti da eseguire risulta estremamente alto. In tale situazione è utile il teorema di Buckingham, detto anche teorema II.

Il teorema II stabilisce che la relazione

$$Q_0 = f(Q_1, Q_2, \dots, Q_N)$$

fra $N + 1$ grandezze fisiche può essere trasformata in una nuova relazione fra $N + 1 - M$ numeri adimensionali

$$\Pi_0 = \bar{f}(\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_{N-M})$$

essendo M il numero massimo di grandezze dimensionalmente indipendenti ⁽¹⁾ che può essere individuato all'interno delle $N + 1$ grandezze $Q_0, Q_1, Q_2, \dots, Q_N$

⁽¹⁾M grandezze si dicono **dimensionalmente indipendenti** se il monomio

$$Q_1^\alpha Q_2^\beta Q_3^\gamma \dots Q_M^\omega$$

e Π_i numeri adimensionali.

Dimostrazione:

Si voglia trasformare la relazione:

$$Q_0 = f(Q_1, Q_2, \dots, Q_N).$$

Si scelga il massimo numero M di grandezze dimensionalmente indipendenti.

Non si perde di generalità se si suppone che Q_1, Q_2, \dots, Q_M siano le grandezze scelte.

Si individui il monomio $Q_1^{\alpha_0}, Q_2^{\beta_0}, Q_3^{\gamma_0} \dots, Q_M^{\omega_0}$ che abbia le stesse dimensioni di Q_0 . Dalla definizione di M e di grandezze dimensionalmente indipendenti i valori $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0, \dots, \omega_0$ non sono tutti nulli.

Si divida la relazione di partenza per $Q_1^{\alpha_0}, Q_2^{\beta_0}, Q_3^{\gamma_0} \dots, Q_M^{\omega_0}$, sia a destra che a sinistra. Si avrà:

$$\frac{Q_0}{Q_1^{\alpha_0}, Q_2^{\beta_0}, Q_3^{\gamma_0} \dots, Q_M^{\omega_0}} = \Pi_0 = f_0(Q_1, Q_2, \dots, Q_N).$$

È evidente che il termine a sinistra della relazione precedente è un rapporto adimensionale.

Si individui il monomio $Q_1^{\alpha_{M+1}}, Q_2^{\beta_{M+1}}, Q_3^{\gamma_{M+1}} \dots, Q_M^{\omega_{M+1}}$ che abbia le stesse dimensioni di Q_{M+1} .

Laddove nella funzione f_0 (evidentemente diversa da f) compare Q_{M+1} si sostituisca

avente dimensioni nulle, implica:

$$\alpha = 0, \beta = 0, \gamma = 0, \dots, \omega = 0.$$

Se esistono valori $\alpha, \beta, \dots, \omega$ diversi da zero e tali che il monomio

$$Q_1^\alpha Q_2^\beta Q_3^\gamma \dots Q_M^\omega$$

ha dimensioni nulle, allora le M grandezze sono dimensionalmente **dipendenti**.

Il valore massimo di M dipende dalla natura del fenomeno. In particolare se il fenomeno è geometrico $M = 1$, se il fenomeno è cinematico $M = 2$, se il fenomeno è di natura dinamica $M = 3$ e così via.

$$\frac{Q_{M+1}}{Q_1^{\alpha_{M+1}}, Q_2^{\beta_{M+1}}, Q_3^{\gamma_{M+1}}, \dots, Q_M^{\omega_{M+1}}} Q_1^{\alpha_{M+1}}, Q_2^{\beta_{M+1}}, Q_3^{\gamma_{M+1}}, \dots, Q_M^{\omega_{M+1}} = \Pi_{M+1} Q_1^{\alpha_{M+1}}, Q_2^{\beta_{M+1}}, Q_3^{\gamma_{M+1}}, \dots, Q_M^{\omega_{M+1}}.$$

Segue dunque

$$\Pi_0 = f_1(Q_1, Q_2, \dots, Q_M, \Pi_{M+1}, Q_{M+2}, \dots, Q_N).$$

Si ripeta il punto precedente per $Q_{M+2}, Q_{M+3}, \dots, Q_N$ per giungere alla relazione:

$$\Pi_0 = f_{N-M}(Q_1, Q_2, \dots, Q_M, \Pi_{M+1}, \Pi_{M+2}, \dots, \Pi_N).$$

Cambiando l'unità di misura della sola Q_1 (procedura possibile essendo Q_1, Q_2, \dots, Q_M grandezze dimensionalmente indipendenti), i valori di $\Pi_0, \Pi_{M+1}, \Pi_{M+2}, \dots, \Pi_N$ non cambiano essendo Π_i numeri adimensionali. Neanche i valori di Q_2, Q_3, \dots, Q_M cambiano non essendo variare le loro unità di misura. Segue quindi che la funzione f_{N-M} non può dipendere esplicitamente da Q_1 .

Cambiando l'unità di misura di Q_2 e seguendo il ragionamento esposto al punto precedente si conclude che f_{N-M} non può dipendere esplicitamente da Q_2 .

Analogamente si può concludere che f_{N-M} non dipende esplicitamente da Q_3, Q_4, \dots, Q_M .

È possibile quindi concludere che

$$Q_0 = f_0(Q_1, Q_2, \dots, Q_N)$$

si trasforma in

$$\Pi_0 = \bar{f}(\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_{N-M})$$

come si voleva dimostrare.

L'utilità del teorema II emerge chiaramente applicandolo all'esempio considerato precedentemente.

$$R = f(\rho, \nu, D, U_0)$$

Essendo il problema di natura dinamica $M = 3$.

Scegliamo ρ, U_0, D come grandezze dimensionalmente indipendenti. In primo luogo verificiamo che ρ, U_0, D siano dimensionalmente indipendenti, cioè che il monomio

$$\rho^\alpha U_0^\beta D^\gamma$$

con dimensioni nulle implichi $\alpha = 0, \beta = 0, \gamma = 0$. Si ha:

$$[\rho] = ML^{-3}; [U_0] = LT^{-1}; [D] = L,$$

segue dunque:

$$[\rho^\alpha U_0^\beta D^\gamma] = M^\alpha L^{-3\alpha} L^\beta T^{-\beta} L^\gamma.$$

Dunque $[\rho^\alpha U_0^\beta D^\gamma] = 0$ se e solo se:

$$\begin{aligned}\alpha &= 0 \\ -3\alpha + \beta + \gamma &= 0 \\ -\beta &= 0.\end{aligned}$$

Il sistema algebrico lineare precedente è omogeneo e il determinante della matrice dei coefficienti è diverso da zero: la soluzione allora è quella identicamente nulla. È quindi possibile concludere che ρ, U_0, D sono grandezze dimensionalmente indipendenti.

Cerchiamo ora il monomio $\rho^\alpha U_0^\beta D^\gamma$ che ha le stesse dimensioni di R . Sapendo che

$$[R] = MLT^{-2},$$

si ottiene:

$$M^\alpha L^{-3\alpha} L^\beta T^{-\beta} L^\gamma = MLT^{-2}$$

da cui il sistema:

$$\begin{aligned}\alpha &= 1 \\ -3\alpha + \beta + \gamma &= 1 \\ -\beta &= -2\end{aligned}$$

la cui soluzione è:

$$\alpha = 1, \quad \beta = 2, \quad \gamma = 2.$$

Dunque la relazione iniziale può essere scritta nella forma:

$$\frac{R}{\rho U_0^2 D^2} = f_1(\rho, U_0, D, \nu).$$

Cerchiamo ora il monomio $\rho^\alpha U_0^\beta D^\gamma$ che ha le dimensioni di ν . Sapendo che

$$[\nu] = L^2 T^{-1}.$$

Si ottiene

$$M^\alpha L^{-3\alpha} L^\beta T^{-\beta} L^\gamma = L^2 T^{-1}$$

da cui il sistema

$$\begin{aligned} \alpha &= 0 \\ -3\alpha + \beta + \gamma &= 2 \\ -\beta &= -1 \end{aligned}$$

la cui soluzione è:

$$\alpha = 0, \quad \beta = 1, \quad \gamma = 1.$$

Si può quindi concludere:

$$\frac{R}{\rho U_0^2 D^2} = f_2\left(\frac{\nu}{U_0 D}\right).$$

Per motivi storici invece del numero adimensionale $\frac{\nu}{U_0 D}$ si ritiene che $\frac{R}{\rho U_0^2 D^2}$ dipenda da $\frac{U_0 D}{\nu}$.

Dunque:

$$\frac{R}{\rho U_0^2 D^2} = \bar{f}\left(\frac{U_0 D}{\nu}\right).$$

Il numero $\frac{U_0 D}{\nu}$ è detto numero di Reynolds e viene usualmente indicato con Re .

Il numero $\frac{R}{\rho U_0^2 D^2}$ è detto numero di Newton e viene usualmente indicato con Ne .

Applicando il teorema Π si è trasformato il problema iniziale, che prevedeva la determinazione della funzione f di 4 variabili indipendenti, nella determinazione della funzione \bar{f} che dipende da una sola variabile indipendente con chiaro e indubbio vantaggio.

11.1 Il teorema π nei problemi di idrodinamica

Nei problemi idrodinamici, oltre al numero di Newton (Ne) e al numero di Reynolds (Re), possono comparire altri numeri adimensionali. I più comuni sono:

Il numero di Froude:

$$Fr = \frac{U_0}{\sqrt{gD}},$$

che compare qualora il fenomeno sia influenzato anche dalla accelerazione di gravità.

Il numero di Mach:

$$Ma = \frac{U_0}{\sqrt{\epsilon/\rho}},$$

che compare qualora il fenomeno sia influenzato dalla comprimibilità del fluido ϵ .

Il numero di Weber:

$$We = \sqrt{\frac{\rho D U_0^2}{\sigma}},$$

che compare qualora il fenomeno sia influenzato dalla tensione superficiale σ .

Lezione 12. Similitudine e modelli

Consideriamo nuovamente il problema descritto nel capitolo 11: un fluido di densità ρ e viscosità cinematica ν investe una sfera di diametro D con una velocità U_0 .

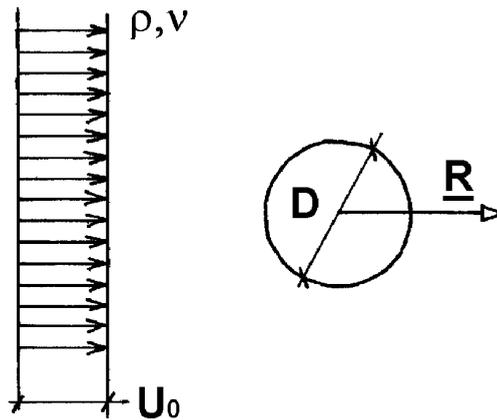


Figura 12.1

La forza che il fluido esercita sulla sfera nella direzione del moto risulta esprimibile nella forma (vedi teorema II):

$$R = \rho U_0^2 D^2 \bar{f} \left(\frac{U_0 D}{\nu} \right)$$

che spesso viene riscritta nella forma

$$R = \frac{\rho}{2} U_0^2 \pi \frac{D^2}{4} C_D \left(\frac{U_0 D}{\nu} \right)$$

dove $C_D = \frac{8}{\pi} \bar{f}$ è detto coefficiente di resistenza e risulta evidentemente funzione di Reynolds.

Emerge chiaramente che per conoscere R è necessario conoscere il valore di C_D per il valore del numero di Reynolds caratteristico del problema. Se ad esempio pensiamo la sfera come l'approssimazione di una batisfera investita da una corrente oceanica di intensità pari a 0.2 m/s e supponiamo che D sia pari a 2 m, il numero di Reynolds risulterà pari a:

$$Re = \frac{2\text{m} \times 0.2\text{m/s}}{10^{-6}\text{m}^2/\text{s}} = 4 \times 10^5.$$

Nel caso in esame dovremo dunque valutare C_D per tale valore di Re . Ciò però non comporta la misura della forza esercitata sulla batisfera ($D=2\text{m}$) da una corrente di 0.2 m/s. È infatti possibile misurare C_D utilizzando "un modello", cioè una sfera molto più piccola, a patto di aumentare U_0 in modo tale che il numero di Reynolds rimanga inalterato. Indicati con il pedice m le grandezze relative al modello deve risultare:

$$\frac{U_0 D}{\nu} = \frac{U_{0m} D_m}{\nu_m}.$$

Utilizzando nel modello, come di solito avviene, lo stesso fluido del problema originale si ha

$$\frac{U_{0m}}{U_0} = \frac{D}{D_m}.$$

Tale risultato indica che se il rapporto D_m/D è pari a 1/10, il rapporto U_{0m}/U_0 dovrà essere pari a 10. Il valore ricercato di C_D sarà dunque $8R_m / (\pi \rho U_{0m}^2 D_m^2)$.

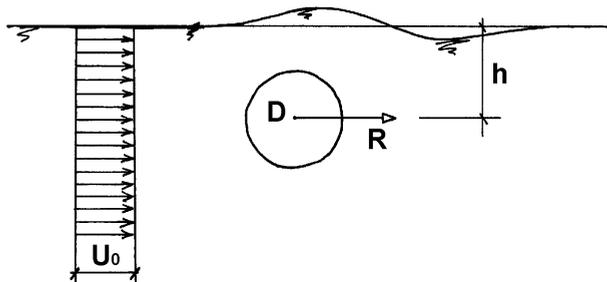


Figura 12.2

Consideriamo ora un problema lievemente diverso: la batisfera si trova in prossimità della superficie libera a una profondità pari a h .

Analizzando il problema risulta chiaramente che il valore di R sarà influenzato anche dal valore di h e dal valore dell'accelerazione di gravità g . La presenza della sfera in prossimità della superficie libera genera infatti un'onda la cui evoluzione dipende da g

$$R = f(\rho, U, D, \nu, g, h).$$

Applicando il teorema II si ottiene:

$$R = \frac{\rho}{2} U_0^2 \pi \frac{D^2}{4} C_D \left(Re, Fr, \frac{h}{D} \right)$$

essendo

$$Re = \frac{UD}{\nu}; \quad Fr = \frac{U}{\sqrt{gD}}.$$

In questo problema per determinare R è necessario valutare C_D per i valori di $Re, Fr, \frac{h}{D}$ propri del problema originale. Vediamo se è possibile utilizzare un modello. Per semplicità indichiamo con $\lambda = \frac{L_m}{L}$ la scala di riduzione delle lunghezze e con $\tau = \frac{T_m}{T}$ la scala di riduzione dei tempi. La scala di riduzione di ogni altra grandezza cinematica deriva dalla conoscenza di λ e τ . Infatti:

$$v = \frac{U_m}{U} = \frac{L_m}{L} \frac{T}{T_m} = \frac{\lambda}{\tau}.$$

La scala v di riduzione delle velocità è pari dunque a $\frac{\lambda}{\tau}$. Similmente è possibile determinare per esempio la scala di riduzione delle accelerazioni. Una corretta modellazione del fenomeno impone che i valori del numero di Reynolds, del numero di Froude e il rapporto h/D del prototipo e del modello risultino uguali. È evidente che se il modello è ridotto in scala, il rapporto h_m/D_m risulta uguale al rapporto h/D .

Vediamo ora cosa emerge imponendo:

$$Re = Re_m.$$

Utilizzando nel modello lo stesso fluido del prototipo si ha:

$$\frac{L^2}{T} = \frac{L_m^2}{T_m} \implies \tau = \frac{T_m}{T} = \left(\frac{L_m}{L} \right)^2 = \lambda^2.$$

Stabilita la scala di riduzione delle lunghezze λ , l'uguaglianza dei numeri di Reynolds del modello e del prototipo determina la scala di riduzione dei tempi τ pari a λ^2 e conseguentemente le scale di riduzione di tutte le altre grandezze cinematiche. Ad esempio:

$$v = \frac{\lambda}{\tau} = \frac{\lambda}{\lambda^2} = \lambda^{-1}.$$

Vediamo ora che imponendo:

$$Fr = Fr_m$$

segue:

$$\frac{L}{T\sqrt{L}} = \frac{L_m}{T_m\sqrt{L_m}} \implies \tau = \frac{T_m}{T} = \sqrt{\frac{L_m}{L}} = \lambda^{\frac{1}{2}}.$$

Stabilita la scala di riduzione delle lunghezze λ , l'uguaglianza dei numeri di Froude del modello e del prototipo determina la scala di riduzione dei tempi τ pari a $\lambda^{\frac{1}{2}}$. **Emerge che utilizzando nel modello lo stesso fluido del prototipo è impossibile mantenere inalterati i valori di tutti i numeri adimensionali che influenzano il fenomeno. È infatti possibile mantenere inalterato il valore di un solo numero adimensionale.**

Se si mantiene inalterato il numero di Reynolds si effettuerà una “similitudine di Reynolds”. Se viceversa si manterrà inalterato il numero di Froude si effettuerà una “similitudine di Froude”. In funzione del problema in esame potranno essere considerate similitudini di Mach, Weber, ...

È evidente che si sceglierà di effettuare una certa similitudine invece di un'altra in funzione dell'importanza degli effetti rappresentati dai diversi numeri.

Se gli effetti viscosi sono i più rilevanti si sceglierà di effettuare una similitudine di Reynolds.

Se gli effetti gravitazionali sono i più rilevanti si sceglierà di effettuare una similitudine di Froude ...

Resta da sottolineare che l'uguaglianza fra il numero di Newton del prototipo e quello del modello fissa la scala di riduzione delle forze:

$$Ne = Ne_m.$$

Utilizzando nel prototipo e nel modello lo stesso fluido

$$\frac{F}{L^4 T^{-2}} = \frac{F_m}{L_m^4 T_m^{-2}} \implies \varphi = \frac{F_m}{F} = \left(\frac{L_m}{L}\right)^4 \left(\frac{T_m}{T}\right)^{-2} = \lambda^4 \tau^{-2}.$$

Lezione 13. Descrizione del moto

Consideriamo un volume di fluido $V(t)$ in movimento che all'istante iniziale $t = 0$ occupa la regione V_0 . Sia (x_1, x_2, x_3) un sistema cartesiano di riferimento fisso nello spazio e (X_1, X_2, X_3) la posizione della generica particella di fluido all'istante iniziale, rispetto al sistema di riferimento (x_1, x_2, x_3) .

Una qualunque grandezza F del fluido (ad esempio la densità ρ) può essere descritta fornendo la funzione f_1

$$F = f_1(X_1, X_2, X_3, t)$$

o fornendo la funzione f_2

$$F = f_2(x_1, x_2, x_3, t)$$

Nel primo caso (**descrizione lagrangiana**), fissando i valori di X_1, X_2, X_3 , si ottiene una funzione che descrive la variazione di F di una particolare particella fluida al variare del tempo sapendo che quella particella fluida occuperà posizioni diverse nello spazio al trascorrere del tempo.

Nel secondo caso (**descrizione euleriana**), fissando i valori di x_1, x_2, x_3 , si ottiene una funzione che descrive la variazione di F in un punto dello spazio che al variare del tempo sarà occupato da particelle diverse.

Le funzioni f_1 e f_2 sono chiaramente diverse e sono legate fra di loro dal moto del fluido. In particolare, nota la funzione f_2 è possibile ricavare f_1 se sono note le funzioni:

$$x_1 = \varphi_1(X_1, X_2, X_3, t)$$

$$x_2 = \varphi_2(X_1, X_2, X_3, t)$$

$$x_3 = \varphi_3(X_1, X_2, X_3, t).$$

Queste ultime descrivono il moto delle particelle fluide. In particolare, fissato il valore di X_1, X_2, X_3 , le funzioni $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ descrivono la traiettoria di una particella fluida. Siccome una particella fluida non può occupare due posizioni diverse

allo stesso tempo e due particelle fluide non possono occupare la stessa posizione, le funzioni $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ sono invertibili e in particolare si possono ottenere le funzioni:

$$\begin{aligned} X_1 &= \Phi_1(x_1, x_2, x_3, t) \\ X_2 &= \Phi_2(x_1, x_2, x_3, t) \\ X_3 &= \Phi_3(x_1, x_2, x_3, t). \end{aligned}$$

Le funzioni Φ_1, Φ_2, Φ_3 consentono a loro volta di determinare f_2 nota la funzione f_1 . Essendo f_1 diversa da f_2 , è evidente che la derivata di f_1 rispetto al tempo sarà diversa dalla derivata parziale rispetto al tempo di f_2

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} \neq \frac{\partial f_2}{\partial t}.$$

In particolare $\partial f_1 / \partial t$ descrive come cambia nel tempo la grandezza F di una particella fluida che si muove nello spazio. La funzione $\partial f_2 / \partial t$ descrive invece come varia F in un punto dello spazio che al trascorrere del tempo sarà occupato da particelle fluide diverse. Per descrivere il moto dei fluidi si usa in generale un **approccio euleriano**, cioè si assegna o si ricerca la funzione

$$F = f_2(x_1, x_2, x_3, t)$$

e si indica con $\frac{\partial F}{\partial t}$ la funzione $\frac{\partial f_2}{\partial t}$.

Nel seguito sarà necessaria la valutazione di $\frac{\partial f_1}{\partial t}$, che indicheremo con $\frac{dF}{dt}$.

$\frac{\partial F}{\partial t}$ è detta **derivata locale**.

$\frac{dF}{dt}$ è detta **derivata totale** o **materiale** o **sostanziale**.

Considerando che spesso è necessario valutare $\frac{dF}{dt}$ e che F è usualmente assegnata come funzione di x_1, x_2, x_3, t è necessario individuare una semplice procedura per valutare $\frac{\partial f_1}{\partial t}$ nota f_2 .

Considerando che $f_2(x_1, x_2, x_3, t)$ è uguale a:

$$f_2(\varphi_1(X_1, X_2, X_3, t), \varphi_2(X_1, X_2, X_3, t), \varphi_3(X_1, X_2, X_3, t), t)$$

si ha:

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dt} &= \frac{\partial f_1}{\partial t} = \\ &= \frac{\partial}{\partial t} [f_2(\varphi_1(X_1, X_2, X_3, t), \varphi_2(X_1, X_2, X_3, t), \varphi_3(X_1, X_2, X_3, t), t)]_{\mathbf{X}} = \\ &= \frac{\partial f_2}{\partial t} + \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} + \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \frac{\partial \varphi_3}{\partial t}. \end{aligned}$$

Notando che $\frac{\partial \varphi_1}{\partial t}$, $\frac{\partial \varphi_2}{\partial t}$, $\frac{\partial \varphi_3}{\partial t}$ sono le tre componenti della velocità delle particelle fluide, dalla formula precedente si ottiene

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial t} + v_1 \frac{\partial F}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial F}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial F}{\partial x_3} \\ &= \frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla F. \end{aligned}$$

La derivata materiale è dunque fornita dalla somma della derivata locale più il cosiddetto termine convettivo pari al prodotto scalare fra le velocità e il gradiente di F .⁽¹⁾

⁽¹⁾Assegnata la funzione scalare $F(x_1, x_2, x_3, t)$, il gradiente di F , indicato con ∇F , è un vettore le cui componenti sono così definite

$$\nabla F = \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}, \frac{\partial F}{\partial x_2}, \frac{\partial F}{\partial x_3} \right).$$

Assegnata la funzione vettoriale $\mathbf{F}(x_1, x_2, x_3, t)$, che corrisponde a tre funzioni scalari $\mathbf{F} = (F_1(\mathbf{x}, t), F_2(\mathbf{x}, t), F_3(\mathbf{x}, t))$, la divergenza di \mathbf{F} , indicata con $\nabla \cdot \mathbf{F}$, è uno scalare così definito:

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} + \frac{\partial F_3}{\partial x_3}.$$

Il rotore di \mathbf{F} , indicato con $\nabla \times \mathbf{F}$, è un vettore così definito:

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = \mathbf{i} \left(\frac{\partial F_3}{\partial x_2} - \frac{\partial F_2}{\partial x_3} \right) - \mathbf{j} \left(\frac{\partial F_3}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_3} \right) + \mathbf{k} \left(\frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \right).$$

Assegnati due vettori \mathbf{a} , \mathbf{b} , ($\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$), il prodotto scalare è così definito:

$$c = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3.$$

Il prodotto vettoriale è così definito:

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \mathbf{i} (a_2 b_3 - a_3 b_2) - \mathbf{j} (a_1 b_3 - a_3 b_1) + \mathbf{k} (a_1 b_2 - a_2 b_1).$$

13.1 Alcune grandezze cinematiche

Utilizzando un approccio euleriano, il moto di un fluido viene descritto assegnando il vettore velocità come funzione di \mathbf{x} e del tempo t :

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$$

o, equivalentemente come:

$$v_1 = v_1(x_1, x_2, x_3, t)$$

$$v_2 = v_2(x_1, x_2, x_3, t)$$

$$v_3 = v_3(x_1, x_2, x_3, t)$$

Il calcolo dell'**accelerazione** può essere semplicemente eseguito valutando la derivata materiale di \mathbf{v} :

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} \Rightarrow a_1 = \frac{dv_1}{dt} = \frac{\partial v_1}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_1}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial v_1}{\partial x_3}$$

$$a_2 = \frac{dv_2}{dt} = \frac{\partial v_2}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_2}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial v_2}{\partial x_3}$$

$$a_3 = \frac{dv_3}{dt} = \frac{\partial v_3}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_3}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_3}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial v_3}{\partial x_3}$$

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}$$

dove:

$$\nabla \mathbf{v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} & \frac{\partial v_2}{\partial x_1} & \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial v_1}{\partial x_2} & \frac{\partial v_2}{\partial x_2} & \frac{\partial v_3}{\partial x_2} \\ \frac{\partial v_1}{\partial x_3} & \frac{\partial v_2}{\partial x_3} & \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \end{pmatrix}.$$

Le **traiettorie**, che sono un concetto tipicamente lagrangiano, possono essere calcolate integrando l'equazione:

$$d\mathbf{x} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) dt,$$

note le posizioni iniziali delle particelle fluide.

Le **linee di corrente** sono definite come quelle linee che in ogni punto sono tangenti al vettore velocità. Esse si ricavano integrando l'equazione:

$$d\mathbf{x} \times \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = 0.$$

13.2 La derivata materiale di una grandezza integrata su un volume materiale

Nello studio del moto dei fluidi è spesso necessario calcolare l'integrale di una certa grandezza F su un **volume materiale di fluido**, cioè un volume di fluido costituito sempre dalle stesse particelle fluide. Inoltre in alcuni casi è necessario valutare la derivata materiale (fatta cioè seguendo il moto della massa fluida) di tale quantità. In altre parole è necessario valutare:

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} F dV.$$

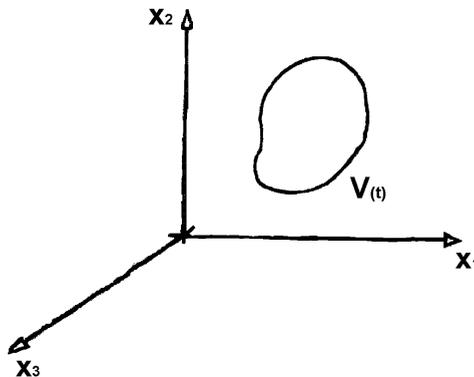


Figura 13.1

Per esempio la massa M associata a un volume materiale di fluido (in movimento) è:

$$M = \int_{V(t)} \rho dV.$$

Infatti dalla definizione stessa di densità, la massa infinitesima associata a un volume infinitesimo dV sarà ρdV . Per determinare la massa contenuta in V è necessario sommare tutti i contributi e quindi integrare su tutto il volume $V(t)$.

Il principio di conservazione della massa impone poi che la massa M associata al volume $V(t)$ di fluido in movimento rimanga costante. È necessario dunque imporre:

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho dV = 0.$$

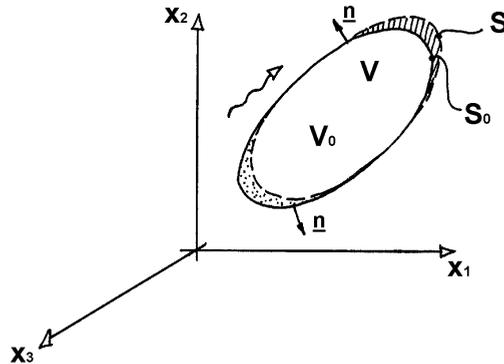


Figura 13.2

Pur essendo nota la funzione $\rho(\mathbf{x}, t)$, tale calcolo risulta difficile da effettuarsi poichè il volume $V(t)$ è mobile. È pertanto utile trasformare l'integrale di cui sopra in uno da effettuarsi su un volume fisso nello spazio. Vediamo come ciò è possibile.

Consideriamo il volume $V(t)$ al tempo t_0 e denotiamolo con V_0 . Indichiamo con S_0 la sua frontiera. Consideriamo quindi il volume all'istante $t_0 + \Delta t$ e indichiamolo con V . Sia S la frontiera di V . Il volume V sarà quasi coincidente con V_0 , essendo trascorso un tempo piccolo Δt . Con riferimento alla figura 13.2, rispetto a V_0 , il volume V avrà in più il volume tratteggiato e in meno il volume punteggiato. Cerchiamo di quantificare tale differenza. Con riferimento alla figura 13.3 consideriamo una parte infinitesima di S_0 e denotiamola con dS_0 . Sia \mathbf{n} la normale alla superficie, uscente per convenzione dal volume V_0 . Se indichiamo con \mathbf{v} la velocità del fluido valutata sulla superficie infinitesima dS_0 , dopo un tempo piccolo Δt , la particella fluida che si trovava su dS_0 si sarà spostata nello spazio di una distanza pari a $\mathbf{v}\Delta t$. Essendo dS_0 una superficie infinitesima, si possono trascurare le differenze di velocità fra le diverse particelle fluide che si trovano su dS_0 . Il volume di fluido che ha attraversato dS_0 nell'intervallo di tempo Δt e che occuperà il volume delimitato da dS_0 , e da una superficie cilindrica con generatrici parallele a $\mathbf{v}\Delta t$ (vedi figura 13.3), sarà dunque $dS_0 (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \Delta t$

Tale volume sarà positivo se $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$ è positivo (se cioè il fluido esce da V_0), mentre sarà negativo se $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$ è negativo (se cioè il fluido entra in V_0).

La differenza fra il volume V e il volume V_0 sarà dunque:

$$\int_{S_0} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \Delta t dS_0.$$

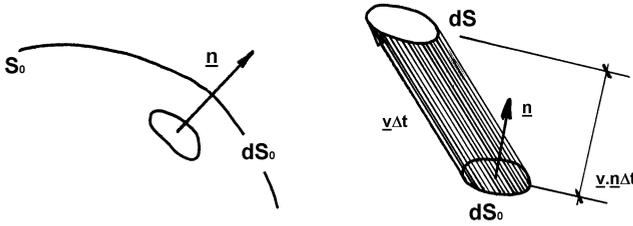


Figura 13.3

Vediamo ora di valutare

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} F dV$$

a un generico tempo t_0 . Applichiamo la definizione di derivata:

$$\begin{aligned} \left[\frac{d}{dt} \int_{V(t)} F dV \right] &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\int_V F(t_0 + \Delta t) dV - \int_{V_0} F(t_0) dV_0}{\Delta t} = \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\int_{V_0} F(t_0 + \Delta t) dV_0 + \int_{S_0} F(t_0 + \Delta t) (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \Delta t dS_0 - \int_{V_0} F(t_0) dV_0}{\Delta t} = \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\int_{V_0} \left[F(t_0) + \left(\frac{\partial F}{\partial t} \right)_{t_0} \Delta t \right] dV_0 - \int_{V_0} F(t_0) dV_0}{\Delta t} \\ &\quad + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\int_{S_0} F(t_0 + \Delta t) (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \Delta t dS_0}{\Delta t} = \\ &= \int_{V_0} \left(\frac{\partial F}{\partial t} \right)_{t_0} dV_0 + \int_{S_0} F(t_0) (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS_0 \end{aligned}$$

Si è quindi dimostrato (dimostrazioni più rigorose sono disponibili nei libri di testo) il teorema del trasporto:

$$\left(\frac{d}{dt} \int_{V(t)} F dV \right)_{t=t_0} = \int_{V_0} \left(\frac{\partial F}{\partial t} \right)_{t_0} dV_0 + \int_{S_0} F(t_0) (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS_0$$

essendo V_0 un volume fisso nello spazio che nell'istante in considerazione coincide con il volume mobile V .

Lezione 14. I principi della meccanica dei fluidi

Vediamo ora a quali equazioni conducono i principi enunciati precedentemente

14.1 Il principio di conservazione della massa

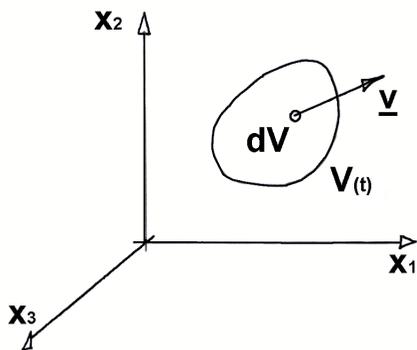


Figura 14.1

Dalla definizione stessa di densità, la massa infinitesima associata al volume infinitesimo dV è ρdV .

La massa del volume materiale $V(t)$ è dunque fornita dalla somma dei contributi derivanti da tutti i volumi infinitesimi che compongono $V(t)$. Si ha dunque:

$$M(t) = \int_{V(t)} \rho dV$$

e il principio di conservazione della massa impone la costanza di M :

$$\frac{d}{dt} \int_{V_0} \rho dV = 0.$$

Utilizzando il teorema del trasporto si può anche scrivere

$$\int_{V(t)} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV_0 + \int_{S_0} \rho(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS_0 = 0$$

Per quanto esposto nel capitolo 13 la quantità

$$\int_{S_0} \rho(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS_0$$

rappresenta la massa di fluido che attraversa la superficie S_0 nell'unità di tempo. Tale quantità è detta **portata massica**. Il principio della conservazione della massa impone quindi che

$$\int_{S_0} \rho(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS_0 = - \int_{V_0} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV_0$$

In altre parole la portata massica deve uguagliare la derivata temporale della massa contenuta all'interno di V_0 cambiata di segno. In particolare se la densità del fluido è costante, essendo inoltre V_0 costante, la portata massica associata a S_0 deve annullarsi. Tanta massa di fluido entra in V_0 , tanta deve uscire, non essendo possibile che il fluido si accumuli in V_0 per variazioni di densità.

14.2 Il principio della quantità di moto

Come discusso nel punto precedente la massa infinitesima associata al volume dV risulta pari a ρdV .

La quantità di moto della massa ρdV sarà $\rho \mathbf{v} dV$.

Si noti che la quantità di moto è una grandezza vettoriale la cui direzione e verso coincidono con quelli di \mathbf{v} . La quantità di moto del volume $V(t)$ sarà dunque fornita da

$$\int_V \rho \mathbf{v} dV.$$

Il principio della quantità di moto impone dunque:

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho \mathbf{v} dV = \int_{V(t)} \rho \mathbf{f} dV + \int_{S(t)} \mathbf{t} dS$$

dove le forze che l'esterno esercita su V sono state suddivise in forze di massa e forze di superficie (vedi capitolo 2). Utilizzando il teorema del trasporto si ottiene l'**equazione integrale della quantità di moto** che si può anche scrivere:

$$\int_{V_0} \frac{\partial(\rho \mathbf{v})}{\partial t} dV_0 + \int_{S_0} \rho \mathbf{v} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS_0 = \int_{V_0} \rho \mathbf{f} dV_0 + \int_{S_0} \mathbf{t} dS_0$$

o, in forma compatta.

$$\mathbf{I} + \mathbf{M} = \mathbf{G} + \mathbf{\Pi}$$

dove:

$$\mathbf{I} = \int_{V_0} \frac{\partial(\rho \mathbf{v})}{\partial t} dV_0 \quad \text{è il termine di inerzia locale} \quad (14.1)$$

$$\mathbf{M} = \int_{S_0} \rho \mathbf{v} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS_0 \quad \text{è il flusso di quantità di moto attraverso } S_0 \quad (14.2)$$

$$\mathbf{G} = \int_{V_0} \rho \mathbf{f} dV_0 \quad \text{è la risultante delle forze di massa sul volume } V_0. \quad (14.3)$$

$$\mathbf{\Pi} = \int_{S_0} \mathbf{t} dS_0 \quad \text{è la risultante delle forze di superficie sulla superficie } S_0. \quad (14.4)$$

Nel caso di campo di forze gravitazionali \mathbf{G} corrisponde al peso del fluido contenuto in V_0 .

Spesso il termine \mathbf{M} viene suddiviso in due contributi

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_u - \mathbf{M}_i$$

dividendo la superficie S_0 in due parti. Nella prima $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$ è positivo e il fluido esce da V_0 , nella seconda $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$ è negativo e il fluido entra in V_0 . \mathbf{M}_u rappresenta quindi il flusso di quantità di moto in uscita mentre \mathbf{M}_i quello in ingresso. Resta da sottolineare che sia \mathbf{M}_u che \mathbf{M}_i sono quantità vettoriali la cui direzione è coincidente con quella della velocità \mathbf{v} . Segue che $-\mathbf{M}_i$ è un vettore opposto a \mathbf{M}_i .

14.3 Il principio del momento della quantità di moto

Procedendo come nei punti precedenti, il principio del momento della quantità di moto fornisce:

$$\frac{d}{dt} \int_V \mathbf{x} \times (\rho \mathbf{v}) dV = \int_V \mathbf{x} \times (\rho \mathbf{f}) dV + \int_{S(t)} \mathbf{x} \times \mathbf{t} dS$$

o, applicando il teorema del trasporto:

$$\int_{V_0} \frac{\partial}{\partial t} [\mathbf{x} \times (\rho \mathbf{v})] dV_0 + \int_{S_0} \mathbf{x} \times (\rho \mathbf{v})(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS_0 = \int_{V_0} \mathbf{x} \times (\rho \mathbf{f}) dV_0 + \int_{S_0} \mathbf{x} \times \mathbf{t} dS_0.$$

Per concludere questa lezione illustriamo alcune semplici applicazioni dei principi della quantità di moto e del momento della quantità di moto in forma integrale che dimostra che le relative equazioni, illustrate in precedenza, consentono la soluzione di problemi anche complessi.

Si consideri un getto che orizzontalmente va a urtare una superficie verticale. Siano U_0 e Ω la velocità del fluido nel getto e la sezione di quest'ultimo (figura 14.2). Si calcoli la forza \mathbf{F} che il getto esercita sulla superficie.

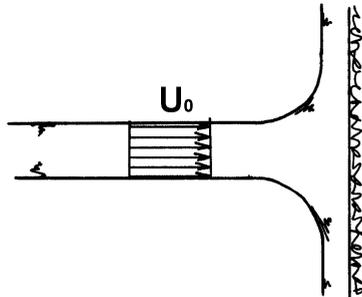


Figura 14.2

Soluzione: il problema può essere risolto utilizzando l'equazione del principio della quantità di moto in forma integrale:

$$\mathbf{I} + \mathbf{M}_u - \mathbf{M}_i = \mathbf{G} + \mathbf{\Pi}.$$

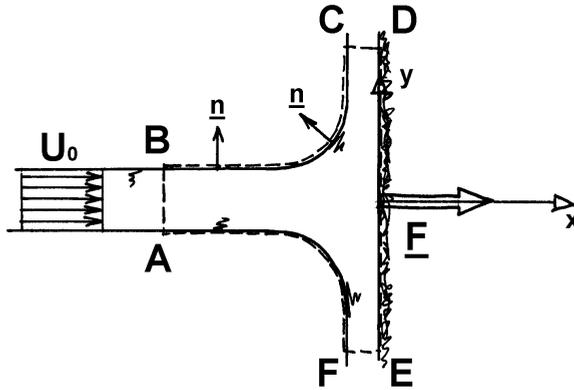


Figura 14.3

Per procedere è necessario in primo luogo individuare il volume V . È evidente che l'equazione precedente vale qualunque volume si scelga, ma una scelta opportuna consente la soluzione del problema mentre altre scelte non conducono a utili espressioni. Per risolvere il problema in esame consideriamo il volume (detto il controllo) tratteggiato in figura 14.3 e introduciamo un sistema di riferimento. Notiamo inoltre che per la simmetria del problema la forza \mathbf{F} sarà diretta lungo l'asse x . È conveniente quindi proiettare l'equazione del principio della quantità di moto lungo la direzione x

$$I_x + M_{ux} - M_{ix} = G_x + \Pi_x.$$

Assumendo il problema stazionario il termine

$$I_x = \int_{V_0} \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} dV_0$$

sarà nullo. Si noti che v è stato espresso come (u, v, w) .

Se inoltre assumiamo che l'asse z sia verticale, il vettore \mathbf{G} sarà parallelo a z e quindi il termine

$$\mathbf{G} = \int_{V_0} \rho g_x dV_0$$

sarà anch'esso nullo.

Notiamo ora che dalle superfici BC e AF non esce né entra della massa in quanto v e \mathbf{n} sono ortogonali. Si ha un flusso di massa e quindi di quantità di moto solo attraverso AB , CD e EF . In particolare la superficie AB contribuisce a \mathbf{M}_i a mentre le superfici CD e EF contribuiscono a \mathbf{M}_u . Infine, notando che il vettore

velocità del fluido in uscita è parallelo all'asse y (è evidente che il fluido che attraversa le superfici CD e EF si muove parallelamente alla superficie rigida), si può concludere che

$$M_{ux} = 0.$$

Risulta inoltre

$$M_{ix} = \int_{\Omega} \rho U_0^2 d\Omega = \rho U_0^2 \Omega$$

essendo la velocità del fluido un ingresso pari a U_0 e uniformemente distribuita su Ω . Come detto precedentemente Π rappresenta la risultante delle forze di superficie che l'esterno esercita sul fluido contenuto all'interno di V_0 . Sulle superfici AB , BC , CD , EF e FA la pressione relativa è nulla e non esistono (o sono trascurabili) le tensioni tangenziali. Segue quindi che Π è pari a $-\mathbf{F}$ (principio di azione e reazione) e in particolare è:

$$\Pi_x = -F_x.$$

Si può quindi concludere che:

$$-\rho U_0^2 \Omega = -F_x$$

oppure

$$F_x = \rho U_0^2 \Omega.$$

Il problema illustrato verrà poi ripreso nel seguito per illustrare come sia possibile estrarre energia dal getto e trasformarla in lavoro. A causa della particolare simmetria del problema in questo caso è evidente che la retta di azione di F_x passa per l'origine degli assi.

Se la piastra fosse inclinata, dopo aver inserito il sistema di assi illustrato in figura 14.4, applicando l'equazione della quantità di moto in direzione x al volume di fluido tratteggiato e ragionando analogamente al caso precedente, si ottiene:

$$F = \rho U^2 \Omega_1 \sin \theta.$$

La componente lungo y del principio della quantità di moto, unita al principio di conservazione della massa, consente di calcolare Ω_2 e Ω_3 :

$$\Omega_2 = \frac{\Omega_1}{2} (1 + \cos \theta) \quad \Omega_3 = \frac{\Omega_1}{2} (1 - \cos \theta).$$

È evidente che in questo caso la retta di azione di F non passa per l'origine degli assi.

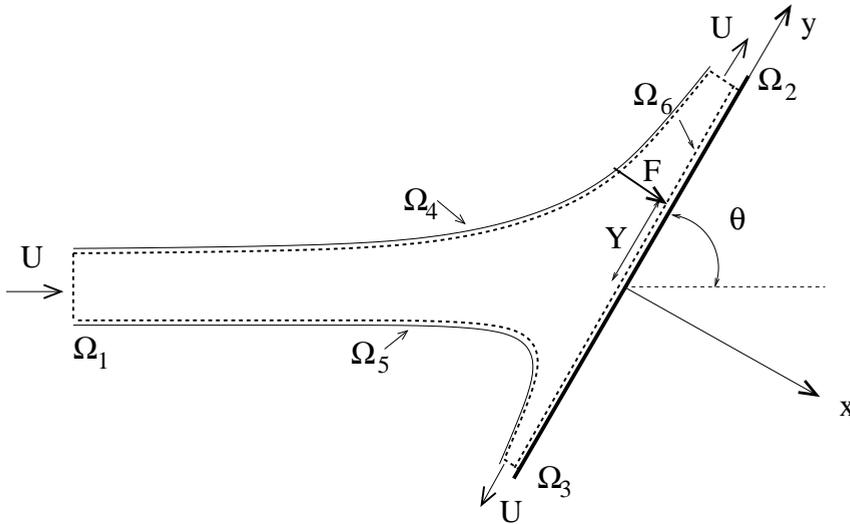


Figura 14.4

La determinazione della retta di azione della forza F richiede l'applicazione del principio del momento della quantità di moto, sempre in riferimento al volume tratteggiato. Ricordando che il problema è piano, stazionario e che si suppone che la gravità sia diretta lungo z , la componente lungo z dell'equazione che esprime il principio del momento della quantità di moto risulta:

$$\int_{S_0} (\zeta \times \rho \mathbf{v}) (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS_0 = \int_{S_0} \zeta \times \mathbf{t} \quad (14.5)$$

essendo ζ il vettore distanza dell'elemento dS dall'origine degli assi e S_0 la superficie del volume di controllo tratteggiato che può essere scomposta nelle superfici $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, \Omega_4, \Omega_5$ e Ω_6 mostrate in figura 14.4. Si ottiene:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_1} (\zeta \times \rho \mathbf{v}) (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS &= 0 \\ \int_{\Omega_2} (\zeta \times \rho \mathbf{v}) (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS &= -\rho U^2 \frac{d_2^2}{2} \\ \int_{\Omega_3} (\zeta \times \rho \mathbf{v}) (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS &= +\rho U^2 \frac{d_3^2}{2} \\ \int_{\Omega_4} (\zeta \times \rho \mathbf{v}) (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS &= \int_{\Omega_5} (\zeta \times \rho \mathbf{v}) (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS = \\ &= \int_{\Omega_6} (\zeta \times \rho \mathbf{v}) (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS = 0 \end{aligned}$$

avendo indicato con d_2 e d_3 l'altezza delle superfici Ω_2 e Ω_3 che risultano essere rettangoli di larghezza unitaria.

Le uniche tensioni agenti sul volume di controllo sono dunque quelle esercitate dalla piastra in risposta alla sollecitazione del fluido:

$$\int_{S_0} \boldsymbol{\zeta} \times \mathbf{t} dS_0 = \int_{\Omega_6} \boldsymbol{\zeta} \times \mathbf{t} dS_0 = -FY$$

avendo indicato con Y la posizione della retta di azione di \mathbf{F} e con F , come consuetudine, il modulo della forza \mathbf{F} . Sostituendo le relazioni trovate nella 14.5 si ottiene:

$$\frac{\rho U^2}{2} (d_3^2 - d_2^2) = -FY$$

da cui

$$Y = \frac{\rho U^2}{2F} (d_2^2 - d_3^2).$$

Si noti che, se $0 < \theta < \pi/2$, Y risulta minore di zero.

Lezione 15. Le correnti fluide

Lo studio del moto dei fluidi nel caso generale è estremamente complesso e la scrittura delle equazioni necessarie a determinare il campo di moto e lo stato di tensione così come la descrizione delle tecniche di soluzione di tali equazioni sono argomenti propri dei corsi della laurea magistrale. Ci limiteremo qui ad analizzare un caso particolare ma molto frequente e di notevole rilevanza applicativa che è quello delle correnti.

Le correnti fluide sono definite come un moto in cui la velocità è “sensibilmente” parallela a una direzione che è facile individuare. Con il termine “sensibilmente” accettiamo che la direzione della velocità si discosti localmente da quella della corrente anche se gli angoli formati da \mathbf{v} e dalla direzione della corrente devono essere comunque piccoli e tali da poter essere trascurati. Si dice anche che una corrente è un moto quasi unidirezionale.

Definiamo ora alcune grandezze tipiche delle correnti:

Sezione della corrente: Ω

La sezione di una corrente è la superficie individuata dall'intersezione di un piano ortogonale alla direzione della corrente con il dominio fluido.

Asse della corrente e ascissa curvilinea: s

L'asse della corrente è il luogo geometrico dei baricentri delle diverse sezioni. È possibile introdurre un'ascissa curvilinea lungo l'asse della corrente.

Portata volumetrica della corrente: Q

La portata volumetrica della corrente È definita come il flusso di volume (di fluido) attraverso la generica sezione Ω

$$Q = \int_{\Omega} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) d\Omega.$$

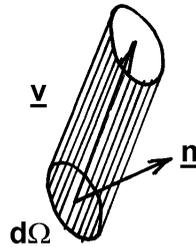


Figura 15.1

Abbiamo già visto (Capitolo 13) che considerando una superficie infinitesima (in questo caso $d\Omega$) di normale \underline{n} , il volume di fluido che attraversa $d\Omega$ nel tempo dt è fornito dall'espressione $(\underline{v} \cdot \underline{n}) dt d\Omega$, avendo assunto che tutte le particelle fluide che si trovano su $d\Omega$ all'istante iniziale si muovono con la stessa velocità \underline{v} e percorrono la distanza $\underline{v} dt$ nel tempo dt . Definito il flusso come il volume che attraversa la superficie Ω rapportato al tempo deriva:

$$Q = \int_{\Omega} (\underline{v} \cdot \underline{n}) d\Omega.$$

Portata massica della corrente: Q_m

La portata massica della corrente è definita come il flusso di massa (di fluido) che attraversa la generica sezione Ω

$$Q_m = \int_{\Omega} \rho (\underline{v} \cdot \underline{n}) d\Omega.$$

Portata ponderale della corrente: Q_p

La portata ponderale della corrente è definita come il flusso di peso (di fluido) che attraversa la generica sezione Ω

$$Q_p = \int_{\Omega} \rho g (\underline{v} \cdot \underline{n}) d\Omega.$$

La velocità media sulla sezione: U

Muovendosi all'interno di una sezione, la velocità assume valori diversi. È quindi utile definire il valore medio che la velocità assume su Ω . Considerando che la velocità è "sensibilmente" ortogonale a Ω , è opportuno considerare solo la componente di v perpendicolare a Ω . Si ha quindi

$$U = \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} v \cdot n d\Omega.$$

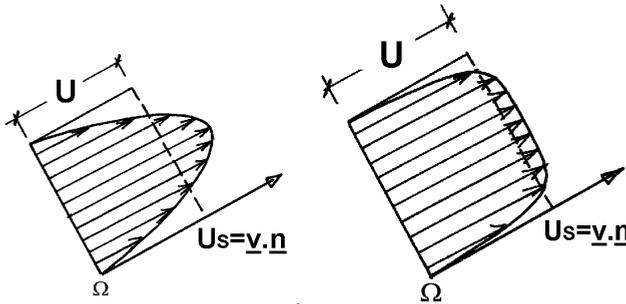


Figura 15.2

Nei moti laminari (si rimanda ai corsi di laurea specialistica per una definizione precisa del regime di moto laminare e di quello turbolento) la velocità si discosta anche sensibilmente da U mentre nei moti turbolenti la distribuzione di velocità sulla sezione tende ad essere molto piatta e prossima a U .

Il carico piezometrico h

Nel Capitolo 4 è stato definito il carico piezometrico h come somma della quota z e della quantità p/γ e si è visto che in un fluido in quiete h risulta costante. È possibile dimostrare (anche se ciò non verrà qui fatto) che il valore di h non varia muovendosi su una sezione, mentre h varia al variare di s . È quindi possibile attribuire un valore di h alla sezione

$$h = z + \frac{p}{\gamma}.$$

Il carico totale H

Al carico piezometrico è possibile aggiungere la quantità $\frac{v^2}{2g} = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}{2g}$ detta **carico cinetico** e ottenere il **carico totale**. È facile vedere che il carico cinetico rappre-

senta l'energia cinetica del fluido per unità di peso, cioè l'energia cinetica di una massa di fluido divisa per il peso del fluido.

Analogamente è possibile vedere che il termine z del carico piezometrico rappresenta l'energia potenziale per unità di peso.

Il termine p/γ , detto carico di pressione, rappresenta un'energia per unità di peso non posseduta dai corpi rigidi. Dimensionalmente $h, H, z, p/\gamma, \frac{v^2}{2g}$ sono delle lunghezze e si misurano in metri nel sistema metrico internazionale.

Siccome la velocità non è costante sulla sezione è opportuno definire il carico totale mediato sulla sezione:

$$H = \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} \left(h + \frac{v^2}{2g} \right) d\Omega = h + \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} \frac{v^2}{2g} d\Omega.$$

Tenendo conto che la componente della velocità normale alla superficie può essere scritta come somma di U più uno scarto \bar{u} che per definizione ha media nulla sulla sezione

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = U + \bar{u}$$

con

$$\frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} \bar{u} d\Omega = 0.$$

Si ha

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} \frac{v^2}{2g} d\Omega &= \frac{1}{\Omega} \frac{1}{2g} \int_{\Omega} (U + \bar{u})^2 d\Omega = \frac{1}{\Omega} \frac{1}{2g} \int_{\Omega} U^2 \left(1 + \frac{\bar{u}}{U} \right)^2 d\Omega = \\ &= \frac{U^2}{2g} \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} \left[1 + \left(\frac{\bar{u}}{U} \right)^2 \right] d\Omega. \end{aligned}$$

Essendo in generale $\bar{u} \ll U$ e quindi $(\bar{u}/U)^2 \ll 1$ si può scrivere

$$H \cong h + \frac{U^2}{2g}$$

Flusso di energia meccanica di una corrente

Nei punti precedenti abbiamo visto che a una corrente possiamo associare una portata di fluido cioè un flusso di volume. Q rappresenta il volume di fluido che attraversa Ω nell'unità di tempo. Al volume di fluido che attraversa Ω possiamo associare una massa, un peso ed evidentemente un'energia. Possiamo quindi definire il flusso di energia associato ad una corrente come:

$$P = \int_{\Omega} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \gamma H d\Omega$$

essendo H l'energia per unità di peso.

Segue

$$P \cong \int_{\Omega} \gamma (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \left[h + \frac{U^2}{2g} \right] d\Omega \cong \gamma QH.$$

Sottolineiamo che tutte le grandezze caratterizzanti le correnti (U, Q, h, H, \dots) risultano funzioni dell'ascissa s e del tempo t .

Per la determinazione di U, Q, h, \dots si utilizzano delle equazioni che derivano dai principi enunciati nel capitolo 14 e che verranno ricavate nel capitolo 16 e nel capitolo 17.

Lezioni 16. Equazione di continuità per una corrente

Nel capitolo 14 si è visto che il principio di conservazione della massa conduce a

$$\int_{V_0} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV_0 + \int_{S_0} \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS_0 = 0.$$

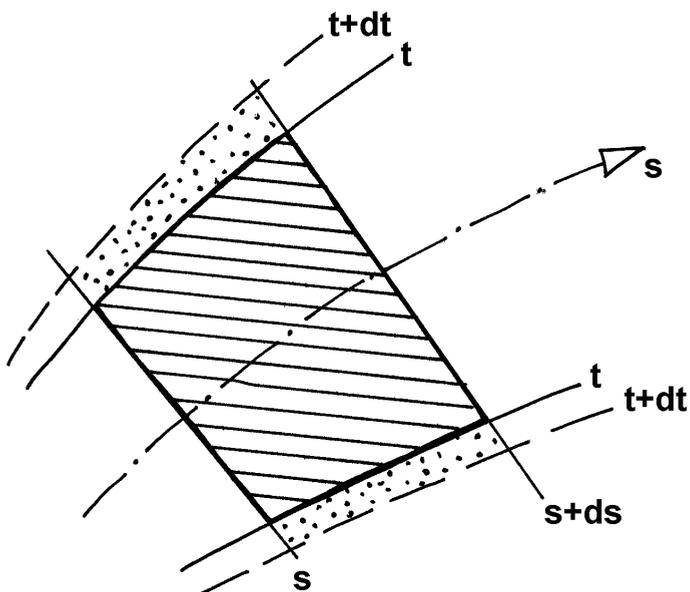


Figura 16.1

Applichiamo l'equazione precedente al volume di controllo V_0 (vedi figura 16.1) individuato dal contorno della corrente al tempo t e dalle sezioni di ascisse s e $s + ds$ (volume tratteggiato). La linea tratteggiata sia il contorno della corrente al tempo $t + dt$.

Il primo termine dell'equazione derivante dal principio di conservazione della massa può essere approssimato nel seguente modo:

$$\int_{V_0} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV_0 \cong \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} \Omega \right)_{s,t} ds$$

dove $(\Omega)_{s,t} ds$, a meno di termini di ordine ds^2 , rappresenta il volume V_0 e dove le quantità $\frac{\partial \rho}{\partial t}$ e Ω possono essere valutate in s e al tempo t .

Il secondo termine rappresenta il flusso di massa attraverso la superficie S_0 che delimita V_0 , positivo se uscente. Dalla sezione posta in $s + ds$ il flusso è $[\rho Q]_{s+ds,t}$ mentre il flusso corrispondente alla sezione posta in s è $[\rho Q]_{s,t}$. La massa uscita nell'intervallo dt dalla superficie laterale del volume di controllo è pari al prodotto di ρ per il volume punteggiato in figura, quest'ultimo essendo pari a:

$$\left[\frac{\partial \Omega}{\partial t} \right]_{s,t} dt ds.$$

Il flusso legato alla superficie laterale sarà dunque:

$$\left[\rho \frac{\partial \Omega}{\partial t} \right]_{s,t} ds.$$

Infine, l'equazione derivante dal principio di conservazione della massa, detta anche equazione di continuità, risulta:

$$\left[\frac{\partial \rho}{\partial t} \Omega \right]_{s,t} ds + [\rho Q]_{s+ds,t} - [\rho Q]_{s,t} + \left[\rho \frac{\partial \Omega}{\partial t} \right]_{s,t} ds = 0$$

$$\left[\frac{\partial \rho}{\partial t} \Omega \right]_{s,t} ds + [\rho Q]_{s,t} + \left[\frac{\partial (\rho Q)}{\partial s} \right]_{s,t} ds - [\rho Q]_{s,t} + \left[\rho \frac{\partial \Omega}{\partial t} \right]_{s,t} ds = 0$$

$$\frac{\partial (\rho \Omega)}{\partial t} + \frac{\partial (\rho Q)}{\partial s} = 0$$

Come detto in precedenza, questa è l'**equazione di continuità per le correnti**.

Nel caso di un moto stazionario, un moto cioè in cui le grandezze non dipendono dal tempo si ha:

$$\frac{d(\rho Q)}{ds} = 0.$$

Si noti che la derivata rispetto a s è ora ordinaria, considerato che sia ρ sia Q dipendono solo da s .

Segue:

$$\rho Q = \text{costante}.$$

La portata massica delle correnti stazionarie si mantiene dunque costante. Se inoltre il fluido in esame è a densità costante l'equazione di continuità impone:

$$Q = \text{costante}.$$

Essendo $Q = U\Omega$, quando la sezione diminuisce la velocità aumenta, quando invece la sezione aumenta la velocità diminuisce.

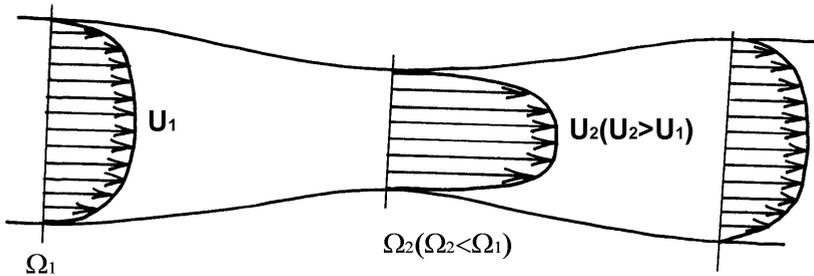


Figura 16.2

Ciò non è vero se il fluido è a densità variabile. In tal caso infatti si deve mantenere costante il prodotto $\rho U \Omega$.

Nel caso di un condotto a sezione indipendente dal tempo (per esempio un condotto in acciaio) e di un fluido a densità costante si ha:

$$\frac{\partial Q}{\partial s} = 0.$$

Si noti che la derivata rispetto a s rimane parziale. La funzione Q che soddisfa l'equazione precedente è

$$Q = Q(t) = \Omega(s)U(s, t).$$

Se poi la sezione è costante si ha:

$$U = U(t).$$

cioè quello che si definisce un moto in blocco. Infatti in ogni sezione la velocità è uguale anche se essa varia nel tempo.

Lezione 17. Equazione del moto per una corrente

Nel capitolo 14 si è visto che il principio della quantità di moto conduce a:

$$\int_{V_0} \frac{\partial(\rho v)}{\partial t} dV_0 + \int_{S_0} \rho v (v \cdot n) dS_0 = \int_{V_0} \rho f dV_0 + \int_{S_0} t dS_0.$$

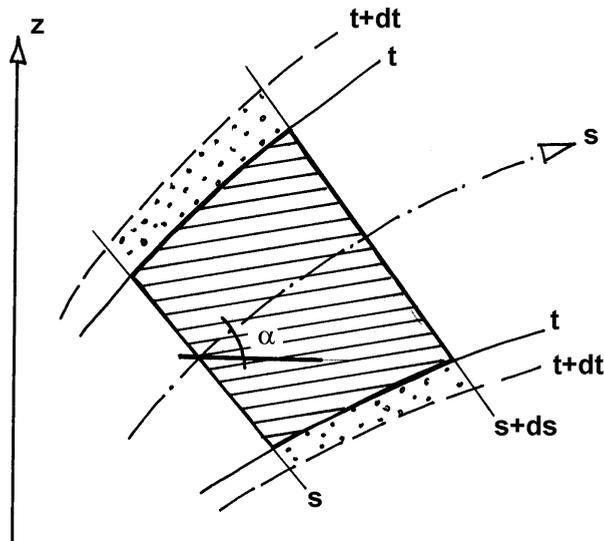


Figura 17.1

Applichiamo l'equazione precedente al volume di controllo V_0 (vedi figura 17.1) individuato dal contorno della corrente al tempo t e dalle sezioni poste all'ascissa s e all'ascissa $s + ds$ (volume tratteggiato). La linea tratteggiata è il contorno

della corrente al tempo $t + dt$ e l'angolo α denota l'angolo formato dall'asse della corrente con un piano orizzontale. Infine, \mathbf{f} è il campo di forze che si suppone essere gravitazionale.

L'equazione considerata è un'equazione vettoriale. Essendo il vettore velocità parallelo all'ascissa curvilinea s , proiettiamo l'equazione lungo s :

$$I_s + M_{us} - M_{is} = G_s + \Pi_s.$$

Il termine I_s può essere approssimato dalla relazione:

$$I_s = \left[\frac{\partial(\rho U)}{\partial t} \right]_{s,t} (\Omega)_{s,t} ds$$

dove $(\Omega)_{s,t} ds$, a meno di termini di ordine ds^2 , rappresenta il volume V_0 . La derivata rispetto al tempo di ρU può essere valutata al tempo t e all'ascissa s comportando così un errore in I_s di ordine ds^2 e $dsdt$.

Il fluido entra nel volume di controllo solo attraverso la sezione posta in s . Il flusso di quantità di moto in ingresso, proiettato nella direzione s , è quindi:

$$M_{is} = (\rho Qu)_{s,t}.$$

Il flusso di quantità di moto in uscita è dato dalla somma di due termini

$$M_{us} = (\rho QU)_{s+ds,t} + (\rho)_{s,t} \left(\frac{\partial \Omega}{\partial t} \right)_{s,t} ds (U)_{s,t}.$$

Il primo termine rappresenta il flusso di quantità di moto in uscita dalla sezione caratterizzata dall'ascissa $s + ds$, il secondo è legato al flusso di quantità di moto attraverso la superficie laterale. Invero come discusso nel capitolo 16 il termine

$$(\rho)_{s,t} \left(\frac{\partial \Omega}{\partial t} \right) ds$$

rappresenta il flusso di massa attraverso la superficie laterale del volume di controllo che trascina con se quantità di moto nella direzione s .

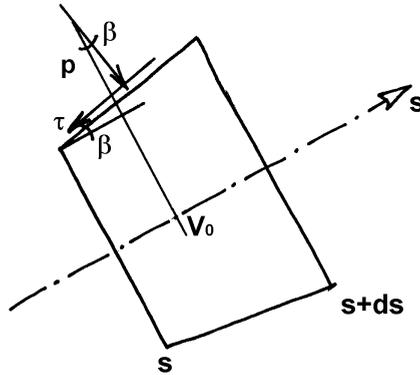


Figura 17.2

Il termine G_s è facilmente calcolabile e risulta:

$$G_s = -(\Omega)_{s,t} ds (\rho)_{s,t} g \sin \alpha.$$

Resta infine da valutare Π_s . Sulla sezione caratterizzata dall'ascissa s , la distribuzione della pressione è idrostatica (vedi capitolo 15) così come sulla sezione posta in $s + ds$. Le tensioni tangenziali agenti sulle sezioni poste in s e $s + ds$ non forniscono alcun contributo a Π_s .

Sulla superficie laterale, l'esterno esercita una tensione che ha una componente normale alla superficie e una tangente. Entrambe le componenti forniscono un contributo a Π_s . Con riferimento alla figura 17.2 e denotando con β l'angolo (piccolo) che il contorno forma con l'asse s , si ha:

$$\Pi_s = (p\Omega)_{s,t} - (p\Omega)_{s+ds,t} + (p)_{s,t} S_\ell \sin \beta - (\tau)_{s,t} S_{lb} \cos \beta.$$

Nell'espressione precedente, mentre S_ℓ indica tutta la superficie laterale del volume di controllo, S_{lb} è quella parte a contatto con un contorno solido in grado cioè di esercitare una resistenza al moto del fluido. Analizzando la geometria del problema è possibile dedurre che:

$$S_\ell \sin \beta = \left(\frac{\partial \Omega}{\partial s} \right)_{s,t} ds$$

$$S_{lb} = (B)_{s,t} ds$$

essendo B la parte del perimetro della generica sezione a contatto con un contorno solido (B è detto perimetro bagnato).

L'equazione della quantità di moto porge dunque:

$$\left[\frac{\partial(\rho U)}{\partial t} \right]_{s,t} (\Omega)_{s,t} ds + (\rho QU)_{s+ds,t} + \left(\rho \frac{\partial \Omega}{\partial t} U \right)_{s,t} ds - (\rho QU)_{s,t} = -$$

$$- (\rho \Omega)_{s,t} g \sin \alpha ds + (p \Omega)_{s,t} - (p \Omega)_{s+ds,t} + (p_{s,t}) \left(\frac{\partial \Omega}{\partial s} \right)_{s,t} ds - (\tau B)_{s,t} ds$$

dove si è anche assunto che β sia così piccolo da poter considerare $\cos \beta \cong 1$.
Tenendo conto che:

$$(\rho QU)_{s+ds} = (\rho QU)_s + \frac{\partial(\rho QU)}{\partial s} ds + O(ds^2)$$

$$(p \Omega)_{s+ds} = (p \Omega)_s + \frac{\partial(p \Omega)}{\partial s} ds + O(ds^2)$$

e che il $\sin \alpha$ può essere espresso come $\partial z / \partial s$, indicando con z la quota dell'asse della corrente, si ha:

$$\rho \frac{\partial U}{\partial t} \Omega + U \frac{\partial \rho}{\partial t} \Omega + U \frac{\partial(\rho Q)}{\partial s} + \rho Q \frac{\partial U}{\partial s} + \rho \frac{\partial \Omega}{\partial t} U = \quad (17.1)$$

$$= -\gamma \Omega \frac{\partial z}{\partial s} - p \frac{\partial \Omega}{\partial s} - \Omega \frac{\partial p}{\partial s} + p \frac{\partial \Omega}{\partial s} - \tau B \quad (17.2)$$

essendo tutte le quantità valutate in s al tempo t . Nell'equazione precedente la somma dei termini sottolineati si annulla in forza dell'equazione di continuità.

Segue, dividendo per $\gamma \Omega$:

$$\frac{1}{g} \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{1}{g} U \frac{\partial U}{\partial s} = -\frac{\partial z}{\partial s} - \frac{1}{\gamma} \frac{\partial p}{\partial s} - \frac{\tau B}{\gamma \Omega}$$

o ancora:

$$\frac{\partial z}{\partial s} + \frac{1}{\gamma} \frac{\partial p}{\partial s} + \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{U^2}{2g} \right) = -\frac{1}{g} \frac{\partial U}{\partial t} - \frac{\tau}{\gamma R_i}$$

essendo R_i il raggio idraulico della sezione pari al rapporto fra l'area della sezione e il perimetro bagnato

$$R_i = \frac{\Omega}{B}$$

Infine per un **fluido barotropico** ⁽¹⁾, la cui densità è funzione solo della pressione, è possibile scrivere:

$$\frac{\partial H}{\partial s} = -\frac{1}{g} \frac{\partial U}{\partial t} - j$$

ove

$$H = z + \int \frac{dp}{\gamma} + \frac{U^2}{2g} \quad \text{e} \quad j = \frac{\tau}{\gamma R_i}.$$

L'equazione precedente costituisce l'**equazione del moto di una corrente**. Essa ci dice che il carico totale (l'energia per unità di peso del fluido) diminuisce nella direzione del moto a causa del termine $-j$ (j è infatti una quantità sempre positiva) mentre il termine $-\frac{1}{g} \frac{\partial U}{\partial t}$ può causare variazioni o positive o negative del carico.

Il termine j corrisponde alle **perdite di carico per unità di percorso**.

⁽¹⁾Se il fluido è barotropico, cioè se $\gamma = \gamma(p)$, si ha

$$\frac{\partial}{\partial s} \int \frac{dp}{\gamma} = \frac{d}{dp} \int \frac{dp}{\gamma} \cdot \frac{\partial p}{\partial s} = \frac{1}{\gamma} \frac{\partial p}{\partial s}$$

Lezione 18. Perdite di carico distribuite

L'equazione di continuità e l'equazione del moto per le correnti richiedono, per essere risolte, un'espressione che leghi j alle caratteristiche cinematiche della corrente.

Per determinare tale relazione consideriamo un moto stazionario (quindi indipendente dal tempo) e uniforme (quindi indipendente dalla coordinata s). La sezione (di forma arbitraria) deve essere perciò costante. Si ricordi che

$$j = \frac{\tau}{\gamma R_i}$$

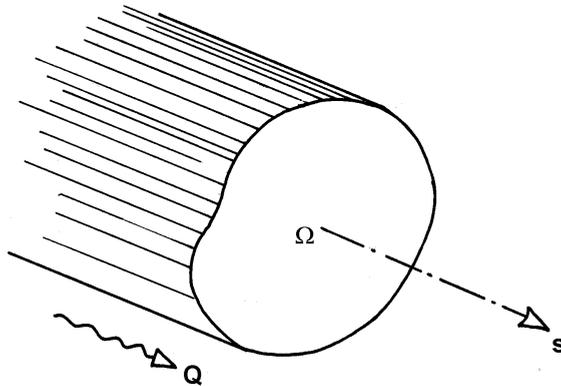


Figura 18.1

L'analisi del problema mostra che τ dipende:

- dalle caratteristiche del fluido ρ, ν
- dalla dimensione e dalla forma della sezione descrivibile attraverso il raggio idraulico R_i (o convenzionalmente dalla dimensione $4R_i$) e da parametri di forma

ϵ_i

- dalle dimensioni della scabrezza y_r che influenza senza dubbio il valore della tensione alla parete

- dalla velocità media della corrente U

Si potrebbe pensare che τ sia influenzato anche dalla portata Q . Tuttavia avendo affermato che τ dipende da U e Ω e sapendo che $Q = U\Omega$, sarebbe ridondante affermare che τ dipende anche da Q .

Si ha dunque:

$$\tau = f(4R_i, \epsilon_i, y_r, U, \rho, \nu).$$

Applicando il teorema II (vedi capitolo 11) e scegliendo come grandezze dimensionalmente indipendenti $4R_i, U, \rho$ si ottiene:

$$\frac{\tau}{\rho U^2} = f_1\left(\frac{4R_i U}{\nu}, \frac{y_r}{4R_i}, \epsilon_i\right).$$

La quantità j può dunque essere valutata utilizzando l'espressione:

$$j = \frac{\tau}{\gamma R_i} = \frac{\rho U^2 f_1}{\rho g R_i} = \frac{U^2}{2g} \frac{8f_i}{4R_i} = \frac{\lambda}{4R_i} \frac{U^2}{2g} \quad (18.1)$$

dove $\lambda = 8f_i = \lambda\left(\frac{4R_i U}{\nu}, \frac{y_r}{4R_i}, \epsilon_i\right)$, è detto **coefficiente di resistenza** e dipende dal numero di Reynolds $Re = \frac{4R_i U}{\nu}$, dalla scabrezza relativa $\frac{y_r}{4R_i}$ e dalla forma della sezione descritta dai parametri ϵ_i .

Chiaramente per determinare λ è necessario ricorrere a misure sperimentali. Per un condotto a sezione circolare $4R_i = D$, essendo D il diametro del condotto (infatti $R_i = \frac{\pi D^2}{4} = \frac{D}{4}$). Si ha dunque:

$$\lambda = \lambda\left(\frac{UD}{\nu}, \frac{y_r}{D}\right).$$

Nel grafico in figura 18.2 denominato **diagramma di Moody**, è riportato l'andamento di λ in funzione di $Re = UD/\nu$ per diversi valori di $\epsilon = y_r/D$.

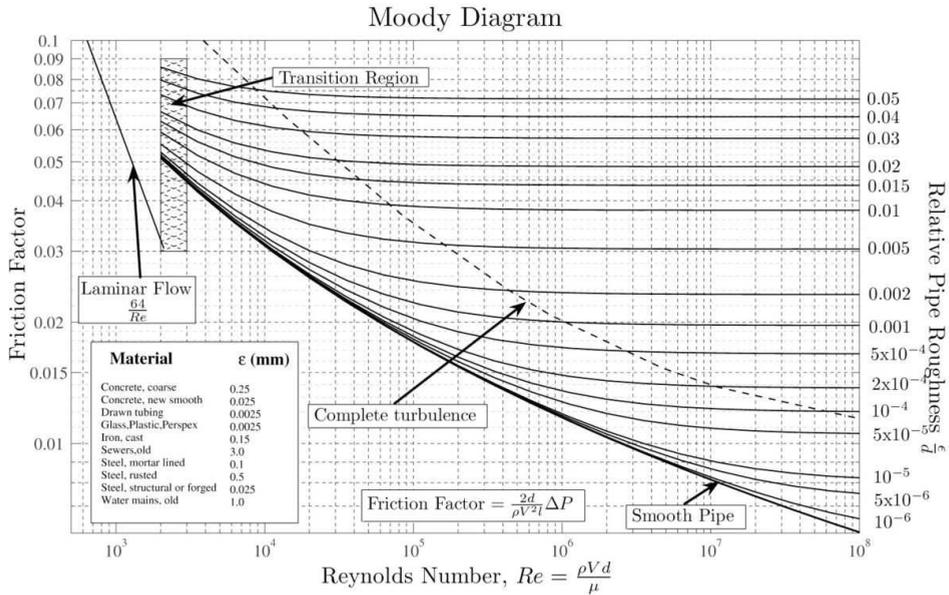


Figura 18.2: Diagramma di Moody (fonte: <https://en.wikipedia.org/wiki/User:Donebythesecondlaw>)

Sempre per condotti a sezione circolare nel regime di moto turbolento esistono formule empiriche per la valutazione di λ . Una delle più usate, anche se non esplicita, è quella di **Colebrook**

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log_{10} \left(\frac{2.51}{Re\sqrt{\lambda}} + \frac{\epsilon}{3.71} \right)$$

Notiamo che per valori di Re tendenti a infinito, il valore di λ risulta indipendente da Re . Quando λ dipende solo da ϵ si ha il regime di **parete assolutamente scabra**. Per $\epsilon = 0$ (parete liscia) λ dipende solo da Re .

Il **regime di transizione** è quello in cui λ dipende sia da Re che da ϵ .

Si noti infine che la formula di Colebrook è valida in regime di moto turbolento ($Re \geq 2000 - 2200$).

Quando il regime di moto è laminare ($Re \leq 2000 - 2200$) il valore di λ può essere calcolato analiticamente (ciò verrà fatto nei corsi previsti nell'ambito della laurea

specialistica) e risulta:

$$\lambda = \frac{64}{Re}.$$

Per il calcolo di λ relativo a condotti di forma diversa dalla circolare si consultino libri di testo o manuali dell'ingegnere.

L'espressione di j è stata ottenuta supponendo il moto stazionario e uniforme. Nel caso di moti lentamente variabili o di condotti lentamente convergenti o divergenti, si utilizza la stessa espressione utilizzando i valori locali e istantanei di Re e λ .⁽¹⁾

18.1 Formule semplificate per il calcolo delle perdite distribuite

In passato sono state proposte relazioni alternative alla (18.1) per il calcolo delle perdite di carico per unità di percorso, che sono applicabili quando il regime di moto è assolutamente turbolento. tali formule sono spesso utilizzate per valutare le perdite di carico nelle correnti fluviali. La **formula di Chezy**:

$$j = \frac{U^2}{\chi^2 R_i}$$

consente il calcolo di j in termini del coefficiente χ , detto **coefficiente di Chezy**. La (18.1) può essere espressa anche in termini di Q :

$$j = \frac{Q^2}{\chi^2 \Omega^2 R_i}$$

⁽¹⁾Un valore indicativo di y_r può essere dedotto dalla seguente tabella.

- Vetro, ottone, rame, piombo, tubi trafilati	0.1 10 ⁻⁴ m
- Tubi saldati, amianto-cemento	0.5 10 ⁻⁴ m
- Ghisa asfaltata	1.0 10 ⁻⁴ m
- Ferro galvanizzato	1.5 10 ⁻⁴ m
- Ghisa	3 - 5 10 ⁻⁴ m
- Calcestruzzo	5 - 50 10 ⁻⁴ m
- Tubi chiodati	10 - 100 10 ⁻⁴ m

Il coefficiente χ è dimensionale ($[\chi] = L^{1/2}T^{-1}$) ed è indipendente dal valore del numero di Reynolds. La valutazione di χ può essere effettuata utilizzando diverse formule. Una tra le formule più utilizzate è la formula di Gauckler-Strickler:

$$\chi = kR_i^{1/6}$$

dove k è il coefficiente di scabrezza, che dipende solo dalla scabrezza e risulta dimensionale ($[k] = L^{1/3}T^{-1}$). Alcuni valori del coefficiente k sono mostrati nella Tabella 18.1

tipo di superficie	$k[m^{1/3} s^{-1}]$
tecnicamente liscia	110
plastica	85-90
tubi nuovi lisci	80-90
tubi degradati	50-60
cemento	65

Tabella 18.1

Lezione 19. Problemi relativi a condotte a sezione circolare

Come accennato nel capitolo 18, se consideriamo il moto stazionario di un fluido incomprimibile all'interno di una condotta a sezione circolare e costante, l'equazione di continuità, (per fluido a densità costante) porge:

$$Q = \text{costante} \Rightarrow U = \text{costante}.$$

Questa situazione, anche se particolare, è estremamente frequente nella pratica. L'equazione del moto inoltre si semplifica e diviene:

$$\frac{dH}{ds} = -\frac{\lambda U^2}{D 2g}.$$

Siccome la sezione Ω è costante così come il suo diametro D e la sua scabrezza y_r (se la condotta è costruita tutta di uno stesso materiale) segue che anche il coefficiente di resistenza λ è costante. Infatti:

$$Re = \frac{UD}{\nu} = \text{costante}; \quad \epsilon = \frac{y_r}{D} = \text{costante}$$

L'equazione del moto può dunque essere facilmente integrata porgendo:

$$H_2 - H_1 = -\frac{\lambda U^2}{D 2g} (s_2 - s_1) = -\frac{\lambda U^2}{D 2g} L$$

essendo L la distanza fra due sezioni diverse con ascissa curvilinea s_2 e s_1 rispettivamente (s_2 a valle di s_1) e carico totale H_2 e H_1 . La relazione:

$$H_2 - H_1 = -\frac{\lambda U^2}{D 2g} L$$

o l'equivalente

$$H_2 - H_1 = -\frac{\lambda}{D} \frac{Q^2}{2g\Omega^2} L$$

consentono di determinare una delle caratteristiche della condotta o della corrente note le altre⁽¹⁾

Problema 1: calcolo delle perdite di carico

Di una condotta in ghisa asfaltata sia assegnato il diametro D e la lunghezza L . Conoscendo il valore della portata di acqua defluente, valutare le perdite di carico totali subite dalla corrente fra la sezione iniziale e quella finale.

Dati: $D = 15\text{cm}$, $L = 500\text{m}$, $Q = 25\ell/\text{s}$

Soluzione:

Dai dati disponibili è immediato calcolare la sezione Ω e quindi la velocità media:

$$\Omega = \pi \frac{D^2}{4} = 1.767 \cdot 10^{-2} \text{m}^2, \quad U = \frac{Q}{\Omega} = 1.415 \text{ m/s}.$$

Conoscendo il materiale con cui è stata realizzata la condotta è possibile valutare la scabrezza assoluta (vedi capitolo 18)

$$y_r = 1.0 \cdot 10^{-4} \text{m}$$

Segue:

$$Re = \frac{UD}{\nu} = 2.12 \cdot 10^5; \quad \epsilon = \frac{y_r}{D} = 6.67 \cdot 10^{-4}.$$

Dal diagramma di Moody è dunque possibile stimare:

$$\lambda = 0.0195$$

e quindi le perdite di carico

$$H_2 - H_1 = -\frac{\lambda}{D} \frac{U^2}{2g} L = -6.63 \text{ m}.$$

⁽¹⁾Notiamo che in questo caso, essendo la velocità costante, le equazioni precedenti possono essere anche scritte nella forma:

$$H_2 - H_1 = h_2 - h_1 = -\frac{\lambda}{D} \frac{U^2}{2g} L = -\frac{\lambda}{D} \frac{Q^2}{2g\Omega^2} L$$

Problema 2: calcolo della portata

La differenza fra il carico iniziale e quello finale in un tubo in rame lungo L è $\Delta H = H_1 - H_2$. Conoscendo il diametro D del tubo, valutare la portata Q di acqua defluente.

Dati: $L = 10$ m, $\Delta H = 5$ m, $D = 2.6$ cm.

Soluzione:

Dall'equazione del moto è possibile ricavare:

$$Q = \Omega \sqrt{\frac{2g\Delta H D}{\lambda L}}.$$

La precedente relazione non consente tuttavia il calcolo diretto di Q perché λ dipende dal numero di Reynolds e quindi da Q . È necessario dunque procedere utilizzando un procedimento iterativo.

Dalla conoscenza del materiale della condotta deriva il valore di $y_r = 0.1 \cdot 10^{-4}$ m e quello di

$$\epsilon = \frac{y_r}{D} = 3.85 \cdot 10^{-4}.$$

Se si suppone che il regime di moto sia quello di parete assolutamente scabra (alti valori del numero di Reynolds) si ottiene un valore di primo tentativo di λ :

$$\lambda_1 = 0.0158.$$

Con esso è possibile ricavare un valore di primo tentativo di Q :

$$Q_1 = 2.13 \text{ l/s}$$

da cui discendono:

$$U_1 = 4.01 \text{ m/s}; \quad e \quad Re_1 = 1.04 \cdot 10^5.$$

Avendo ora a disposizione un valore di tentativo del numero di Reynolds è possibile controllare se l'ipotesi iniziale di regime di parete assolutamente scabra era corretta o no.

Dall'analisi del diagramma di Moody emerge che la condotta è nel regime di transizione. La conoscenza di Re consente di ottenere un secondo valore di λ :

$$\lambda_2 = \lambda(1.04 \cdot 10^5, 3.85 \cdot 10^{-4}) \cong 0.02.$$

Con tale valore di λ è possibile ottenere un secondo valore di Q :

$$Q_2 = 1.89 \ell/s.$$

da cui discendono:

$$U_2 = 3.56 \text{ m/s e } Re_2 = 9.26 \cdot 10^4.$$

La conoscenza di Re_2 consente di ottenere un terzo valore di λ :

$$\lambda_3 = \lambda(9.26 \cdot 10^4, 3.85 \cdot 10^{-4}) \cong 0.0201$$

che porta a un valore di Q , praticamente coincidente con Q_2 .

Si è ottenuta la convergenza del risultato. Se Q_3 fosse stato sensibilmente diverso da Q_2 il calcolo avrebbe dovuto proseguire.

Problema 3: calcolo del diametro (problema di progetto)

Fra due serbatoi, distanti 4 Km, si vuole posare una tubazione in grado di far defluire una portata Q di acqua. Si decide di utilizzare tubi in ghisa asfaltata ($y_r = 0.1\text{mm}$). Sapendo che il dislivello fra il pelo libero dei due serbatoi è ΔH , valutare il diametro del tubo da utilizzare.

Dati: $Q = 2 \ell/s$, $\Delta H = 10 \text{ m}$.

Soluzione:

Il calcolo del diametro di una condotta, noti gli altri dati, deve essere fatto per tentativi, cercando di individuare il valore di D che causa delle perdite di carico lungo la condotta pari a ΔH . In altre parole si deve trovare D tale che:

$$\Delta H = \frac{\lambda}{D} \frac{Q^2}{2g\Omega^2} L.$$

A tal fine è opportuno precisare che la valutazione di D non deve essere fatta con troppe cifre significative, considerando che i diametri in commercio sono un numero limitato. Un valore di primo tentativo D per può essere individuato imponendo che la velocità media nella condotta sia pari a 1m/s

$$D_1 = \sqrt{\frac{4Q}{\pi U_1}} = 0.0618 \text{ m}.$$

Con tale valore del diametro (ricordiamo di tentativo) valutiamo $\frac{\lambda}{D} \frac{Q^2}{2g\Omega^2} L$ e confrontiamolo con ΔH pari a 10 m.

Si ha

D [m]	Ω [m ²]	U [m/s]	Re	ϵ	λ	$\frac{\lambda}{D} \frac{U^2}{2g} L$ [m]
0.0618	$3.0 \cdot 10^{-3}$	1.00	$6.18 \cdot 10^4$	$1.62 \cdot 10^{-3}$	$\cong 0.025$	82.6

Il valore delle perdite risulta molto maggiore del dislivello effettivamente disponibile. Ciò suggerisce che il diametro deve essere maggiore, affinché il fluido viaggi a una velocità inferiore e inferiori siano le perdite. Tentiamo con $D=10$ cm. Si ha

D [m]	Ω [m ²]	U [m/s]	Re	ϵ	λ	$\frac{\lambda}{D} \frac{U^2}{2g} L$ [m]
0.1	$7.85 \cdot 10^{-3}$	0.38	$3.8 \cdot 10^4$	$1.0 \cdot 10^{-3}$	$\cong 0.025$	7.36

Le perdite sono ora inferiori al dislivello. Proviamo $D = 9.5$ cm

D [m]	Ω [m ²]	U [m/s]	Re	ϵ	λ	$\frac{\lambda}{D} \frac{U^2}{2g} L$ [m]
0.095	$7.09 \cdot 10^{-3}$	0.42	$3.99 \cdot 10^4$	$1.05 \cdot 10^{-3}$	$\cong 0.025$	9.44

Le perdite sono ancora inferiori a ΔH anche se molto vicine. Verifichiamo che con un diametro di 9 cm esse risultano superiori

D [m]	Ω [m ²]	U [m/s]	Re	ϵ	λ	$\frac{\lambda}{D} \frac{U^2}{2g} L$ [m]	Emerge
0.09	$6.36 \cdot 10^{-3}$	0.47	$4.23 \cdot 10^4$	$1.11 \cdot 10^{-3}$	$\cong 0.024$	12.12	

quindi che il diametro da utilizzare è compreso fra 9 e 9.5 cm.

Lezione 20. Perdite di Borda

In un impianto è possibile che sia presente il passaggio da un diametro D_1 a uno D_2 maggiore. Localmente il moto non è più unidirezionale, generandosi significative componenti di velocità ortogonali all'asse della condotta. Ciò fa sì che localmente il moto del fluido non possa essere analizzato con le equazioni delle correnti. Da un punto di vista qualitativo, uno schizzo del campo di moto è riportato nella figura 20.1.

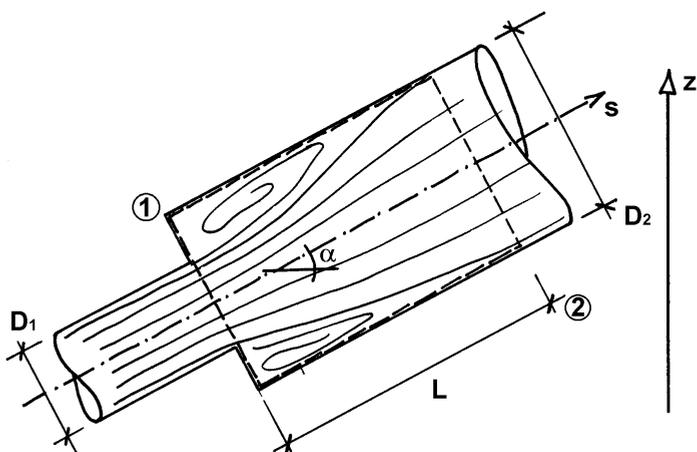


Figura 20.1

Per legare le caratteristiche della corrente immediatamente a monte dell'allargamento con quelle della corrente a valle è possibile utilizzare il principio della quantità di moto in forma integrale (capitolo 14). Sottolineiamo che il mo-

to riprende le caratteristiche di una corrente a una distanza dall'allargamento dell'ordine di qualche diametro.

Applichiamo dunque il principio della quantità di moto al volume di riferimento tratteggiato in figura e delimitato dalla sezione ①, immediatamente a valle dell'allargamento, e dalla sezione ② a una distanza L tale che il moto abbia ripreso le caratteristiche di una corrente.

Proiettiamo l'equazione lungo direzione s :

$$I_s + M_{us} - M_{is} = G_s + \Pi_s.$$

Supposto il moto stazionario, I e quindi I_s risultano nulli. Sia $\Omega_1 = \pi D_1^2/4$ e $\Omega_2 = \pi D_2^2/4$. Denotando con Q la portata defluente nell'impianto, si ha:

$$M_{us} = \rho Q U_2 = \rho \Omega_2 U_2^2$$

$$M_{is} = \rho Q U_1 = \rho \Omega_1 U_1^2.$$

Ricordiamo infatti che il principio di conservazione della massa impone:

$$U_1 \Omega_1 = U_2 \Omega_2 = Q = \text{costante}.$$

È facile verificare che:

$$G_s = -\gamma \Omega_2 L \sin \alpha = -\gamma \Omega_2 L \frac{z_2 - z_1}{L} = \gamma \Omega_2 (z_1 - z_2).$$

essendo z_1 e z_2 le quote dei baricentri delle sezioni di ingresso e di uscita del fluido.

Rimane da quantificare Π_s . Sulla sezione ① possiamo assumere che la distribuzione di pressione sia idrostatica in quanto parte della sezione è occupata dalla corrente in arrivo e parte del fluido è praticamente fermo.

Anche sulla sezione ② è possibile assumere che la distribuzione di pressione sia pari a quella idrostatica. Trascurando quindi le tensioni tangenziali sulla superficie laterale in considerazione del valore modesto di L , si ha:

$$\Pi_s = p_1\Omega_2 - p_2\Omega_2$$

essendo p_1 e p_2 le pressioni nei baricentri delle sezioni di ingresso e di uscita del fluido. Si ottiene dunque:

$$\rho\Omega_2U_2^2 - \rho\Omega_1U_1^2 = \gamma\Omega_2(z_1 - z_2) + p_1\Omega_2 - p_2\Omega_2$$

e dividendo per $\gamma\Omega_2$:

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} - z_2 - \frac{p_2}{\gamma} = h_1 - h_2 = \frac{U_2^2}{g} - \frac{\Omega_1}{\Omega_2} \frac{U_1^2}{g}.$$

Utilizzando quindi la relazione $\Omega_1U_1 = \Omega_2U_2$ si ha:

$$h_1 - h_2 = \frac{U_2^2}{g} \left[1 - \frac{\Omega_2}{\Omega_1} \right] = \frac{U_1^2}{g} \left[\frac{\Omega_1^2}{\Omega_2^2} - \frac{\Omega_1}{\Omega_2} \right].$$

Essendo $\Omega_2 > \Omega_1$, la relazione precedente mostra che $h_2 > h_1$: il carico piezometrico a valle dell'allargamento è maggiore di quello a monte.

Ricaviamo ora il valore di $H_1 - H_2$. Si ha:

$$\begin{aligned} H_1 - H_2 &= h_1 + \frac{U_1^2}{2g} - h_2 - \frac{U_2^2}{2g} = h_1 - h_2 + \frac{U_2^2\Omega_2^2}{2g\Omega_1^2} - \frac{U_2^2}{2g} = \\ &= \frac{U_2^2}{2g} \left[2 - \frac{2\Omega_2}{\Omega_1} + \frac{\Omega_2^2}{\Omega_1^2} - 1 \right] = \frac{U_2^2}{2g} \left[1 - \frac{\Omega_2}{\Omega_1} \right]^2. \end{aligned}$$

L'equazione precedente mostra che $H_1 > H_2$, cioè passando attraverso l'allargamento il fluido dissipa dell'energia e l'ammontare dell'energia dissipata è pari a

$$\Delta H_c = \frac{U_2^2}{2g} \left[1 - \frac{\Omega_2}{\Omega_1} \right]^2.$$

Tale dissipazione di energia può essere anche quantificata rispetto al carico cinetico di monte

$$\Delta H_c = \frac{U_1^2}{2g} \left[\frac{\Omega_1}{\Omega_2} - 1 \right]^2.$$

Quest'ultima relazione mostra che quando una condotta sfocia in un serbatoio, la corrente in arrivo dissipa tutta la sua energia cinetica. Infatti lo sbocco di una condotta in un serbatoio può essere pensato come un brusco allargamento con Ω_1/Ω_2 tendente a zero. Segue

$$\Delta H_c = \frac{U_1^2}{2g}.$$

Lezione 21. Perdite concentrate

Nel capitolo 20 abbiamo determinato le perdite di carico (perdite di energia per unità di peso del fluido) dovute a un brusco allargamento e allo sbocco di una condotta in un serbatoio. In un impianto sono presenti altre sorgenti di perdite di carico localizzate quali imbrocchi, valvole, gomiti, curve, diaframmi, biforcazioni, alcune schematicamente rappresentate in figura 21.1.

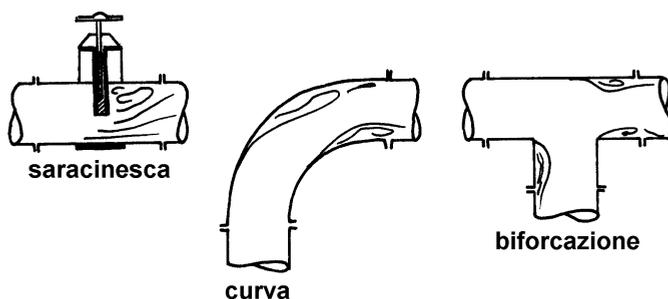


Figura 21.1

Le perdite di carico localizzate indotte da tali componenti di un impianto vengono usualmente espresse con una relazione del tipo:

$$\Delta H_C = \xi \frac{U^2}{2g}$$

in cui U è la velocità media che si stabilisce in una sezione caratteristica e ξ un parametro che dipende essenzialmente dalla configurazione geometrica e dal numero di Reynolds. Spesso però la dipendenza di ξ dal numero di Reynolds è trascurabile.

È impossibile qui fornire una panoramica dei valori di ξ a causa della grande varietà delle componenti di un impianto dal punto di vista geometrico. Ricordiamo solamente che la determinazione di ξ viene fatta attraverso esperienze di laboratorio caso per caso. A titolo indicativo forniamo i seguenti valori di ξ :

• **Imbocco da serbatoio:**

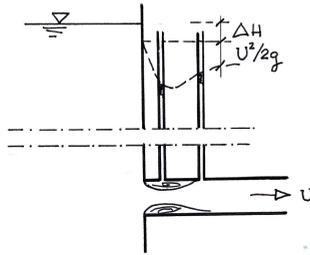


Figura 21.2: Imbocco a spigolo vivo $\xi = 0.5$

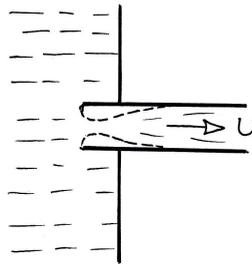


Figura 21.3: Imbocco con condotta rientrante $\xi = 1.0$

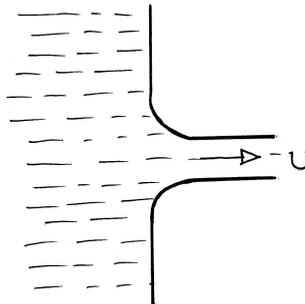


Figura 21.4: Imbocco arrotondato $\xi = 0.05 \div 0.10$

• **Restringimento di sezione da Ω_1 a Ω_2 :**

$$\Delta H = H_1 - H_2 = \xi \frac{U_2^2}{2g}$$

il coefficiente ξ dipende dal rapporto Ω_2/Ω_1 :

Ω_2/Ω_1	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
ξ	0.48	0.44	0.41	0.31	0.26	0.24	0.18	0.13	0.06

• **Gomiti e curve:**

Il parametro ξ dipende dal rapporto tra il raggio di curvatura (R) e il diametro del condotto (D), dall'angolo di deviazione (α) e dal numero di Reynolds (vedi figura 21.5). La tabella 21.1 fornisce ξ per alcuni valori di α e R , per alti valori del numero di Reynolds.

α (gradi)	$R = D$	$R = 1.5D$	$R = 2D$
180	0.28	0.21	0.14
120	0.28	0.21	0.14
90	0.25	0.19	0.13
60	0.16	0.12	0.08
45	0.12	0.09	0.06
30	0.08	0.06	0.04

Tabella 21.1: valori del coefficiente ξ per curve

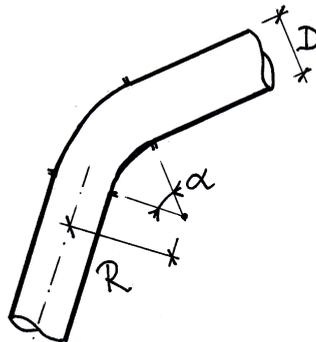


Figura 21.5

- **Valvole a piena apertura**

- valvole a farfalla $\xi = 0.2 \div 0.4$
- valvole a fuso $\xi = 0.2 \div 0.3$
- saracinesca piana $\xi = 0.1 \div 0.3$

- **Giunzioni a T fra tubi di ugual diametro $\Delta H_{i-j} = \xi_{i-j} (U_3^2/2g)$.**

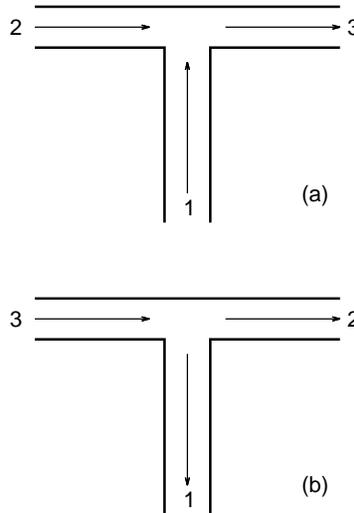


Figura 21.6: Giunzioni a T

Per Q_1/Q_3 variabile da 0.5 a 1.0 si ha corrispondentemente:

a) per confluenza delle correnti 1 e 2 nella 3:

$$\xi_{1-3} = 0.4 \div 1.1$$

$$\xi_{2-3} = 0.5 \div 0.6$$

b) per suddivisione della corrente 3 nelle 1 e 2:

$$\xi_{3-1} = 0.8 \div 1.3$$

$$\xi_{3-2} = 0.05 \div 0.4$$

Lezione 22. Problemi relativi ad alcuni semplici impianti

Nel seguito illustreremo alcuni problemi relativi a semplici impianti. Nell'illustrare la loro soluzione introdurremo le pompe ⁽¹⁾, organi di un impianto in grado di fornire energia al fluido e tracciamo le linee dei carichi totali e piezometrici, utile strumento per determinare graficamente la pressione in una sezione e per accertarsi del buon funzionamento di un impianto.

Per impostare la soluzione di un problema relativo a un impianto, è necessario analizzare l'evoluzione dell'energia del fluido per unità di peso (carico totale) dalla sezione iniziale dell'impianto a quella finale: il carico iniziale diminuito di tutte le perdite, distribuite e localizzate, ed eventualmente aumentato del carico fornito da pompe presenti sull'impianto deve essere pari al carico nella sezione finale. Tale bilancio energetico fornisce un'equazione che consente di determinare una delle caratteristiche dell'impianto note ad altre. Per illustrare la procedura analizziamo nel seguito alcuni problemi particolari.

⁽¹⁾Nell'ambito del corso non è possibile descrivere in dettaglio il funzionamento delle pompe e le loro caratteristiche. Ci limiteremo qui a dire che le pompe sono essenzialmente caratterizzate dalla prevalenza h_P e dalla portata Q .

La prevalenza è il carico che la pompa fornisce al fluido mentre il valore Q è la portata che attraversa la pompa. L'energia che la pompa fornisce al fluido è pari a:

$$P = \gamma Q h_p$$

(vedi capitolo 15). Un'ulteriore caratteristica della pompa è il rendimento η cioè il rapporto tra la potenza P fornita al fluido e la potenza assorbita. Le caratteristiche delle pompe vengono in generale fornite dalle case costruttrici.

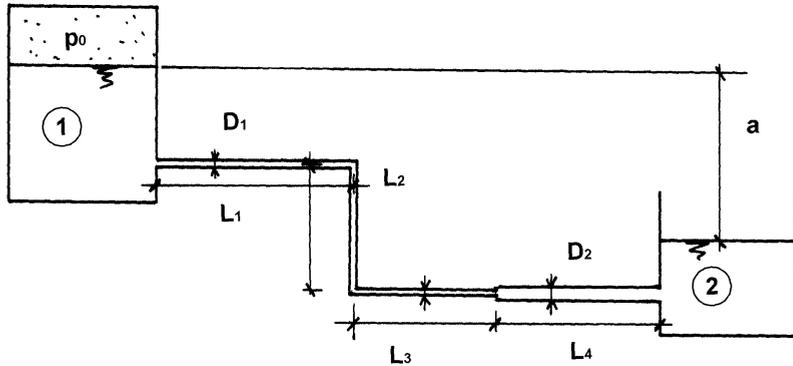


Figura 22.1

Problema 1

Determinare il valore della pressione relativa p_1 nel serbatoio ① affinché nell'impianto in figura 22.1 defluisca una portata Q di acqua dal serbatoio ① al serbatoio ②. I tubi siano in ghisa asfaltata con un valore di scabrezza assoluta y_r pari a 0.1mm.

Dati: $a = 40$ cm, $L_1 = 50$ m, $L_2 = 3$ m, $L_3 = 75$ m, $L_4 = 55$ m, $D_1 = 10$ cm, $D_2 = 15$ cm, $Q = 5$ ℓ/s .

Soluzione: Introducendo un asse verticale z diretto verso l'alto e con l'origine in corrispondenza del pelo libero del serbatoio ②, il carico totale dell'acqua contenuta all'interno del serbatoio ① (indipendente dalla posizione perché il fluido può considerarsi in quiete) risulta:

$$H_1 = h_1 = a + \frac{p_0}{\gamma}$$

mentre nel serbatoio ②, il carico totale risulta nullo

$$H_2 = 0.$$

Si deve quindi avere:

$$H_1 - \frac{U_1^2}{2g} \left[0.5 + \frac{\lambda_1}{D_1} L_1 + 1 + \frac{\lambda_1}{D_1} L_2 + 1 + \frac{\lambda_1}{D_1} L_3 + \left(\frac{\Omega_1}{\Omega_2} - 1 \right)^2 \right] - \frac{U_2^2}{2g} \left[\frac{\lambda_2}{D_2} L_4 + 1 \right] = H_2$$

ove si sono indicate con U_1 e U_2 le velocità nei tubi di diametro D_1 e D_2 rispettivamente e λ_1 e λ_2 indicano i rispettivi coefficienti di resistenza. Infine si è assunto che le perdite concentrate siano valutabili con l'espressione $\xi \frac{U^2}{2g}$ con $\xi = 0.5$ per l'imbocco e $\xi = 1$ per i gomiti e lo sbocco.

Si ha

$$U_1 = \frac{4Q}{\pi D_1^2} = 0.637 \text{ m/s} \rightarrow Re_1 = 6.37 \cdot 10^4$$

$$U_2 = \frac{4Q}{\pi D_2^2} = 0.283 \text{ m/s} \rightarrow Re_2 = 4.25 \cdot 10^4$$

Essendo

$$\epsilon_1 = \frac{y_r}{D_1} = 0.001, \quad \epsilon_2 = \frac{y_r}{D_2} = 0.000667$$

è possibile valutare λ_1 e λ_2 dal diagramma di Moody. Risulta

$$\lambda_1 \cong 0.023 \quad \lambda_2 \cong 0.024.$$

L'equazione di partenza porge dunque:

$$\frac{p_0}{\gamma} = -a + \frac{U_1^2}{2g} \left[2.809 + \frac{\lambda_1}{D_1} (L_1 + L_2 + L_3) \right] + \frac{U_2^2}{2g} \left[1 + \frac{\lambda_2 L_2}{D_2} \right]$$

avendo valutato $\left(\frac{\Omega_1}{\Omega_2} - 1 \right)^2 \cong 0.309$.

Effettuando i calcoli si ha:

$$\frac{p_0}{\gamma} = [-0.4 + 0.0207 (2.809 + 29.4) + 0.00408 (1 + 8.8)] \text{ m} = 0.307 \text{ m}.$$

Da cui $p_0 = 3.01 \cdot 10^3 \text{ N/m}^2$.

Nella figura 22.2 sono riportate le linee dei carichi totali e piezometrici e la quota della condotta. Si noti che la differenza fra il carico piezometrico e la quota della condotta rappresenta il valore di p/γ .

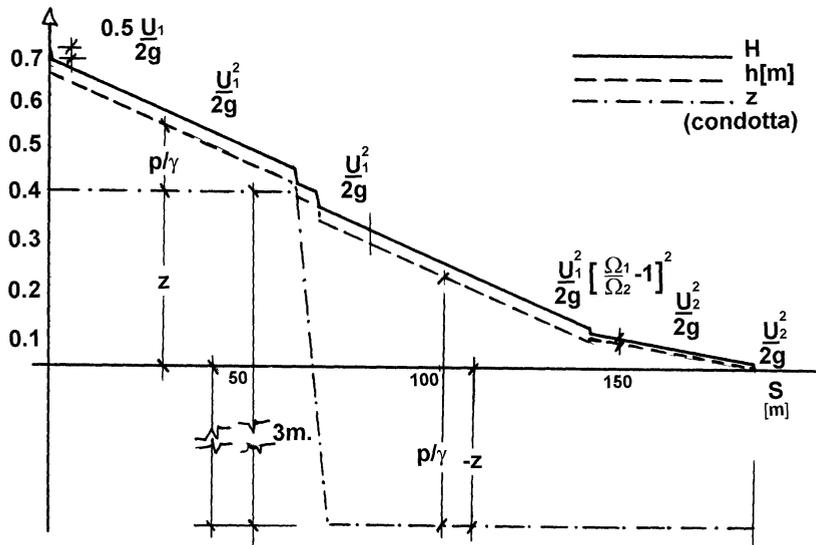


Figura 22.2

Problema 2

Si valuti la prevalenza h_p della pompa necessaria a far defluire un'assegnata portata Q di acqua dal serbatoio ① fino alla fine del tubo (vedi figura 22.3). Il tubo sia in rame.

Dati: $L_1 = 10$ m, $L_2 = 2.5$ m, $L_3 = 6$ m, $a = 1.5$ m, $D_1 = 2.7$ cm, $Q = 1.5$ ℓ/s

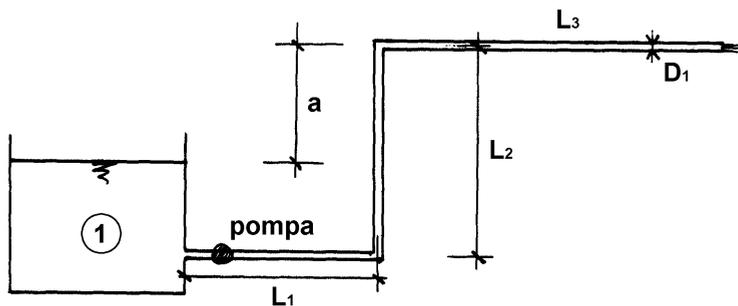


Figura 22.3

Soluzione:

Essendo il tubo in rame, si ha $y_r = 0.01\text{mm}$. Inoltre dalla conoscenza della portata e del diametro segue:

$$U = \frac{Q}{\Omega} = 2.62\text{m/s} \rightarrow Re = 7.07 \cdot 10^4 \rightarrow \epsilon = \frac{y_r}{D} = 3.7 \cdot 10^{-4}.$$

Noti Re e ϵ , si ottiene λ dal diagramma di Moody

$$\lambda \cong 0.021.$$

Infine, con riferimento a un asse verticale z rivolto verso l'alto e con l'origine in corrispondenza del pelo libero del serbatoio ①, si ha:

$$H_1 = 0 : H_2 = a + \frac{U^2}{2g}$$

e

$$H_1 - 0.5 \frac{U^2}{2g} - \frac{\lambda}{D} \frac{U^2}{2g} (L_1 + L_2 + L_3) - \frac{U^2}{2g} (1 + 1) + h_p = a + \frac{U^2}{2g}.$$

Si noti che perdite concentrate in un imbocco sono state assunte pari a $0.5 \frac{U^2}{2g}$ mentre quelle causate da un gomito pari a $\frac{U^2}{2g}$.

Segue

$$h_p = a + \frac{U^2}{2g} \left[3.5 + \frac{\lambda}{D} (L_1 + L_2 + L_3) \right]$$

Effettuando i calcoli si ha

$$h_p = 1.5\text{m} + 0.35 [3.5 + 14.4] \text{m} = 7.76 \text{m}.$$

Tracciamo ora la linea dei carichi totali e piezometrici (figura 22.4).

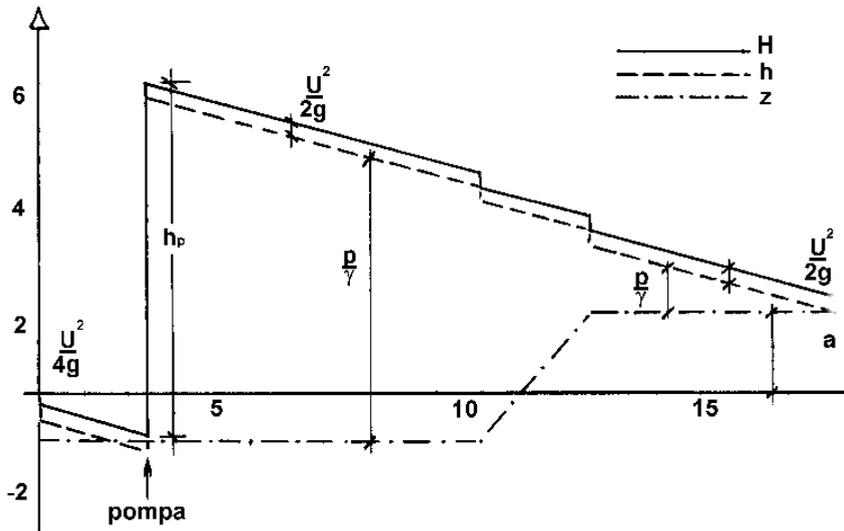


Figura 22.4

Problema 3

Valutare il diametro D necessario a far scorrere una assegnata portata Q di acqua dal serbatoio ① al serbatoio ② rappresentati in figura 22.5. Si supponga che la condotta sia in ghisa asfaltata.

Dati: $a = 20$ m, $L = 2.5$ Km, $Q = 50$ ℓ/s , $y_r = 0.1$ mm.

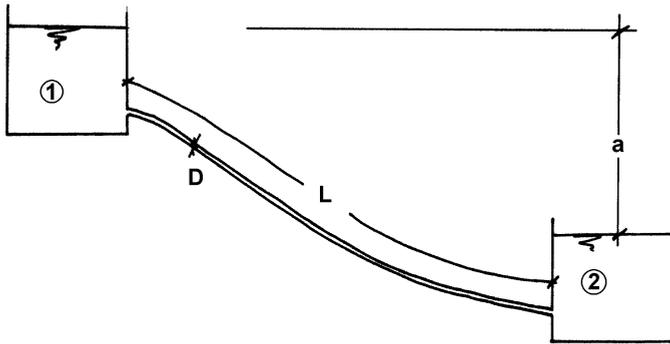


Figura 22.5

Soluzione: L'equazione da soddisfare è:

$$a = \frac{U^2}{2g} \left[\frac{1}{2} + \frac{\lambda}{D}L + 1 \right] = \frac{Q^2}{2g\Omega^2} \left[1.5 + \frac{\lambda}{D}L \right]$$

Procediamo per tentativi.

D [m]	U [m/s]	Re	ϵ	λ	$\frac{Q^2}{2g\Omega^2} \left[1.5 + \frac{\lambda}{D}L \right]$ [m]
0.25	1.02	$2.5 \cdot 10^5$	$4 \cdot 10^{-4}$	≈ 0.018	9.6
0.15	2.83	$4.2 \cdot 10^5$	$6.6 \cdot 10^{-4}$	≈ 0.019	130.9
0.20	1.59	$3.2 \cdot 10^5$	$5.0 \cdot 10^{-4}$	≈ 0.018	29.2
0.22	1.32	$2.9 \cdot 10^5$	$4.5 \cdot 10^{-4}$	≈ 0.018	18.3
0.21	1.44	$3.0 \cdot 10^5$	$4.8 \cdot 10^{-4}$	≈ 0.018	22.8

Sulla base di questi risultati è possibile concludere che il diametro richiesto è compreso fra 0.21 e 0.22 m.

Il problema del sifone

Tracciamo, in modo qualitativo, le linee del carico totale, piezometrico e della quota della condotta, facendo riferimento a un asse z rivolto verso l'alto e con l'origine in corrispondenza del pelo libero del serbatoio ② dell'impianto in figura 22.6, uguale a quello considerato nel problema precedente.

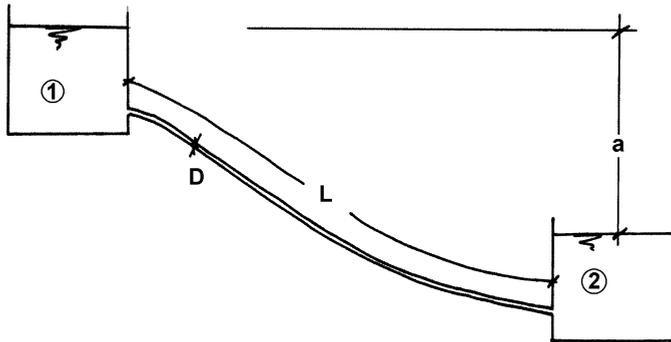


Figura 22.6

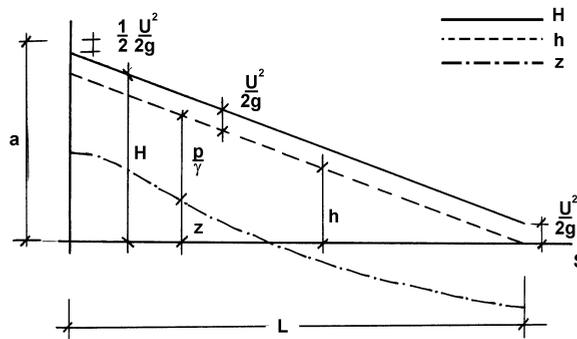


Figura 22.7

È interessante osservare che il funzionamento idraulico della condotta non è influenzato, se certi limiti sono rispettati, dall'andamento altimetrico della condotta. Ad esempio nelle condotte *A* e *B* della figura 22.8 defluisce la stessa portata e l'andamento del carico totale e piezometrico è uguale (chiaramente a patto che il diametro, la scabrezza e la lunghezza della condotta rimangano inalterati). Nelle

due condotte sarà solo diversa la distribuzione della pressione come si può notare dalla figura 22.9 dove sono riportati $H(s)$, $h(s)$, $z_A(s)$ e $z_B(s)$.

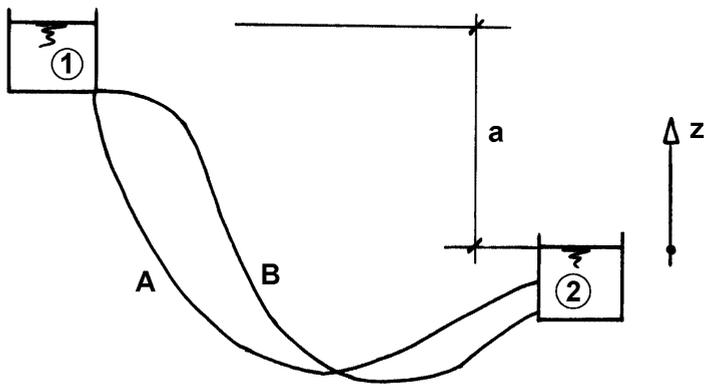


Figura 22.8

L'impianto funzionerà anche quando la quota della condotta sarà maggiore della linea dei carichi piezometrici. In tale situazione la pressione relativa all'interno della condotta sarà negativa, cioè la pressione assoluta sarà inferiore alla pressione atmosferica (vedi figura 22.10). In particolare la condotta sarà in depressione fra la coordinata s_i e la coordinata s_f .

Ci sono tuttavia dei limiti sull'andamento altimetrico della condotta. In primo luogo il valore di $z(s)$ non può superare a se si vuole che il fluido inizi a defluire senza problemi. Se anche in un solo punto $z > a$ per innescare il moto è necessario creare una depressione nella condotta.

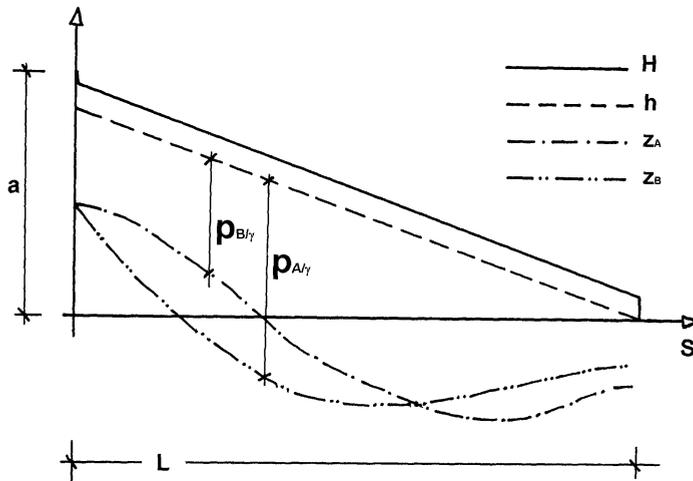


Figura 22.9

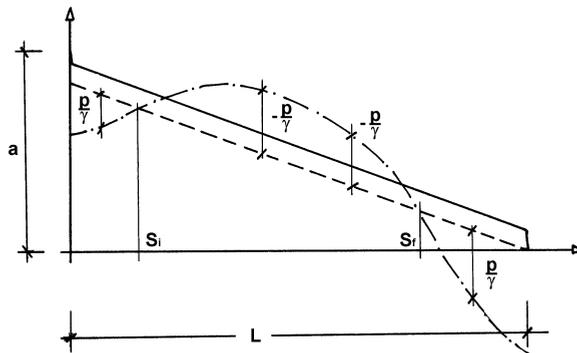


Figura 22.10

Anche innescando il moto non è possibile superare certi valori di z , il limite è facilmente valutabile sapendo che la pressione assoluta non può scendere al di sotto di un valore, denominato **tensione di vapore** che dipende dal fluido presente nell'impianto. Alzando la condotta al di sopra di tale limite, la portata defluente nell'impianto diminuirà, fino a che, quando z supererà il valore $a + \frac{p_{atm} - p_\epsilon}{\gamma}$, il fluido cesserà di scorrere (p_ϵ indica la tensione di vapore).

Lezione 23. Le reti idrauliche

Gli impianti idraulici solitamente sono composti da più condotte che costituiscono una rete e che convergono in punti detti **nodi**. La condotta che collega due nodi è detta **tronco** o **ramo** della rete.

Semplici reti idrauliche sono rappresentate nelle figure 23.1 e 23.2.

I problemi che si possono presentare in un impianto si possono suddividere in problemi di progetto e problemi di verifica. Analogamente al caso più semplice di una condotta che collega due serbatoi, il problema di progetto consiste nel calcolare i diametri dei singoli tronchi della rete, assegnate tutte le altre grandezze, in modo che la rete sia in grado di far defluire le portate volute in tutti i suoi rami. Il problema di verifica, invece, consiste nel calcolo delle portate che defluiscono nei diversi rami della rete, oppure della differenza del carico totale tra due sezioni assegnate della rete, noti i diametri e tutte le altre grandezze del problema.

Entrambi i problemi vengono risolti calcolando le perdite di carico totale lungo i tronchi della rete. Inoltre, deve essere verificata in ciascun nodo della rete una relazione, che discende dal principio di conservazione della massa, e che impone che la somma delle portate entranti in ogni nodo deve essere uguale alla somma delle portate uscenti.

Nel seguito sono presentati due esempi che mostrano come risolvere i problemi di verifica di semplici reti idrauliche.

Successivamente viene illustrato un metodo per la verifica di impianti complessi, composti da più maglie.

23.1 Semplici problemi di verifica di una rete idraulica

Problema 1

Con riferimento alla figura 23.1, si vuole calcolare il dislivello a tra il pelo libero del serbatoio A e quello del serbatoio B, assegnate le seguenti quantità:

$$\begin{aligned} L_1 &= 120 \text{ m} ; D_1 = 0.5 \text{ m} ; y_{r1} = 0.2 \cdot 10^{-3} \text{ m} ; \\ L_2 &= 100 \text{ m} ; D_2 = 0.2 \text{ m} ; y_{r2} = 0.2 \cdot 10^{-3} \text{ m} ; \\ L_3 &= 15.5 \text{ m} ; D_3 = 0.1 \text{ m} ; y_{r3} = 0.2 \cdot 10^{-3} \text{ m} ; \\ L_4 &= 140 \text{ m} ; D_4 = 0.3 \text{ m} ; y_{r4} = 0.2 \cdot 10^{-3} \text{ m} ; Q = 53.4 \text{ l/s} \end{aligned}$$

dove y_{ri} indica la scabrezza omogenea equivalente del tronco i -esimo dell'impianto e il fluido è acqua.

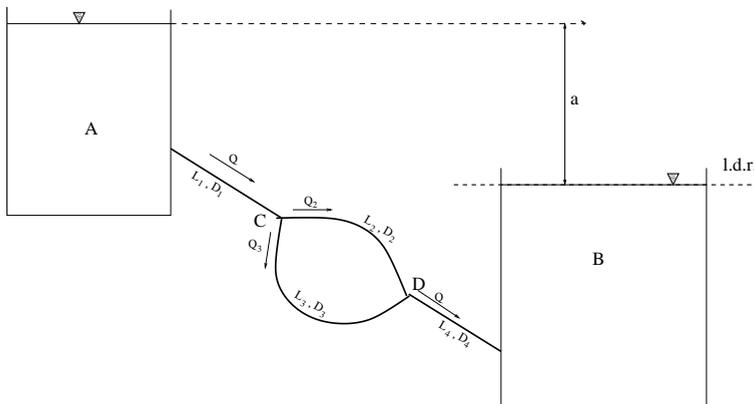


Figura 23.1

Per illustrare il procedimento di soluzione in modo semplice, nel seguito sono trascurate le perdite concentrate.

A causa della conservazione delle portate nei due nodi C e D deve essere:

$$Q = Q_2 + Q_3 = U_2 \frac{\pi D_2^2}{4} + U_3 \frac{\pi D_3^2}{4}. \quad (23.1)$$

La variazione del carico totale che subisce la corrente procedendo dalla sezione C alla sezione D lungo il ramo superiore, deve essere uguale a quella che si verifica quando la corrente percorre il ramo inferiore. Dunque deve essere verificata la relazione seguente:

$$\frac{\lambda_2 L_2 U_2^2}{D_2 2g} = \frac{\lambda_3 L_3 U_3^2}{D_3 2g}. \quad (23.2)$$

Nella relazione (23.2) appaiono i coefficienti di resistenza λ_2 e λ_3 che dipendono dai valori del numero di Reynolds nei due tratti, che sono incogniti. Per calcolare i valori di U_2 e U_3 per cui la (23.2) risulti soddisfatta, si utilizza un procedimento iterativo.

Dalla (23.1) è possibile ricavare:

$$U_3 = \frac{4Q}{\pi D_3^2} - \frac{D_2^2}{D_3^2} U_2 \quad (23.3)$$

che, sostituita nella (23.2), porge:

$$\frac{1}{2g} \left[\frac{\lambda_2 L_2}{D_2} - \frac{\lambda_3 L_3 D_2^4}{D_3 D_3^4} \right] U_2^2 + \frac{4Q\lambda_3 L_3 D_2^2}{\pi D_3^5 g} U_2 - \frac{8\lambda_3 L_3 Q^2}{\pi^2 g D_3^5} = 0. \quad (23.4)$$

La (23.4), noti i valori di λ_2 e λ_3 , può essere risolta per determinare U_2 .

Si inizia quindi il procedimento iterativo ipotizzando che nei due rami che congiungono le sezioni C e D si instauri il regime di moto assolutamente turbolento e dunque:

$$\frac{y_{r2}}{D_2} = 10^{-3}; \Rightarrow \lambda_2^{(I)} = 0.0196$$

$$\frac{y_{r3}}{D_3} = 2 \cdot 10^{-3}; \Rightarrow \lambda_3^{(I)} = 0.0234.$$

Utilizzando i valori di $\lambda_2^{(I)}$ e $\lambda_3^{(I)}$, la (23.4) può essere facilmente risolta ottenendo $U_2^{(I)} = 1.20$ m/s. Si noti che la (23.4) porge due soluzioni per U_2 , ma una deve essere scartata perché minore di zero. Dalla (23.3) si ottiene poi $U_3^{(I)} = 1.98$ m/s. Si procede quindi calcolando i valori dei coefficienti di resistenza da utilizzare nella seconda iterazione, compatibili con i valori trovati per la velocità alla fine della prima iterazione:

$$Re_2^{(I)} = \frac{U_2^{(I)} D_2}{\nu} = 2.41 \times 10^5 \Rightarrow \lambda_2^{(II)} = 0.0208$$

$$Re_3^{(I)} = \frac{U_3^{(I)} D_3}{\nu} = 1.98 \times 10^5 \Rightarrow \lambda_3^{(II)} = 0.0243$$

Nella seconda iterazione, utilizzando i valori dei coefficienti di resistenza $\lambda_2^{(II)}$ e $\lambda_3^{(II)}$, si calcolano nuovamente le velocità nei due tronchi, utilizzando come in precedenza la (23.4) e la (23.3):

$$U_2^{(II)} = 1.201 \text{ m/s} \quad \text{e} \quad U_3^{(II)} = 2.00 \text{ m/s.}$$

Il procedimento prosegue iterativamente fino alla determinazione delle portate nei due tratti con la precisione voluta. Alla fine del procedimento iterativo nel caso in esame si ottiene:

$$Q_2 = 37.7 \text{ l/s}, \quad Q_3 = 15.7 \text{ l/s}$$

e anche

$$U_2 = 1.2 \text{ m/s} \quad U_3 = 2.0 \text{ m/s.}$$

Si noti che la condizione di conservazione delle portate nel nodo è soddisfatta essendo $Q_2 + Q_3 = 53.4 \text{ l/s}$.

Infine, per calcolare il dislivello a richiesto si osserva che, rispetto al sistema di riferimento indicato in figura, si ha :

$$H_A = a; \quad H_B = 0.$$

dunque:

$$a = H_A - H_B = \frac{\lambda_1}{D_1} \frac{U_1^2}{2g} L_1 + \frac{\lambda_2}{D_2} \frac{U_2^2}{2g} L_2 + \frac{\lambda_4}{D_4} \frac{U_4^2}{2g} L_4$$

oppure, equivalentemente:

$$a = \frac{\lambda_1}{D_1} \frac{U_1^2}{2g} L_1 + \frac{\lambda_3}{D_3} \frac{U_3^2}{2g} L_3 + \frac{\lambda_4}{D_4} \frac{U_4^2}{2g} L_4.$$

Il calcolo del termine a destra di una qualsiasi delle due precedenti espressioni, consente di ottenere $a = 1.05 \text{ m}$.

Problema 2

Con riferimento alla figura 23.2, che mostra tre condotte che convergono nel nodo N , si vogliono calcolare le portate Q_1 , Q_2 e Q_3 di acqua che fluiscono nei tre rami dell'impianto, assegnate le seguenti quantità:

$$a = 10 \text{ m}, \quad b = 3 \text{ m},$$

$$L_1 = 20 \text{ m}, D_1 = 0.2 \text{ m}, \quad y_{r1} = 0.5 \times 10^{-3} \text{ m},$$

$$L_2 = 15 \text{ m}, D_2 = 0.08 \text{ m}, \quad y_{r2} = 0.1 \times 10^{-3} \text{ m},$$

$$L_3 = 7 \text{ m}, D_3 = 0.06 \text{ m}, \quad y_{r3} = 0.1 \times 10^{-3} \text{ m}.$$

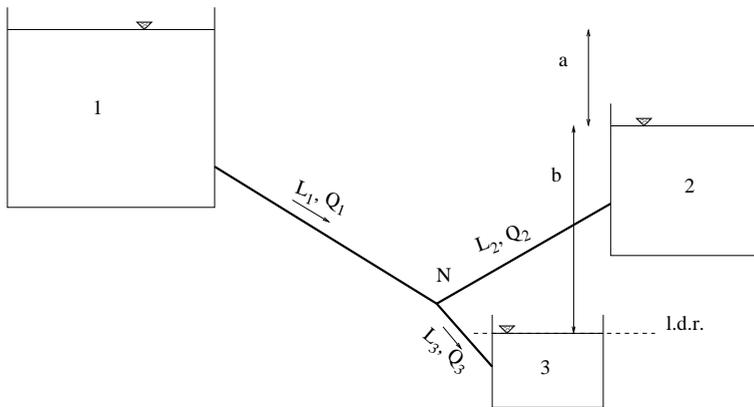


Figura 23.2

La somma delle portate entranti nel nodo N deve essere uguale a quella delle portate uscenti. Inoltre, il valore del carico totale H_N nel nodo N è incognito e quindi non è possibile stabilire a priori se il fluido procederà da N verso il serbatoio 2 o viceversa.

Per illustrare in modo semplice la tecnica di soluzione, nel seguito vengono trascurate le perdite concentrate.

Considerato il livello di riferimento indicato in figura 23.2, si ha:

$$H_1 = a + b, \quad H_2 = b, \quad H_3 = 0, \quad 0 < H_N < H_1$$

Inoltre, il calcolo delle variazioni del carico totale nei tre rami dell'impianto richiede che sia:

$$H_1 - \frac{\lambda_1 L_1}{D_1} \frac{U_1^2}{2g} = H_N \quad (23.5)$$

$$H_N - \frac{\lambda_3 L_3}{D_3} \frac{U_3^2}{2g} = H_3 \quad (23.6)$$

$$H_N \pm \frac{\lambda_2 L_2}{D_2} \frac{U_2^2}{2g} = H_2 \quad (23.7)$$

Si noti che il segno nell'ultima equazione dipende dal verso con cui il fluido percorre la condotta 2. Infatti, se $H_N > H_2$ il fluido scorre da N verso il serbatoio 2 e si deve scegliere il segno negativo, mentre se $H_N < H_2$ il segno corretto è positivo.

La soluzione del problema richiede quindi di determinare i valori di H_N , Q_1 , Q_2 e Q_3 , tali che le (23.5), (23.6) e (23.7) siano soddisfatte. Inoltre deve anche essere verificata la condizione della conservazione delle portate nel nodo N :

$$Q_1 = Q_3 \pm Q_2.$$

Il problema viene risolto per tentativi.

Si sceglie un valore di primo tentativo per H_N .

Poichè deve essere $0 < H_N < 13$ m, il primo valore scelto è $H_N^{(1)} = 7$ m. In questo caso, essendo $H_N^{(1)} > H_2$, il fluido scorrerà da N verso il serbatoio 2.

Si determinano quindi le portate che scorrono nei tre tratti, risolvendo tre semplici problemi di verifica e si ottiene:

$$Q_1^{(1)} = 0.216 \text{ m}^3/\text{s}, \quad Q_2^{(1)} = 2.22 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3/\text{s}, \quad Q_3^{(1)} = 1.62 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3/\text{s}.$$

Le portate calcolate non soddisfano la condizione di conservazione delle portate nel nodo N essendo:

$$Q_2^{(1)} + Q_3^{(1)} = 3.84 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3/\text{s} < Q_1^{(1)}.$$

Poichè la somma delle portate uscenti da N risulta inferiore alla portata in ingresso, il secondo valore di tentativo $H_N^{(2)}$ dovrà essere maggiore del precedente, cioè compreso tra 7m e 13 m.

Scelto $H_N^{(2)} = 10$ m, la soluzione dei tre problemi di verifica, relativi ai tre tronchi dell'impianto ora porge:

$$Q_1^{(2)} = 0.15 \text{ m}^3/\text{s}, \quad Q_2^{(2)} = 2.95 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3/\text{s}, \quad Q_3^{(2)} = 1.94 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3/\text{s}.$$

È chiaro che anche i nuovi valori delle portate non sono soddisfacenti. Infatti la condizione della conservazione delle portate in N non viene soddisfatta, essendo:

$$Q_2^{(2)} + Q_3^{(2)} = 4.89 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3/\text{s} < Q_1^{(2)}.$$

Si deve quindi continuare con i tentativi, fino a determinare la soluzione che soddisfa la conservazione delle portate nel nodo con la precisione voluta.

La soluzione risulta:

$$\begin{aligned} H_N &= 12.59 \text{ m}, & Q_1 &= 5.60 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3/\text{s}, \\ Q_2 &= 3.46 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3/\text{s}, & Q_3 &= 2.17 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3/\text{s}. \end{aligned}$$

23.2 Verifica delle reti idrauliche: il metodo di Hardy-Cross

Si consideri una rete idraulica chiusa come quella mostrata in figura 23.3 che è composta da 6 nodi e 7 rami. Un problema di verifica della rete consiste nella valutazione delle portate che fluiscono in ogni ramo, note tutte le caratteristiche (diametro, scabrezza e lunghezza) dei rami della rete e le portate che entrano ed escono dalla rete.

In ciascun nodo della rete deve essere verificato il principio di conservazione della massa, che impone che la somma delle portate che entrano in un nodo sia uguale alla somma delle portate che escono dal nodo. Deve dunque essere verificata la relazione:

$$\sum_{i=1}^{N_t} Q_i + Q_k = 0$$

dove Q_k indica la portata immessa (o derivata) nel nodo dall'esterno, Q_i è la portata che entra o esce dal nodo attraverso il ramo i -esimo e N_t è il numero di rami che confluiscono nel nodo. Le portate entranti nel nodo vengono considerate positive mentre quelle uscenti negative.

Il calcolo delle perdite di carico lungo ciascun ramo della rete, conduce a relazioni algebriche non-lineari in numero pari al numero dei rami della rete, 7 nel caso in figura 23.3.

Nel ramo m -esimo della rete, che collega il nodo i al nodo j , deve essere verificata la relazione algebrica non-lineare:

$$H_i + K_m Q_m |Q_m| = H_j \quad \text{con} \quad K_m = \frac{L_m}{\chi_m^2 \Omega_m^2 R_i^{(m)}}.$$

che è ottenuta sostituendo la (18.1) nell'equazione del moto delle correnti. Il segno della portata Q_m è negativo se la corrente nel tronco in esame scorre dal nodo i al nodo j , positivo in caso contrario. Si noti che sono state trascurate le perdite concentrate.

Se la rete è composta da M rami e N nodi, si ottiene un sistema algebrico non-lineare composto da $N + M$ equazioni. Le incognite del problema sono le portate Q_m in ciascun ramo della rete e i carichi H_i nei nodi della rete.

Il sistema ottenuto non è di facile soluzione e in passato sono stati proposti metodi di soluzione che consentono il calcolo delle portate nei rami della rete, utilizzando un procedimento iterativo. Uno di questi metodi è quello proposto da Hardy-Cross, che verrà qui illustrato.

Per ogni maglia della rete si calcolano le perdite di carico quando la maglia viene percorsa interamente in un verso assegnato (ad esempio in senso orario) e si trascurano le perdite concentrate.

L'equazione riferita alla maglia m -esima è:

$$\sum_{j=1}^{N_m} K_j Q_j |Q_j| = 0 \quad \text{con} \quad K_j = \frac{L_j}{\chi_j^2 \Omega_j^2 R_i^{(j)}} \quad (23.8)$$

dove N_m indica il numero dei rami che compongono la maglia m -esima e Q_j , è la portata che fluisce nel ramo j -esimo. Le portate hanno segno negativo (positivo) se la direzione della portata è concorde (discorde) con quella di percorrenza della maglia.

Il metodo di Hardy-Cross richiede di partire da valori di tentativo \hat{Q}_i delle portate nei rami della rete. Tali valori devono soddisfare la condizione di conservazione delle portate in tutti i nodi della rete.

I valori di tentativo \hat{Q}_i sono legati ai valori esatti Q_i delle portate dalla relazione:

$$Q_i = \hat{Q}_i + \Delta Q. \quad (23.9)$$

Per risolvere il problema è dunque necessario calcolare ΔQ .

Dopo aver sostituito la (23.9) nella (23.8) e avere linearizzato rispetto a ΔQ , si ottiene:

$$\Delta Q = - \frac{\sum_{i=1}^{N_m} K_i \hat{Q}_i |\hat{Q}_i|}{2 \sum_{i=1}^{N_m} K_i |\hat{Q}_i|}. \quad (23.10)$$

Il procedimento consiste nel calcolo iterativo di ΔQ su tutte le maglie, fino a quando la procedura converge verso un valore di ΔQ che è piccolo a piacere. L'esempio sotto illustra operativamente il metodo di Hardy Cross.

Si consideri la semplice rete mostrata in figura 23.3, in cui le lunghezze, i diametri e le scabrezze di tutti i tronchi assumono lo stesso valore. I coefficienti K_i , relativi ai diversi rami, assumono lo stesso valore. Le portate entranti e uscenti dalla rete sono:

$$Q_A = 13\ell/s; \quad Q_B = -4\ell/s; \quad Q_C = -6\ell/s; \quad Q_D = -6\ell/s;$$

$$Q_E = -4\ell/s; \quad Q_F = 7\ell/s$$

si noti che le portate uscenti dalla rete hanno segno negativo.

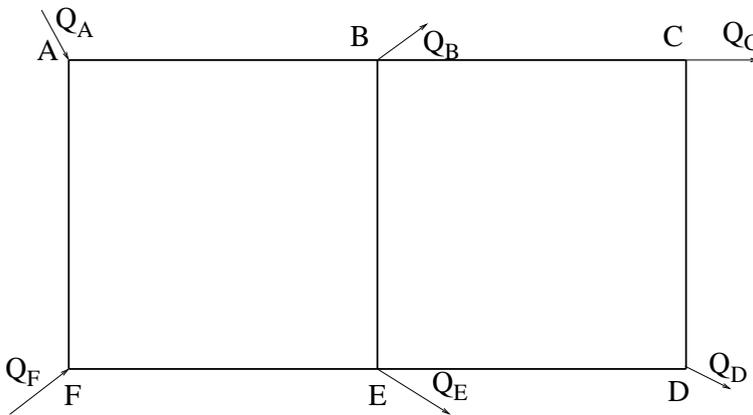


Figura 23.3

Come detto in precedenza, il metodo prevede di assegnare portate di tentativo in ogni ramo della rete. Le portate di tentativo devono soddisfare la condizione della conservazione delle portate nei nodi. Le portate nei rami della rete ipotizzate all'inizio della procedura sono mostrate in figura 23.4.

Con riferimento alla maglia I e al verso di percorrenza orario, indicato in figura 23.4, l'equazione 23.10 consente di calcolare la prima correzione $\Delta Q_I^{(1)}$, basata sul calcolo effettuato sulla maglia I:

$$\Delta Q_I^{(1)} = -\frac{\sum_{i=1}^4 \hat{Q}_i |\hat{Q}_i|}{2 \sum_{i=1}^4 |\hat{Q}_i|} =$$

$$= -\frac{(-8^2 + 5^2 + 12^2 + 5^2)\ell^2/s^2}{2(8 + 5 + 12 + 5)\ell/s} = -\frac{130\ell^2/s^2}{60\ell/s} = -2.17\ell/s.$$

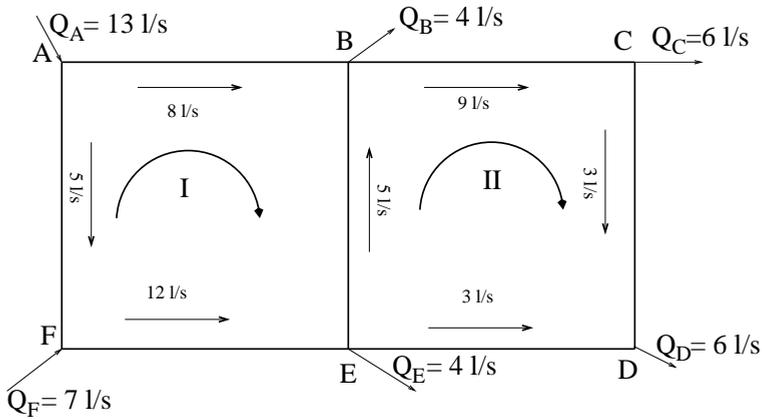


Figura 23.4

Si procede quindi ad aggiornare le portate nei rami della maglia I, utilizzando il valore $\Delta Q_I^{(1)}$ appena calcolato. In figura 23.5 sono riportati i valori delle portate dopo la prima iterazione nella maglia I.

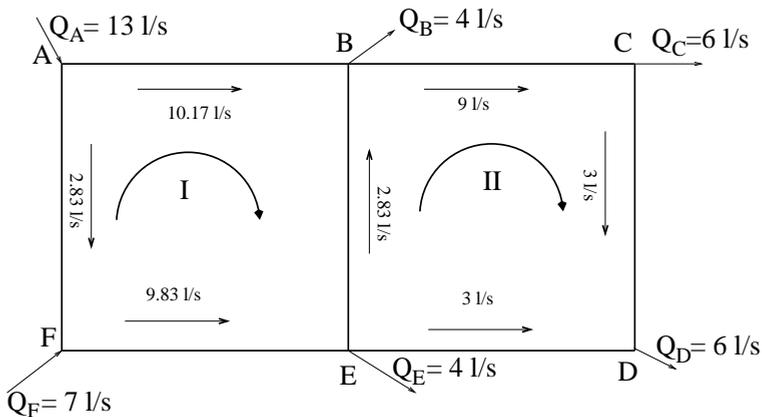


Figura 23.5

Si passa quindi a determinare $\Delta Q_{II}^{(1)}$, per consentire la correzione delle portate nella maglia II. Sempre utilizzando la (23.10) si ottiene:

$$\Delta Q_{II}^{(1)} = -\frac{\sum_{i=1}^4 \hat{Q}_i |\hat{Q}_i|}{2 \sum_{i=1}^4 |\hat{Q}_i|} = -\frac{(-9^2 - 3^2 + 3^2 - 2.83^2)\ell^2/s^2}{2(9 + 3 + 3 + 2.83)\ell/s} = 2.50\ell/s$$

num. iterazione	ΔQ_I [ℓ/s]	ΔQ_{II} [ℓ/s]
1	-2.17	2.50
2	$-2.8 \cdot 10^{-2}$	0.48
3	$2.69 \cdot 10^{-3}$	$1.67 \cdot 10^{-2}$
4	$1.35 \cdot 10^{-4}$	$2.10 \cdot 10^{-6}$

Tabella 23.1

Si correggono quindi i valori delle portate nella maglia II, utilizzando $\Delta Q_{II}^{(1)}$ e si ottengono i valori mostrati in figura 23.6.

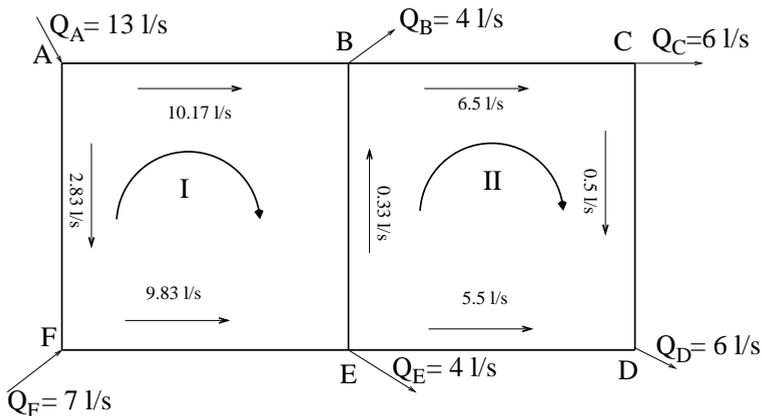


Figura 23.6

Si prosegue quindi con le iterazioni sulle due maglie fino a quando il procedimento giunge a convergenza, cioè fino a quando le correzioni ΔQ_I e ΔQ_{II} risultano piccole a piacere.

In Tabella 23.1 sono riportati i valori della correzione delle portate nelle due maglie per quattro iterazioni. Alla fine della quarta iterazione le portate sono calcolate con una precisione pari a $10^{-4} \ell/s$.

Le portate soluzione del problema sono mostrate in figura 23.7.

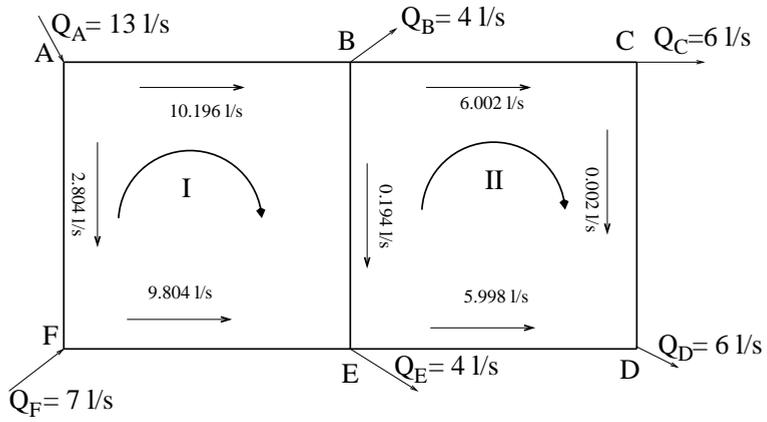


Figura 23.7

Lezione 24. Teorema di Bernoulli per le correnti

L'equazione del moto delle correnti stabilisce che:

$$\frac{\partial H}{\partial s} = -\frac{1}{g} \frac{\partial U}{\partial t} - j$$

cioè le variazioni di H lungo l'ascissa curvilinea s sono causate da accelerazioni o decelerazioni del moto e dalla resistenza che le pareti oppongono al deflusso del fluido.

Nel caso, estremamente frequente, di moto stazionario si ha:

$$\frac{dH}{ds} = -j = -\frac{\tau}{\gamma R_i}$$

cioè il carico totale varia solo per effetto della resistenza esercitata dal contorno della corrente.

Si noti che il carico totale diminuisce sempre nella direzione del moto.

Tutti i fluidi sono caratterizzati da una viscosità che può essere più o meno elevata ma che comunque è sempre presente. Ciò implica che τ è sempre diversa da zero e che quindi anche j è sempre non nulla. Tuttavia quando il tratto di condotta oggetto di indagine è relativamente breve, le perdite di carico subite dal fluido possono essere trascurate rispetto al carico stesso. In tale situazione si può assumere che il moto del fluido soddisfi l'equazione:

$$\frac{dH}{ds} = 0.$$

Tale equazione risulta quindi valida nelle ipotesi che qui ricordiamo

- 1) Perdite di carico trascurabili
- 2) Moto stazionario
- 3) Campo di forze gravitazionali
- 4) Fluido barotropico ($\rho = \rho(p)$).

Sotto tali ipotesi il carico totale rimane costante lungo s . Tale risultato è noto come **teorema di Bernoulli per le correnti**. Originariamente il risultato fu ottenuto nell'ipotesi di fluido ideale ($\mu = 0$) e di campo di forze conservativo (non necessariamente gravitazionale).

Se il fluido è barotropico:

$$H = z + \int \frac{dp}{\gamma(p)} + \frac{U^2}{2g}.$$

Se il fluido è a densità costante:

$$H = z + \frac{p}{\gamma} + \frac{U^2}{2g}.$$

Si noti che il fatto che H sia costante non implica la costanza dell'energia potenziale o di quella di pressione o dell'energia cinetica: è la loro somma che si mantiene costante. Il fluido può ad esempio aumentare la sua energia cinetica a scapito di quella potenziale o di quella di pressione e viceversa.

24.1 Il venturimetro e altri misuratori di portata

Il venturimetro è un misuratore di portata che, inserito in una condotta, permette di quantificare la portata che vi scorre attraverso il rilievo di un dislivello fra due superfici libere. Esso è costituito da: un tratto convergente che porta la sezione dal valore Ω_1 della condotta a un valore Ω_2 , un breve tratto di sezione costante Ω_2 , un lungo tratto divergente che riporta la sezione al valore originario Ω_1 . Immediatamente a monte del tratto convergente, tutto intorno alla sezione sono presenti dei fori collegati a un tubo a U la cui altra estremità è collegata ad altri fori posizionati attorno alla sezione contratta. All'interno del tubo a U (detto tubo manometrico) è presente un fluido (in generale mercurio) di peso specifico elevato indicato con γ_m . Quando all'interno della condotta defluisce una portata Q , la pressione nella sezione 1 risulta diversa da quella nella sezione 2 e ciò induce un dislivello fra i due rami del tubo a U. La lettura di tale dislivello consente di valutare Q . Vediamo ora come.

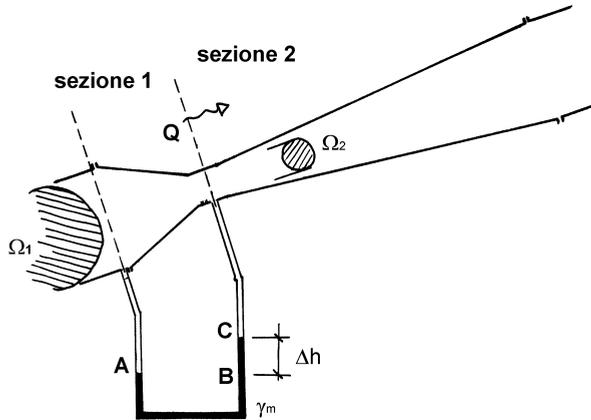


Figura 24.1

Fra la sezione 1 e la sezione 2 il moto del fluido è accelerato, il tratto è molto breve e ciò consente di trascurare le dissipazioni di energia e di supporre quindi il comportamento del fluido “ideale”. Il moto è supposto stazionario. Il fluido è soggetto al campo di forze gravitazionale. Supponiamo infine di considerare un fluido a densità costante. Esistono i presupposti per poter applicare il teorema di Bernoulli per le correnti. Segue dunque:

$$H_1 = h_1 + \frac{U_1^2}{2g} = h_2 + \frac{U_2^2}{2g} = H_2.$$

L'equazione di continuità porge inoltre

$$U_1 \Omega_1 = U_2 \Omega_2 = Q \text{ e } U_1 = \frac{Q}{\Omega_1}; U_2 = \frac{Q}{\Omega_2}.$$

Si ha quindi

$$\frac{Q^2}{2g} \left(\frac{1}{\Omega_2^2} - \frac{1}{\Omega_1^2} \right) = h_1 - h_2$$

$$Q = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\Omega_2}{\Omega_1} \right)^2}} \Omega_2 \sqrt{2g(h_1 - h_2)} = C_Q \Omega_2 \sqrt{2g(h_1 - h_2)}$$

essendo:

$$C_Q = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\Omega_2}{\Omega_1} \right)^2}}.$$

Il valore di $h_1 - h_2$ può essere facilmente legato a Δh tenendo conto che la pressione p_A in A è uguale alla pressione p_B in B e che il carico piezometrico nella sezione 1 e nel ramo di sinistra del tubo manometrico è costante così come è costante il carico piezometrico nella sezione 2 e nel ramo di destra del tubo manometrico. La costanza del carico piezometrico nelle sezioni deriva dal fatto che il comportamento del fluido è quello di una corrente mentre la costanza del carico piezometrico nei due rami del tubo manometrico discende dal fatto che ivi il fluido è fermo. Si ha:

$$h_1 - h_2 = h_A - h_C = \frac{p_A}{\gamma} + z_A - \frac{p_C}{\gamma} - z_C$$

$$h_1 - h_2 = -\Delta h + \frac{1}{\gamma} [p_A - (p_B - \gamma_m \Delta h)] = -\Delta h + \frac{\gamma_m}{\gamma} \Delta h = \Delta h \left(\frac{\gamma_m}{\gamma} - 1 \right)$$

Da cui:

$$Q = C_Q \Omega_2 \sqrt{2g\Delta h \left(\frac{\gamma_m}{\gamma} - 1 \right)}.$$

Altri misuratori di portata sono i diaframmi (figura 24.2) e i boccagli (figura 24.3).

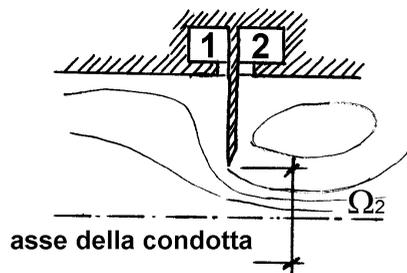


Figura 24.2

Essi si basano sullo stesso principio di funzionamento dei venturimetri e presuppongono la lettura della differenza di pressione fra la sezione 1 immediatamente a monte del diaframma e del boccaglio e la sezione 2 immediatamente a valle. Si ha:

$$Q = C_Q \Omega_2 \sqrt{2g \frac{\Delta p}{\gamma}}$$

essendo Ω_2 la superficie di efflusso del fluido e C_Q un coefficiente che dipende dai dettagli geometrici (per i valori di C_Q si consultino libri di testo o manuali dell'ingegnere).

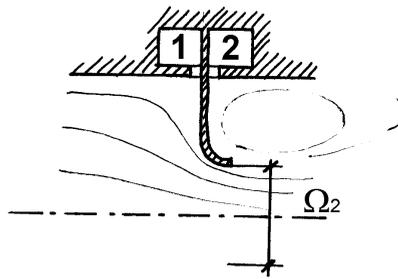


Figura 24.3

Lezione 25. Fluidi ideali e teorema di Bernoulli

Nel capitolo 24 abbiamo dedotto il teorema di Bernoulli per le correnti fluide, partendo dall'equazione del moto valida in tali circostanze. Il **carico totale**:

$$H = z + \int \frac{dp}{\gamma} + \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}{2g}$$

è definito anche in un moto tridimensionale, **stazionario** e rappresenta comunque l'energia meccanica posseduta dal fluido per unità di peso.

Partendo dalle equazioni tridimensionali che esprimono il principio della quantità di moto per un fluido stokesiano (equazioni di Navier - Stokes) è possibile dimostrare il teorema di Bernoulli nel caso generale. Non siamo qui in grado di effettuare tale dimostrazione, perché ciò presuppone lo studio del moto tridimensionale dei fluidi che verrà effettuato nei corsi della laurea magistrale.

Tuttavia, vista la sua importanza, considerato che il teorema di Bernoulli nella forma generale presenta stretta analogia con quello valido per le correnti e tenendo presente che la soluzione di alcuni problemi che affronteremo nel capitolo 26 richiede la sua conoscenza, enunceremo qui il teorema di Bernoulli nella forma generale elencando le ipotesi che devono essere verificate per la sua validità.

Ipotesi:

1) Fluido ideale

Il termine fluido ideale indica un fluido privo di viscosità, tale quindi che la tensione da esso esercitata sia sempre normale alla superficie considerata

$$\mathbf{t} = -pn$$

In natura non esiste un fluido ideale, in quanto tutti i fluidi hanno una viscosità dinamica μ diversa da zero ed esercitano anche tensioni tangenti alla superficie considerata. Tuttavia in moti accelerati, caratterizzati da alti valori del numero di Reynolds e con contorni rigidi limitati, il comportamento dei fluidi reali può essere assimilato a quello dei fluidi ideali.

2) Moto stazionario

Spesso nei problemi si analizzano le situazioni di regime quando tutte le grandezze caratterizzanti il moto sono indipendenti dal tempo.

3) Campo di forze conservativo⁽¹⁾

Spesso nei problemi ingegneristici, il campo di forze che deve essere considerato è quello gravitazionale che è un particolare campo di forze conservativo tale che

$$\varphi = -gz$$

essendo z un asse verticale diretto verso l'alto.

4) Fluido barotropico

Un fluido si dice barotropico quando la densità ρ risulta funzione solo della pressione p . Dovrebbe essere evidente che un fluido a densità costante è in particolare fluido barotropico.

Quando le quattro ipotesi sopra elencate sono verificate il carico totale

$$H = -\frac{\varphi}{g} + \int \frac{dp}{\gamma} + \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}{2g}$$

si mantiene costante lungo una linea di corrente.

Ricordiamo che le linee di corrente sono definite dalla proprietà di essere tangenti (quindi parallele) al vettore velocità in ogni punto. La loro equazione in forma differenziale è dunque:

$$d\mathbf{x} \times \mathbf{v} = 0$$

⁽¹⁾Ricordiamo che un campo di forze si dice conservativo quando ammette una funzione potenziale φ tale che

$$\mathbf{f} = \nabla\varphi$$

essendo $d\mathbf{x}$ l'elemento infinitesimo della linea di corrente (vedi capitolo 13). Se il moto è stazionario le traiettorie delle particelle fluide, definite dall'equazione parametrica:

$$d\mathbf{x} = \mathbf{v} dt$$

coincidono con le linee di corrente. Emerge quindi che il carico totale H si mantiene costante anche lungo le traiettorie.

25.1 Efflusso da luci - applicazione del teorema di Bernoulli

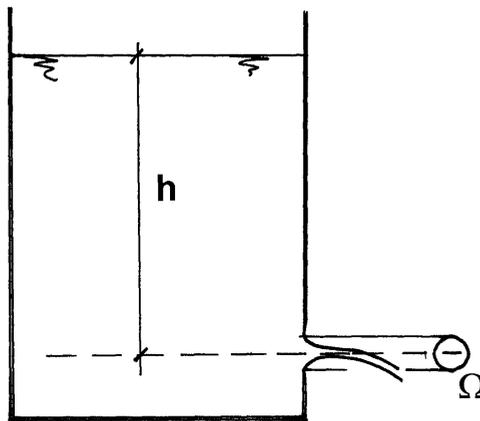


Figura 25.1

Consideriamo il serbatoio in figura 25.1 dove, alla profondità h , è praticato un foro circolare di sezione Ω . Supponiamo che la superficie libera S del serbatoio sia molto maggiore di Ω in modo tale da poter assumere che le variazioni del pelo libero siano lente nel tempo e quindi il moto generato dall'efflusso attraverso il foro sia praticamente stazionario. Il campo di forze cui è soggetto il fluido sia quello gravitazionale. Inoltre la densità del fluido sia costante. All'interno del serbatoio, lontano dal foro, il fluido è praticamente fermo e gli effetti viscosi sono trascurabili. In prossimità del foro, il moto è accelerato e ad alti numeri

di Reynolds. È possibile dunque assumere ideale il comportamento del fluido e applicare il teorema di Bernoulli. Consideriamo un'asse z rivolto verso l'alto con origine in corrispondenza del livello del foro. Il carico totale in un qualunque punto all'interno del serbatoio e lontano dal foro vale h . Invece il carico cinetico è nullo perché il fluido è praticamente fermo e il carico piezometrico risulta quindi costante. Il getto avrà una geometria simile a quella illustrata in figura 25.2.

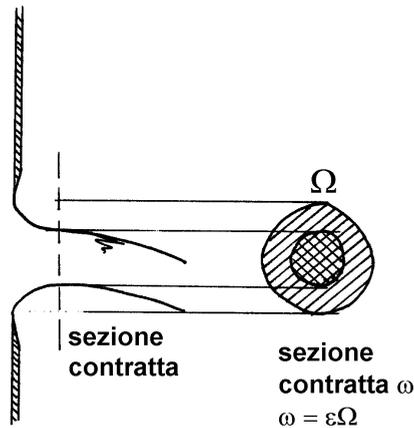


Figura 25.2

Il getto ha una sezione inferiore a quella del foro perché il fluido che si trova in prossimità della parete non esce con una traiettoria ortogonale alla parete stessa bensì con una che inizialmente è tangente alla parete. Le traiettorie delle particelle fluide vicine alla parete, che inizialmente si muovono parallelamente ad essa, non possono infatti presentare un punto angoloso perché ciò implicherebbe la presenza di un'accelerazione infinita e quindi di una forza infinita. L'area del getto, in quella che si definisce sezione contratta dove le traiettorie delle particelle fluide sono fra di loro parallele e ortogonali alla parete del serbatoio, vale

$$\omega = C_C \Omega$$

ove C_C è il cosiddetto coefficiente di contrazione che misure sperimentali mostrano essere circa 0.6. Considerato che le ipotesi del teorema di Bernoulli sono

verificate, applichiamo lungo una qualunque linea di corrente passante per un generico punto B della sezione contratta (figura 25.3). Si avrà:

$$H_A = H_B$$

essendo A un punto all'interno del serbatoio. Per i motivi discussi precedentemente:

$$H_A = h$$

indipendentemente dall'esatta forma della linea di corrente e dall'esatta posizione del punto A . È facile vedere che:

$$H_B = v_B^2/2g$$

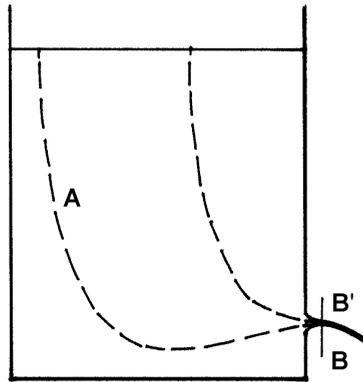


Figura 25.3

Infatti il valore di z_B è trascurabile rispetto a h e la pressione relativa p_B è nulla (in un getto la pressione è costante sulla generica sezione e pari a quella atmosferica). Si ha quindi:

$$h = v_B^2/2g$$

da cui:

$$v_B = \sqrt{2gh}$$

La velocità $\sqrt{2gh}$ è detta “velocità-torricelliana”. La portata uscente dal serbatoio risulta dunque

$$Q = C_C \Omega \sqrt{2gh}.$$

Volendo valutare il tempo necessario affinché h passi dal valore h_1 al valore h_2 è necessario imporre un bilancio di massa. Semplici considerazioni sul volume di fluido che attraversa la sezione contratta impongono:

$$Qdt = -dhS$$

essendo S l'area della superficie libera del serbatoio. Segue

$$-dhS = C_C \Omega \sqrt{2gh} dt$$

$$\frac{dh}{\sqrt{h}} = -\frac{C_C \Omega \sqrt{2g}}{S} dt$$

$$2\sqrt{h_2} - 2\sqrt{h_1} = -\frac{C_C \Omega \sqrt{2g}}{S} (t_2 - t_1)$$

$$\Delta t = (t_2 - t_1) = -\frac{2S}{C_C \Omega \sqrt{2g}} \left(\sqrt{h_2} - \sqrt{h_1} \right).$$

25.2 Pressione di ristagno - applicazione del teorema di Bernoulli

Consideriamo un corpo (ad esempio un cilindro) che si muove con velocità costante U_0 all'interno di un fluido fermo. Analizziamo il problema utilizzando un sistema di riferimento solidale con il corpo, trasformando quindi il problema in

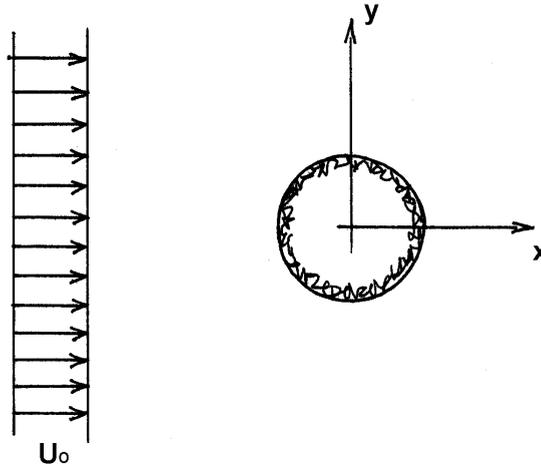


Figura 25.4

quello di un oggetto fermo investito da un fluido che lontano dal corpo è animato da una velocità costante pari a U_0 .

Se ipotizziamo il fluido ideale, la densità costante, il moto stazionario e il campo di forze gravitazionale, sappiamo (teorema di Bernoulli) che

$$H = z + \frac{p}{\gamma} + \frac{|v|^2}{2g}$$

è costante lungo una linea di corrente (l'accelerazione di gravità è qui supposta diretta come l'asse z).

È evidente che sul corpo esisterà un punto (detto **punto di ristagno**) in cui la velocità è nulla. Nel caso di un cilindro il punto di ristagno è posizionato in $(-R, 0)$ essendo R il raggio della sezione del cilindro.

Consideriamo ora la linea di corrente che passa per il punto di ristagno (vedi figura 25.5) e un punto A lontano dal corpo.

Per il teorema di Bernoulli:

$$H_A = z_A + \frac{p_A}{\gamma} + \frac{|v|_A^2}{2g} = z_B + \frac{p_B}{\gamma} + \frac{|v|_B^2}{2g} = H_B$$

tuttavia $z_A = z_B$ e $|v|_A = U_0$, $|v|_B = 0$. Segue dunque:

$$p_B - p_A = \frac{\rho}{2} U_0^2$$

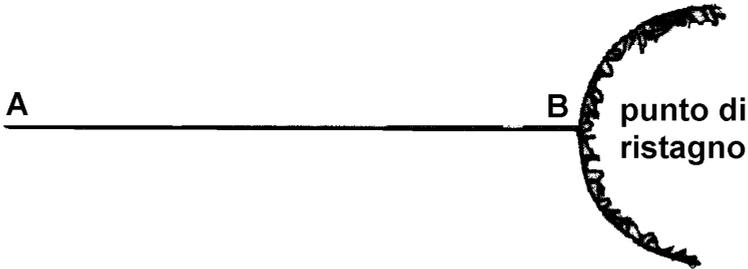


Figura 25.5

La differenza di pressione $p_B - p_A$ è detta **pressione di ristagno**. Essa cresce con il quadrato della velocità U_0 ed è proporzionale alla densità del fluido. Siccome lontano dal corpo la pressione è pari alla pressione atmosferica, la quantità $\rho U_0^2/2$ è semplicemente la pressione relativa nel punto B .

25.3 Tubo di Pitot

È evidente che nel problema precedentemente analizzato, la misura della pressione relativa in B , consente la valutazione della velocità U_0 . Nel passato, la misura della velocità U_0 veniva effettuata con uno strumento denominato “tubo di Pitot”, schematicamente rappresentato in figura 25.6.

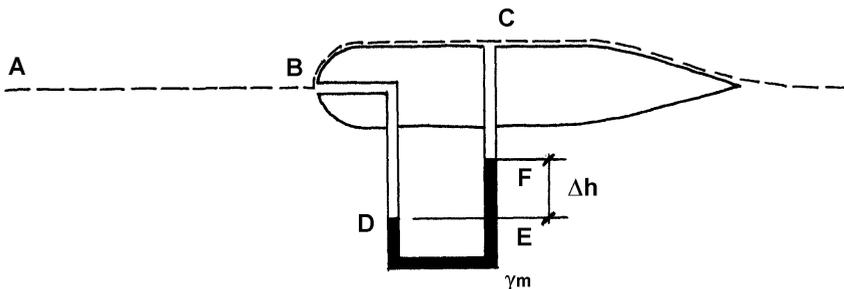


Figura 25.6

La velocità nel punto C risulta praticamente quella indisturbata e pari quindi a U_0 (la linea tratteggiata rappresenta la linea di corrente passante per A, B e C). Si ha quindi

$$p_B - p_C = \frac{\rho}{2} U_0^2.$$

Inoltre

$$p_B - p_C = \Delta h (\gamma_m - \gamma).$$

Segue

$$U_0 = \sqrt{2g\Delta h \left(\frac{\rho_m - \rho}{\rho} \right)}.$$

Lezione 26. Teoria delle turbine Pelton

Nel capitolo 14 abbiamo visto che un getto, che urta una parete piana ferma, esercita su di essa una forza:

$$F = \rho \Omega U_0^2.$$

Se la geometria della parete è diversa, diverso è il valore di F . Consideriamo ad esempio la situazione in figura 26.1

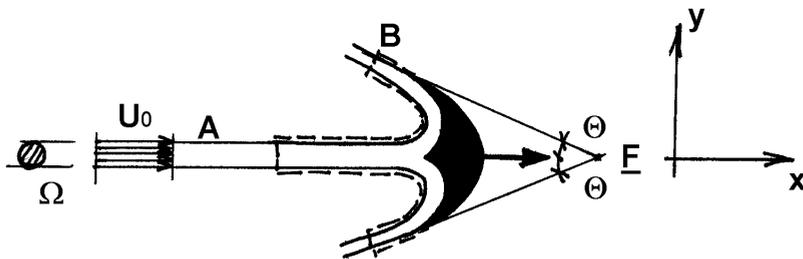


Figura 26.1

In primo luogo osserviamo che la velocità del fluido che si allontana dalla superficie dopo averla urtata è pari ad U_0 . Tale risultato è facilmente ottenibile dal teorema di Bernoulli (si assuma fluido ideale, densità costante, campo di forze gravitazionali con l'accelerazione g diretta lungo l'asse z , moto stazionario e si applichi il teorema di Bernoulli uguagliando i carichi totali del punto A e del punto B).

Per determinare la forza \mathbf{F} esercitata dal getto è necessario applicare il principio della quantità di moto, nella sua forma integrale, al volume delimitato dalla linea tratteggiata in figura 26.1. Considerando la proiezione dell'equazione nella direzione x , si ottiene:

$$I_x + M_{ux} - M_{ix} = G_x + \Pi_x.$$

Come discusso nel capitolo 14, si ha:

$$I_x = 0, \quad G_x = 0, \quad \Pi_x = -F_x, \quad M_{ix} = \rho\Omega U_0^2.$$

Nel caso in esame, inoltre, M_{ux} è diverso da zero. Per valutare M_{ux} è necessario notare che la sezione dei getti che abbandonano la superficie deve essere pari a $\Omega/2$. Per la conservazione della massa deve infatti risultare:

$$Q = U_0\Omega = 2U_B\Omega_B.$$

Inoltre $U_B = U_0$ e quindi $\Omega_B = \Omega/2$. Tenendo conto che i getti che abbandonano la superficie hanno un'inclinazione θ rispetto al semiasse negativo x , è facile valutare M_{ux} che risulterà:

$$M_{ux} = -2\rho U_B^2 \Omega_B \cos \theta = -\rho\Omega U_0^2 \cos \theta.$$

Segue infine

$$F_x = \rho U_0^2 \Omega (1 + \cos \theta)$$

e anche

$$F_x = \rho Q U_0 (1 + \cos \theta)$$

essendo $Q = U_0\Omega$ la portata del getto.

In particolare se $\theta = 0$ (vedi figura 26.2) la forza F_x risulta doppia rispetto a quella determinata nel capitolo 14 dove $\theta = \pi/2$.

Pur potendo generare forze notevoli, in questa situazione il getto non è in grado di compiere alcun lavoro. La potenza associata al getto (vedi capitolo 15):

$$P_d = \gamma Q H = \rho\Omega \frac{U_0^3}{2}$$

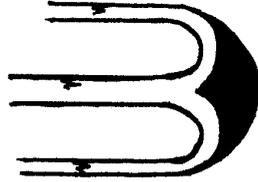


Figura 26.2

non riesce quindi a essere sfruttata.

Al fine di far fare del lavoro al getto e quindi di sfruttare in parte l'energia posseduta dal getto è necessario fare in modo che la superficie (nel seguito detta anche pala) si muova.

Si denoti con V la velocità della pala rispetto al convergente che genera il getto.

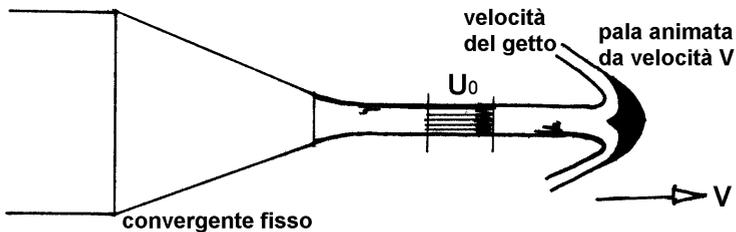


Figura 26.3

Quest'ultimo abbia una velocità U_0 rispetto al convergente. Applicando il principio della quantità di moto, adottando un sistema di riferimento solidale con la pala (sistema inerziale perché in moto con velocità costante), si ottiene:

$$F = \rho \Omega (U_0 - V)^2 (1 + \cos \theta)$$

La forza è inferiore a quella che si ha per la pala ferma poichè il termine $(U_0 - V)^2$ sostituisce il termine U_0^2 . Tenendo conto che:

$$(U_0 - V)^2 \Omega = \tilde{Q} (U_0 - V) \quad \text{ove} \quad \tilde{Q} = (U_0 - V) \Omega$$

e ricordando che se la pala è ferma $F = \rho Q U_0 (1 + \cos \theta)$, si può capire che la forza F per la pala in movimento è inferiore a quella relativa alla pala ferma per due motivi.

Il primo è legato al fatto che la velocità di impatto passa da U_0 a $(U_0 - V)$.

Il secondo motivo è dovuto al fatto che per la pala in movimento non tutta la portata Q viene utilizzata, ma una parte di essa (per la precisione ΩV) viene utilizzata per allungare il getto.

Questa portata può essere recuperata utilizzando una sequenza di pale: quando una pala si allontana troppo dal convergente ne subentra un'altra in posizione più vicina al convergente. Il fluido compreso fra la prima pala e la nuova pala andrà comunque a urtare la prima pala non andando sprecato. La situazione descritta sinteticamente nelle righe precedenti può essere ottenuta montando le pale su una ruota

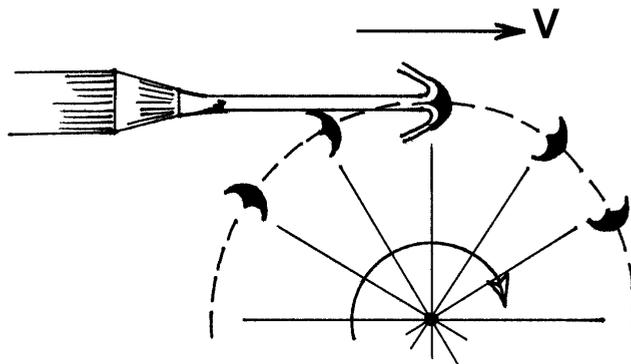


Figura 26.4

Intuitivamente si può arrivare al risultato:

$$F = \rho U_0 \Omega (U_0 - V) (1 + \cos \theta)$$

essendo F la forza sull'insieme delle pale (ruota). Il lavoro fatto dal getto sulla ruota nell'unità di tempo (potenza ceduta dal getto alla ruota) può essere valutato con l'espressione:

$$P_U = FV = \rho U_0 \Omega V (U_0 - V) (1 + \cos \theta)$$

Può essere utile valutare quale è la velocità V che rende massima la potenza P_U . Essa può essere calcolata trovando i valori di V che annullano dP_U/dV

$$\begin{aligned} \frac{dP_u}{dV} &= \rho U_0 \Omega (1 + \cos \theta) [U_0 - V - V] \\ \frac{dP_U}{dV} &= 0 \text{ per } V = \frac{U_0}{2} \end{aligned}$$

Segue

$$(P_U)_{max} = \rho U_0 \Omega \frac{U_0^2}{4} (1 + \cos \theta) = \rho \Omega \frac{U_0^3}{4} (1 + \cos \theta).$$

In tal caso il rendimento della ruota, rapporto fra la potenza utilizzata e quella disponibile, risulta:

$$\eta = \frac{(P_U)_{max}}{P_d} = \frac{\rho \Omega U_0^3 (1 + \cos \theta)}{4 \rho \Omega U_0^3 / 2} = \frac{1 + \cos \theta}{2}.$$

È evidente che quando θ si avvicina a 0, il valore di η si avvicina ad 1. Nel caso reale η è uguale a circa $0.95 \div 0.97$. Infatti valori di θ nulli non possono essere realizzati in quanto, per $\theta = 0$, i getti in uscita interferirebbero con la pala seguente. Inoltre bisogna tener conto che gli effetti viscosi, per quanto piccoli, non sono nulli e quindi la velocità dei getti che lasciano la singola pala è inferiore (anche se di poco) rispetto alla velocità dei getti in arrivo.

La macchina idraulica, il cui funzionamento è stato descritto in forma semplice e sintetica nelle righe precedenti, è detta **turbina Pelton**.

Paolo Blondeaux si è laureato in Ingegneria Civile, sezione Idraulica, presso l'Università di Genova dove ha iniziato la sua carriera accademica prima come ricercatore confermato e poi come professore associato. Divenuto professore ordinario presso l'Università dell'Aquila nel 1994, è ritornato all'Università di Genova nel 1997 dove tuttora insegna Meccanica dei Fluidi e Idraulica Marittima e Costiera. I suoi interessi scientifici spaziano dalla dinamica della vorticità alla modellazione della turbolenza, dallo studio delle onde di mare alla morfodinamica costiera.

Giovanna Vittori si è laureata in Matematica presso l'Università di Genova nel 1986 e nel 1991 ha ottenuto il titolo di dottore di ricerca in Idrodinamica dal Ministero dell'Università e della Ricerca Scientifica. Attualmente è professore ordinario presso l'Università di Genova dove insegna Idrodinamica nei corsi di studio in Ingegneria Navale. I suoi principali interessi scientifici comprendono temi di base della Meccanica dei Fluidi (stabilità idrodinamica, simulazioni dirette dell'equazioni di Navier Stokes, dinamica della turbolenza, ...) e l'idrodinamica e la morfodinamica costiera.

Queste note intendono fornire agli studenti dei corsi di laurea di primo livello le basi per lo studio della dinamica dei fluidi, cioè gli strumenti necessari per la descrizione del moto dei fluidi e per la predizione del loro moto conoscendo le forze esercitate su di essi. Nelle note sono esplicitati i principi fondamentali che controllano il moto dei fluidi (principio di conservazione della massa, principio della quantità di moto) e le equazioni che ne derivano (equazione di continuità ed equazione del moto) per i moti unidirezionali (correnti fluide), lasciando ai testi di Meccanica dei Fluidi la trattazione dei moti tridimensionali. Come casi particolari, vengono considerati i problemi dei fluidi in quiete (statica) e l'impatto di getti su superfici in movimento (teoria turbine Pelton). Problemi di Idrodinamica sono inoltre risolti utilizzando l'analisi dimensionale, fornendo così le basi per la progettazione e la realizzazione dei modelli fisici (modelli in scala ridotta). L'esposizione è sintetica e le note devono essere intese solo come un ausilio agli studenti per meglio comprendere i contenuti dei corsi di Idrodinamica e Idraulica dei corsi di laurea di primo livello.

These notes are written for the students of the courses of the bachelor degrees and are aimed at providing the basis for the study of fluid dynamics, i.e. the tools necessary for the description and the prediction of the motion of the fluids. In the notes, the fundamental principles that control the motion of fluids (principle of mass conservation and momentum principle) are described and the equations, that derive from them (continuity equation and momentum equation), are obtained for unidirectional flows (fluid currents), leaving the treatment of three-dimensional flows to the texts of Fluid Mechanics. As special cases, the problems of fluids at rest (statics) and the impact of jets on moving surfaces (Pelton turbine) are considered. Hydrodynamic problems are also solved using dimensional analysis, thus providing the basis for the design and implementation of physical models (scale models). The presentation is synthetic and the notes are meant to be only an aid to the students to better understand the contents of the Hydrodynamics and Hydraulics courses of the bachelor degrees.

ISBN: 978-88-97752-98-1



Immagine di copertina

Mulino ad acqua raffigurato su una tavola degli Acta Eruditorum, 1709