

# Une méthode rapide robuste et simple pour l'estimation des paramètres d'un signal à phase polynomiale

A fast robust and simple algorithm  
for estimating parameters of polynomial phase signals

**Olivier Fourt, Messaoud Benidir**

Laboratoire des Signaux et Systèmes, Supélec, Université Paris-Sud, 3 rue Joliot-Curie 91190 Gif-sur-Yvette (France)

Manuscrit reçu le 4 septembre 2006

Résumé et mots clés

Les signaux à phase polynomiale constituent une vaste classe de signaux utilisés en modélisation mais leurs traitements se révèlent difficiles en raison de leur caractère non-stationnaire. Dans la méthode présentée dans cet article, nous mettons à profit de récents travaux en matière d'estimation robuste afin de réaliser un nouvel algorithme d'estimation des paramètres de la phase d'un signal. Cet algorithme présente les avantages d'être rapide et capable de traiter des signaux dont la phase est d'ordre inconnu. La structure de cet algorithme reste indépendante par le type de bruit car il est résistant à la forme de la distribution du bruit.

Signaux à phase polynomiale, Fréquence instantanée, Estimation robuste, Estimation paramétrique, Bruit impulsif.

Abstract and key words

Polynomial phase signals belong to a wide class of signals used for modeling but processing associated to them are always difficult since they are non-stationary signals. In the method introduced in this paper, we take benefits of some advances in robust estimation in order to build a new algorithm for estimating the phasis parameters of polynomial phase signal. This algorithm has the advantages of being fast and being able to deal with signal whose phase is a polynomial of unknown order. The structure of this algorithm is robust to the shape of the noise.

Polynomial phase signals, Instantaneous frequency, Robust estimation, Parametric estimation, Impulse noise.

## 1. Introduction

Les Signaux à Phase Polynomiale (SPP) constituent une classe de signaux largement utilisée en modélisation de signaux réels. Par exemple dans le cas de traitements radar ou sonar, ils servent à approximer les signaux Doppler. Cependant, bien que l'usage de ces signaux soit courant, l'estimation de leurs para-

mètres demeure une tâche malaisée. De nombreuses méthodes ont été proposées ces dernières années [7], par exemple les algorithmes MUSIC [15][16][14][4] qui peuvent être facilement adapté pour cette tâche d'estimation [9] ou PHAF, amélioration de HAF pour les signaux multi-composantes et présentant un meilleur seuil d'utilisation face au bruit. [6][1][2][13]. Ces méthodes peuvent présenter de bonnes performances en matière de précision mais présentent quelques limites : elles sont sou-

vent restreintes à des environnements gaussien [4], plusieurs sont sous-optimales [7] et peuvent être très coûteuses en temps de calculs, en particulier MUSIC.

Dans sa forme la plus générale, un signal à phase polynomiale d'ordre  $p$  est défini par :

$$s(t) = \alpha(t) \exp \left( i \sum_{k=0}^p \beta_k t^k \right) \quad \beta_k \in \mathfrak{R} \quad k = 0 \dots p$$

où  $\alpha(t)$  désigne le paramètre d'amplitude du signal. Dans ce travail, nous nous intéressons uniquement à l'estimation de la phase des signaux : leurs amplitudes sont constantes dans toute la suite et nous avons utilisé uniquement les formes réelles des signaux (fonctions cosinus au lieu de l'exponentielle complexe).

La méthode développée dans cet article repose sur la mise en cascade de plusieurs algorithmes existant pour exploiter la structure polynomiale de la phase d'un SPP en utilisant la notion de fréquence instantanée du signal. Son principe consiste dans un premier temps à calculer une estimée de la fréquence instantanée et dans un deuxième temps à exploiter le fait que cette fréquence instantanée est un polynôme fonction du temps pour effectuer une régression polynomiale sur les estimées de cette fréquence instantanée. Ces estimations de la fréquence instantanée pouvant être facilement entachées d'erreurs, un algorithme d'estimation robuste faisant appel à M-estimateur est utilisé. Auparavant, ces erreurs d'estimations associées au mauvais conditionnement de la matrice de régression rendaient cette méthode inutilisable en pratique avec des erreurs d'estimation de l'ordre de  $10^{-1}$ . La première contribution de nos travaux est de montrer que les progrès en matière d'estimation robuste lèvent cette limitation.

Au final nous aboutissons à un algorithme d'estimation des paramètres d'un SPP qui présente l'intérêt d'être très rapide, d'avoir une bonne précision dans des environnements moyennement bruités et d'être robuste à la forme du bruit (gaussien,  $\alpha$ -stable). Les performances de l'algorithme sont exprimées de manière exclusivement heuristique, il en résulte de nombreux tableaux de données.

La partie 2 de cet article présente des rappels et définitions sur le thème de la fréquence instantanée. La partie 3 est consacrée à l'estimation des paramètres de la phase : estimation de la fréquence instantanée puis régression robuste. La partie 4 traite du cas des signaux d'ordre inconnu et la partie 5 regroupe et analyse les performances en simulation.

## 2. La fréquence instantanée

La définition de la fréquence instantanée d'un signal  $s(t)$  n'est pas unique et peut prendre plusieurs formes [12]. L'une des plus courantes que nous adoptons dans cet article est celle obtenue à

partir du signal analytique  $z(t)$  associé au signal réel  $s(t)$  :

$$z(t) = a(t) \exp \left( i \phi(t) \right) = s(t) + iH[s(t)]$$

$H[ \cdot ]$  est la transformée de Hilbert

$a(t)$  et  $\phi(t)$  sont respectivement l'amplitude et la phase instantanée du signal  $z(t)$ . Ces deux fonctions qui forment un couple doivent vérifier un certain nombre de conditions imposées par la transformée de Hilbert, conditions qui ne définissent cependant pas le couple  $(a(t), \phi(t))$  de manière unique. La fréquence instantanée du signal  $s(t)$  est alors donnée par l'expression suivante :

$$f_i(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d\phi}{dt}$$

Cette fréquence peut être vue comme une généralisation des décompositions harmoniques du signal car elle revient à approximer le signal  $s(t)$  par une sinusoïde d'amplitude  $a(t)$  et de phase  $\phi(t)$  à l'instant  $t$ . La fréquence instantanée est souvent impossible à déterminer de manière explicite. Pour un SPP  $s(t)$  d'ordre  $p$ , nous appelons par abus de langage fréquence instantanée la fonction suivante :

$$f_i(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^p k \beta_k t^{k-1}$$

C'est-à-dire que pour un SPP d'ordre  $p$ , sa fréquence instantanée est un polynôme d'ordre  $p - 1$ , fonction des paramètres  $\beta_k$  de la phase du signal (excepté  $\beta_0$ ). Pourvu que l'on obtienne une estimation suffisamment précise de  $f_i(t)$ , ces paramètres peuvent donc être calculés au moyen d'une régression polynomiale.

## 3. Estimation des paramètres de phase

Les considérations introduites dans la partie précédente sur la fréquence instantanée en général et sur sa forme dans le cas des SPP nous amènent donc à proposer comme nouvelle méthode d'estimation des paramètres d'un signal à phase polynomiale l'algorithme en deux étapes ci-après. Premièrement, une estimation de la fréquence instantanée du signal pour différents échantillons. Deuxièmement, une estimation des paramètres de la phase du signal par l'intermédiaire d'une régression linéaire polynomiale. L'estimation de la fréquence instantanée étant souvent entachée d'erreurs importantes même en l'absence de bruit et la régression polynomiale étant un problème mal posé numériquement, il faut impérativement avoir recours à un estimateur robuste.

### Modèle des signaux discrétisés utilisés :

Pour tous les signaux,  $x(n) = x(nt_s)$   $n = 1 \dots N$ ,  $t_s$  période d'échantillonnage.

$x(n) = s(n) + b(n)$  signal bruité

$s(n) = \alpha \cos \left( \sum_{k=0}^p \beta_k (nt_s)^k \right)$  SPP d'amplitude constante, réelle,  $\beta_0 = 0$

$b(n)$  bruit de moyenne nulle i.i.d.

### 3.1 Estimation de la fréquence instantanée

Nous avons utilisé l'algorithme «Parabolic Smoothed Central Finite Difference» (PSCFD) [8]. Celui-ci repose sur une analyse de la phase du signal analytique associé au signal réel  $s(t)$ . L'estimateur de la fréquence instantanée est alors :

$$\hat{f}_i(n) = \frac{f_s}{4\pi} \left( \left( \arg \left[ \sum_{p=-Q}^Q h(p) \exp\{i \arg[z(n-p+1)z^*(n-p-1)]\} \right] \right) \right)_{2\pi}$$

$f_s = 1/t_s$  est la fréquence d'échantillonnage, les arguments sont pris dans l'intervalle  $[0; 2\pi[$  et la fenêtre de lissage  $h(p)$  est définie par :

$$h(p) = \begin{cases} \frac{3N_i}{2(N_i^2 - 1)} \left(1 - \left(\frac{p}{N_i}\right)^2\right) & \text{pour } p \text{ pair et } -Q \leq p \leq Q \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

fenêtre de longueur  $M = 2Q + 1$  avec  $N_i = (M + 3)/2$ . Dans les expériences réalisées pour cet article, nous avons pris  $Q = 128$ . Il y a là un compromis classique entre la résolution en fréquence et la sensibilité aux éventuelles variations fréquentielles. Le paramètre a été fixé en rapport avec les fenêtres d'analyses temps-fréquence (spectrogrammes) utilisées pour d'autres travaux avec ces mêmes signaux. Ce choix traduit le besoin d'analyser correctement des SPP dont les paramètres permettent des fréquences instantanées variant dans toute la gamme possible de 0 à  $f_s/2$ .

On dispose alors d'un ensemble  $\hat{f}_i(n)$   $n = 2 \dots N - 1$ , d'estimées de la fréquence instantanée. L'implantation pratique signifie qu'en réalité ce nombre de points est un peu inférieur si l'on veut supprimer les effets de bords induits par la convolution ( $Q + 1$  à  $N - Q - 2$ ).

Nous rappelons les conditions d'utilisation de cet algorithme. Introduites dans [8], ces conditions s'expriment comme suit :

1. Le signal est entaché d'un bruit additif gaussien, centré, i.i.d. et le rapport signal à bruit est modéré,  $SNR \geq 5$  soit 7dB.
2. La fréquence instantanée doit rester dans la plage de la fréquence de Nyquist  $0 \leq f_i(t) \leq f_s/2$ .
3. La variation en fréquence doit être limitée, si  $f_0$  est la fréquence moyenne et  $\Delta\nu$  la variation en fréquence, alors  $\frac{\Delta\nu}{f_0} \ll 1$ .

Sous ces conditions, l'estimation de la fréquence instantanée atteint la borne de Cramer-Rao, elle présente un biais négligeable et une variance donnée par la formule suivante [8] :

$$\sigma^2 = \frac{f_s^2}{4\pi SNR \times N_i(N_i^2 - 1)}$$

Ces conditions et performances garanties sont importantes car dans la partie 5 consacrée aux simulations et à l'étude des performances de notre algorithme, celui-ci est testé avec des contraintes qui peuvent s'éloigner largement du domaine garanti. À cette occasion nous verrons que dans le cas d'un SPP, les performances de l'algorithme PSCFD restent valides avec du bruit  $\alpha$ -stable et avec des signaux présentant de fortes variations en fréquence.

### 3.2 Régression polynomiale robuste

Soit les vecteurs  $\mathbf{fi}$ ,  $\mathbf{b}$  regroupant les données de fréquence instantanée et les paramètres et  $\mathbf{R}$  la matrice de régression.

$$\mathbf{fi} = \left( \hat{f}_i(2), \dots, \hat{f}_i(N-1) \right)^T \quad \text{avec} \quad \hat{f}_i(k) = \hat{f}_i(kt_s)$$

$$\mathbf{b} = \left( \beta_p, \dots, \beta_1 \right)^T$$

$$\mathbf{R} = \frac{1}{2\pi} \begin{pmatrix} p(2t_s)^{p-1} & \dots & 2(2t_s) & 1 \\ p(3t_s)^{p-1} & \dots & 2(3t_s) & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ p((N-1)t_s)^{p-1} & \dots & 2((N-1)t_s) & 1 \end{pmatrix}$$

Les caractéristiques de la fréquence instantanée des SPP permettent alors de calculer le vecteur  $\mathbf{b}$  comme solution du système linéaire suivant :

$$\mathbf{fi} = \mathbf{Rb} + \mathbf{e}$$

avec  $\mathbf{e}$  vecteur des erreurs d'estimations de  $f_i$ .

Les erreurs d'estimation de la fréquence instantanée n'ont pas une distribution gaussienne et peuvent même présenter des points aberrants. La méthode classique basée sur l'estimateur des moindres carrés n'est donc pas utilisable et il faut avoir recours à une méthode d'estimation robuste. Le choix s'est porté sur l'emploi d'un M-estimateur [10] avec l'algorithme «Iteratively Reweighted Least Squares» (IRLS) et la fonction de Welsch comme fonction de coût [17]. Cette fonction de Welsch a été choisie lors des essais parmi les différentes fonctions coût disponibles.

$$\min_{\beta_k} \sum_n \rho(e(n)) \quad \text{avec} \quad \rho(x) = \frac{c^2}{2} \left[ 1 - \exp(-x/c)^2 \right]$$

On notera toutefois que dans le cas particulier d'un SPP dont la phase est d'ordre 1 (signal sinusoïdal), l'algorithme est inutile

car il faut estimer une constante. Nous avons alors pris comme estimateur la médiane des fréquences instantanées calculées.

Les points aberrants de l'estimation de la fréquence instantanée peuvent être engendrés essentiellement par deux causes: un mauvais choix des paramètres entraînant des fréquences instantanées négatives ou au-delà de la fréquence de Nyquist (peu probable si l'on teste le signal généré). Deuxièmement le bruit additif, lorsqu'il est très impulsif peut prendre des valeurs disproportionnées et peu réalistes que même l'algorithme de régression robuste ne peut compenser.

Le choix d'un algorithme d'estimation robuste présente un autre intérêt ainsi que nous le constaterons dans les simulations: la résistance aux erreurs d'estimation de la fréquence instantanée fait qu'il est possible d'utiliser l'algorithme PSCFD dans des conditions où ses performances ne sont pas garanties, entre autre des excursions en fréquence importantes, et surtout un bruit additif non gaussien,  $\alpha$ -stable dans notre cas. Les erreurs d'estimations de  $f_i$  sont plus importantes avec des possibilités de biais mais au final, à SNR équivalent les erreurs d'estimation des paramètres sont très proches, du même ordre de grandeur et ceci que le bruit soit gaussien ou  $\alpha$ -stable.

## S 4. Estimation des paramètres d'un SPP d'ordre inconnu

L'étape suivante du problème est le cas de l'estimation des paramètres d'un SPP dont l'ordre n'est pas connu. L'estimation de cet ordre est réalisée simplement en ajoutant à notre algorithme une étape de sélection de l'ordre de la phase.

Dans ce but nous avons choisi d'utiliser un critère de sélection de modèle d'un principe similaire au critère BIC (Bayesian Information Criterion) [5] mais dont le terme de pénalité a été aggravé afin d'empêcher les erreurs de sur-estimation de l'ordre. Ce terme de pénalité a été déterminé de manière empirique. Tirant profit de la grande rapidité de notre méthode, on réalise l'estimation des paramètres de SPP pour plusieurs ordres différents. On compare ensuite l'erreur de modélisation de la fréquence instantanée du signal à étudier suivant notre critère BIC modifié afin de sélectionner l'ordre optimal pour le signal considéré. Dans nos expériences, nous nous sommes limités à des SPP d'ordres allant de 1 à 3. Le critère utilisé est le suivant:

$$C = \min_p N \log \left( \sum_{j=1}^N e(j)^2 \right) + 4 \log(N) \times p^6$$

$p$  étant l'ordre à estimer de la phase du signal  $e(j)$  les erreurs d'estimation de la fréquence instantanée et  $N$  le nombre de points d'estimation.

## 5. Simulations et performances

Deux séries d'expériences furent réalisées: la première consacrée aux performances de l'estimation des paramètres de SPP d'ordres connus pour différentes conditions de bruit. La deuxième série d'expériences a été consacrée à la sélection de l'ordre d'un SPP d'ordre et de paramètres inconnus.

Dans toutes les expériences, nous avons utilisé des signaux avec les caractéristiques suivantes: amplitude 1, fréquence d'échantillonnage  $f_s = 10^6$  Hz, 8192 points, le terme constant (degré 0) des phases a été généré aléatoirement entre 0 et  $2\pi$ . Un filtre anti-repliement de type Butterworth d'ordre 8 coupant à  $4 \times 10^5$  Hz a été appliqué.

Plage des paramètres: SPP1 (ordre 1)  $a_1$  compris entre 0 et  $3.5 \times 10^5$ . SPP2 (ordre 2)  $a_1$  compris entre 0 et  $3.5 \times 10^5$ ,  $a_2$  compris entre  $-2 \times 10^7$  et  $+2 \times 10^7$ . SPP3 (ordre 3)  $a_1$  compris entre 0 et  $3.5 \times 10^5$ ,  $a_2$  compris entre  $-8 \times 10^7$  et  $+8 \times 10^7$ ,  $a_3$  compris entre  $-6 \times 10^9$  et  $+6 \times 10^9$ . SPP4 (ordre 4)  $a_1$  compris entre 0 et  $3.5 \times 10^5$ ,  $a_2$  compris entre  $-2 \times 10^8$  et  $+2 \times 10^8$ ,  $a_3$  compris entre  $-5 \times 10^{10}$  et  $+5 \times 10^{10}$ ,  $a_4$  compris entre  $-2.5 \times 10^{12}$  et  $+2.5 \times 10^{12}$ . Les plages des paramètres ont été choisies pour que la fréquence instantanée des SPP puisse varier librement dans la plage comprise entre 0 et  $3.5 \times 10^5$  Hz.

- *Estimation des paramètres d'un SPP d'ordre connu.* Pour chaque ordre, nous avons généré de manière aléatoire un ensemble de SPP pour différentes conditions et niveaux de bruits puis nous avons estimé les paramètres des signaux ainsi considérés. Quatre niveaux de bruits gaussien et quatre niveaux de bruits  $\alpha$ -stable équivalents en termes de puissance ont été considérés et afin d'avoir en référence les meilleures performances envisageables, une expérience a été menée en l'absence de bruit ajouté. Chaque expérience a été répétée 15 000 fois. Les niveaux de bruits gaussien étaient respectivement les suivants: 20dB, 10dB, 6dB et 3dB. Les bruits  $\alpha$ -stable ont été définis par les paramètres:  $\alpha = 1.2$ ,  $\beta = 0$  (distribution symétrique),  $\gamma = 0.005, 0.05, 0.1$  et  $0.2$ .

- *Estimation de l'ordre d'un SPP.* Les expériences ont consisté à estimer l'ordre de différents SPP générés complètement aléatoirement, dans différentes conditions de bruits. En raison des performances obtenues en estimation des paramètres (voir ci-après) pour la résistance à la puissance du bruit et les performances pour les SPP d'ordre 4, les expériences d'estimation de l'ordre des phases ont eu lieu pour des SPP d'ordre 1, 2 et 3 avec des niveaux de bruits moins élevés. Sept expériences furent réalisées: une sans bruit additif, trois avec du bruit gaussien et trois avec du bruit  $\alpha$ -stable. Les niveaux de bruits gaussien étaient respectivement les suivants: 20dB, 10dB et 6dB. Les bruits  $\alpha$ -stable ont été définis par les paramètres:  $\alpha = 1.2$ ,  $\beta = 0$  (distribution symétrique),  $\gamma = 0.005, 0.05$  et  $0.1$ . Chaque expérience a été renouvelée 30000 fois.

Les tableaux 1, 2 et 3 suivants présentent certaines statistiques des erreurs relatives d'estimation des paramètres. Des résultats aberrants peuvent se produire, par exemple un choix aléatoire des paramètres induisant un dépassement de la fréquence de Nyquist ou des fréquences négatives, lesquelles sont coupées par le filtre anti-repliement. Surtout des bruits  $\alpha$ -stable irréalistes — par exemple un bruit constitué d'une seule impulsion de l'ordre de  $10^5$  ou  $10^6$  — conduisent souvent à un échec. Nous avons choisi en conséquence d'utiliser des statistiques robustes. Le tableau 1 détaille les médianes des erreurs d'estimations, le tableau 2 fournit les erreurs quadratiques moyennes (calculées en excluant les 5% des valeurs les plus extrêmes) et le tableau 3 donne les distances interquantiles des erreurs.  $\alpha$  indique le résultat d'une expérience avec du bruit  $\alpha$ -stable et  $\mathcal{N}$  le résultat d'une expérience avec du bruit gaussien.

Les observations des histogrammes des erreurs relatives montrent que celles-ci présentent toutes des distributions très piquées ainsi que l'on peut le constater sur les figures 1, 2 et 3 pour les paramètres des SPP d'ordre 3 en absence de bruit. Les histogrammes pour les paramètres des autres SPP et pour les différents types et niveaux de bruits sont similaires. Ces distributions ne sont pas symétriques : médianes et moyennes ne coïncident pas et les erreurs négatives sont plus dispersées que les positives. L'estimation du paramètre  $a_1$  est légèrement biaisée, biais qui augmente avec le niveau du bruit ce qui est en

accord avec le comportement annoncé de l'algorithme PSCFD [8], ce paramètre agissant comme une translation de la fréquence instantanée. Dans le cas des autres paramètres, les alternances de valeurs positives et négatives en fonction des niveaux de bruit ne permettent pas de conclure à la présence d'un biais sur les estimations.

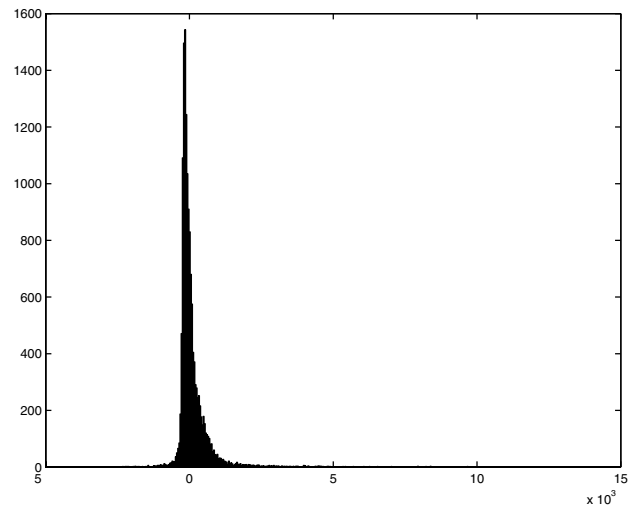


Figure 1. Histogramme de l'erreur d'estimation du paramètre  $a_1$ , SPP d'ordre 3, sans bruit.

Tableau 1. Médianes des erreurs relatives des paramètres.

Paramètres	SNR				
	$\infty$ dB	20 dB	10 dB	6 dB	3 dB
$a_1$ SPP1	$-3 \times 10^{-13}$	$\alpha - 5 \times 10^{-6}$ $\mathcal{N} - 3 \times 10^{-6}$	$\alpha - 1 \times 10^{-3}$ $\mathcal{N} - 3 \times 10^{-4}$	$\alpha - 4 \times 10^{-3}$ $\mathcal{N} - 3 \times 10^{-3}$	$\alpha - 1 \times 10^{-2}$ $\mathcal{N} - 1 \times 10^{-2}$
$a_1$ SPP2	$-2 \times 10^{-5}$	$\alpha - 4 \times 10^{-5}$ $\mathcal{N} - 3 \times 10^{-5}$	$\alpha - 2 \times 10^{-3}$ $\mathcal{N} - 3 \times 10^{-4}$	$\alpha - 5 \times 10^{-3}$ $\mathcal{N} - 3 \times 10^{-3}$	$\alpha - 1 \times 10^{-2}$ $\mathcal{N} - 1 \times 10^{-2}$
$a_1$ SPP3	$-4 \times 10^{-5}$	$\alpha - 3 \times 10^{-5}$ $\mathcal{N} - 4 \times 10^{-5}$	$\alpha - 2 \times 10^{-3}$ $\mathcal{N} - 3 \times 10^{-4}$	$\alpha - 4 \times 10^{-3}$ $\mathcal{N} - 3 \times 10^{-3}$	$\alpha - 1 \times 10^{-2}$ $\mathcal{N} - 1 \times 10^{-2}$
$a_1$ SPP4	$-4 \times 10^{-5}$	$\alpha - 9 \times 10^{-5}$ $\mathcal{N} - 7 \times 10^{-5}$	$\alpha - 2 \times 10^{-3}$ $\mathcal{N} - 4 \times 10^{-4}$	$\alpha - 4 \times 10^{-3}$ $\mathcal{N} - 3 \times 10^{-3}$	$\alpha - 9 \times 10^{-3}$ $\mathcal{N} - 1 \times 10^{-2}$
$a_2$ SPP2	$-9 \times 10^{-8}$	$\alpha - 3 \times 10^{-5}$ $\mathcal{N} - 1 \times 10^{-5}$	$\alpha - 3 \times 10^{-3}$ $\mathcal{N} - 2 \times 10^{-3}$	$\alpha - 5 \times 10^{-3}$ $\mathcal{N} - 2 \times 10^{-2}$	$\alpha - 4 \times 10^{-2}$ $\mathcal{N} - 6 \times 10^{-2}$
$a_2$ SPP3	$-3 \times 10^{-5}$	$\alpha - 1 \times 10^{-5}$ $\mathcal{N} - 3 \times 10^{-5}$	$\alpha - 2 \times 10^{-3}$ $\mathcal{N} - 2 \times 10^{-3}$	$\alpha - 5 \times 10^{-3}$ $\mathcal{N} - 2 \times 10^{-2}$	$\alpha - 4 \times 10^{-2}$ $\mathcal{N} - 6 \times 10^{-2}$
$a_2$ SPP4	$-3 \times 10^{-4}$	$\alpha - 2 \times 10^{-4}$ $\mathcal{N} - 2 \times 10^{-4}$	$\alpha - 3 \times 10^{-3}$ $\mathcal{N} - 2 \times 10^{-3}$	$\alpha - 2 \times 10^{-3}$ $\mathcal{N} - 2 \times 10^{-2}$	$\alpha - 2 \times 10^{-2}$ $\mathcal{N} - 7 \times 10^{-2}$
$a_3$ SPP3	$1 \times 10^{-6}$	$\alpha - 5 \times 10^{-5}$ $\mathcal{N} - 1 \times 10^{-5}$	$\alpha - 3 \times 10^{-3}$ $\mathcal{N} - 2 \times 10^{-3}$	$\alpha - 5 \times 10^{-3}$ $\mathcal{N} - 2 \times 10^{-2}$	$\alpha - 4 \times 10^{-2}$ $\mathcal{N} - 6 \times 10^{-2}$
$a_3$ SPP4	$-6 \times 10^{-6}$	$\alpha - 8 \times 10^{-5}$ $\mathcal{N} - 4 \times 10^{-5}$	$\alpha - 5 \times 10^{-3}$ $\mathcal{N} - 2 \times 10^{-3}$	$\alpha - 1 \times 10^{-4}$ $\mathcal{N} - 2 \times 10^{-2}$	$\alpha - 3 \times 10^{-2}$ $\mathcal{N} - 7 \times 10^{-2}$
$a_4$ SPP4	$7 \times 10^{-6}$	$\alpha - 1 \times 10^{-4}$ $\mathcal{N} - 8 \times 10^{-5}$	$\alpha - 5 \times 10^{-3}$ $\mathcal{N} - 2 \times 10^{-3}$	$\alpha - 6 \times 10^{-4}$ $\mathcal{N} - 2 \times 10^{-2}$	$\alpha - 3 \times 10^{-2}$ $\mathcal{N} - 7 \times 10^{-2}$

Tableau 2. Erreurs quadratiques moyennes des paramètres.

Paramètres \ SNR	$\infty$ dB	20 dB	10 dB	6 dB	3 dB
$a_1$ SPP1	$2 \times 10^{-9}$	$\alpha$ $4 \times 10^{-9}$ $\mathcal{N}$ $7 \times 10^{-10}$	$\alpha$ $2 \times 10^{-5}$ $\mathcal{N}$ $5 \times 10^{-6}$	$\alpha$ $2 \times 10^{-4}$ $\mathcal{N}$ $5 \times 10^{-4}$	$\alpha$ $3 \times 10^{-3}$ $\mathcal{N}$ $7 \times 10^{-3}$
$a_1$ SPP2	$6 \times 10^{-9}$	$\alpha$ $3 \times 10^{-8}$ $\mathcal{N}$ $1 \times 10^{-8}$	$\alpha$ $1 \times 10^{-4}$ $\mathcal{N}$ $9 \times 10^{-6}$	$\alpha$ $9 \times 10^{-4}$ $\mathcal{N}$ $8 \times 10^{-4}$	$\alpha$ $2 \times 10^{-2}$ $\mathcal{N}$ $1 \times 10^{-2}$
$a_1$ SPP3	$9 \times 10^{-8}$	$\alpha$ $3 \times 10^{-7}$ $\mathcal{N}$ $9 \times 10^{-8}$	$\alpha$ $3 \times 10^{-4}$ $\mathcal{N}$ $9 \times 10^{-6}$	$\alpha$ $3 \times 10^{-3}$ $\mathcal{N}$ $9 \times 10^{-4}$	$\alpha$ $4 \times 10^{-2}$ $\mathcal{N}$ $1 \times 10^{-2}$
$a_1$ SPP4	$8 \times 10^{-6}$	$\alpha$ $5 \times 10^{-4}$ $\mathcal{N}$ $9 \times 10^{-4}$	$\alpha$ $1 \times 10^{-2}$ $\mathcal{N}$ $2 \times 10^{-43}$	$\alpha$ $4 \times 10^{-2}$ $\mathcal{N}$ $1 \times 10^{-2}$	$\alpha$ 0.2 $\mathcal{N}$ $5 \times 10^{-2}$
$a_2$ SPP2	$1 \times 10^{-8}$	$\alpha$ $9 \times 10^{-8}$ $\mathcal{N}$ $2 \times 10^{-8}$	$\alpha$ $7 \times 10^{-4}$ $\mathcal{N}$ $5 \times 10^{-6}$	$\alpha$ $7 \times 10^{-3}$ $\mathcal{N}$ $5 \times 10^{-4}$	$\alpha$ $8 \times 10^{-2}$ $\mathcal{N}$ $6 \times 10^{-3}$
$a_2$ SPP3	$1 \times 10^{-7}$	$\alpha$ $4 \times 10^{-7}$ $\mathcal{N}$ $2 \times 10^{-7}$	$\alpha$ $1 \times 10^{-3}$ $\mathcal{N}$ $7 \times 10^{-6}$	$\alpha$ $1 \times 10^{-2}$ $\mathcal{N}$ $7 \times 10^{-4}$	$\alpha$ 0.2 $\mathcal{N}$ $7 \times 10^{-3}$
$a_2$ SPP4	$6 \times 10^{-6}$	$\alpha$ $3 \times 10^{-7}$ $\mathcal{N}$ $5 \times 10^{-3}$	$\alpha$ $4 \times 10^{-32}$ $\mathcal{N}$ $1 \times 10^{-2}$	$\alpha$ 0.1 $\mathcal{N}$ $3 \times 10^{-2}$	$\alpha$ 0.8 $\mathcal{N}$ $7 \times 10^{-2}$
$a_3$ SPP3	$1 \times 10^{-7}$	$\alpha$ $3 \times 10^{-7}$ $\mathcal{N}$ $1 \times 10^{-7}$	$\alpha$ $1 \times 10^{-3}$ $\mathcal{N}$ $7 \times 10^{-6}$	$\alpha$ $1 \times 10^{-2}$ $\mathcal{N}$ $7 \times 10^{-4}$	$\alpha$ 0.2 $\mathcal{N}$ $7 \times 10^{-3}$
$a_3$ SPP4	$2 \times 10^{-6}$	$\alpha$ $2 \times 10^{-3}$ $\mathcal{N}$ $5 \times 10^{-3}$	$\alpha$ $4 \times 10^{-2}$ $\mathcal{N}$ $8 \times 10^{-3}$	$\alpha$ 0.1 $\mathcal{N}$ $2 \times 10^{-2}$	$\alpha$ 0.7 $\mathcal{N}$ $6 \times 10^{-2}$
$a_4$ SPP4	$2 \times 10^{-6}$	$\alpha$ $2 \times 10^{-3}$ $\mathcal{N}$ $5 \times 10^{-3}$	$\alpha$ $3 \times 10^{-2}$ $\mathcal{N}$ $8 \times 10^{-3}$	$\alpha$ 0.1 $\mathcal{N}$ $2 \times 10^{-2}$	$\alpha$ 0.7 $\mathcal{N}$ $6 \times 10^{-2}$

Tableau 3. Distances interquantiles des erreurs relatives des paramètres.

Paramètres \ SNR	$\infty$ dB	20 dB	10 dB	6 dB	3 dB
$a_1$ SPP1	$1 \times 10^{-11}$	$\alpha$ $6 \times 10^{-5}$ $\mathcal{N}$ $3 \times 10^{-5}$	$\alpha$ $4 \times 10^{-3}$ $\mathcal{N}$ $3 \times 10^{-3}$	$\alpha$ $8 \times 10^{-2}$ $\mathcal{N}$ $3 \times 10^{-2}$	$\alpha$ $4 \times 10^{-2}$ $\mathcal{N}$ 0.1
$a_1$ SPP2	$8 \times 10^{-5}$	$\alpha$ $1 \times 10^{-4}$ $\mathcal{N}$ $9 \times 10^{-5}$	$\alpha$ $8 \times 10^{-3}$ $\mathcal{N}$ $3 \times 10^{-3}$	$\alpha$ $1 \times 10^{-2}$ $\mathcal{N}$ $3 \times 10^{-2}$	$\alpha$ $8 \times 10^{-2}$ $\mathcal{N}$ 0.1
$a_1$ SPP3	$3 \times 10^{-4}$	$\alpha$ $4 \times 10^{-4}$ $\mathcal{N}$ $3 \times 10^{-4}$	$\alpha$ $1 \times 10^{-2}$ $\mathcal{N}$ $2 \times 10^{-3}$	$\alpha$ $2 \times 10^{-2}$ $\mathcal{N}$ $3 \times 10^{-2}$	$\alpha$ $8 \times 10^{-2}$ $\mathcal{N}$ 0.1
$a_1$ SPP4	$8 \times 10^{-4}$	$\alpha$ $9 \times 10^{-4}$ $\mathcal{N}$ $9 \times 10^{-4}$	$\alpha$ $2 \times 10^{-2}$ $\mathcal{N}$ $3 \times 10^{-3}$	$\alpha$ $4 \times 10^{-2}$ $\mathcal{N}$ $4 \times 10^{-2}$	$\alpha$ 0.1 $\mathcal{N}$ 0.2
$a_2$ SPP2	$1 \times 10^{-4}$	$\alpha$ $3 \times 10^{-4}$ $\mathcal{N}$ $2 \times 10^{-4}$	$\alpha$ $2 \times 10^{-2}$ $\mathcal{N}$ $1 \times 10^{-3}$	$\alpha$ $4 \times 10^{-2}$ $\mathcal{N}$ $2 \times 10^{-2}$	$\alpha$ 0.1 $\mathcal{N}$ $5 \times 10^{-2}$
$a_2$ SPP3	$3 \times 10^{-4}$	$\alpha$ $6 \times 10^{-4}$ $\mathcal{N}$ $4 \times 10^{-3}$	$\alpha$ $2 \times 10^{-2}$ $\mathcal{N}$ $2 \times 10^{-3}$	$\alpha$ $5 \times 10^{-2}$ $\mathcal{N}$ $2 \times 10^{-2}$	$\alpha$ 0.2 $\mathcal{N}$ $5 \times 10^{-2}$
$a_2$ SPP4	$8 \times 10^{-4}$	$\alpha$ $1 \times 10^{-3}$ $\mathcal{N}$ $1 \times 10^{-3}$	$\alpha$ $5 \times 10^{-2}$ $\mathcal{N}$ $4 \times 10^{-3}$	$\alpha$ 0.1 $\mathcal{N}$ $4 \times 10^{-2}$	$\alpha$ 0.4 $\mathcal{N}$ 0.1
$a_3$ SPP3	$3 \times 10^{-4}$	$\alpha$ $6 \times 10^{-4}$ $\mathcal{N}$ $4 \times 10^{-4}$	$\alpha$ $2 \times 10^{-2}$ $\mathcal{N}$ $2 \times 10^{-3}$	$\alpha$ $5 \times 10^{-2}$ $\mathcal{N}$ $2 \times 10^{-2}$	$\alpha$ 0.2 $\mathcal{N}$ $5 \times 10^{-2}$
$a_3$ SPP4	$6 \times 10^{-4}$	$\alpha$ $1 \times 10^{-3}$ $\mathcal{N}$ $1 \times 10^{-3}$	$\alpha$ $5 \times 10^{-2}$ $\mathcal{N}$ $4 \times 10^{-3}$	$\alpha$ 0.1 $\mathcal{N}$ $3 \times 10^{-2}$	$\alpha$ 0.4 $\mathcal{N}$ 0.1
$a_4$ SPP4	$6 \times 10^{-4}$	$\alpha$ $1 \times 10^{-3}$ $\mathcal{N}$ $1 \times 10^{-3}$	$\alpha$ $5 \times 10^{-2}$ $\mathcal{N}$ $4 \times 10^{-3}$	$\alpha$ 0.1 $\mathcal{N}$ $4 \times 10^{-2}$	$\alpha$ 0.4 $\mathcal{N}$ 0.1

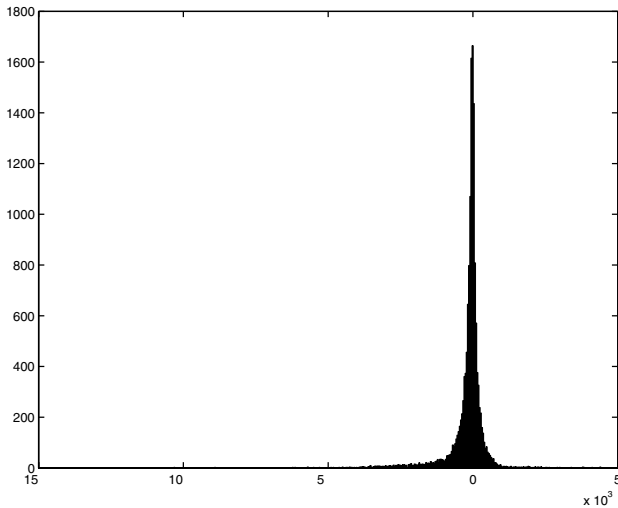


Figure 2. Histogramme de l'erreur d'estimation du paramètre  $a_2$ , SPP d'ordre 3, sans bruit.

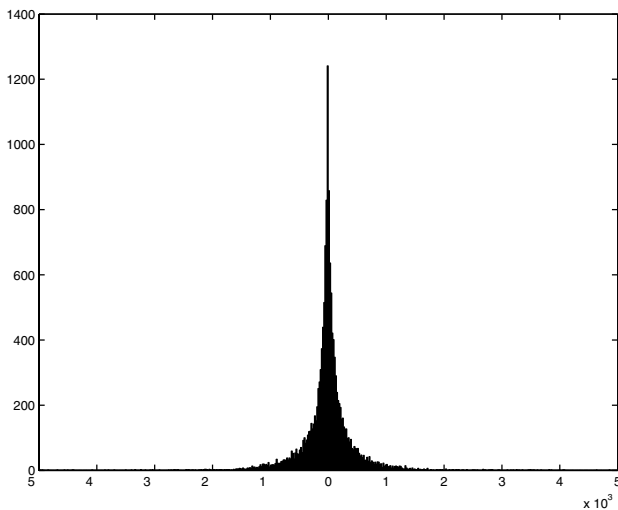


Figure 3. Histogramme de l'erreur d'estimation du paramètre  $a_3$ , SPP d'ordre 3, sans bruit.

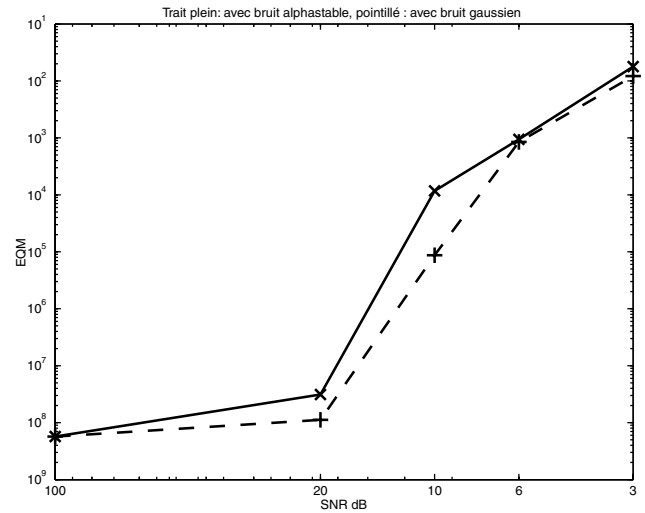


Figure 4. EQM du paramètre  $a_1$ , SPP d'ordre 2, pour différents bruits.

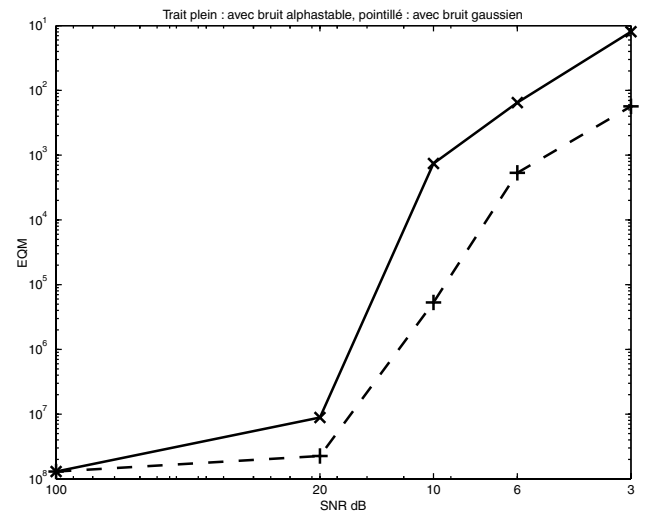


Figure 5. EQM du paramètre  $a_2$ , SPP d'ordre 2, pour différents bruits.

Les figures 4 et 5 tracent l'évolution de l'erreur quadratique moyenne de l'estimation des paramètres de SPP d'ordre 2 pour les différents niveaux et types de bruits. Les courbes en trait plein concernent les résultats obtenus avec du bruit  $\alpha$ -stable et celles en pointillé avec du bruit gaussien; la valeur 100dB correspond en fait aux expériences sans bruit. Le tracé pour d'autres types de SPP donne des courbes similaires, les tableaux fournissent les données complètes.

En étudiant les performances obtenues dans les expériences d'estimation des paramètres, nous avons constaté que certaines conditions d'utilisation garantissant les performances de l'algorithme PSCFD se révèlent indispensables tandis que d'autres peuvent être ignorées [8].

Premièrement nous constatons que sur l'ensemble des expériences, à un niveau de bruit équivalent les performances en bruit gaussien et en bruit  $\alpha$ -stable sont du même ordre de grandeur: l'algorithme est robuste à la nature de la distribution du

bruit et l'exigence de bruit gaussien pour garantir les performances n'est pas nécessaire.

Deuxièmement lorsque le niveau de bruit augmente, la précision de l'estimation des paramètres bonne au départ décroît très rapidement et pour un SNR inférieur à 6dB l'algorithme fournit des estimations dont la seule utilisation possible est en tant qu'ordre de grandeur des paramètres. La condition d'utilisation  $SNR \geq 7$  dB est, elle, nécessaire bien que des  $SNR \geq 10$  dB soient une meilleure garantie.

Enfin troisièmement on constate pour tous les niveaux et formes de bruit un saut dans les performances entre les SPP d'ordre 4 et les autres signaux. Ces signaux sont les plus complexes et surtout sujets aux variations en fréquences les plus rapides. Notre interprétation de ce résultat est que l'hypothèse d'une limite sur l'ampleur et la rapidité des variations en fréquence dans l'utilisation de l'algorithme PSCFD est exacte mais que la plage véritable est plus étendue que celle fournie par ses

auteurs. Pour un signal de durée  $T$  échantillonné à la fréquence  $f_e$ , nous considérons que la limite d'utilisation de l'algorithme PSCFD avec une fenêtre de lissage de 257 points pour pouvoir ensuite effectuer une estimation des paramètres est de :

$$\left| \frac{df_i}{dt} \right| < \frac{2f_e}{T}$$

Cette valeur a été obtenue en calculant la variation en fréquence maximale possible d'un SPP d'ordre 3 sur l'intervalle considéré et obtenue en imposant  $f_i(0) = 0$ ,  $f_i(T/2) = f_e/2$  et  $f_i(T) = 0$  ou bien  $f_i(0) = f_e/2$ ,  $f_i(T/2) = 0$  et  $f_i(T) = f_e/2$ . Bien que la précision des estimations des paramètres se révèle être correcte à fort SNR — de l'ordre de  $10^{-7}$  ou mieux — elle demeure moins bonne que les meilleures méthodes de type MUSIC ou PHAF [15][16][11][6][3][13] qui atteignent des précisions de l'ordre de  $10^{-12}$  ou mieux. Par contre notre algorithme est plus rapide: pour un signal de  $N$  points, MUSIC effectue les calculs en  $O(N^3)$  opérations et PHAF en  $O(N^2 \log(N))$  contre  $O(N)$  pour le PSCFD [7] auquel il faut ajouter le temps de calcul de la régression qui est de l'ordre de  $O(Np^3)$  pour une phase d'ordre  $p$ .

Les tableaux 4 et 5 présentent les performances de l'algorithme d'estimation de l'ordre d'un SPP. Une ligne avec le symbole  $\alpha$  indique le résultat d'une expérience avec du bruit  $\alpha$ -stable et une ligne avec le symbole  $\mathcal{N}$  le résultat d'une expérience avec du bruit gaussien. Le tableau 4 indique les taux de sur-estimation et sous-estimation des ordres, tous ordres confondus:  $O_v$  est l'ordre véritable à estimer d'un signal,  $O_{est}$  est l'ordre estimé de ce signal et le tableau donne le taux des différents écarts  $O_v - O_{est}$ . Une valeur négative indique une sur-estimation, la colonne **0** les valeurs correctes et les valeurs positives une sous-estimation de l'ordre (d'une valeur de 1 ou 2). Le tableau 5 fournit les taux d'erreurs d'estimation des ordres pour chaque catégorie de SPP considérée.

Les performances de l'algorithme d'estimation de l'ordre d'un SPP amènent plusieurs constats. Tout d'abord notre méthode présente très peu d'erreurs de surestimation de l'ordre et cela que le bruit soit gaussien ou  $\alpha$ -stable. Ensuite si à fort SNR les performances avec du bruit gaussien et avec du bruit  $\alpha$ -stable

Tableau 4. Taux de sur- et sous-estimation de l'ordre des SPP.

$O_v - O_{est}$		-1	<b>0</b>	1	2
SNR					
$\infty$ dB		0.35	<b>99.65</b>	0	0
20 dB	$\alpha$	0.02	<b>94.24</b>	4.71	1.03
	$\mathcal{N}$	0.01	<b>99.91</b>	0.08	0
10 dB	$\alpha$	0.16	<b>68.78</b>	22.34	8.72
	$\mathcal{N}$	0	<b>99.13</b>	0.86	0.01
6 dB	$\alpha$	0.39	<b>56.29</b>	28.71	14.61
	$\mathcal{N}$	0.02	<b>94</b>	5.72	0.26

Tableau 5. Taux d'erreurs d'estimation des ordres.

Ordre SPP		1	2	3
SNR				
$\infty$ dB		0.03	1.04	0
20 dB	$\alpha$	0.07	3.24	13.96
	$\mathcal{N}$	0.03	0.03	0.21
10 dB	$\alpha$	0.49	22.96	69.61
	$\mathcal{N}$	0	0.41	2.15
6 dB	$\alpha$	1.18	38.07	91.83
	$\mathcal{N}$	0.06	1.6	16.34

sont similaires, la puissance du bruit gaussien semble de manière remarquable peu affecter la répartition des erreurs d'estimations alors que l'augmentation de l'énergie du bruit  $\alpha$ -stable augmente de beaucoup le nombre des erreurs. En présence de bruit  $\alpha$ -stable, l'algorithme éprouve d'importantes difficultés à estimer correctement la présence d'une phase d'ordre 3. On doit interpréter ce résultat comme étant lié au fait que le critère utilisé pour la sélection de l'ordre n'est pas assez robuste aux erreurs d'estimation des paramètres.

En présence de bruit gaussien, le taux d'erreur d'estimation de l'ordre est presque constant et voisin de 0: seules les phases d'ordre 3 sont parfois ramenées à des ordres 2. Il ne décroît que lorsque le SNR approche la limite d'utilisation du programme d'estimation des paramètres proprement dit: pour  $SNR \geq 10$  dB avec du bruit gaussien, le nombre de paramètres à estimer ainsi que ces paramètres seront correctement évalués.

## 6. Conclusion

En conclusion de cet article nous rappelons qu'en combinant plusieurs algorithmes connus, nous avons introduit une méthode permettant l'estimation des paramètres des signaux à phase polynomiale. Cette méthode présente les avantages d'être très rapide, peu dépendante de l'ordre du signal considéré — tant que la variation en fréquence ne dépasse pas la limite, la précision sur l'estimation des paramètres varie lentement avec l'ordre — et de présenter une robustesse à la forme de la distribution du bruit sans qu'une modification de l'algorithme ou de ses paramètres soit nécessaire. Cet algorithme présente à l'heure actuelle quelques limitations qui sont l'impossibilité de travailler dans des environnements très bruités, l'existence de la limite imposée aux variations en fréquence du signal et les performances en estimation de l'ordre de la phase du signal.

Les travaux futurs visant à améliorer notre algorithme vont s'attacher à obtenir une meilleure estimation de la fréquence instantanée ainsi qu'un meilleur critère de sélection de l'ordre de la phase du signal. Ces travaux vont également étudier l'estimation des paramètres non encore pris en compte qui sont le terme constant de la phase et l'amplitude du signal afin d'obtenir une estimation complète de tous les paramètres.



## Références

- [1] S. BARBAROSSA, R. MAMELI, A. SCAGLIONE. Adaptive detection of polynomial-phase signals embedded in noise using high order ambiguity functions. In *31st Asilomar Conf. Signals, Syst. Comput., Pacific Grove*, November 1997.
- [2] S. BARBAROSSA, A. PORCHIA, A. SCAGLIONE. Multiplicative multilag higher-order ambiguity function. In *Proc. Int. Conf. Acoustics, Speech and Signal Processing*, May 1996.
- [3] Sergio BARBAROSSA, Anna SCAGLIONE, Georgios GIANNAKIS. Product high-order ambiguity function for multicomponent polynomial-phase signal modeling. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 46(3):691-708, march 1998.
- [4] Mounir DJEDDI. *Approches pour l'analyse des signaux à phase polynomiale dans un environnement non gaussien*. PhD thesis, Université Paris-Sud, Laboratoire des Signaux et Systèmes Supélec, may 2005.
- [5] Mark H. HANSEN, Bin YU. Model selection and the principle of minimum description length. *Journal of the American Statistical Association*, 96(454):746-774, 2001.
- [6] Cornel IOANA, Cedric CORNU, André QUINQUIS. Polynomial phase signal processing via warped high-order ambiguity function. In *EUSIPCO*, 2004.
- [7] Peter J. KOOTSOOKOS. A review of the frequency estimation and tracking problems. Technical report, CRASys Australian National University, 1993.
- [8] Brian C. LOVELL, Robert C. WILLAMSON. The statistical performance of some instantaneous frequency estimators. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 40(7):1708-1723, July 1992.
- [9] S. MARCOS. *Les méthodes à haute résolution*. Hermès, 1998.
- [10] Lamine MILI, Clint W. COAKLEY. Robust estimation in structured linear regression. *The Annals of Statistics*, 24(6):2593-2607, 1996.
- [11] S. NANDI, D. KUNDU. Asymptotic properties of the least squares estimators of the parameters of the chirp signals. *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, 56(3):529-544, 2004.
- [12] Sokol SALIU. Definition of instantaneous frequency on real signals. In *EUSIPCO*, 2000.
- [13] Anna SCAGLIONE, Sergio BARBAROSSA. Statistical analysis of the product high-order ambiguity function. *IEEE Transactions on Information Theory*, 45(1):343-356, january 1999.
- [14] P. STOICA, A. NEHORAI, P. HINDEL. Improved sequential music. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 31:1230-1239, October 1995.
- [15] Petre STOICA, Arye NEHORAI. Music, maximum likelihood, and cramer-rao bound. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing*, 37(5):720-741, May 1989.
- [16] Petre STOICA, Arye NEHORAI. Music, maximum likelihood, and cramer-rao bound: Further results and comparisons. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing*, 38(12):2140-2150, December 1990.
- [17] Zhengyou ZHANG. Parameter estimation techniques: A tutorial with applications to conic fitting. Technical Report 2676, INRIA, October 1995.



Olivier Fourt

Né en 1979 à Clermont-Ferrand. Diplômé de l'Institut National Polytechnique de Grenoble en 2001 à l'École Nationale Supérieure d'Ingénieurs Électriciens de Grenoble, a commencé en 2004 un doctorat au Laboratoire des Signaux et Systèmes de l'Université Paris-Sud. Ses travaux de recherche sont consacrés aux traitements des signaux à phase polynomiale dans des environnements fortement bruités, gaussiens et non-gaussiens.



Messaoud Bénidir

Diplômé de l'École Centrale de Paris en 1975, Professeur des Universités, Université de Paris-Sud, Orsay. Responsable de la Spécialité Automatique et Traitement du Signal et de l'Image du Master IST de l'Université de Paris-Sud. Principaux axes de recherche actuels en rapport direct avec l'analyse temps-fréquence et les méthodes de traitement de signaux non stationnaires dits Signaux à Phase Polynomiale.



