

# Választóközetek igazságosan?

---

*Biró Péter, Sziklai Balázs és Kóczy Á. László<sup>1</sup>*

*MTA Közgazdasági és Regionális Tudományi Kutatóközpont*

## Absztrakt

Az új választási törvény egyik célja a korábbinál igazságosabb választási körzetek kialakítása. Ezt a Velencei Bizottság Választási kódexében megfogalmazott ajánlásokhoz hasonló, bár azoknál némileg megengedőbb szabályok révén biztosítja. A szabályok rögzítik a körzetek méretét, illetve, hogy a körzetek nem oszthatnak ketté kisebb településeket és nem nyúlhatnak át a megyehatárokon. Dolgozatunkban belátjuk, hogy a szabályok betartása mellett a körzetek kialakítása matematikailag lehetetlen. Javaslatot teszünk a probléma optimális megoldására elvi alapon is, vizsgáljuk a módszer tulajdonságait, majd az általunk megfogalmazott hatékony algoritmussal, a 2010-es országgyűlési választások adatait felhasználva meghatározzuk a körzetek megyék közti elosztásának legjobb megoldását. Végül kitérünk a demográfiai változások várható hatásaira és több javaslatot teszünk a korlátok hosszú távú betartására: megnövelni a választási körzetek számát kb. 130-ra, megengedni a választási körzetek számának változását egy-egy felülvizsgálat alkalmával, illetve a megyék helyett a régiók alapján szervezni a körzeteket.

JEL kódok: D72, D78, D62,

## 1. Bevezetés

A magyarországi választási reform egyik, talán legnehezebb feladata a kevesebb egyéni választókerület kialakítása. Első lépésként a körzetek méretét, majd határait kell meghatározni. A körzetek mérete, pontosabban a körzetbe tartozó választók száma meghatározza, hogy az egyes választópolgároknak mekkora befolyása van a parlamenti döntésekre. Másrészt az, hogy a körzetek határait pontosan hol húzzák meg, meghatározó lehet a pártok választási eredményeit illetően (Coate & Knight 2007), ami közvetve jelentős jóléti és gazdaságpolitikai következményekkel is jár. Az utóbbival való visszaélés, a nemzetközi irodalomban gerrymanderingnek nevezett taktikus körzetkiosztás problémája (Gul & Pesendorfer 2010) nem új keletű, nevét Elbridge Gerryről, Massachusetts kormányzójáról kapta, aki 1812-ben átrendezte az állam választóközeteit. A körzethatárok kialakításával kapcsolatos irodalmat

---

<sup>1</sup> A szerzők köszönik a Magyar Tudományos Akadémia Lendület Programjának támogatását (LP-004/2010) és egy anonim lektor szakértő bírálatát, észrevételeit.

részletesen bemutatja Tasnádi (2011), mi most az első kérdéssel, a körzetek méretének meghatározásával foglalkozunk.

A választókörzetek méretének meghatározása elvileg nem nehéz feladat: a választópolgárok számát kell a kívánt körzetek számával osztani. Ez azonban ritkán járható út, adminisztratív okokból a választókörzetek határainak igazodniuk kell a közigazgatási határokhoz. A választási reform részletei még nem voltak ismertek, amikor az már eldőlt, hogy a választókörzetek nem nyúlhatnak át a megyehatárokon. Így az első probléma az választókörzetek megyék közötti elosztása. Az elosztás során két dologra kell törekedni: előre meghatározott számú képviselői helyet kell szétosztani, méghozzá úgy, hogy a különböző megyékben élő szavazókörzetek között ne legyenek drámai egyenlőtlenlégek.

A végül elfogadott törvény tételesen felsorolja a megyéknek kiosztott körzetek számát (majd le is írja ezek pontos elhelyezkedését). Sajnálatos azonban, hogy a törvény csak pár alapelvet és nem egy matematikai algoritmust rögzít. Mint látni fogjuk, a kiosztás alig tér el a szerintünk optimálistól, de egy átlátható, világos eljárás hiányában a kiosztás révén befolyásolható a későbbi választások kimenetele. Ezért mindenképpen célszerű lenne egy matematikai megközelítés rögzítve az egyértelmű kiosztás meghatározásának menetét. Ilyen algoritmus akad nem is egy - a továbbiakban áttekintjük az idevonatkozó nemzetközi irodalmat, bemutatjuk, a szóban forgó törvénytervezet megvalósításának problémáit és lehetőségeit

A probléma nem egyedülálló. Az Egyesült Államok alkotmánya a XIX. század közepe óta rögzíti az elveket, amelyek a képviselői helyek államok közötti kiosztását szabályozzák. A rendszerint tízévenkénti szabályozás oka egyrészt az új államok belépése és a képviselői helyek ezzel párhuzamosan növekvő száma, illetve a rohamosan növvő népesség volt. Eközben az alkalmazott módszer folyamatosan változott ahogy az aktuálisan használt algoritmusok kapcsán különféle aggályok merültek fel. Így például korántsem mindegy, hogy pontosan hány fővel növelik a képviselők számát, ugyanis a növekedés ellenére bizonyos államok helyeket veszíthetnek. Az úgynevezett Alabama paradoxon (később formálisan is tárgyaljuk majd) vezetett az Alexander Hamilton által már 1791-ben javasolt, de az elnöki vétónak köszönhetően csak 1852-ben bevezetett Hamilton, vagy legnagyobb maradék módszer néven is ismert eljárás 1911-es leváltásához (Balinski & Young 1982; Balinski & Young 1975).

Az Európai Unió legfőbb döntéshozó testületében, a Miniszterek Tanácsában súlyozott szavazással döntenek az egyes tagállamok képviselői és a súlyokat az egyes országok népessége alapján, de politikai döntések alapján határozták meg. Régóta foglalkoztatja a kutatókat a súlyok igazságos elosztása, hiszen a közvetett szavazás a politikai egyenjogúság mellett az anyagi forrásoknak a közvetett szavazásban részt vevő egyes régiók közötti igazságos elosztásának is előfeltétele (Pitlik et al. 2006). A Nizzai, majd a Lisszaboni reformot megelőző tárgyalások ismét a viták keresztüztüzebe helyzeték a kérdést (Barberà & Jackson 2006; Hosli 1999). A Lisszaboni Szerződés részeként módosulnak a szavazási szabályok, egyebek mellett eltűnnek az önkényes súlyok, szerepüket az országok népessége határozza meg (Kóczy 2010; Kóczy 2011). A reform során felmerült egy alternatív javaslat is: A Jagellói Kompromisszum a népesség négyzetgyökével arányos súlyokat javasol (Życzkowski & Słomczyński 2004). A Lisszaboni reform a fentiek mellett sokkal nagyobb szerepet szán az Európai Parlamentnek. Az EP képviselőit közvetlenül a szavazópolgárok választják az országgyűlési választásokhoz hasonlóan, és itt is igaz, hogy az egyes

országok által delegált képviselők számának meghatározása összetett, az elméleti megközelítés mellett politikai szempontokat is figyelembe vevő döntést igényel (Kellermann 2011; Serafini 2011). A több uniós országból érkezett statisztikusok és szavazáseméleti kutatók által kidolgozott Cambridge-i Kompromisszum (Grimmett 2011; Grimmett et al. 2011) egyszerre veszi figyelembe az országok közötti méretbeli különbségeket, azaz az arányosság-, és az országok szuverenitását, vagyis az egyenlőség elvét.

A körzetek kiosztásával rokon feladat még a listás helyek szétosztása a pártok listás szavazatai alapján. Magyarországon például itt a d'Hondt, vagy más néven Jefferson módszert alkalmazzák, ami egy teljesen más szemléletet mutat. Nem célunk az összes létező módszer bemutatása; az utóbbi időben több olyan tanulmány is megjelent, amik az ismert kiosztási módszerek mellett egészen egzotikus eljárásokat is bemutatnak (Balinski & Ramirez 2012; Beumer 2010; Chessa & Fragnelli 2012; Karpov 2008). Bár a Lexmin megközelítés nem ismeretlen a kiosztási irodalomban (Gambarelli 1999; Gambarelli & Palestini 2007), módszerünk sem ezekkel, sem az irodalomban fellelhető kéttucat másik módszerrel nem egyezik.

Célunk ugyanakkor nem egyszerűen egy újabb módszer bevezetése, hanem, hogy egy olyan algoritmust javasoljunk, ami a választási törvény, illetve a Velencei Bizottság ajánlásának betűjét és szellemiségét követve egyértelmű megoldást ad.

Az alábbiakban először ismertetjük az új választási törvényt és a törvény adta szabályok támasztotta nehézségeket, azaz, hogy a törvény a matematikailag lehetségesnél szigorúbb feltételeket szab a körzetek kialakításában. Bevezetjük a Lexmin eljárást és megadunk egy hatékony eljárást a kiszámításához. Ismertetjük a kiosztási módszerek három fontos tulajdonságát. Végül az eljárást a magyar választási rendszerre alkalmazva meghatározzuk az egyes megyék optimális körzetszámát. A cikket rövid összeggel zárjuk.

## 2. Az új választási törvény

### 2.1. Törvényjavaslat

A törvény előzménye, hogy 2010-ben fél nagyságrendnyi eltérés is előfordulhatott két választókörzet mérete között, amit az Alkotmánybíróság határozata szerint az országgyűlésnek kötelessége módosítani.<sup>2</sup> A körzetek mérete között eltérés sokszorosan meghaladja a Velencei Bizottság 2002-es választási kódexében rögzített ajánlott legfeljebb 10, indokolt esetben 15%-os átlagos mérettől való eltérést is (Venice Commission 2002). A 2011. november 20.-án Lázár János által benyújtott törvényjavaslatban a következő kitételek szerepelnek a választókerület nagyságát illetően: „az egy képviselői helyre jutó választópolgárok száma tekintetében a választókörzetenkénti eltérés nem haladhatja meg a 10%-ot, és semmiképpen nem lépheti túl a 15%-ot. E szabályoktól csak kivételes körülmények esetén engedhető meg eltérés (adott területen élő kisebbségek érdekében,

---

<sup>2</sup> A reform előtti választási rendszert, illetve a körzetek kiosztásának problematikáját és következményeit elemzi Tasnádi (2007), illetve Mészáros et al. (2007).

szórványosan lakott területek egységének védelme érdekében); javaslatunk szerint a választókerületi határok nem léphetik túl a mindenkori megyék határait.”

## 2.2.A probléma

Vajon lehetséges-e egyáltalán ilyen beosztást készíteni? Bár a tervezetben nincs definiálva, a százalékos eltérést két kerület között a következőképpen értelmeztük: „nagyobb kerület mérete / kisebb kerület mérete – 100%.”

A megyehatárok áthatolhatatlansága által okozott probléma szemléltetésére vegyünk egy egyszerű példát mindösszesen két megyével: az *A* megye lakossága 10, a *B* megyéé 4. Feladatunk 5 választókörzet elosztása. Itt feltételezzük, hogy a megyéken belül az elosztás tökéletes, a lakosság folytonosan osztható. Ha az *A* 3, a *B* pedig 2 körzetet kap, az *A* lakosai kb. 67%-kal többen vannak körzetenként. Ha *A* 4, *B* pedig 1 körzetet kap, akkor *B* lakosai lesznek 60%-kal többen körzetenként.

Az alábbiakban bemutatjuk, hogy a tervezet által javasolt körzetkiosztás matematikailag nem lehetséges a hazai adatokra sem. A következő egyszerű számításokat a 2010-es országgyűlési választások adataival végeztük el (Országos Választási Iroda 2010).

Az ország választópolgárainak száma 2010-ben 8205967 volt, így az új választókerületek várható átlagos mérete  $8205967/106 = 77415$ . A javaslat szerint ettől egyik választókerület mérete sem térhet el 15%-nál jobban. Mivel átlagról van szó, lesz olyan választókerület, amelyben az átlagosnál több és olyan is, amelyben az átlagosnál kevesebb választópolgár szavaz. Vegyük a következő példákat!

Vegyük először Baranya megye 325943 választópolgárát. Itt nem lehet 5 választókerület, mert akkor a választókerületek átlagos mérete Baranyában 65189 fő lenne, ami az átlagnak csak 84,2%-a, ha tehát a baranyai kerületek legkisebbikét vennénk, akkor ez legalább 15,8%-kal kisebb az ország legnagyobb választókerületénél. Tehát Baranyának 4 választókerülete lesz, melynek átlagos mérete 81486, ez 5,26%-os eltérés a 77415-höz képest (és természetesen a legnagyobb baranyai választókerület legalább 5,26%-al el is fog térni az átlagtól).

Vegyük most Győr-Moson-Sopron megyét 364894 választójával. Hasonló megfontolások miatt itt a 4 kerület zárható ki, mert ekkor 91223 lenne az átlagos méretük, és a legnagyobb közülük 17,84%-al lenne nagyobb a 77415-nél. Vagyis itt 5 választókerület kell, átlagosan 72979 méretű, ez 6,07%-kal tér el a 77415-től (és természetesen a legkisebb itteni választókerület is legalább ugyanennyivel lesz kisebb az országos átlagnál).

Mi legyen Csongrád megye 345945 választójával? Ha 4 körzet lesz, akkor ezek átlagos mérete 86486, ami 11,17%-al haladja meg a 77415-öt, és ekkor a legnagyobb Csongrád megyei választókerület mérete 18,5%-al fogja meghaladni a legkisebb Győr-Moson-Sopron megyei választókerületét. Ha 5 körzet lesz, akkor ezek átlagos mérete 69189, aminél 11,89%-al több a 77415, de ekkor a legkisebb Csongrád megyei választókörzetenél a legnagyobb Baranya megyei körzetnek 17,77%-al több lakosa lesz. Vagyis matematikailag lehetetlen ilyen beosztást készíteni.

Készítettünk egy programot, amelyik végigpróbálja a megyék összes lehetséges felosztását. A program a 2010-es adatokra azt az eredményt hozta ki, hogy a legkisebb eltérést szolgáltató megoldásban is van két olyan választókerület, amelynek a mérete között 30,87%-os különbség van. Az adatok természetesen változhatnak a népszámlálást követően, de a 15% garantálása lehetetlennek tűnik, és a legkiegyensúlyozottabb megoldásban is várhatóan 30% körül lenne a legkisebb méretkülönbség.

Érdekes, hogy az Egyesült Államok képviselőháza helyeinek államok közötti szétosztása újra, meg újra komoly szakmai vitát eredményez és a kiosztásra vonatkozó egyik prominens javaslat is a legnagyobb és a legkisebb körzet közötti eltérésen alapszik (Burt & Harris 1963), és bár a módszert sok kritika érte (Gilbert & Schatz 1964), ez a megközelítés manapság is talál követőket (Edelman 2006).

### 2.3.A törvény lazítása

Felmerült tehát a kérdés, hogy milyen módon volna célszerű a törvény előírásain lazítani, hogy a feltétel teljesíthető legyen. Alapvetően három megközelítést láttunk, látunk elfogadhatónak.

Kézenfekvő megoldás, hogy a 10-15%-os korlátot felemeljük 30-35%-ra. Hasonló eredményre juthatnak a törvényhozók akkor, ha nem a legnagyobb és legkisebb mérete közötti eltérés lesz 15%-ban maximálva, hanem az átlagos mérettől való eltérésre adnak meg 15-20%-os határt. Megjegyzendő, hogy bár a kismértékű választókörzetek közötti egyenlőtlenség elkerülhetetlen, ritka az ilyen megengedő szabályozás. Az Egyesült Államokban elvileg zéró toleranciájáról beszélhetünk, másutt - Szingapúr esetében - akár 30%-os, de rendszerint inkább 5-10, ritkábban 20% körüli a megengedett eltérés (Handley 2007). Megjegyzendő, hogy azokban a – jellemzően – harmadik világbeli országokban, ahol ilyen jellegű szabályozás nincs, ennél sokkal drámaibb aránytalanságokról beszélhetünk (Samuels & Snyder 2001).

Bár a választási törvény kapcsán aligha merül fel az egyes választókerületek súlyozása, a bevezetőnkben ismertetett Penrose-féle négyzetgyök-elv egyszerű többségi szavazás esetén információt adhat arra vonatkozólag, hogy a különböző méretű szavazókerületek tagjai milyen döntési befolyással rendelkeznek, azaz mekkora valószínűséggel múlik egy adott szavazó igen/nem választásán az országos szintű döntés. (Penrose 1946) elvének lényege, hogy annak valószínűsége, hogy egy választó leadott szavazatán múljon a választókerületének eredménye, a választókör méretének négyzetgyökével arányos. Magyarul, ha két választókerület szavazóinak száma legfeljebb 30%-kal tér el, akkor a választók döntési befolyása legfeljebb  $\sqrt{1,3} - 1 = 14\%$  százalékkal tér el. A 15%-os eltérésbe belefér még egy 32,25%-os különbség is a választói létszámokat illetően.

Végül, ha ragaszkodunk a 15%-nál kisebb méretbeli különbségekhez, akkor el kell tekintenünk a megyehatároktól. Kézenfekvő lenne a választási rendszert a hét régióhoz igazítani. Ez esetben a feltétel úgy módosulna, hogy a választási körzetek határai nem lóghatnak túl a régiók határain. Ez az apró változtatás megdöbbentő javulást eredményez igazságossági szempontból. Az 1. táblázat egy olyan kiosztást mutat be, ahol a legnagyobb és a legkisebb körzet közötti különbség akár 6% körüli is lehet, bőven teljesítve a törvénytervezetben megfogalmazott igazságossági kritériumot.

Régió	szavazók száma	körzetek száma	fő/körzet
-------	-------------------	-------------------	-----------

Észak-Magyarország	995 863	13	76604
Észak-Alföld	1 215 043	16	75940
Dél-Alföld	1 092 768	14	78054
Közép-Magyarország	2 381 138	30	79371
Közép-Dunántúl	906 714	12	75559
Nyugat-Dunántúl	822 903	11	74809
Dél-Dunántúl	791 538	10	79153

1. táblázat A 106 választási körzet kiosztása a megyék között minimalizálva a legnagyobb méretbeli eltérést.

## 2.4. Az új választási törvény

A 2011. december 23.-án elfogadott új választási törvény<sup>3</sup> egyik célja, hogy szabályozza a választókerületek közötti eltérések nagyságát. Az elfogadott törvényben lényegében az első megoldási javaslatunk szerint történt a változtatás, már nem a választókerületek méretének abszolút eltérése, hanem az átlagtól való eltérése szerepel: „Az egyéni választókerület választásra jogosultjainak száma az egyéni választókerületek választásra jogosultjainak országos számtani átlagától tizenöt százaléknál nagyobb mértékben – a földrajzi, nemzetiségi, történelmi, vallási és egyéb helyi sajátosságokat, valamint a népességmozgást is figyelembe véve – kizárólag a (2) bekezdés a) és b) pontjában foglaltak érvényesülése érdekében térhet el.” (4.§ 4.) Illetve: „Ha a (4) bekezdésben foglalt eltérés meghaladja a húsz százalékot, az Országgyűlés a 2. számú mellékletet módosítja.” (4. § 6.) A hivatkozott (2) bekezdés rögzíti, hogy a körzetek nem léphetik át a megyehatárokat, illetve összefüggő területet kell, hogy alkossanak. A törvény 106-ban rögzíti a választókerületek számát is.

## 2.5. További problémák

A választókörzetek között egyenlőtlenség kétféle okból keletkezhet. Az első a választási körzetek megyéken belüli kialakításának nehézségeiből fakad. Ha a megyében lakó választópolgárok számának oszthatósági problémáján, mint az eredményt minimálisan befolyásoló tényezőn gyorsan átlépünk, akkori is megmarad az átlagos választókörzetek méreténél kevesebb választásra jogosult lakóval bíró települések oszthatatlansága, illetve az összefüggő területek problémája. Amennyiben egy megye többségében nagy, az átlagos szavazókörzetnek, azaz kb. 77000 főnek megfelelő méretű településekből áll, illetve a maradék nem egyenletesen terül el ezen városok között, hanem egy kevés várossal érintkező, kis területen helyezkedik el, viszonylag szélsőséges méretbeli arányok is előfordulhatnak. Gyakoribb probléma, hogy a kisebb, így szükségszerűen oszthatatlan települések szavazóiból általában nem könnyű természetesen összefüggő, ideális méretű körzetet összeállítani. Így vagy furcsa alakú körzeteket kapunk, vagy a megyéken belül is megjelennek jelentős méretbeli különbségek súlyosbítva a megyék átlagos körzetméretének különbözőségéből adódó egyenlőtlenséget.

A másik probléma továbbra is a megyék oszthatatlansága. Ha csak Tolna megyét tekintjük, akkor 3 választókerület esetén az átlagnál 15,3%-al kisebb választókerületeket kapunk, 2 választókerület esetén pedig az átlagnál 27,1%-al nagyobbat. Vagyis már csak ezt az egy megyét tekintve sem teljesíthető a 15%-ban meghatározott törvényi korlát. Sőt, ha esetleg ebben a megyében az átlagosnál jobban csökkenne a népesség, például az országon belüli elvándorlás miatt (Gödri & Spéder 2009) akkor néhány

<sup>3</sup> 2011. évi CCIII. törvény az országgyűlési képviselők választásáról.

választás múlva, a megyén belüli elosztási problémákkal együtt esetleg a 20%-os korlát is tarthatatlanná válna.

Továbbra sem egyértelmű, hogy a törvényalkotó a megadott kereteken túl miként szeretné meghatározni a megyékre jutó választókerületek optimális számát. Értelmezésünk szerint a feladat a választókerületek méretének változékonyságát minimálisra csökkenteni. Ezt a változékonyságot a szóródás különböző mérőszámaival fejezhetjük ki, így kézenfekvő lenne például a szórás minimalizálása. Követve a Velencei Bizottság ajánlását (Venice Commission 2002) az átlagos mérettől való eltérést figyeljük, ennek az adott kiosztásban felvett legnagyobb értékét szeretnénk minimalizálni. Mivel célunk az is, hogy a körzetek kiosztása (egyes speciális esetektől eltekintve) egyértelmű legyen, azt az elosztást keressük, amely a legnagyobb eltérés minimalizálása után a másodikat is minimalizálja és így tovább. Bár ez a feltétel nem szerepel sem a törvényben, sem az ajánlásban, azok szellemiségével tökéletesen összeegyeztethető. A következőkben felírunk egy egyszerű modellt és megoldási koncepciót a feladatra.

### 3. Matematikai modell és algoritmus

Az alábbiakban formalizáljuk eddigi gondolatainkat, tisztázzuk a körzetkiosztási feladatot, pontosítjuk, mit értünk optimális körzetkiosztás alatt, megadunk egy algoritmust ezen optimális elosztás meghatározásához, igazoljuk ennek helyességét és meghatározzuk futásidejét, végül megvizsgáljuk az algoritmus tulajdonságait és összevetjük más kiosztási eljárásokkal.

#### 3.1. A körzetkiosztási probléma

Feladatunk a következő. Adott  $m$  megye, ahol  $v_1, v_2, \dots, v_m$  a választásra jogosultak száma, legyen  $V = \sum_{i=1}^m v_i$  az összes választó száma. Feladatunk, hogy adott  $k$ -ra  $k$  db választási körzetet alakítsunk ki, - amelyek egyike sem érint egynél több megyét - úgy, hogy a választópolgárok számának százalékos eltérése az országos átlaghoz képest minimális legyen. Ha egy  $x$  megoldásvektorban  $x_i$ -vel jelöljük az  $i$ -edik megyében lévő körzetek számát és  $A = V/k$  az átlagos körzetnagyságot, akkor ez alapján az  $i$ -edik megyében a százalékos eltérés,  $d_i$ , a következőképpen számolható:

$$d_i = \left| \frac{v_i/x_i - A}{A} \right|.$$

Egy  $x$  megoldás optimalitását többféleképpen definiálhatjuk:

1. MINMAX: legyen  $\max\{d_i(x) : i = 1, \dots, n\}$  minimális.
2. Lexmin: legyen a  $d_i(x)$ -ket nagyság szerint nem növekvő sorrendbe rendezve kapott  $\vec{d}(x)$  vektor lexikografikusan minimális.

Felmerült még, hogy a területi listás parlamenti helyek elosztásánál használt d'Hondt, vagy az ahhoz hasonló Sainte-Lagué módszer alapján kerüljenek a körzetek kiosztásra. Ezek a módszerek ugyanakkor a nagyobb, illetve a kisebb megyéket előnyben részesítik, így aligha alkalmasak egy igazságos osztozkodásra. Mivel ezek a módszerek a Lexmintől különböző kiosztást is adhatnak, előfordulhat, hogy

az optimális Lexmin kiosztás teljesíti a törvény előírásait, míg ezekkel az alternatív eljárásokkal készített kiosztás nem.

Nyilvánvaló, hogy ha egy  $x$  felosztás optimális a Lexmin feladatra, akkor MINMAX-ra is optimális. A következőkben egy hatékony algoritmust adunk Lexmin megoldására.

### 3.2. Algoritmus Lexmin megoldására

Egy  $x$  megoldásvektorra  $x^{j+}$  jelölje azt a megoldást, ahol a  $j$ -edik megye körzeteinek száma eggyel nő az  $x$  megoldáshoz képest, a többi megye körzeteinek száma pedig változatlan. Hasonlóképpen vezessük be az  $x^{j-}$  jelölést a  $j$ -edik megye körzeteinek számának eggyel való csökkentésére. Továbbá, az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy két tetszőleges  $i$  és  $j$  megyére  $d_i(x)$  és  $d_j(x)$  különböznek bármely  $x$  megoldásra, illetve, hogy  $d_i(x) \neq d_i(y)$ , ha  $x_i \neq y_i$  egy tetszőlegesen választott  $i$  megyére. (Ez a feltétel mindig elérhető  $v_i$ -k perturbálásával, és nem befolyásolja az eredmény optimalitását.)

1. lépés: Tekintsünk el  $k$ -tól és legyen  $x[0]$  kezdeti megoldás olyan, hogy  $d_i(x[0])$  minimális legyen minden  $i$  megyére. Ekkor az összes körzet száma  $l = \sum_{i=1}^m x_i[0]$ . Ha  $l = k$ , akkor STOP,  $x[0]$  optimális megoldás.
2. lépés:  $l < k$ , akkor minden  $t = 1 \dots k - l$  értékre végezzük el a következő módosítást. Legyen  $x[t + 1] = x^{j+}[t]$  azon  $j \in \{1, \dots, m\}$ -re amelyre  $d(x^{j+}[t])$  vektor lexikografikusan minimális, vagyis amelyre  $d_j(x^{j+}[t])$  minimális. Ha  $k < l$ , akkor minden  $t = 1 \dots k - l$  értékre végezzük el a következő módosítást. Legyen  $x[t + 1] = x^{j-}[t]$  azon  $j \in \{1, \dots, m\}$ -re amelyre  $d(x^{j-}[t])$  vektor lexikografikusan minimális, vagyis amelyre  $d_j(x^{j-}[t])$  minimális.

#### 3.2.1. Az algoritmus helyességének belátása, futásideje

Ha az első lépés után  $k = l = \sum_{i=1}^m x_i[0]$ , akkor nyilvánvalóan  $x[0]$  optimális megoldás. Az is biztos, hogy minden  $i$  megyére  $x_i[0]$  vagy  $\lfloor \frac{v_i}{A} \rfloor$  vagy  $\lceil \frac{v_i}{A} \rceil$  értéket vesz fel.

Tegyük fel, hogy az első lépés után  $l < k$  adódik (a  $k < l$  eset hasonlóképpen belátható). Lássuk be  $t = 1 \dots k - l$ -re indukcióval az állítást, vagyis hogy  $x[t]$  optimális megoldás  $l + t$  körzetre. A kezdeti megoldásra, vagyis  $t = 0$ -ra az állítás teljesül, tegyük fel, hogy igaz egy tetszőleges  $t$ -re (ahol  $0 < t < k - l$ ), és lássuk be  $t + 1$ -re. Indirekt módon tegyük fel, hogy létezik egy olyan  $y$  megoldás, amelyre a körzetek száma szintén  $l + t + 1$ , de amelyre  $\bar{d}(y)$  lexikografikusan kisebb mint  $\bar{d}(x[t + 1])$ . Ez utóbbit jelöljük  $\bar{d}(y) < \bar{d}(x[t + 1])$ -vel.

Egy  $x$  és egy  $x'$  megoldásra  $x \leq x'$  azt jelöli, hogy  $x_i \leq x'_i$  minden  $i \in \{1, \dots, m\}$ -re. Nyilvánvaló, hogy  $x[0] \leq x \leq x'$  és  $x \neq x'$  esetén  $\bar{d}(x) < \bar{d}(x')$  áll fenn.

Először belátjuk, hogy  $\bar{d}(x[t]) < \bar{d}(y)$ . Legyen  $i$  olyan megye, melyre  $y_i > x_i[0]$ . Ekkor  $x[0] \leq y^{i-} \leq y$ -ból  $\bar{d}(y^{i-}) < \bar{d}(y)$  következik. Emiatt  $\bar{d}(x[t]) > \bar{d}(y)$ -ből  $\bar{d}(x[t]) > \bar{d}(y^{i-})$  adódna, ami ellentmondana az indukciós feltevésünknek, hiszen  $y^{i-}$ -ban a körzetek száma ugyanannyi, mint  $x[t]$ -ben.



Tegyük fel, hogy  $d_j(x[t+1])$  az  $r$ -edik legnagyobb százalékos eltérés  $x[t+1]$ -ben, vagyis ez  $\bar{d}(x[t+1])$  vektor  $r$ -edik eleme. Nyilvánvaló, hogy  $\bar{d}(x[t])$  első  $r-1$  eleme megegyezik  $\bar{d}(x[t+1])$  első  $r-1$  elemével, és mivel feltevésünk szerint  $\bar{d}(x[t]) < \bar{d}(y) < \bar{d}(x[t+1])$  ezért  $\bar{d}(y)$  első  $r-1$  eleme is ezzel azonos, vagyis ezen megyékben ugyanannyi körzet van mindhárom megoldásban. Mivel a  $j$ -edik megyére  $y_j \leq x_j[t+1]$  fennáll, ezért a maradék  $m-r$  megye között kell legyen egy olyan  $i$  megye, melyre  $y_i > x_i[t] = x_i[t+1]$ . Viszont mivel  $\bar{d}(y) < \bar{d}(x[t+1])$ , ezért  $d_i(y) < d_j(x[t+1])$  adódik, ami miatt ellentmondásra jutunk  $j$  választásával. Tehát beláttuk, hogy  $x[t+1]$  optimális.

Mivel minden  $i$  megyére  $x_i[0]$  vagy  $\lfloor \frac{v_i}{A} \rfloor$ -vel vagy  $\lceil \frac{v_i}{A} \rceil$  értéket veszi fel, ezért  $|k-l| \leq m$ , tehát legfeljebb  $m$  módosítást végzünk az algoritmusban. Egy módosításkor  $m$  változtatást próbálunk ki, ezért ha két érték, vagyis  $d_i(x^{j+}[t])$  és  $d_j(x^{j+}[t])$  összehasonlítását tekintjük egy lépésnek, akkor összességében az algoritmusunk futásideje  $m^2$  lesz.

#### 4. Az allokációs módszerek tulajdonságai

Az általunk javasolt Lexmin módszer jól követi a választási törvényt, illetve a Velencei Bizottság ajánlását, de messze nem az egyetlen módszer a körzetek megyék közötti szétosztására. Mint bevezetőnkben már ezt részletesen kifejtettük, a probléma nem egyedi és az igazságos megoldás kutatásának évszázados irodalma van (Mészáros & Szakadát 1993; Tasnádi 2007).

Hogy mi az igazságos, azt sokféleképpen megfogalmazhatjuk.

1. A kiosztás legyen arányos. Az ún. kvóta (vagy *Hare kvóta*) szerint  $\lfloor \frac{k}{v_i} \rfloor \leq x_i \leq \lceil \frac{k}{v_i} \rceil$ .
2. Ne álljon fenn az ún. Alabama paradoxon: Ha  $k' > k$ , akkor az így kapott  $x_i' \geq x_i$  minden  $i$ -re.
3. Ne álljon fenn a népességi paradoxon (Demange 2011): Ha  $\frac{v_i'}{v_i} > \frac{v_j'}{v_j}$ , és  $v_k' = v_k$  ha  $k \neq i, j$ , akkor  $x_i' \geq x_i$ .

Az első tulajdonság azt rögzíti, hogy az elosztás során minden megye az arányosan kiszámított körzetszám fel-, vagy lefelé kerekített értékét kapja.

Az Alabama paradoxon akkor áll fenn, ha a nagyobb körzetszám elosztása során valamelyik megye kevesebbet kap. A paradoxon nevét onnan kapta, hogy az Egyesült Államok alkotmányosan előírt tízévenkénti szétosztása során 1880-ban kiderült, hogy egy 299 fős képviselőház esetén Alabama 8, míg egy 300 fős esetén csak 7 körzetet kap.

A népességi paradoxon akkor áll fenn, ha egy társánál gyorsabban növekvő népességű megye körzetet veszít.

Ezekon felül számos más tulajdonságot is vizsgálhatunk, így például az osztó módszerek közül egyeseknél a nagy, másutt a kis megyék javára figyelhető meg tendenciózus részrehajlás (Lauwers & Puyenbroeck 2006). Bár ez a részrehajlás jól dokumentált az említett módszereket széleskörűen alkalmazzák, például Magyarországon is, a listás és töredékszavazatokkal elnyerhető képviselői helyek kiosztásánál.

Noha a fenti három tulajdonság meglehetősen kézenfekvő és talán gondolhatnánk azt is, hogy minimálisan elvárható, egyszerre nem teljesülhetnek (Balinski & Young 1982). Kézenfekvő tehát megvizsgálni, hogy a Lexmin módszer mely tulajdonságokkal rendelkezik és melyekkel nem, illetve, hogy az esetleges hiányosságoknak mi a jelentősége és hogyan orvosolhatók.

A Lexmin kiosztás nem egy kvóta-kiosztás, hiszen az arányos és nem az abszolút eltérést minimalizálja. Ha a körzetek között nagyok az egyenlőtlenségek (l. Budapestet, vagy éppen Californiát az Egyesült Államokban), a nagy megyékből (vagy államokból) a kisebbekbe való alkalmas átcsoportosítással a nagy megye relatív eltérése alig változik, miközben egy kisebb megye relatív eltérése jelentősen csökkenthető. Bár ennek alapján a kvóta szabály sokat ronthat a megyék közötti igazságosságon, a Lexmin optimalizáció elvégezhető a kvóta szabálynak megfelelő kiosztások osztályán is, a kapott kiosztás természetesen nehezebben teljesíti a törvényileg előírt maximális átlagtól való eltérést.

megyék	népesség	körzetek száma	különbség az átlagtól
A	26	3	-13,76%
B	27	3	-10,45%
C	28	3	-7,13%
D	29	3	-3,81%
E	91	8	13,18%

2. táblázat Jó megoldás kvóták figyelembevétele nélkül

megyék	népesség	körzetek száma	különbség az átlagtól
A	26	2	29,35%
B	27	3	-10,45%
C	28	3	-7,13%
D	29	3	-3,81%
E	91	9	0,61%

3. táblázat Rossz megoldás kvóták figyelembevételével

Hogy ennek mértékét érzékeltessük, vegyük a következő példát: A körzetek lakosságát a (26, 27, 28, 29, 91) vektor írja le és összesen 20 körzetet oszthatunk ki. Mint a 2. táblázatban látható, ekkor a legnagyobb relatív eltérés 13,76%. Ez az elosztás azonban nem felel meg a kvótának, hiszen az E megye 9, vagy 10 körzetet kellene, hogy kapjon. Ha a kvóta szabálynak meg akarunk felelni, legalább 1 körzetet el kell venni valamelyik másik megyétől. Az optimális, a kvótát is figyelembe vevő megoldás esetében (3. táblázat) jól látható, hogy a legnagyobb eltérés jóval magasabb, 29,35%, ennyit ront tehát a kvóták figyelembevétele.

megyék	népesség	körzetszám	eltérés	körzetszám	eltérés
A	24	2	0,148936	3	-0,14894
B	25	2	0,196809	3	-0,11348
C	45	5	-0,1383	4	0,196809
	94	9	10,44444	10	9,4

4. táblázat Alabama paradoxon legfeljebb 20%-os eltérés esetén

Most vegyük a következő példát: Egy három megyéből álló országot vizsgálunk, ahol a körzetek népességét a (24, 25, 45) vektor írja le és összesen 9 körzetet osztunk ki. Ekkor a (2, 2, 5) Lexmin kiosztás egyben az egyetlen olyan kiosztás, ami megfelel a törvényben rögzített 20%-os eltérés-korlátnak. Ha a körzetek számát eggyel növeljük, a 10 körzet kiosztására a (3, 3, 4) Lexmin megoldás ismét az egyetlen, ami a 20% küszöb alatt marad, ugyanakkor itt a C megye kevesebb körzetet kap. Megállapíthatjuk tehát, hogy a Lexmin módszer alkalmazása esetén felmerülhet az Alabama paradoxon, de ez egy öröklött tulajdonság, ami a törvényben rögzített 20%-os korlátból ered. Hasonló példát adhatunk arra az esetre is, amikor a korlát 15% (5. táblázat), tehát a Velencei Bizottság ajánlása is magában hordozza ezt a problémát. Végül megjegyezzük, hogy az Alabama paradoxon a körzetek számának változtatásával kapcsolatosan merül fel, ez pedig a magyar jogrend szerint egy igen ritka és általában sok más változással járó dolog, tehát gyakorlati jelentősége kicsi.

megyék	népesség	körzetszám	eltérés	körzetszám	eltérés
A	69	3	0,114187	4	-0,10467
B	70	3	0,130334	4	-0,0917
C	150	8	-0,0917	7	0,11221
összesen	289	14	20,64286	15	19,26667

5. táblázat Alabama paradoxon a legfeljebb 15%-os eltérés esetén

„A népességparadoxonmentes eljárások egyben Alabama-paradoxon mentesek is” (Tasnádi 2007, 116.o.), azaz megfordítva: Ha az Alabama paradoxon előfordulhat, akkora népességi is. A Leximin módszer tehát nem népességparadoxon-mentes.

Ezúttal egy újabb példa helyett csak nézzük, hogyan állhat elő a paradoxon! A kulcs itt is egy nagy körzet, ahova ki-be lehet pakolni a körzeteket anélkül, hogy a Leximin érték jelentősen változna. Demange definíciója mellett előfordulhat, hogy egy eredetileg kis körzetekkel rendelkező nagy A megye nagyot nő, de a körzetek még mindig csak átlagosak lesznek, miközben B egy másik, nagy körzetekkel rendelkező megye, kisebb, átlag feletti növekedést produkál és így szüksége van újabb körzetre. A nagy megye könnyen kienged 1 körzetet, mert ez alig rontja a Leximin értéket.

Végül hangsúlyozzuk, hogy a felsorolt paradoxonok a törvényben leírt, illetve a Velencei Bizottság Kódexében rögzített ajánlásában megfogalmazott elvekből következnek, maga a Leximin eljárás csak egyértelműsíti az eljárást, de nem felelős a paradoxonok kialakulásáért.

## 5. A magyarországi választási körzetek optimális elosztása

Az algoritmus segítségével megvizsgálhatjuk a magyarországi választási körzetek megyék közötti kiosztásának kérdését is. Itt is a 2010-es országgyűlési választások választói létszámait vettük alapul (Országos Választási Iroda 2010).

Az algoritmus első lépésében a kezdeti megoldásban a köztetek száma 108 lett, vagyis két megyében vált szükségessé a csökkentés. A lexikografikusan minimális eredményt úgy kaphatjuk, ha Pest megyére és Budapestre jutó választókerületek számát csökkentjük (4. táblázat). A törvényben javasolt felosztás szinte teljesen azonos ezzel, az egyetlen különbség, hogy ott Pest megye mellett Csongrádban

csökkentették a kerületek számát Budapest helyett. A 5. táblázat bemutatja, hogy ha a megyék helyett régiók szerint kellene felosztani a körzeteket, akkor az átlagtól való legnagyobb eltérés sem lépné túl a 3,4%-ot. Az optimális kiosztás egyébként megegyezik az 4. táblázatban közölt, a legnagyobb különbséget minimalizáló kiosztással.

Megye	Választók száma (2010)	Körzetek száma		Átlagtól való különbség	
		a törvényben	optimálisan	a törvényben	optimálisan
Budapest	1 407 470	18	17	1,00%	6,95%
Baranya	325 943	4	4	5,26%	5,26%
Bács–Kiskun	438 352	6	6	-5,63%	-5,63%
Békés	308 471	4	4	-0,38%	-0,38%
Borsod–Abaúj–Zemplén	567 910	7	7	4,80%	4,80%
Csongrád	345 945	4	5	11,72%	-10,63%
Fejér	351 237	5	5	-9,26%	-9,26%
Győr–Moson–Sopron	364 894	5	5	-5,73%	-5,73%
Hajdú–Bihar	439 618	6	6	-5,35%	-5,35%
Heves	257 490	3	3	10,87%	10,87%
Jász–Nagykun–Szolnok	324 869	4	4	4,91%	4,91%
Komárom–Esztergom	255 396	3	3	9,97%	9,97%
Nógrád	170 463	2	2	10,10%	10,10%
Pest	973 668	12	12	4,81%	4,81%
Somogy	268 844	4	4	-13,18%	-13,18%
Szabolcs–Szatmár–Bereg	450 556	6	6	-3,00%	-3,00%
Tolna	196 751	3	3	-15,28%	-15,28%
Vas	215 773	3	3	-7,09%	-7,09%
Veszprém	300 081	4	4	-3,09%	-3,09%
Zala	242 236	3	3	4,30%	4,30%
Összesen	8 205 967	106	106		

6. táblázat A választási körzetek elosztása a Választási Törvény és a Lexmin optimális elosztás szerint.

Megye	Választók száma (2010)	Körzetek száma		Átlagtól való eltérés	
		a törvényben	optimálisan	a törvényben	optimálisan
Észak-Magyarország	995 863	12	13	10,87%	1,05%
Észak-Alföld	1 215 043	16	16	5,35%	1,90%
Dél-Alföld	1 092 768	14	14	11,72%	0,83%
Közép-Magyarország	2 381 138	30	30	4,81%	2,53%
Közép-Dunántúl	906 714	12	12	9,97%	2,40%
Nyugat-Dunántúl	822 903	11	11	7,09%	3,37%
Dél-Dunántúl	791 538	11	10	15,28%	2,25%
Összesen	8 205 967	106	106		

7. táblázat A körzetek optimális elosztása a megyei helyett a régióhatárok figyelembevételével. A törvény a körzeteket megyék között osztja szét, így a körzetek száma a régióhoz tartozó megyék körzeteinek összesített száma, míg az eltérés a

közigazgatási egységeken belüli optimális körzetkiosztás esetén elérhető legkisebb eltérés. Mivel a törvény megyékhez köti a körzeteket, ezért a viszonyítási alap a megyékben mért optimális (legkisebb) eltérések maximuma.

## 5.1. Kitekintés, előrejelzés

Számításaink a 2010-es választói adatokon alapszanak – felmerül a kérdés, hogy mennyiben lesznek érvényesek 2014-ben, az első, már az új törvény alapján megrendezett országgyűlési választáson, esetleg szükség lehet-e már akkor a körzetek megváltoztatására. Ilyen változást a törvény az átlagtól való 20% feletti eltérés esetén ír elő.

A megyék közül egyértelműen Tolna a kritikus, hiszen itt már a törvény megszületésekor is a megengedett 15%-nál nagyobb a megyei választókörzeteknek az átlagostól vett átlagos eltérése. Tolna megye 15 évesnél idősebb népessége –részletesebb adatok hiányában ezzel közelítjük a szavazókorú népességet - évi 8‰ körüli fogyást mutat (Központi Statisztikai Hivatal 2011). Bár meglehetősen spekulatív ezekből az adatokból általánosítani az évekkel későbbi folyamatokra, különös tekintettel arra, hogy a migrációs adatok népességre és nem szavazókra vonatkoznak, de valószínűsíthetjük, hogy 2014-re Tolna megye népessége a 2010-es adatokhoz képest legfeljebb pár, 2-3 százalékos csökkenést mutat, amit tovább tompít a teljes népesség évi kb. 0,5‰-es fogyása. 2014-ben az átlagos Tolna megyei választókörzet várhatóan 17-18%-kal lesz kisebb az országos átlagnál. Nem kizárt azonban, hogy 2018-ra szükséges lesz a törvény szerint a választókörzetek újraosztása, hiszen addigra a szám 20% fölé emelkedhet.

Itt felmerül a kérdés, hogy előfordulhat-e, hogy az újraosztás sem segít a 20% feletti eltérésen. Könnyen belátható, hogy idealizált modellünkben, kisebb népességváltozások esetén ez nem fordulhat elő: Ha  $A$  a választókörzetek átlagos mérete  $T$  pedig Tolna megye mérete, akkor a megoldás szempontjából legkedvezőtlenebb esetben a 2, illetve a 3 körzettel számolva egyformán rossz eredményt kapunk. Ekkor:

$$\left(\frac{T}{2} - A\right) / A = \left(A - \frac{T}{3}\right) / A$$

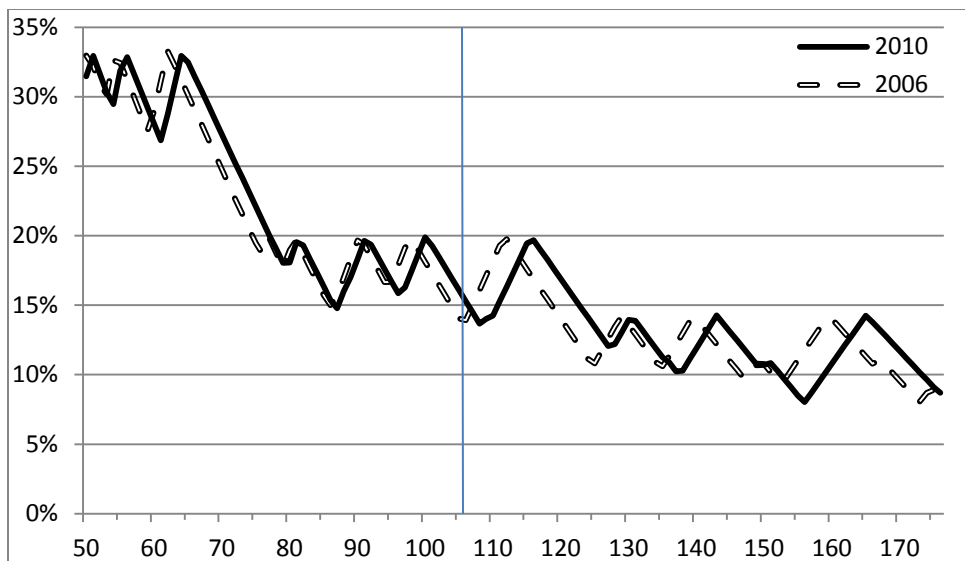
Ebből  $T = \frac{12}{5}A$  és ekkor az eltérés mindkét irányban pontosan 20%. Meg kell jegyeznünk azonban, hogy ez az érték csak az idealizált környezetben érvényes, a választókörzetek megyén belüli kijelölésével kapcsolatos nehézségek miatt egy ilyen szélsőséges esetben a 20%-os határ sem lesz tartható.

## 5.2. A választókörzetek száma

Az eredmény alapvetően függ attól is, hogy a kritikus megye jelen esetben 2, vagy 3 körzetet kap. Általánosságban, ha a kritikus megye  $k$ , vagy  $k + 1$  körzetet kap, akkor ideális körülmények esetén a legnagyobb eltérés is kisebb lesz mint  $1 / (2k + 1)$ . Ez azt jelenti, hogy ha a kritikus megye 3, vagy 4 körzetet kap, akkor az eltérés  $1/7$ -nél azaz 14,3%-nál nem lesz nagyobb. Ez pedig még hagy is némi tartalékot a körzetek kialakítása során felmerülő problémák esetére, azaz ekkor már a Velencei Bizottság által javasolt 15%-os korlát is tartható.

Megvizsgáltuk, hogy mennyire érzékenyek a kapott eredmények a törvényben rögzített körzetszámra nézve. A kapott eredményeket az 1. ábrán láthatjuk. Az ábra az átlagtól való legnagyobb eltéréseket

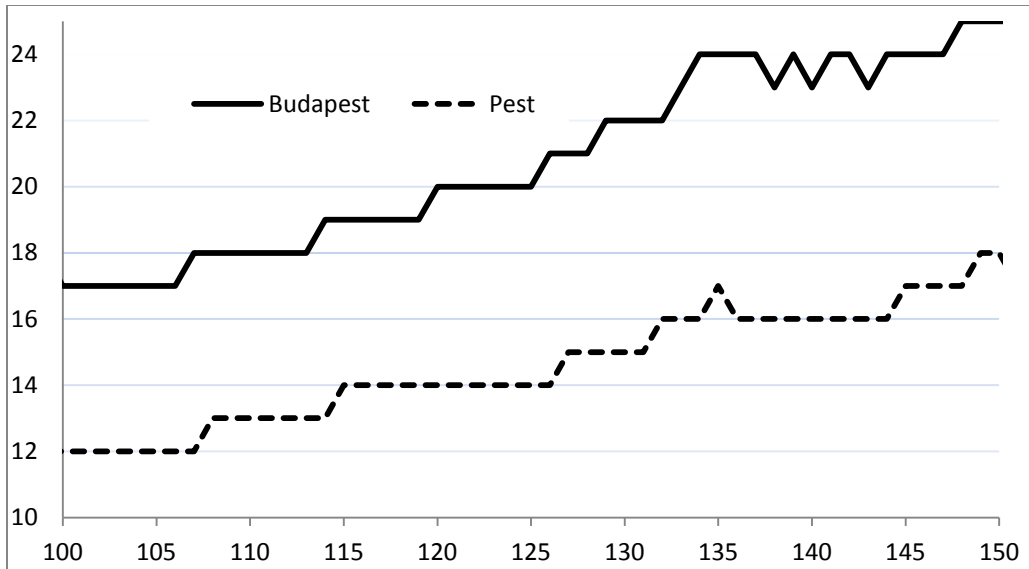
ábrázolja a körzetszám függvényében. Ezen jól látható, hogy bár igen erős helyi ingadozás figyelhető meg, világosan leolvasható az imént kapott 1/3, 1/5, illetve 1/7-es plafon.



1. ábra A legnagyobb átlagtól való eltérés alakulása a szavazókörök számának függvényében a 2006-es és 2010-es választói adatok alapján. A függőleges vonal a 106 körzetet jelöli.

Érdekes módon a plafontól alig-alig távolodunk el, így az, hogy a körzetek mérete az átlagtól számított 15%-os sávban maradjon, ilyen méretű parlamentben gondolkodva a legritkább esetben teljesül. Számításaink szerint 108 lenne az optimális körzetszám, hiszen ekkor csak 13,6% lenne a legnagyobb eltérés. Sajnos ezek a számok erősen függenek a választói létszámok alakulásától, így például a 2006-os adatokból kiindulva éppen a 106 körzet az optimális, míg a 108 körzet esetén több, mint 16%-os eltérést tapasztalunk – egyébként nem Tolna, hanem Nógrád megyében.

Ezek alapján két megoldás körvonalazódik. Vagy egy jóval nagyobb, 130 körüli körzetszámban gondolkodunk, ahol a 15%-os plafon szinte garantálható, vagy megengedjük, hogy a körzetek száma bizonyos határok között mozogjon, mindig azt a számot választva, amelyre a legkisebb a legnagyobb átlagtól való eltérés, s ezáltal erre a legdemokratikusabb a körzetek kiosztása. Egy változó körzetszámmal működő választási rendszer talán kiszámíthatatlannak tűnik első hallásra, de ne felejtjük el, hogy az új, vagy megszűnő körzetek csak 1-1, egy körzet áthelyezése 2 megyét érint, de várhatóan a szükségelt módosítások csak pár megyében igénylik a körzetek átrajzolását, hasonló felülvizsgálati követelményt pedig már a most elfogadott törvény is tartalmaz.



2. ábra Budapest és Pest megye körzeteinek száma az egyéni választóközetek számának függvényében.

Érdekes megnézni, hogy a körzetszám változtatása esetén mennyire valószínű az Alabama paradoxon felbukkanása. Emlékeztet, hogy az XIX. századi Egyesült Államokban, ahol vélhetőleg sokkal kiszámíthatóbb volt a választások kimenetele, egy érintett képviselő személyes támadásnak érezte, hogy az államában csökkenne a képviselők száma (Balinski & Young 1982). Végül ott egy olyan körzetszám került meghatározásra, ahol egyik állam sem „veszít” képviselőt, azaz minden állam legalább annyi képviselőt kap, mint bármelyik kisebb körzetszámra. Érdekes kérdés, hogy ez elvben mindig teljesülhet-e. Minket most a magyar választási rendszer érdekel, így megvizsgáltuk a paradoxon előfordulását a számunkra releváns 100-150 fős tartományban. A 2. ábra Budapest és Pest megye választóközeteinek számát mutatja az összes körzet számának függvényében. Jól látható, hogy a paradoxon több alkalommal is előfordul, igaz és csak jóval magasabb körzetszámra és csak ezen két megye esetében.<sup>4</sup> Ennek magyarázata kézenfekvő: a nagyobb megyék pufferként működve a Lexmin sorrend jelentős rontása nélkül is el tudnak „tárolni”, vagy „kölcsonözni” tudnak pár olyan, kisebb megyék számára, ahol a Lexmin szempontjából nagyon fontos, hogy a körzetek száma optimális legyen.

## 6. Összegzés

Az egyéni választási körzetek kialakítása legalább három problémára bontható. Alapvető kérdés a körzetek száma: egy kisebb parlament olcsóbb és demokratikusabb (Kóczy & Pintér 2011). A második feladat a körzetek szétoztása az ország különböző területi egységei között. Ezt egyebek mellett adminisztrációs okokkal indokolhatjuk. A harmadik feladat a körzetek kialakítása a területi egységeken belül. A körzetek kialakítása több szempontból is érdekes, ilyenkor mindig felmerül a gyanú, hogy a ebben a törvényhozó érdekei érvényesülnek. Minket a probléma csak a választópolgárok közötti

<sup>4</sup> Egy szélesebb tartományon vizsgálva a következő legnépesebb, Borsod-Abaúj-Zemplén megye esetében is előfordul a paradoxon: 239 egyéni választóközet esetén a megye 17, míg 240 körzet esetén csak 16 körzetet kap.

igazságosság szempontjából érdekel ezért elsősorban a második problémával, a körzetek szétoztásával foglalkoztunk.

Elemzésünkben feltételeztük, hogy a megyéken belül a körzetek kialakítása ideális: a rendelkezések, melyek szerint a kistélepülések nem megoszthatók, illetve, hogy a szavazó körzeteknek összefüggőknek kell lenniük jelentős megyén belüli méretkülönbségekhez vezethetnek.

Mindenekelőtt megállapítottuk, hogy idealizált, tehát egyforma méretű körzetekkel rendelkező megyék esetén sem tartható a törvényben rögzített legfeljebb 15%-os átlagtól való eltérés Tolna megyében. A választási törvénnyel és a Velencei Bizottság Választási kódexszel (Venice Commission 2002) összhangban optimális elosztásként a Lexmin megoldást javasoltuk, majd ezt a megoldást felhasználva elemeztük a választási törvényt. Számításainkat a 2010-es választói adatokra alapoztuk. A törvényben rögzített megoldás csupán egy ponton tér el az általunk javasolttól: elvonnánk Budapesttől egy körzetet és Csongrád megyének adnánk, ezzel csökkentve a lexikografikus eltérésvetort.

Bár Tolna megye 15,3%-os eltérése nem mondható jelentős túllépésnek, a megye felnőtt népességének fogyása rendre meghaladja az országét, ezért ez az eltérés ciklusonként kb. 3%-kal nőhet, így 2018 előtt minden bizonnyal módosításra szorul majd a törvény. Igazoltuk, hogy ha a legkisebb megyék is kapnak 2-3 körzetet, megfelelő átrendezéssel *elvben* mindig 20%-on, vagy alatta tartható a legnagyobb eltérés. Gyakorlatilag előfordulhat olyan eset, hogy a törvény egyéb rendelkezései miatt a megyén belül különböző méretű körzeteket kell kialakítani és így már nem mindig megvalósítható a 20%-os határ betartása. Mivel az optimális megoldásban talált legnagyobb eltérés erősen függ a körzetek számától megoldás lehet a körzetek számának kismértékű változtatása. Érdekesség, hogy kb. 130 körzet felett a legnagyobb elvi eltérés mindig 14,3% alatt van, így akár a 15%-os határ is tartható szinte minden esetben. Végül megjegyezzük, hogy a megyék helyett a régiókat alapul véve az eltérés kevesebb, mint 3,5%.

A törvényben rögzített kiosztás előállítható a Lexmin algoritmus kvótákat is figyelembe vevő módosításával, vagy több más ismert, egyszerű eljárással is. Sajnos ezek mindegyikére igaz, hogy bizonyos elosztási problémák esetén jóval kedvezőtlenebb kiosztást eredményeznek; akár olyan esetben is sértve a törvény előírásait, amikor matematikai értelemben erre semmi szükség. A kiosztási folyamat átláthatósága miatt is szerencsés lenne, ha a törvényalkotó mellékelné a jogszabályhoz az alkalmazott algoritmust is.

## 7. Melléklet



	Budapest	Baranya	Bács-Kiskun	Békés	Borsod-Abaúj-Zemplén	Csongrád	Fejér	Győr-Sopron-Moson	Hajdú-Bihar	Heves	Jász-Nagykun-Szolnok	Komárom-Esztergom	Nógrád	Pest	Somogy	Szabolcs-Szatmár-Bereg	Tolna	Vas	Veszprém	Zala
100	17	4	5	4	7	4	4	5	5	3	4	3	2	12	3	6	2	3	4	3
101	17	4	5	4	7	4	4	5	5	3	4	3	2	12	3	6	3	3	4	3
102	17	4	5	4	7	4	4	5	6	3	4	3	2	12	3	6	3	3	4	3
103	17	4	6	4	7	4	4	5	6	3	4	3	2	12	3	6	3	3	4	3
104	17	4	6	4	7	4	5	5	6	3	4	3	2	12	3	6	3	3	4	3
105	17	4	6	4	7	4	5	5	6	3	4	3	2	12	4	6	3	3	4	3
106	17	4	6	4	7	5	5	5	6	3	4	3	2	12	4	6	3	3	4	3
107	18	4	6	4	7	5	5	5	6	3	4	3	2	12	4	6	3	3	4	3
108	18	4	6	4	7	5	5	5	6	3	4	3	2	13	4	6	3	3	4	3
109	18	4	6	4	8	5	5	5	6	3	4	3	2	13	4	6	3	3	4	3
110	18	4	6	4	8	5	5	5	6	4	4	3	2	13	4	6	3	3	4	3
111	18	4	6	4	8	5	5	5	6	4	4	4	2	13	4	6	3	3	4	3
112	18	5	6	4	8	5	5	5	6	4	4	4	2	13	4	6	3	3	4	3
113	18	5	6	4	8	5	5	5	6	4	5	4	2	13	4	6	3	3	4	3
114	19	5	6	4	8	5	5	5	6	4	5	4	2	13	4	6	3	3	4	3
115	19	5	6	4	8	5	5	5	6	4	5	4	2	14	4	6	3	3	4	3
116	19	5	6	4	8	5	5	5	6	4	5	4	3	14	4	6	3	3	4	3
117	19	5	6	4	8	5	5	5	6	4	5	4	3	14	4	6	3	3	4	4
118	19	5	6	4	8	5	5	5	6	4	5	4	3	14	4	7	3	3	4	4
119	19	5	6	5	8	5	5	5	6	4	5	4	3	14	4	7	3	3	4	4
120	20	5	6	5	8	5	5	5	6	4	5	4	3	14	4	7	3	3	4	4
121	20	5	6	5	8	5	5	5	7	4	5	4	3	14	4	7	3	3	4	4
122	20	5	6	5	8	5	5	5	7	4	5	4	3	14	4	7	3	3	5	4
123	20	5	7	5	8	5	5	5	7	4	5	4	3	14	4	7	3	3	5	4
124	20	5	7	5	8	5	5	6	7	4	5	4	3	14	4	7	3	3	5	4
125	20	5	7	5	9	5	5	6	7	4	5	4	3	14	4	7	3	3	5	4
126	21	5	7	5	9	5	5	6	7	4	5	4	3	14	4	7	3	3	5	4
127	21	5	7	5	9	5	5	6	7	4	5	4	3	15	4	7	3	3	5	4
128	21	5	7	5	9	5	6	6	7	4	5	4	3	15	4	7	3	3	5	4
129	22	5	7	5	9	5	6	6	7	4	5	4	3	15	4	7	3	3	5	4
130	22	5	7	5	9	6	6	6	7	4	5	4	3	15	4	7	3	3	5	4
131	22	5	7	5	9	6	6	6	7	4	5	4	3	15	4	7	3	4	5	4
132	22	5	7	5	9	6	6	6	7	4	5	4	3	16	4	7	3	4	5	4
133	23	5	7	5	9	6	6	6	7	4	5	4	3	16	4	7	3	4	5	4
134	24	5	7	5	9	6	6	6	7	4	5	4	3	16	4	7	3	4	5	4

135	24	5	7	5	9	6	6	6	7	4	5	4	3	17	4	7	3	4	5	4
136	24	5	7	5	9	6	6	6	7	4	5	4	3	16	5	8	3	4	5	4
137	24	5	7	5	10	6	6	6	7	4	5	4	3	16	5	8	3	4	5	4
138	23	6	7	5	10	6	6	6	7	4	6	4	3	16	5	8	3	4	5	4
139	24	6	7	5	10	6	6	6	7	4	6	4	3	16	5	8	3	4	5	4
140	23	6	8	5	10	6	6	6	8	4	6	4	3	16	5	8	3	4	5	4
141	24	6	8	5	10	6	6	6	8	4	6	4	3	16	5	8	3	4	5	4
142	24	6	8	5	10	6	6	6	8	5	6	4	3	16	5	8	3	4	5	4
143	23	6	8	5	10	6	6	6	8	5	6	5	3	16	5	8	4	4	5	4
144	24	6	8	5	10	6	6	6	8	5	6	5	3	16	5	8	4	4	5	4
145	24	6	8	5	10	6	6	6	8	5	6	5	3	17	5	8	4	4	5	4
146	24	6	8	6	10	6	6	6	8	5	6	5	3	17	5	8	4	4	5	4
147	24	6	8	6	10	6	6	7	8	5	6	5	3	17	5	8	4	4	5	4
148	25	6	8	6	10	6	6	7	8	5	6	5	3	17	5	8	4	4	5	4
149	25	6	8	6	10	6	6	7	8	5	6	5	3	18	5	8	4	4	5	4
150	25	6	8	6	10	6	6	7	8	5	6	5	3	18	5	8	4	4	6	4

8. táblázat Az egyes megyékre jutó körzetek száma a választókörzetek számának függvényében.

## 8. Hivatkozások

- Balinski, M.L. & Ramirez, V., 2012. Parametric vs. divisor methods of apportionment. *Annals of Operations Research*. Available at: <http://www.springerlink.com/index/10.1007/s10479-012-1120-7> [Accessed September 6, 2012].
- Balinski, M.L. & Young, H.P., 1982. *Fair Representation: Meeting the Ideal of One Man, One Vote*, New Haven: Yale University Press.
- Balinski, M.L. & Young, H.P., 1975. The quota method of apportionment. *The American Mathematical Monthly*, 82(7), pp.701–730. Available at: <http://www.jstor.org/stable/10.2307/2318729> [Accessed September 6, 2012].
- Barberà, S. & Jackson, M.O., 2006. On the weights of nations: assigning voting weights in a heterogeneous union. *Journal of Political Economy*, 114(2), pp.317–339. Available at: <http://www.journals.uchicago.edu/doi/abs/10.1086/501172>.
- Beumer, M., 2010. *Apportionment in Theory and Practice*. University of Amsterdam. Available at: <http://www.science.uva.nl/pub/theory/illc/researchreports/MoL-2010-07.text.pdf> [Accessed September 6, 2012].
- Burt, O.R. & Harris, C.C., 1963. Apportionment of the US House of Representatives: A minimum range, integer solution, allocation problem. *Operations Research*, 11(4), pp.648–652. Available at: <http://www.jstor.org/stable/10.2307/168010> [Accessed September 10, 2012].
- Chessa, M. & Fragnelli, V., 2012. A note on “Measurement of disproportionality in proportional representation systems.” *Mathematical and Computer Modelling*, 55(3-4), pp.1655–1660.

- Available at: <http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0895717711005589> [Accessed September 6, 2012].
- Coate, S. & Knight, B., 2007. Socially optimal districting: a theoretical and empirical exploration. *The Quarterly Journal of Economics*, 122(4), pp.1409–1471. Available at: <http://qje.oxfordjournals.org/content/122/4/1409.short> [Accessed September 19, 2012].
- Demange, G., 2011. On party-proportional representation under district distortions. *Mathematical Social Sciences*, 63(2), pp.181–191. Available at: <http://dx.doi.org/10.1016/j.mathsocsci.2011.10.002> [Accessed November 10, 2011].
- Edelman, P.H., 2006. Minimum Total Deviation Apportionments. In B. Simeone & F. Pukelsheim, eds. *Mathematics and Democracy*. Berlin Heidelberg: Springer, pp. 55–64. Available at: [http://dx.doi.org/10.1007/3-540-35605-3\\_4](http://dx.doi.org/10.1007/3-540-35605-3_4).
- Gambarelli, G., 1999. Minimax Apportionments. *Group Decision and Negotiation*, 8, pp.441–461.
- Gambarelli, G. & Palestini, A., 2007. Minimax Multi-District Apportionments. *Homo Oeconomicus*, 24, pp.335–356. Available at: [http://www2.dse.unibo.it/dsa/utenti/arsen.palestini2@unibo.it/attachments/01 Gambarelli.-24-3.pdf](http://www2.dse.unibo.it/dsa/utenti/arsen.palestini2@unibo.it/attachments/01%20Gambarelli.-24-3.pdf) [Accessed September 6, 2012].
- Gilbert, E.J. & Schatz, J.A., 1964. An Ill-Conceived Proposal for apportionment of the US House of Representatives. *Operations Research*, 12(5), pp.768–773.
- Grimmett, G.R., 2011. European Apportionment via the Cambridge Compromise. Available at: <http://arxiv.org/abs/1105.4294> [Accessed October 31, 2011].
- Grimmett, G.R., Oelbermann, K.-F. & Pukelsheim, F., 2011. A power-weighted variant of the EU27 Cambridge Compromise. Available at: <http://arxiv.org/abs/1108.1315> [Accessed October 31, 2011].
- Gul, F. & Pendorfer, W., 2010. Strategic redistricting. *The American Economic Review*, 100(4), pp.1616–1641. Available at: <http://www.ingentaconnect.com/content/aea/aer/2010/00000100/00000004/art00012> [Accessed September 19, 2012].
- Gödri, I. & Spéder, Z., 2009. Belföldi vándorlás. In J. Monostori et al., eds. *Demográfiai portré*. Budapest: KSH Népeségstudományi Kutató Intézet, pp. 109–117. Available at: [http://www.demografia.hu/letoltes/kiadvanyok/DemPort/10godri\\_speder.pdf](http://www.demografia.hu/letoltes/kiadvanyok/DemPort/10godri_speder.pdf).
- Handley, L., 2007. Boundary Delimitation. In *Challenging the Norms and Standards of Election Administration*. IFES, pp. 59–74.
- Hosli, M.O., 1999. Power, Connected Coalitions, and Efficiency: Challenges to the Council of the European Union. *International Political Science Review*, 20(4), pp.371–391. Available at: <http://ips.sagepub.com/cgi/doi/10.1177/0192512199204004> [Accessed May 15, 2011].

- Karpov, A., 2008. Measurement of disproportionality in proportional representation systems. *Mathematical and Computer Modelling*, 48(9-10), pp.1421–1438. Available at: <http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0895717708001933> [Accessed August 13, 2012].
- Kellermann, T., 2011. The minimum-based procedure: A principled way to allocate seats in the European Parliament. *Mathematical Social Sciences*. Available at: <http://dx.doi.org/10.1016/j.mathsocsci.2011.10.004> [Accessed November 10, 2011].
- Kóczy, L.Á., 2011. Beyond Lisbon: Demographic trends and voting power in the European Union Council of Ministers. *Mathematical Social Sciences*, 63(2), pp.158–152. Available at: <http://dx.doi.org/10.1016/j.mathsocsci.2011.08.005> [Accessed October 7, 2011].
- Kóczy, L.Á., 2010. Lisszaboni kilátások: Magyarország befolyása az Európai Unióban a lisszaboni reform után. , pp.1–12.
- Kóczy, L.Á. & Pintér, M., 2011. Az ellenzék ereje - általánosított súlyozott szavazási játékok. *Közgazdasági Szemle*, 58(6), pp.543–551. Available at: <http://www.kszemle.hu/tartalom/cikk.php?id=1248>.
- Központi Statisztikai Hivatal, 2011. A továbbszámított népesség száma megyék és a település jogállása szerint 1990-2010.
- Lauwers, L. & Puyenbroeck, T.V., 2006. The Hamilton Apportionment Method Is Between the Adams Method and the Jefferson Method. *Mathematics of Operations Research*, 31(2), pp.390–397. Available at: <http://www.jstor.org/stable/10.2307/25151731> [Accessed September 18, 2012].
- Mészáros, J., Solymosi, N. & Speiser, F., 2007. Spatial distribution of political parties in Hungary 1990–2006. *Political Geography*, 26(7), pp.804–823. Available at: <http://dx.doi.org/10.1016/j.polgeo.2007.06.002> [Accessed September 19, 2012].
- Mészáros, J. & Szakadát, I., 1993. *Választási eljárások - választási rendszerek*, Budapest. Available at: <http://mycite.omikk.bme.hu/doc/88355.pdf>.
- Országos Választási Iroda, 2010. Választókerületek és a közgyűlésben betölthető mandátumok száma az egyes megyékben. Available at: [http://www.valasztas.hu/hu/onkval2010/467/467\\_0\\_index.html](http://www.valasztas.hu/hu/onkval2010/467/467_0_index.html) [Accessed November 18, 2011].
- Penrose, L.S., 1946. The elementary statistics of majority voting. *Journal of the Royal Statistical Society*, 109(1), pp.53–57. Available at: <http://www.jstor.org/stable/2981392>.
- Pitlik, H., Schneider, F. & Strotmann, H., 2006. Legislative Malapportionment and the Politicization of Germany's Intergovernmental Transfer System. *Public Finance Review*, 34(6), pp.637–662. Available at: <http://pfr.sagepub.com/content/34/6/637.short>.
- Samuels, D. & Snyder, R., 2001. The Value of a Vote: Malapportionment in Comparative Perspective. *British Journal of Political Science*, 31(04), pp.651–671. Available at: [http://journals.cambridge.org/abstract\\_S0007123401000254](http://journals.cambridge.org/abstract_S0007123401000254) [Accessed September 19, 2012].

Serafini, P., 2011. Allocation of the EU Parliament seats via integer linear programming and revised quotas. *Mathematical Social Sciences*. Available at: <http://dx.doi.org/10.1016/j.mathsocsci.2011.08.006> [Accessed November 10, 2011].

Tasnádi, A., 2007. Statikus elosztások jellemzése. *Köz-gazdaság*, 2(2), pp.103–126.

Tasnádi, A., 2011. The Political Districting Problem: A Survey. *Society and Economy*. Available at: <http://www.akademiai.com/content/c57v8242111x0673/?p=ff2d9c8d8bc44a2b917b2d0b52147336&pi=8>.

Venice Commission, 2002. *Code of Good Practice in Electoral Matters*, Venice: European Commission for Democracy through Law.

Życzkowski, K. & Słomczyński, W., 2004. *Voting in the European Union: The square root system of Penrose and a critical point*, Warsaw. Available at: <http://arxiv.org/abs/cond-mat/0405396>.