

# OFDM et CDMA, approche unifiée et méthode de conception de séquences d'étalement adaptées au canal

## OFDM and CDMA, unified approach and channel-matched spreading codes generation algorithm

M. Terré<sup>1</sup>, L. Féty<sup>1</sup>, D. Zanatta Filho<sup>1,2</sup> et N. Hicheri<sup>3</sup>

{terre,fety,zanatta}@cnam.fr, hicheri\_nizar@yahoo.fr

<sup>1</sup>Conservatoire National des Arts et Métiers, 292 rue Saint Martin, 75003 Paris, France

<sup>2</sup>DSPCom, FEEC-UNICAMP, Av Albert Einstein 400, CP 6101, 13083-970 Campinas-SP, Brésil

<sup>3</sup>École Nationale d'Ingénieurs de Gabès, route de Médénine, 6029 Gabès, Tunisie

Manuscrit reçu le 8 juillet 2004

### Résumé et mots clés

Cet article s'appuie sur un formalisme matriciel qui permet de présenter les approches TDMA, CDMA, MC-CDMA et OFDM de manière unifiée. La formalisation généralise l'emploi du préfixe cyclique, initialement réservé à l'OFDM, à toutes ces approches. Elle permet de mettre en lumière plusieurs résultats fondamentaux de manière très rapide. On montre ainsi que si l'on cherche des séquences d'étalement CDMA qui sont orthogonales et dont l'orthogonalité résiste à une imprécision temporelle d'un élément de la séquence alors, obligatoirement, ces séquences sont les sinusoides complexes utilisées en OFDM. On développe ensuite les différentes formes possibles des récepteurs. Le récepteur MMSE, le récepteur RAKE et le récepteur classiquement utilisé dans le cas de l'OFDM sont exprimés en faisant intervenir une même matrice « canal » qui intègre à elle seule l'insertion du préfixe cyclique, la convolution par la réponse impulsionnelle du canal et la suppression du préfixe cyclique. Enfin, dans le cas d'un canal connu, on introduit une méthode de conception de séquences d'étalement adaptées au canal. Les séquences de cette famille affichant des performances de transmission inégales, on propose alors de leur appliquer, comme on le fait pour l'OFDM, un algorithme d'allocation de puissances d'émission et de schémas de modulation. On montre alors que les performances de transmission obtenues sont comparables à celles de l'OFDM.

OFDM, CDMA, MC-CDMA, Préfixe Cyclique, MMSE, RAKE, Allocation de puissance.

### Abstract and key words

In this paper TDMA, CDMA, MC-CDMA and OFDM are presented through an unified formalism. The cyclic prefix insertion is extended to all approaches presented and not only restricted to OFDM. Many fundamental results are highlighted. It is for example shown that if we are looking for a family of orthogonal spreading sequences being yet orthogonal after a one chip delay then we have not another choice than OFDM.

Different kind of receivers, involving a same « channel » matrix, are presented: OFDM receiver, Rake receiver and MMSE receiver. All these receivers involve a same channel matrix representing the effect of the propagation channel, the cyclic

prefix insertion and its suppression. Finally an algorithm for generating spreading sequences matched to a given propagation channel is introduced. Spreading sequences generated having unequal transmission properties, a power and modulation allocation algorithm is introduced for them. Performances obtained are then very close to those obtained through the OFDM approach.

OFDM, CDMA, MC-CDMA, Cyclic Prefix, MMSE, RAKE, Power allocation.

## 1. Introduction

Au cours des vingt dernières années de nombreuses solutions de communications numériques ont vu le jour. Les traditionnels systèmes de transmission « série » pour lesquels les informations à transmettre sont émises successivement au cours du temps ont été mis en concurrence avec de nouvelles approches dans lesquelles les informations sont transmises simultanément. Par analogie, on peut alors parler de transmission « parallèle ». Ces nouvelles approches ont été imaginées afin, soit de mieux exploiter le canal de propagation (OFDM [1]), soit de mieux tirer profit d'un ensemble de ressources de transmission dans un contexte d'accès multiutilisateurs (CDMA [2]). Actuellement ces différentes méthodes ont tendance à se fusionner (MC-CDMA [3]) et à intégrer une dimension spatiale (MIMO [4]) afin d'obtenir les meilleures efficacités de transmission possibles.

Ces différentes solutions ont été décrites, soit comme des mécanismes d'accès multiples dont l'abréviation anglaise se termine par la lettre « A » pour signifier « Multiple Access », soit comme des techniques de multiplexage avec l'abréviation « M » pour signifier « Multiplex ». Ainsi l'OFDM dont il va être fait mention dans cet article est en général présentée comme une technique de multiplexage plutôt que comme une technique d'accès proprement dite.

Cette dissociation sémantique a tendance à opposer ces différentes méthodes et à les spécialiser pour certains contextes de transmission. Or il apparaît qu'il n'y a ni opposition, ni domaines réservés à ces différentes solutions et qu'elles peuvent toutes être adaptées à n'importe quel contexte.

Pour s'en convaincre, le premier travail à effectuer consiste à proposer un formalisme commun pour décrire ces solutions et à exprimer les différentes formes possibles des récepteurs. C'est là l'objet du paragraphe 2 de cet article. Une fois ce formalisme posé, on se propose de se placer dans un contexte typique de l'OFDM : la transmission sur support guidé avec voie de retour, et de concevoir une solution CDMA adaptée à ce contexte. Ceci conduit alors au développement, dans le paragraphe 3, d'une méthode originale de conception de codes d'étalement CDMA adaptés à un canal de propagation connu. Des comparaisons de performances obtenues, par simulations, sur divers canaux de propagation, permettent alors d'analyser les avantages et inconvénients des différentes approches. Ces comparaisons sont présentées lors du paragraphe 4.

L'objectif de cet article est ainsi de regrouper de manière unifiée toutes ces méthodes de transmission et de montrer qu'elles ne diffèrent en définitive que par un choix initial d'une matrice de mélange.

## 2. Formalisme commun

### 2.1. Introduction

On se place dans le cas d'une transmission d'un émetteur vers plusieurs récepteurs à un instant  $t = kT_s$  et l'on considère un intervalle de temps  $\Delta t = T_s$ . Durant cet intervalle de temps l'émetteur doit transmettre un vecteur de  $N$  symboles de communications vers un ensemble de  $K$  points de réception.

L'émetteur peut typiquement être un point d'accès radio, une station de base ou tout autre équipement. De la même manière, les points de réception sont par exemple un ensemble de terminaux UMTS [5] attachés à une même station de base ou un ensemble de terminaux WLAN attachés à un point d'accès.

Enfin l'intervalle de temps  $\Delta t$  peut par exemple représenter la durée d'un time slot (en UMTS voie descendante il serait typiquement égal à  $667\mu\text{s}$ ) ou un fragment de time slot durant lequel un nombre entier de symboles sont transmis.

On notera  $X(t)$  le vecteur constitué par les  $N$  symboles à transmettre entre  $t$  et  $t + \Delta t$  :

$$X(t) = (x_1(t) \ x_2(t) \ \dots \ x_N(t))^T \quad (1)$$

Le nombre de symboles transmis  $N$  peut très bien être différent du nombre  $K$  de récepteurs car les débits vers ces derniers ne sont pas obligatoirement les mêmes. Plusieurs cas de figure sont possibles, en allant du cas où les symboles sont tous pour des terminaux différents ( $K = N$ ), jusqu'au cas où tous les symboles sont à destination d'un seul et même point de réception ( $K = 1$ ). Enfin les valeurs de  $N$  et  $K$  sont variables dans le temps.

Dans l'ensemble des méthodes de transmission qui vont être présentées dans cet article, l'émetteur utilise une matrice de mélange  $Z(t)$  afin de transformer le vecteur de symboles  $X(t)$  en un vecteur  $Y(t)$  défini de manière linéaire par le produit matriciel suivant :

$$Y(t) = \mathbf{Z}(t)X(t) \tag{2}$$

Le vecteur  $Y(t)$  sera toujours de taille fixe  $M$  et tel que  $M \geq N$ , le cas  $M < N$  qui correspondrait en définitive à une compression de l'information, ne sera pas considéré dans cet article.

Les composantes  $y_i(t)$  du vecteur  $Y(t)$  ainsi obtenues sont alors transmises séquentiellement par l'émetteur.

## 2.2. Caractère universel du formalisme

Le formalisme proposé rend compte de tous les systèmes qui seront étudiés dans cet article. Quelques exemples vont être abordés.

### 2.2.1. Système d'accès TDMA

Le TDMA [6] correspond au cas le plus simple, on a  $N = M$  et la matrice  $\mathbf{Z}(t)$  est alors la matrice identité de taille  $M \times M$ .

$$\mathbf{Z}(t) = \mathbf{I} \tag{3}$$

$Y(t) = X(t)$  les symboles  $x_i(t)$  sont transmis séquentiellement vers les terminaux.

### 2.2.2. Système d'accès CDMA quelconque

On considère ici un système d'accès CDMA avec un facteur d'étalement de longueur fixe et identique pour les  $N$  symboles considérés. Dans ce cas les colonnes de la matrice  $\mathbf{Z}(t)$  sont en général à valeurs dans  $\{\pm 1\}$  et constituées par les séquences d'étalement utilisées pour étaler les  $N$  symboles. Cette matrice peut elle même être constituée par le produit de plusieurs matrices de séquences. On peut ainsi imaginer que la matrice  $\mathbf{Z}(t)$  est égale au produit d'une matrice diagonale  $\mathbf{D}(t)$  qui change toutes les  $\Delta t$  secondes par une matrice de séquences fixe. Cette matrice de séquences fixes peut typiquement être constituée par un ensemble de  $N$  colonnes extraites d'une matrice carrée ( $M \times M$ ) de séquences de Hadamard. En notant  $\mathbf{H}_a$  une telle matrice, on a alors :

$$\mathbf{Z}(t) = \mathbf{D}(t)\mathbf{H}_a \tag{4}$$

Avec la terminologie de l'UMTS les colonnes de la matrice  $\mathbf{H}_a$  sont ainsi appelées les séquences de canalisation (channelization codes) et la diagonale de la matrice  $\mathbf{D}(t)$  est appelée la séquence d'embrouillage (scrambling code).

### 2.2.3. Système d'accès CDMA type UMTS FDD

En UMTS FDD (W-CDMA) [5], la forme d'onde de la voie descendante est formée par la somme de plusieurs flux binaires de débits différents étalés respectivement par des séquences de longueurs différentes. Le formalisme proposé peut cependant encore s'appliquer.

Pendant la durée d'un time slot, pour chaque flux, le modulateur va transmettre  $n_k$  bits avec :  $n_k = 10 \times 2^k$  pour  $k$  variant de 0 à 7. Le modulateur pourra donc transmettre 10, 20, 40, 80, 160, 320, 640 ou 1280 bits. Ces bits seront ensuite étalés au moyen d'une séquence d'étalement de longueur  $SF_k$ , telle que  $SF_k = \frac{512}{2^k}$ .

Pour chaque flux le modulateur générera donc en définitive 5120 chips qui seront ensuite émis sur les deux voies d'une modulation QPSK. Ceci conduira finalement à 2560 chips «complexes» émis en 667µs, ce qui donne un débit global d'environ 3,84 Mchips/s. Une des originalités de l'UMTS vient ainsi du fait que plusieurs flux, avec des facteurs d'étalement différents, peuvent cohabiter sur le même time slot. On peut alors «aller» d'un flux qui transmettrait 1280 bits avec un facteur d'étalement égal à 4 jusqu'à un flux de 10 bits avec un facteur d'étalement égal à 512.

Avec le formalisme proposé, il suffit de constituer le vecteur  $X(t)$  avec des ensembles de symboles à destination des différents terminaux. Les colonnes de la matrice d'étalement sont alors complétées ou précédées par des série de valeurs à 0. Ainsi par exemple, on peut représenter les 5120 chips réels  $y_m$  correspondant à l'étalement des 10 bits  $x_n$  à destination d'un même terminal par l'écriture suivante :

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ y_{5120} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_{512} \end{bmatrix} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \begin{bmatrix} s_{513} \\ \vdots \\ s_{1024} \end{bmatrix} & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \begin{bmatrix} s_{4609} \\ \dots \\ s_{5120} \end{bmatrix} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ x_{10} \end{pmatrix} \tag{5}$$

### 2.2.4. L'OFDM

En OFDM on retrouve l'opération matricielle précédente. Cette fois la matrice des séquences «d'étalement»  $\mathbf{Z}(t)$  est carrée de taille ( $M \times M$ ) et invariante dans le temps.

Les éléments de la matrice sont à valeurs complexes et l'élément  $z_{n,m}$ , correspondant à la ligne  $n$  et à la colonne  $m$  (les lignes et les colonnes étant numérotées de 0 à  $M - 1$ ), s'écrit :

$$z_{n,m} = \frac{1}{\sqrt{M}} e^{+j \frac{2\pi nm}{M}} \tag{6}$$

On choisit ici une normalisation par  $\frac{1}{\sqrt{M}}$  pour avoir conservation de la norme entre les vecteurs  $X_M(t)$  et  $Y_M(t)$ . L'opération matricielle «d'étalement» correspond simplement

à la Transformée de Fourier Discrète inverse du vecteur  $X_M(t)$ . Dans le cas de l'OFDM et dans la suite de cet article on notera  $F$  la matrice ( $M \times M$ ) des séquences d'« étalement » utilisées. Bien entendu parler d'étalement dans ce cas est un abus de langage car les différents symboles  $x_i(t)$  sont localisés dans des bandes fréquentielles distinctes et ne sont pas « étalés » spectralement. On pourrait parler de matrice d'encodage mais cela conduirait à introduire une nouvelle terminologie spécifique. On conservera donc par la suite l'abus de langage mentionné.

### 2.2.5. Le CDMA multiporteuses (MC-CDMA)

La formalisation matricielle présentée conduit tout naturellement à envisager de « construire » des matrices d'étalement au moyen de produits matriciels. On peut ainsi imaginer un système de transmission dans lequel un vecteur de  $N$  symboles de communications est transformé en un vecteur de  $M$  chips, lesquels sont ensuite transmis sur  $M$  porteuses orthogonales. En partant d'un étalement du type de celui proposé en UMTS (produit d'une matrice de Hadamard par une matrice diagonale), on aura finalement une approche multiporteuses qui donnera :

$$Y(t) = FD(t)H_a X(t) \tag{7}$$



ce qui revient en définitive à utiliser une matrice d'étalement  $Z(t)$  à valeurs complexes qui se factorise par :

$$Z(t) = FD(t)H_a \tag{8}$$

L'intérêt principal de cette approche réside alors dans le fait que, quel que soit l'instant  $t$  choisi, les différentes séquences d'étalement occupent de manière uniforme le spectre disponible. La diversité fréquentielle du canal est donc parfaitement utilisée. Pour le vérifier, il suffit de calculer les Transformées de Fourier des différentes séquences d'étalement et de vérifier que les modules des termes obtenus sont tous égaux à 1.

$$TF\{séquences\} = F^H Z(t) = F^H FD(t)H_a = D(t)H_a \tag{9}$$

Lorsque l'on « combine » ainsi l'étalement CDMA et l'OFDM, on parle alors de systèmes Multi Carrier CDMA (MC-CDMA) et le résultat présenté, c'est-à-dire l'occupation de la totalité de la bande de transmission, pour n'importe quel symbole, à n'importe quel instant est la propriété la plus importante de cette approche.

Par comparaison, on remarquera que, pour une approche CDMA, cette propriété n'est vérifiée qu'en moyenne. Ainsi en moyenne la Transformée de Fourier d'une séquence CDMA qui évolue dans le temps, occupe bien la totalité de la bande de fréquence qui lui est allouée. Mais de manière instantanée une séquence de  $M$  chips a une Transformée de Fourier qui peut présenter des sélectivités fréquentielles.

## 2.3. L'orthogonalité des séquences d'étalement

### 2.3.1. Propriété fondamentale

Dans presque tous les systèmes CDMA on utilise des matrices d'étalement  $Z(t)$  unitaires ( $Z^H(t)Z(t) = I$ ), on dit alors que les séquences d'étalement sont orthogonales.

Cette propriété permet de reconstituer le vecteur de symboles  $X(t)$  à partir du vecteur de chips  $Y(t)$  en utilisant très simplement en réception la matrice d'étalement transconjuguée. Ainsi dans le cas où le signal reçu est entaché d'un bruit blanc additif, le désétalement par  $Z^H(t)$  conduit à :

$$\hat{X}(t) = Z^H(t)(Z(t)X(t) + B(t)) \tag{10}$$

Dans cette expression le vecteur  $B(t) = (b_1(t) b_2(t) \dots b_M(t))^T$  représente les échantillons de bruit additifs reçus que l'on suppose tous de même variance  $\sigma^2$ . On a donc :

$$\hat{X}(t) = X(t) + B'(t) \tag{11}$$

Avec un nouveau vecteur d'échantillons de bruits :  $B'(t) = Z^H B(t)$ .

Le caractère unitaire de la matrice  $Z(t)$  assure alors que les nouveaux échantillons de bruit restent décorrélés :  $E[B'(t)B'^H(t)] = \sigma^2 I$ . Les symboles peuvent ainsi être décodés indépendamment les uns des autres.

Cependant plusieurs interrogations peuvent être soulevées concernant cette orthogonalité des séquences d'étalement. On peut ainsi analyser la « résistance » de cette orthogonalité à de légers écarts de synchronisation ou à la traversée du canal de propagation. Pour répondre à cette question et pour plusieurs autres développements, il est alors utile d'introduire une matrice de décalage.

### 2.3.2. Matrice de décalage

Dans plusieurs développements qui vont être présentés, il va être nécessaire de formaliser un décalage d'un ou plusieurs échantillons du vecteur  $Y(t)$ . Pour cela on peut introduire la matrice de décalage  $J$  de taille ( $M \times M$ ) définie de la manière suivante :

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ I & 0 \end{pmatrix} \tag{12}$$

Exceptionnellement  $I$  représente ici la matrice identité de taille ( $M - 1 \times M - 1$ )

Appliquée au vecteur  $Y(t)$ , la matrice  $J$  a donc pour effet de placer la dernière composante du vecteur en première position et de décaler vers le bas toutes les autres composantes du vecteur.

$$JY(t) = \begin{pmatrix} y_M(t) & y_1(t) & \dots & y_{M-1}(t) \end{pmatrix}^T \tag{13}$$

2.3.3. Le maintien de l'orthogonalité

On se propose ici de rechercher une famille de séquences d'étalement orthogonales qui resteraient orthogonales entre elles pour de très légers décalages (en supposant les séquences cycliques). Supposons par exemple que l'on recherche, pour commencer, une famille de séquences restant orthogonales pour un simple décalage d'un chip (élément de base de la séquence). La matrice des séquences décalées peut alors s'exprimer au moyen de la matrice de décalage sous la forme:  $\mathbf{JZ}(t)$ . Les deux conditions d'orthogonalité conduisent alors au système linéaire suivant

$$\begin{cases} \mathbf{Z}^H(t)\mathbf{Z}(t) = \mathbf{I} \\ \mathbf{Z}^H(t)(\mathbf{JZ}(t)) = \mathbf{D}(t) \end{cases} \quad (14)$$

La matrice  $\mathbf{D}(t)$  représente une matrice diagonale dont les valeurs sont quelconques. La deuxième équation du système linéaire donne donc:

$$\mathbf{Z}^H(t)\mathbf{JZ}(t) = \mathbf{D}(t) \quad (15)$$

Si on considère alors un système avec une capacité maximale, c'est-à-dire avec  $N = M$  symboles transmis, la matrice de séquences d'étalement est carrée et la première équation du système permet d'écrire:  $\mathbf{Z}^{-1}(t) = \mathbf{Z}^H(t)$ , l'équation précédente devient alors:

$$\mathbf{J} = \mathbf{Z}(t)\mathbf{D}(t)\mathbf{Z}^{-1}(t) \quad (16)$$

On reconnaît alors la décomposition en éléments propres de la matrice de décalage. Les séquences d'étalement, qui constituent les colonnes de la matrice  $\mathbf{Z}(t)$  sont ainsi les vecteurs propres de la matrice  $\mathbf{J}$ . La matrice  $\mathbf{J}$  étant une matrice circulante on sait [7] que ses vecteurs propres sont les colonnes de la matrice  $\mathbf{F}$  utilisée en OFDM. Il en découle alors directement que  $\mathbf{Z}(t) = \mathbf{F}$ . En définitive, la contrainte de conservation de l'orthogonalité pour un décalage d'un chip nous conduit directement aux séquences d'OFDM qui restent orthogonales pour n'importe quel décalage.

2.4. Formalisation du canal multitrajets et introduction du préfixe cyclique

On peut toujours (sous hypothèse de canal linéaire) formaliser la traversée d'un canal de propagation par la convolution du signal émis par la réponse impulsionnelle du canal et par l'ajout de bruit additif. De plus on intègre en général dans le « canal » l'effet des filtres d'émission et de réception ce qui permet de considérer que la réponse impulsionnelle du canal est à bande limitée et peut donc être échantillonnée au rythme des échantillons de signal  $T_e = \frac{T_s}{M}$ .

On formalisera donc la réponse impulsionnelle du canal de propagation de la manière suivante:

$$h(\tau, t) = \sum_{i=0}^{L-1} h_i(t)\delta(\tau - iT_e) \quad (17)$$

Les coefficients  $h_i(t)$  représentent les coefficients de l'interpolation au rythme  $T_e$  de la réponse impulsionnelle du canal valide à l'instant  $t$ , c'est-à-dire, avec les conventions retenues dans cet article, durant l'intervalle  $[kT_s, (k+1)T_s]$ .

Les solutions de transmission à base d'OFDM (Hiperlan2 [8], DVB-T [9], ADSL [10]) comportent en général l'insertion d'un préfixe cyclique juste avant l'émission des signaux. Ce préfixe cyclique n'est cependant pas réservé à l'OFDM et peut-être utilisé pour des formes d'ondes mono-porteuse [11][12]. Il consiste simplement à répéter la fin du signal et à l'émettre en tête. Ainsi, insérer un préfixe cyclique de  $p$  échantillons sur le vecteur  $Y(t)$  aura pour effet de transformer ce dernier en un nouveau vecteur  $Y_e(t)$  de  $M + p$  échantillons constitué de la manière suivante:

$$Y_e(t) = \left( y_{M-p+1}(t) \dots y_M(t) y_1(t) \dots y_M(t) \right)^T \quad (18)$$

Ce préfixe cyclique va permettre d'analyser les signaux reçus par blocs en pouvant considérer qu'il s'agit de signaux cycliques. Bien entendu, il entraîne une diminution de l'efficacité spectrale car il faut maintenant transmettre  $M + p$  échantillons au lieu de  $M$  pour la même quantité d'information.

Pour avoir un intérêt le préfixe cyclique doit correspondre à une durée temporelle supérieure ou égale à la durée de la réponse impulsionnelle du canal. Avec les notations introduites ici, on doit donc avoir au minimum  $L - 1 \leq p$ . Le compromis idéal, pour ne pas trop pénaliser l'efficacité spectrale, consiste à avoir exactement  $p = L - 1$ . Dans un tel cas on rajoute ainsi uniquement le débit supplémentaire nécessaire pour lutter efficacement contre le canal de propagation. On se placera dorénavant dans ce cas de figure.

En omettant le bruit additif, le vecteur  $R(t)$  des  $M + p$  échantillons du signal reçu peut alors s'exprimer vectoriellement par:

$$R(t) = h_0(t) \begin{pmatrix} y_{M-p+1}(t) \\ \vdots \\ y_M(t) \\ y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_M(t) \end{pmatrix} + h_1(t) \begin{pmatrix} y_M(t - T_s) \\ \vdots \\ y_{M-1}(t) \\ y_M(t) \\ y_1(t) \\ \vdots \\ y_{M-1}(t) \end{pmatrix} + \dots + h_p(t) \begin{pmatrix} y_{M-p+1}(t - T_s) \\ \vdots \\ y_M(t - T_s) \\ y_{M-p+1}(t) \\ \vdots \\ y_1(t) \\ \vdots \end{pmatrix} \quad (19)$$

En analysant le vecteur  $R(t)$ , on constate que les  $p$  premières composantes sont constituées par un mélange du vecteur  $Y(t)$  et du vecteur  $Y(t - T_s)$ . Les composantes d'indice  $(t - T_s)$  entraînent une dépendance entre le vecteur de symboles  $X(t)$  transmis à l'instant  $t = kT_s$  et le vecteur  $X(t - T_s)$  transmis à l'instant  $(k - 1)T_s$ . Cette dépendance conduit donc à une complexité accrue du récepteur qui devra calculer des corrélations glissantes afin de pouvoir estimer convenablement  $\hat{X}(t)$  à partir de l'observation de  $R(t)$ . Par contre, si l'on observe principalement les  $M$  dernières composantes du vecteur  $R(t)$ , on constate que ces dernières s'obtiennent uniquement à partir des composantes d'indice  $t$  du vecteur  $Y(t)$  et représentent alors le produit de convolution cyclique des coefficients de la réponse impulsionnelle du canal par les composantes du vecteur  $Y(t)$ . Cette propriété fondamentale va être mise à profit dans la définition de plusieurs récepteurs. On considérera donc dorénavant que, lors de la réception, après une étape de synchronisation, les  $p$  premières composantes du vecteur  $R(t)$  sont supprimées.

D'un point de vue matriciel, en considérant uniquement l'observation tronquée du vecteur  $R(t)$ , l'effet du canal de propagation se résume alors au produit du vecteur  $Y(t)$  par une matrice « canal »  $H(t)$  de taille  $(M \times M)$  définie directement à partir de la matrice de décalage  $J$ .

On a ainsi :

$$S \quad H(t) = h_0(t)I + h_1(t)J + h_2(t)J^2 + \dots + h_p(t)J^p \quad (20)$$

Avec la convention  $J^0 = I$ , on peut écrire directement :

$$R(t) = H(t)Y(t) \quad (21)$$

avec :

$$H(t) = \sum_{k=0}^p h_k(t)J^k \quad (22)$$

En réintroduisant le bruit additif reçu dans la bande de réception, on introduit le vecteur  $R'(t)$  constitué par les  $M$  échantillons reçus. On a alors :

$$R'(t) = H(t)Y(t) + B(t) \quad (23)$$

Exprimé directement en fonction du vecteur de symboles émis, le signal reçu s'écrit finalement :

$$R'(t) = H(t)Z(t)X(t) + B(t) \quad (24)$$

On rappelle que cette formalisation simple et compacte suppose l'emploi d'un préfixe cyclique à l'émission et la suppression de ce préfixe à la réception. Dans la suite de cet article on se placera toujours dans cette hypothèse de travail. Ceci signifie que l'on se propose de généraliser l'emploi du préfixe cyclique pour n'importe quelle forme de la matrice  $Z(t)$ . Ainsi l'emploi du préfixe cyclique, très utile en OFDM, permet pour d'autres formes d'onde de lutter contre l'interférence entre symboles. Son emploi va donc être étendu à n'importe quel type d'accès

CDMA, MC-CDMA et même éventuellement TDMA. Cette hypothèse de travail va permettre de développer simplement les différents récepteurs possibles pour les différentes formes de la matrice  $Z(t)$  et de mener une comparaison « équilibrée » c'est-à-dire avec des pertes d'insertion (nombre de symboles répétés dans le préfixe par rapport au nombre de symboles utiles) égales pour les différents systèmes d'accès.

## 2.5. Les différents récepteurs

Différents récepteurs vont être présentés dans ce paragraphe. Ils seront tous exprimés en fonction des termes exacts de la réponse impulsionnelle du canal. Dans un cas réel de transmission ces termes devraient être estimés. Il conviendrait alors de bien distinguer le terme exact  $h_k(t)$  de son estimation  $\hat{h}_k(t)$ . Cependant pour formaliser les récepteurs « optimaux », on supposera que l'on dispose des termes exacts.

### 2.5.1. Le récepteur MMSE

N'ayant pas introduit de codage correcteur d'erreurs à l'émission, on recherche uniquement des opérations linéaires à effectuer sur les composantes du vecteur  $R'(t)$  pour estimer le vecteur des symboles transmis.

On peut donc introduire une matrice  $W(t)$  constituée par les filtres de réception qui permettent d'estimer au mieux, au sens des moindres carrés (critère MMSE [13]), chaque composante du vecteur  $X(t)$ .

La matrice  $W(t)$  recherchée doit donc optimiser le critère suivant :

$$W(t) / \text{Min } E \left[ \left| X(t) - W^H(t)R'(t) \right|^2 \right] \quad (25)$$

Expression dans laquelle l'opérateur  $E \left[ \cdot \right]$  représente l'espérance mathématique.

La solution des moindres carrés est alors classique (solution de Wiener [14]) et l'on obtient après annulation des dérivées partielles de l'expression précédente :

$$W(t) = E \left[ R'(t)R'^H(t) \right]^{-1} E \left[ R'(t)X^H(t) \right] \quad (26)$$

En remplaçant  $R'(t)$  par sa valeur, on peut développer les deux espérances rencontrées dans l'équation précédente et aboutir en définitive à :

$$W_{mmse}(t) = \left( H(t)Z(t)P(t)Z^H(t)H^H(t) + \sigma^2 I \right)^{-1} H(t)Z(t)P(t) \quad (27)$$

avec :  $P(t) = E \left[ X_N(t)X_N^H(t) \right]$  et  $E \left[ B(t)B^H(t) \right] = \sigma^2 I$

Comme on peut le constater dans l'équation précédente, la mise en œuvre de ce récepteur est extrêmement complexe. En effet, à chaque instant  $t = kT_s$ , il faut théoriquement :

1. estimer la réponse impulsionnelle du canal afin de «reconstituer» la matrice canal  $\mathbf{H}(t)$ ,
  2. connaître les puissances des symboles émis afin de former la matrice  $\mathbf{P}(t)$ ,
  3. estimer la puissance  $\sigma^2$  du bruit additif.
  4. enfin il faut former la matrice:  $\mathbf{H}(t)\mathbf{Z}(t)\mathbf{P}(t)\mathbf{Z}^H(t)\mathbf{H}^H(t) + \sigma^2\mathbf{I}$ , l'inverser et la multiplier par la matrice  $\mathbf{H}(t)\mathbf{Z}(t)\mathbf{P}(t)$ .
- On constate que l'opération a un coût de calcul très important, essentiellement du à l'inversion de la matrice de taille  $(M \times M)$  qui conduit à un nombre d'opérations qui est proportionnel à  $o(M^3)$  opérations. Il est donc naturel de se diriger vers une version simplifiée pour cette matrice, c'est là l'objet du récepteur RAKE [2][14].

### 2.5.2. Le récepteur RAKE

Étant donné que c'est l'inversion matricielle qui est l'opération la plus pénalisante en termes de coût de calcul, l'approche suivie dans l'élaboration du récepteur RAKE (encore appelé MRC pour Maximum Ratio Combining [15]) consiste simplement à supprimer cette matrice. Pour rester homogène, on supprime alors aussi la matrice diagonale des puissances  $\mathbf{P}(t)$  présente dans le terme restant. On aboutit alors simplement à :

$$\mathbf{W}(t) = \mathbf{H}(t)\mathbf{Z}(t) \tag{28}$$

Enfin pour éviter un cumul d'erreurs d'estimation et diminuer encore le coût de calcul, on «résume» la réponse impulsionnelle à ses  $L'$  termes de plus forts modules. On peut ainsi définir un ensemble d'indices  $S_K$  tels que  $k \in S_K \iff h_k(t)$  appartient au sous ensemble des  $L'$  termes de plus forts modules. On utilise alors une matrice canal réduite :

$$\mathbf{H}_{rake}(t) = \sum_{k \in S_K} h_k(t)\mathbf{J}^k \tag{29}$$

On obtient alors :

$$\mathbf{W}_{rake}(t) = \mathbf{H}_{rake}(t)\mathbf{Z}(t) \tag{30}$$

L'opération de désétalement devient alors :

$$X(t) = \mathbf{W}_{rake}^H(t)R'(t) = \sum_{k \in S_K} h_k^*(t)\mathbf{Z}^H(t)\mathbf{J}^k(t)^H R'(t) \tag{31}$$

On voit alors apparaître  $L'$  opérations de désétalement de versions décalées ( $\mathbf{J}^k(t)^H R'(t)$ ) du signal reçu. Ces  $L'$  désétalements sont ensuite sommés après pondération par le coefficient  $h_k^*(t)$  de la réponse impulsionnelle du canal (souvent appelé «amplitude du trajet»).

Ce récepteur est d'une grande simplicité de mise en œuvre car il n'effectue que des désétalements simples en utilisant directement la matrice des séquences employées pour l'étalement.

### 2.5.3. Le récepteur OFDM

Dans le cas de l' OFDM, la matrice de séquences d'étalement  $\mathbf{Z}(t)$  est carrée invariante et égale à la matrice de Fourier :

$\mathbf{Z}(t) = \mathbf{F}$ . Une fois la synchronisation du bloc d'échantillons (appelé «symbole OFDM») effectuée, le désétalement est réalisé au moyen d'une Transformée de Fourier. On effectue ainsi le produit :

$$\mathbf{F}^H R'(t) = \mathbf{F}^H (\mathbf{H}(t)\mathbf{F}X(t) + B(t)) \tag{32}$$

Deux remarques peuvent alors être faites :

1. La matrice canal  $\mathbf{H}(t)$  étant par construction une matrice circulante, on sait que cette matrice sera diagonalisée par le produit à droite et à gauche par les matrices de Fourier. On peut ainsi introduire la matrice diagonale de taille  $(M \times M)$  définie par  $\mathbf{T}(t) = \mathbf{F}^H \mathbf{H}(t)\mathbf{F}$ .
2. La matrice  $\mathbf{F}$  étant unitaire, les échantillons du vecteur  $B'(t) = \mathbf{F}^H B(t)$  restent décorrélés.

La dernière étape à effectuer par le récepteur est alors la multiplication par  $\mathbf{T}^{-1}(t)$ . Or cette matrice étant diagonale, cette multiplication est une simple division de chaque sortie de la Transformée de Fourier du signal reçu par un coefficient complexe. Cette opération porte en général le nom «d'égalisation fréquentielle».

$$\hat{X}(t) = \mathbf{T}^{-1}(t)\mathbf{F}^H R'(t) \tag{33}$$

En développant et en remplaçant  $\mathbf{T}(t)$  par sa valeur, il vient :

$$\hat{X}(t) = \left( \mathbf{H}^{-H}(t)\mathbf{F} \right)^H R'(t) \tag{34}$$

Le récepteur OFDM est donc égal à :

$$\mathbf{W}_{ofdm}(t) = \mathbf{H}^{-H}(t)\mathbf{F} \tag{35}$$

En développant la matrice diagonale  $\mathbf{T}(t)$  on montre directement que les termes diagonaux  $t_{m,m}(t)$  de cette matrice sont tels que :  $t_{m,m}(t) = \sum_{k=0}^{L-1} h_k(t)e^{-j2\pi \frac{mk}{M}}$ , on reconnaît alors les valeurs de la Transformée de Fourier de la réponse impulsionnelle du canal.

Le formalisme présenté dans ce paragraphe a permis d'exprimer de manière unifiée les différents récepteurs. Il permet alors de poursuivre l'analyse comparative en abordant la question du «waterfilling».

## 3. Le Waterfilling CDMA

### 3.1. Introduction

Les récepteurs présentés dans le paragraphe précédent étaient tous basés sur une connaissance de la réponse impulsionnelle du canal de propagation. Cette connaissance, en général issue d'un processus d'estimation, permet d'optimiser la structure du récepteur mais n'a pas été utilisée pour adapter la forme d'onde émise.

Ceci tient au fait que les exemples de récepteurs présentés étaient issus d'un contexte d'accès radio mobile pour lequel le canal varie très rapidement. Dans ce cas modifier la forme d'onde en fonction du canal estimé, demande à la fois un retour rapide d'information pour transmettre l'estimation de la réponse impulsionnelle du canal et parallèlement, un temps d'estimation de cette dernière quasiment nul.

Par contre, lorsque la réponse impulsionnelle du canal est à variations lentes, ce qui est typiquement le cas pour une transmission sur un support guidé telle une paire de cuivre ou un câble, alors on peut mettre à profit la connaissance de cette réponse pour modifier la forme d'onde générée par l'émetteur [16].

En se plaçant dans de telles hypothèses, ce paragraphe va analyser les solutions mises en œuvre en OFDM et proposer de les adapter à d'autres formes d'ondes et plus particulièrement au CDMA.

### 3.2. Le Waterfilling

Lorsque le canal de propagation est connu, une des grandes forces de l'OFDM réside dans l'affectation de symboles issus de modulations différentes aux différentes porteuses. Ceci permet de concevoir une forme d'onde émise très bien adaptée au canal de propagation. Avec les notations matricielles utilisées, les composantes  $x_i(t)$  du vecteur  $X(t)$  sont donc issues de modulateurs différents. Elles ne «portent» ainsi pas toutes le même nombre de bits.

On considère souvent que le modulateur est à puissance constante [17], soit pour une évidente raison technologique, soit pour une raison de contraintes réglementaires. Dès lors le problème algorithmique à résoudre consiste à allouer de manière optimale chaque fragment  $\Delta p$  de puissance de l'émetteur afin de transmettre le plus de bits possibles. Dans cet article, l'algorithme d'affectation des schémas de modulations et des puissances correspondantes aux différentes porteuses sera appelé algorithme de waterfilling [18]. On notera cependant qu'il ne s'agit pas d'une véritable approche de waterfilling dans laquelle ce sont les puissances allouées à chaque sous bande qui sont optimisées, indépendamment des modulations, afin de maximiser la capacité de transmission globale.

Pratiquement, pour chaque nouveau bit à transmettre, l'algorithme analyse de manière itérative sur quelle porteuse il faut le transmettre pour que le coût de puissance additionnelle qu'il provoque soit le plus faible possible. Cette procédure d'allocation utilise nécessairement les cibles de performances des modulations choisies.

Supposons par exemple que l'on ait choisi d'utiliser une famille de modulations QAM et que nous soyons au début de la procédure de waterfilling avec une seule porteuse utilisée en QAM4. On considère alors deux nouveaux bits à transmettre. Soit on les ajoute sur la porteuse utilisée, mais il faut alors «passer» cette porteuse en QAM16, soit on crée une deuxième porteuse QAM4. L'analyse des courbes de performances des

modulations montre alors que, pour un même taux d'erreurs binaires, il faut un rapport  $E_b/N_0$  plus élevé en QAM16 qu'en QAM4. Si la réponse du canal était la même pour les deux porteuses et indépendamment des problèmes de facteur de crête, la solution la plus «économique», en terme de puissance émise, consisterait à créer la deuxième porteuse en QAM4. Cependant si le rapport signal sur bruit obtenu en réception pour la deuxième porteuse est plus faible que celui de la première porteuse, alors tout va dépendre de cet écart de rapport et de la différence des cibles visées en terme de rapport  $E_b/N_0$ .

Au cours de l'algorithme, des modulations QAM spectralement de plus en plus efficaces vont progressivement être introduites avec des cibles toutes différentes. L'algorithme est finalement obligé de procéder itérativement car c'est une fonction non linéaire ( $erfc(x)$  [14]) qui permet de passer du rapport signal sur bruit reçu au taux d'erreur binaire.

À la fin de la procédure de waterfilling on dispose des puissances et des types de modulations pour chaque sous bande tout en restant assuré que la puissance maximale d'émission n'est pas dépassée.

En procédant de la sorte on arrive finalement à des débits très importants car on a utilisé efficacement le canal de propagation en «chargeant» les sous bandes pour lesquelles on obtient un bon rapport signal sur bruit et en transmettant des débits plus faibles sur les sous bandes les plus défavorables. On constate aussi qu'au «grain» près des modulations QAM utilisées les puissances émises par bit dans les différentes sous bandes utilisées sont égales.

En reprenant le formalisme matriciel unifié qui est proposé dans cet article la capacité de l'OFDM à transmettre le maximum de bits pour une puissance donnée provient du fait que les vecteurs propres d'une matrice circulante sont les colonnes de matrice  $F$ . En effet, si l'on écrit le signal reçu hors addition de bruit thermique. On a alors :

$$R(t) = H(t)Z(t)X(t) \quad (36)$$

Si l'on cherche la matrice de séquences d'étalement qui maximise la puissance reçue après le canal de propagation, on doit alors utiliser une matrice de séquences d'étalement  $Z(t)$  qui maximise la norme du vecteur reçu pour n'importe quel vecteur de symboles  $X(t)$  transmis :

$$\forall X(t), Z(t) / \underset{Z}{Max} R^H(t)R(t) \quad (37)$$

$$\forall X(t), Z(t) / \underset{Z}{Max} X^H(t)Z^H(t)H^H(t)H(t)Z(t)X(t) \quad (38)$$

Or il a été montré préalablement que la matrice canal  $H(t)$  est une combinaison linéaire d'une matrice de décalage mise à différentes puissances. Il en découle directement que la matrice  $H^H(t)H(t)$  est une matrice circulante dont les vecteurs propres sont les colonnes de la matrice  $F$ .



Soient  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_M$  les valeurs propres de cette matrice  $\mathbf{H}^H(t)\mathbf{H}(t)$  et  $\{V_1, V_2, \dots, V_M\}$  les vecteurs propres associées à ces valeurs propres.

Il est alors immédiat que si l'on choisit  $V_1$  comme séquence d'étalement, c'est la meilleure séquence possible, en terme d'énergie transmise, que l'on peut envisager pour le canal de propagation considéré. En effet, on «récupérera» en réception  $\lambda_1^2 |x_1|^2$ .

Une fois cette séquence choisie la deuxième «meilleure» séquence possible qui sera orthogonale à la première séquence sera obligatoirement  $V_2$ , et ainsi de suite jusqu'à  $V_M$ . Choisir comme matrice de séquences d'étalement la matrice  $\mathbf{Z}(t)$  constituée par la juxtaposition des vecteurs propres  $V_i$  (encore appelés modes propres du canal) conduit donc à un choix ordonné de séquences orthogonales qui vont de la «meilleure» à «la moins bonne» en terme d'énergie transmise et de rapport signal sur bruit si ce dernier est blanc. C'est l'approche choisie par l'OFDM. Il ne reste plus alors qu'à choisir les modulations adaptées pour chaque symbole en fonction des valeurs cibles de performances souhaitées au moyen de l'algorithme de waterfilling décrit précédemment.

Face à cette propriété remarquable de l'OFDM, on peut alors se demander si un autre choix de séquences pourrait conduire à de meilleures performances de transmission. Le «défaut» que l'on peut souligner dans l'approche OFDM vient du fait que les dernières séquences (correspondant aux plus faibles valeurs propres) ne sont peut-être même pas utilisables pour les modulations les plus robustes (QAM4) alors que les premières séquences conduisent à des rapports signaux à bruit tellement bons qu'ils permettraient d'envisager des modulations à très haute efficacité spectrale (QAM supérieure à 1024 par exemple) mais que des difficultés de synchronisation de fréquence et de phase rendent difficile à mettre en œuvre. On peut donc se demander si il ne serait pas possible d'identifier un jeu de séquences, toujours inégales en performances vis-à-vis de la propagation à travers un canal donné, mais avec une dynamique de différences de performances moins étendue que celle obtenue via l'approche OFDM. On peut alors imaginer d'avoir un jeu de séquences CDMA sur lesquelles on pourrait appliquer un algorithme de waterfilling. On parlera alors par contraction de «Waterfilling CDMA».

### 3.3. Waterfilling CDMA

L'algorithme de conception des séquences de Waterfilling CDMA proposé s'initialise avec une matrice  $\mathbf{Z}(t)$  de séquences d'étalement orthogonales quelconques. Un des principaux critères de conception va être d'obtenir des séquences qui seront orthogonales en réception, c'est-à-dire après «traversée» du canal de propagation. En premier lieu, on filtre les séquences d'étalement par la réponse du canal afin d'avoir des séquences dont la Transformée de Fourier est «adaptée au canal». Pour obtenir ce résultat, on se contente d'effectuer le produit matri-

ciel de la matrice  $\mathbf{Z}(t)$  des séquences d'étalement par la matrice canal  $\mathbf{H}(t)$ . On obtient ainsi une nouvelle matrice  $\mathbf{Z}'(t)$  de séquences d'étalement, définie par:  $\mathbf{Z}'(t) = \mathbf{H}(t)\mathbf{Z}(t)$ . Ces nouvelles séquences ne sont plus à valeurs dans  $\{\pm 1\}$  mais à valeurs réelles et même à valeurs complexes si la réponse impulsionnelle du canal est complexe. Enfin, même si les séquences d'origine étaient orthogonales, les nouvelles séquences ne le sont plus. Malgré ces deux défauts, elles ont l'avantage de concentrer la puissance émise dans les bandes passantes les plus favorables du canal. Si l'on utilise ces séquences, on obtient, au niveau du récepteur (sans considérer le bruit additif et comme toujours avec insertion et suppression de l'intervalle de garde):

$$R'(t) = \mathbf{H}(t)\mathbf{H}(t)\mathbf{Z}(t)X(t) \quad (39)$$

L'orthogonalité que l'on recherche souvent en utilisant des séquences d'étalement orthogonales dans le modulateur, n'a en fait d'utilité, qu'au niveau de la réception, afin de pouvoir dés-étaler avec une matrice unitaire, en évitant l'interférence inter symboles et en conservant un vecteur de bruit additif, dont les différentes composantes sont décorréliées. Dans le cas qui nous préoccupe, on va donc chercher à modifier les séquences d'étalement d'origine, afin de disposer de séquences orthogonales après la «traversée» du canal de propagation.

Pour «mesurer» l'orthogonalité des séquences au niveau du récepteur, on peut calculer la matrice  $\mathbf{\Gamma}(t)$  d'autocorrélation des séquences «reçues»:

$$\mathbf{\Gamma}(t) = (\mathbf{H}(t)\mathbf{H}(t)\mathbf{Z}(t))^H (\mathbf{H}(t)\mathbf{H}(t)\mathbf{Z}(t)) \quad (40)$$

On propose alors de calculer la décomposition de Cholesky de cette matrice d'autocorrélation. On obtient ainsi deux racines triangulaires de la matrice  $\mathbf{\Gamma}(t)$ :

$$\mathbf{\Gamma}(t) = \mathbf{U}^H(t)\mathbf{U}(t) \quad (41)$$

Dans cette expression, la matrice  $\mathbf{U}(t)$  est une matrice triangulaire supérieure.

On modifie alors les séquences initiales en effectuant une pré-orthogonalisation de ces dernières au moyen d'une multiplication à droite par l'inverse de  $\mathbf{U}(t)$ . On obtient en définitive une nouvelle famille de séquences d'étalement qui constituent une matrice  $\mathbf{Z}''(t)$ , définie par:

$$\mathbf{Z}''(t) = \mathbf{Z}'(t)\mathbf{U}^{-1}(t) \quad (42)$$

ou encore:

$$\mathbf{Z}''(t) = \mathbf{H}(t)\mathbf{Z}(t)\mathbf{U}^{-1}(t) \quad (43)$$

L'inverse d'une matrice triangulaire supérieure étant aussi une triangulaire supérieure, on constate que la première séquence d'étalement (première colonne de la matrice  $\mathbf{Z}''(t)$ ) est inchan-

gée, la deuxième séquence est orthogonalisée par rapport à la première, la troisième par rapport aux deux premières, et ainsi de suite jusqu'à la  $M^{i\text{ème}}$  séquence qui est orthogonalisée par rapport à toutes les séquences précédentes.

En définitive, le signal reçu s'écrit donc :

$$R(t) = Q(t)X(t) + B(t) \tag{44}$$

avec :  $Q(t) = H(t)H(t)Z(t)U^{-1}(t)$

La matrice  $Q(t)$  étant unitaire par construction, on peut, en réception, désétalement en utilisant  $W(t) = Q(t)$ . Les séquences de désétalement sont donc égales aux séquences d'étalement que l'on filtre par la matrice canal :  $W(t) = H(t)Z''(t)$ . On réussit alors à n'avoir aucune interférence intersymboles tout en bénéficiant des avantages d'un désétalement par une matrice unitaire. En définitive nous avons construit une famille de séquences qui possèdent une partie des propriétés les plus importantes de l'OFDM mais qui ne sont pas localisées sur des canaux fréquentiels disjoints.

## 4. Résultats de simulation

### 4.1. Généralités

On propose dans ce paragraphe d'analyser plusieurs exemples de transmission en comparant une solution OFDM à une solution « Waterfilling CDMA » (WF-CDMA). Pour compléter la comparaison, on analysera aussi les performances obtenues respectivement : en CDMA avec un récepteur MMSE et en CDMA avec le récepteur constitué simplement par les séquences d'étalement. Enfin on analysera les performances d'une approche TDMA et on étendra le principe de construction de séquences présenté dans cet article à ces « séquences » TDMA, on obtiendra ainsi une solution appelée Waterfilling TDMA (WF-TDMA). On rappelle que les séquences CDMA de départ sont toujours des séquences orthogonales.

Les résultats de simulation présentés dans cet article considèrent une transmission sur câble (ou paire torsadée). Deux canaux de propagation sont analysés, un canal passe-bas et un canal sélectif. Enfin l'ensemble des résultats présentés ont été obtenus avec des séquences d'étalement de longueur  $M = 256$ , une fréquence d'échantillonnage  $F_e = 1,024$  MHz et un préfixe cyclique de 32 échantillons ( $p = 32$ ).

### 4.2. Transmission à travers un canal passe-bas

On choisit tout d'abord un canal de propagation passe-bas dont la Transformée en Z de la réponse impulsionnelle s'écrit :

$$C(Z) = \frac{1 - \alpha}{1 - \alpha Z^{-1}} \tag{45}$$

On prendra pour cette fonction de transfert un pôle relativement proche du cercle unité. (Typiquement  $\alpha = 0,96$ )

Pour pouvoir travailler avec des hypothèses permettant d'utiliser un préfixe cyclique fini, la réponse impulsionnelle du câble a été tronquée à ses 32 premiers termes et on a supposé qu'elle était nulle au-delà (on a soustrait la constante adéquate à cette réponse afin d'éviter une discontinuité lors du passage à zéro).

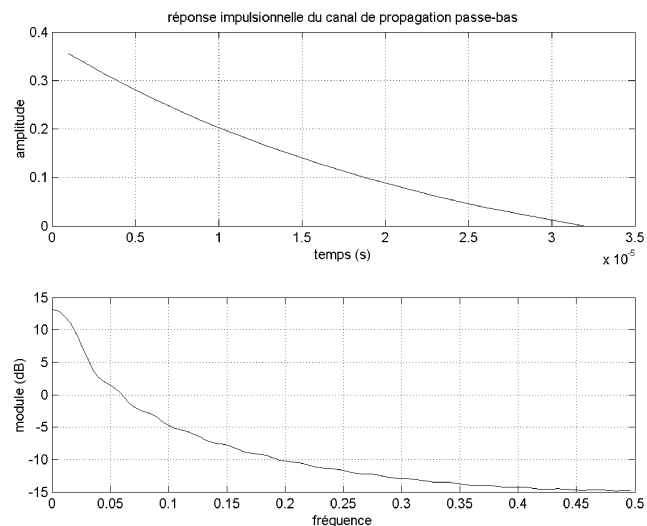


Figure 1. Réponse du canal de propagation passe-bas.

La première analyse consiste à étudier les densités spectrales de puissances des séquences de WF-CDMA. On constate ainsi que la première séquence est une séquence aléatoire quelconque qui a été filtrée par la matrice « canal » et qui est restée inchangée lors de la multiplication à droite par l'inverse de la racine de Cholesky. La densité spectrale de puissance de cette séquence est donc « adaptée » au canal. Au fur et à mesure que l'on progresse dans les séquences d'étalement, les contraintes d'orthogonalisation séquentielle par rapport aux premières séquences modifient les densités spectrales de puissance des séquences résultantes qui ne peuvent plus rester adaptées à la réponse fréquentielle du canal. La 20<sup>ième</sup> séquence par exemple ne peut plus « localiser » le maximum de sa puissance dans les bandes de fréquences basses qui sont déjà utilisées par les premières séquences. La densité spectrale de puissance se décale donc progressivement vers les hautes fréquences. Cependant, comparée à une « 20<sup>ième</sup> » séquence OFDM, on constate que l'encombrement spectral est moins localisé avec cette séquence qu'il ne le serait avec l'approche OFDM. Le décalage se poursuit progressivement, on aboutit ainsi, pour la séquence n° 200 à une densité spectrale de puissance répartie essentiellement dans les hautes fréquences. Cette 200<sup>ième</sup> séquence est donc contrainte d'étaler le symbole qu'elle transmet vers les hautes fréquences pour pouvoir rester orthogonale, après traversée du canal, aux 199 premières séquences qui se sont majoritairement localisées dans les basses fréquences.

La figure 2 représente les densités spectrales de puissances des séquences n° 1, 20 et 200 tandis que la figure 3 représente en vue de dessus les densités spectrales de puissances des 256 séquences d'étalement obtenues. On identifie bien le basculement progressif de la puissance des bandes basses vers les bandes hautes.

Le principe de construction des séquences WF-CDMA peut s'appliquer à n'importe quelle matrice de départ. On peut ainsi utiliser une matrice MC-CDMA, ce qui permet d'éviter le caractère erratique des réponses en fréquences des séquences de départ qui est responsable de l'aspect granulaire de la figure 3. On peut aussi choisir la matrice identité comme matrice de départ, on aboutit ainsi à une approche WF-TDMA. Dans ce cas la première « séquence » d'étalement est tout simplement égale à la réponse impulsionnelle du canal de propagation. Les autres séquences occupent alors le reste de la bande de fréquence. On

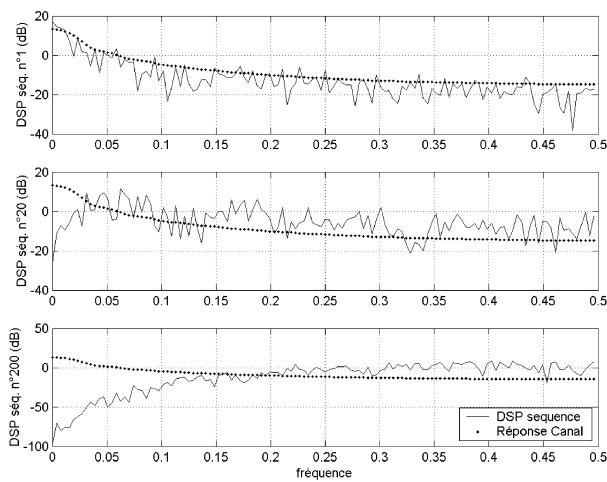


Figure 2. Densités spectrales de puissance de la famille des séquences de « Waterfilling CDMA ».

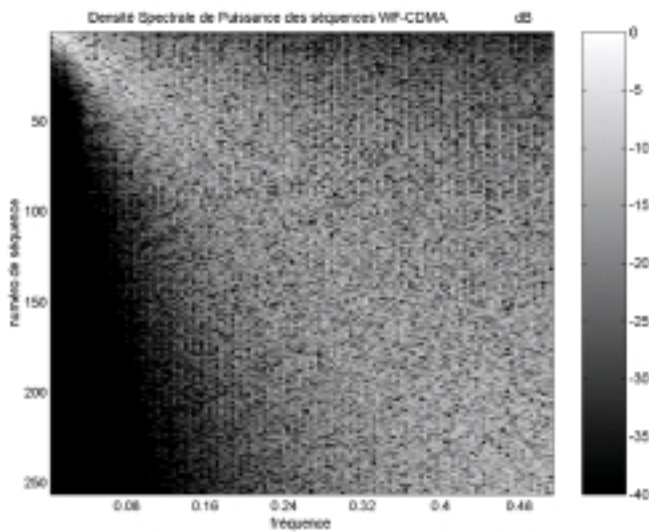


Figure 3. Densités spectrales de puissance de la famille des séquences de « Waterfilling CDMA ».

constate donc une forte inégalité entre cette première séquence et les suivantes.

Quelle que soit la matrice de départ choisie, du fait du principe de conception utilisé, les séquences construites sont de même puissance après traversée du canal. Il faut donc les normaliser avant le canal et les soumettre à l'algorithme de waterfilling afin de pouvoir choisir les puissances et les modulations qui leurs sont associées.

Les rapports signaux à bruit que l'on obtient avec différentes séquences d'étalement possibles sont présentés sur la figure 4. Ces rapports sont comparés à ceux que l'on obtient avec l'OFDM. On remarque alors que les premières séquences d'OFDM ont de meilleures performances de transmission que les séquences de WF-CDMA, ce qui est un résultat attendu, et que pour les dernières séquences utilisées, certaines séquences d'OFDM conduisent à de moins bons rapports que les séquences WF-CDMA. On constate aussi que les 60 premières séquences d'OFDM ou de WF-CDMA ont des performances de transmission très largement supérieures à celles que l'on peut obtenir avec des séquences de TDMA, de WF-TDMA ou de CDMA. À l'exception des toutes premières séquences de WF-TDMA qui affichent de très bonnes performances de transmission, les séquences de ces trois approches offrent toutes un rapport signal sur bruit d'environ +10 dB. À titre de comparaison les performances que l'on obtiendrait en désétalant simplement le CDMA avec les séquences d'étalement d'origine sont représentées. Dans un tel cas les séquences offrent toutes un rapport signal sur bruit d'environ -8 dB.

La figure 4 représente les performances de 128 séquences. Il s'agit des 128 premières séquences d'OFDM sachant que les 128 séquences suivantes sont les conjuguées des premières et servent à étaler les symboles conjugués afin d'obtenir en définitive un signal réel. Pour les séquences WF-CDMA, WF-TDMA,

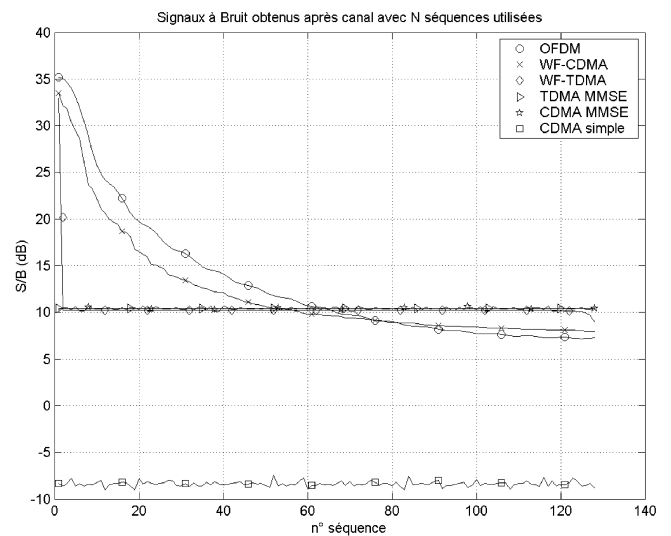


Figure 4. Rapports signaux à bruit obtenus après canal avec les séquences : OFDM, CDMA, WF-CDMA, TDMA et WF-TDMA.

Tableau 1. Valeurs cibles ( $E_s/N_0$ ) utilisées par l'algorithme de Waterfilling.

Modulation	QAM4	QAM16	QAM64	QAM256	QAM1024
Bits/symbole	2	4	6	8	10
Seuil de fonctionnement (dB)	10	16	22	28	34

CDMA et TDMA, on a choisi de représenter les performances des séquences paires. Sachant que les séquences impaires ont globalement les mêmes performances. Pour effectuer une transmission de signaux réels (transmission en bande de base) avec ces séquences réelles, il faudra étaler la partie réelle du symbole  $x_k(t)$  au moyen de la séquence d'indice  $2k$  et la partie imaginaire du symbole au moyen de la séquence d'indice  $2k + 1$ . Une fois les rapports signaux à bruit accessibles avec chaque séquence déterminés, il reste à comparer les capacités de transmission de ces différentes approches au moyen de l'algorithme de waterfilling exposé précédemment. Dans les simulations de transmission menées, on a supposé que le symbole OFDM après insertion de l'intervalle de garde était constitué d'échantillons cadencés à 1,024 MHz, ceci conduit donc à un symbole OFDM qui a une durée de 281,25  $\mu$ s. L'algorithme de waterfilling proposé utilise les modulations QAM4, 16, 64, 256 et 1024 dont les valeurs cibles (pour un taux d'erreur environ égal à  $10^{-3}$ ) sont résumées dans le tableau 1.

La figure 5 représente, dans le cas de l'OFDM: les rapports signaux à bruit obtenus pour chaque séquence dans le cas d'une répartition uniforme de puissance à l'émission, la puissance à transmettre par bit pour chaque séquence et enfin le nombre de bits par symbole pour chaque séquence.

On constate comme prévu que les premières séquences d'OFDM sont extrêmement performantes et permettent d'utiliser une modulation QAM1024, puis progressivement l'algorithme choisit des modulations moins efficaces pour terminer avec la QAM4. L'algorithme n'arrive pas à utiliser certaines des dernières séquences car leur emploi « coûterait » trop cher en terme de puissance pour les bits qu'elles pourraient transmettre comparativement au « coût » de transmission de ces mêmes bits sur des porteuses plus basses.

En définitive l'approche OFDM permet ici de transmettre 376 bits par bloc ce qui correspond à un débit égal à 1,27 Mbits/s.

La figure 6 présente les résultats obtenus avec le même algorithme en utilisant les séquences WF-CDMA. Comme attendu, on remarque que les premières séquences affichent de moins bonnes performances que les premières séquences d'OFDM et que plus rapidement les modulations QAM1024 et QAM256 sont abandonnées. Par contre les dernières séquences conservent plus longtemps que l'OFDM des propriétés de transmission. Il est alors possible de transmettre des symboles QAM4 sur ces séquences. À l'issue de l'algorithme l'approche WF-CDMA permet finalement de transmettre 332 bits par bloc ce qui correspond à un débit égal à 1,13 Mbits/s.

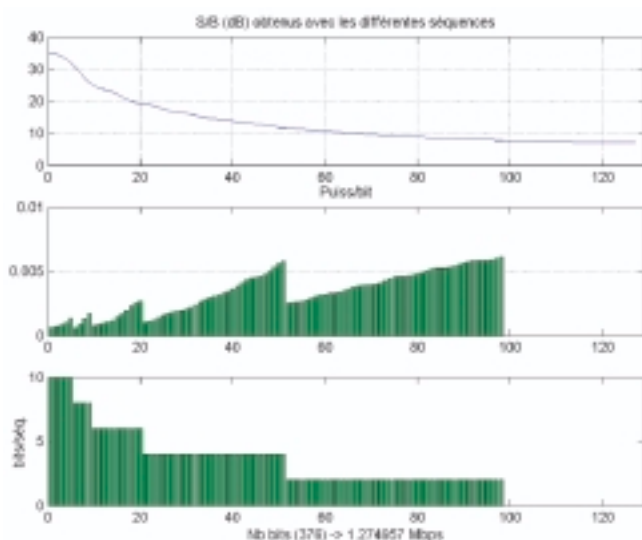


Figure 5. Résultats de l'algorithme de Waterfilling dans le cas de séquences OFDM.

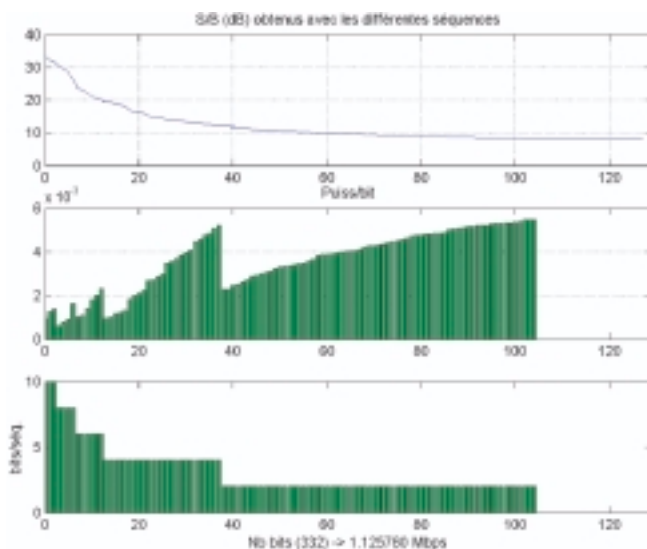


Figure 6. Résultats de l'algorithme de Waterfilling dans le cas de séquences WF-CDMA.

À titre de comparaison, le tableau 2 ci-contre présente les débits obtenus avec différentes approches ainsi que la répartition des différentes modulations utilisées.

Tableau 2. Débits obtenus avec les différentes approches et répartition des modulations utilisées.

	Débit (Mbits/s)	QAM1024	QAM256	QAM64	QAM16	QAM4
OFDM	1,27	6	4	11	31	47
WF-CDMA	1,13	3	4	6	25	67
WF-TDMA	0,92	1	0	0	3	124
CDMA-MMSE	0,90	0	0	0	5	123
TDMA-MMSE	0,90	0	0	0	5	123

Sur le canal considéré on constate que les approches CDMA et TDMA, avec un récepteur MMSE parfait conduisent à des débits de 0,9 Mbits/s. Sachant que la solution TDMA ne souffre, à la différence des approches OFDM et CDMA, que d'un facteur de crête beaucoup plus faible (uniquement du au filtre interpolateur d'émission et aux modulations), on pourrait émettre avec une puissance moyenne plus élevée les séquences TDMA et améliorer ainsi significativement le débit offert par cette approche. Il apparaît donc que le canal passe-bas pris comme exemple pour ces premiers résultats n'est pas assez sélectif pour observer des écarts de performances très significatifs entre les différentes formes d'onde. Une deuxième série de simulations peut alors être présentée.

#### 4.3. Transmission à travers un canal sélectif en fréquence

Dans ce paragraphe on s'intéresse à une transmission à travers un canal de propagation qui possède deux zéros aux fréquences normalisées 0,125 et 0,333. La réponse du canal est présentée sur la figure 7.

On peut alors analyser les densités spectrales de puissances des séquences WF-CDMA obtenues dans le cas de ce canal. On constate sur la figure 8, la bonne adaptation dans le domaine fréquentiel des premières séquences au canal (séquences n° 1 et n° 20). Par contre les séquences d'indices plus élevées ne peuvent pas rester adaptées au canal, ainsi la séquence n° 200 doit malheureusement concentrer le maximum de sa puissance dans une des zones les plus défavorables du canal car les séquences qui la précèdent ont occupé majoritairement les autres bandes de fréquences. La figure 9 présente, en vue de dessus, les densités spectrales de puissance des séquences de WF-CDMA. On observe bien le basculement progressif de la puissance des bandes basses vers les bandes de fréquence les plus défavorables du canal.

Les rapports signaux à bruit obtenus après traversée du canal de propagation pour les différentes approches comparées dans cet article sont présentés sur la figure 10.

Pour ce canal de transmission, on constate de fortes disparités entre les rapports signaux à bruit obtenus avec les différentes approches. Comme prévu, les rapports obtenus avec les séquences d'OFDM traduisent fidèlement la réponse du canal et

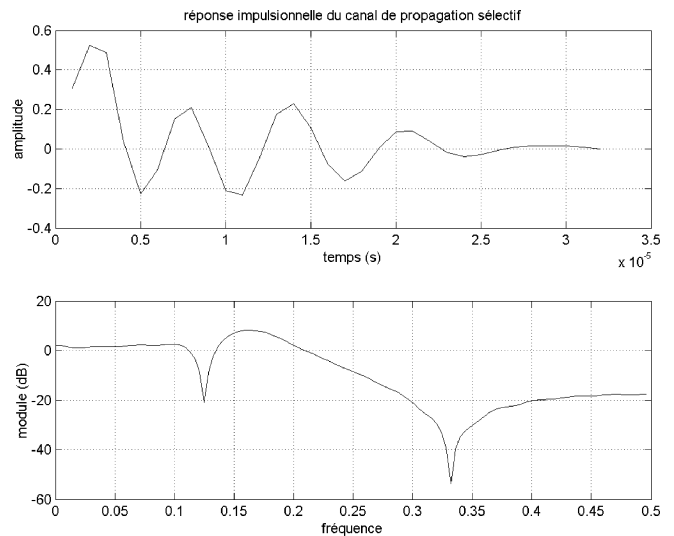


Figure 7. Réponse du canal de propagation sélectif.

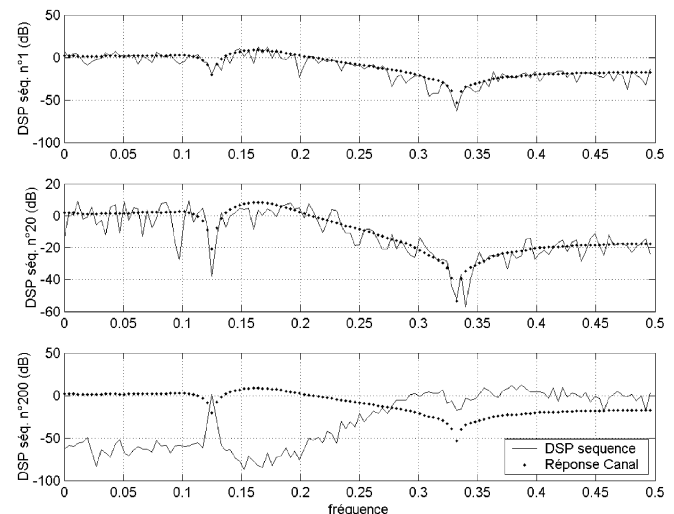


Figure 8. Densités spectrales de puissance de la famille des séquences de « Waterfilling CDMA ».

l'on identifie parfaitement les deux zéros de transmission. Comparativement les rapports signaux à bruit obtenus avec les séquences WF-CDMA subissent une dégradation douce, excepté pour les dernières séquences pour lesquelles ce rapport s'ef-

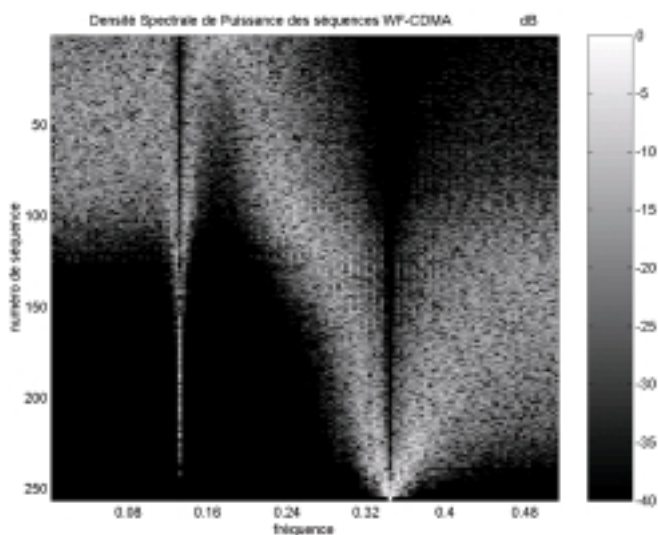


Figure 9. Densités spectrales de puissance de la famille des séquences WF-CDMA.

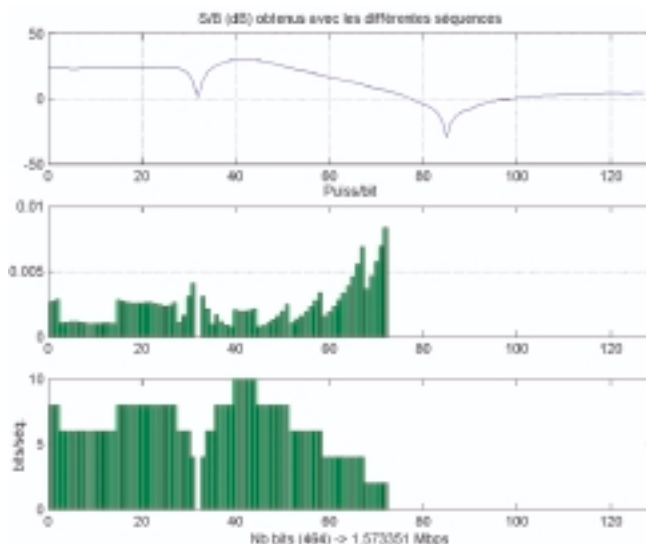


Figure 11. Résultats de l'algorithme de Waterfilling dans le cas de séquences OFDM.

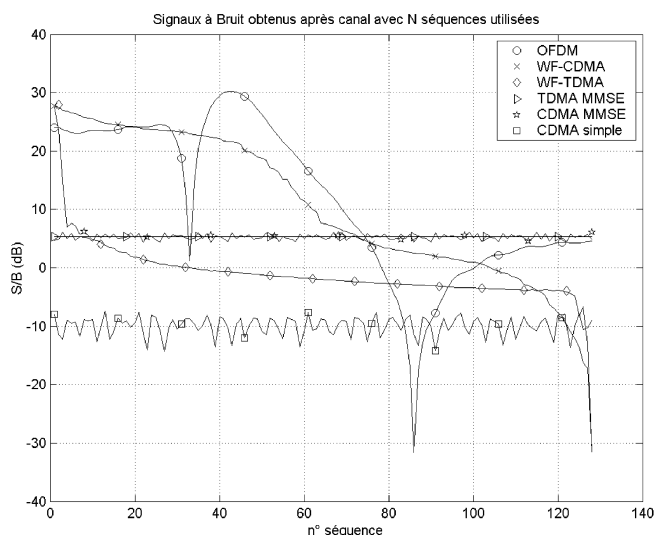


Figure 10. Rapports signaux à bruit obtenus après canal avec les séquences : OFDM, CDMA, WF-CDMA, TDMA et WF-TDMA.

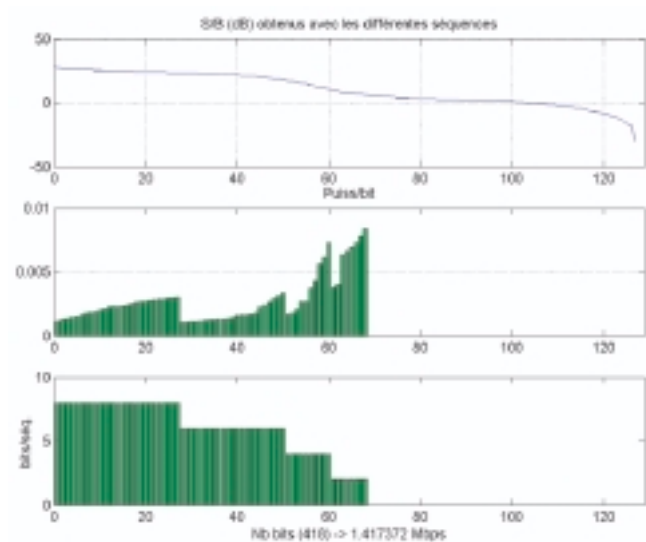


Figure 12. Résultats de l'algorithme de Waterfilling dans le cas de séquences WF-CDMA.

fondre. Les approches TDMA et CDMA avec un récepteur MMSE maintiennent un rapport signal à bruit d'environ +5 dB pour toutes les séquences. L'approche WF-TDMA ne possède que quelques séquences ayant un rapport signal sur bruit supérieur à +10 dB puis les performances se dégradent rapidement. Enfin, toujours à titre d'exemple, les séquences de CDMA déséparées simplement par elles mêmes ne permettent pas d'assurer un rapport signal sur bruit supérieur à -10 dB.

Les résultats du waterfilling pour l'OFDM sont présentés sur la figure 11. On constate que l'algorithme va éviter d'utiliser les séquences localisées dans l'évanouissement du canal et reporter une partie de la puissance non consommée dans ces bandes de fréquence vers des bandes plus favorables. Pour ce canal,

l'OFDM permet finalement de transmettre 464 bits par bloc, ce qui correspond à un débit égal à 1,57 Mbits/s.

Les résultats obtenus dans le cas des séquences WF-CDMA sont présentés figure 12. Cette approche permet alors de transmettre 418 bits par bloc, ce qui correspond à un débit égal à 1,42 Mbits/s.

Comme pour le canal passe-bas, il est possible de comparer les performances obtenues avec différentes formes d'onde pour ce canal de propagation. Les résultats de cette comparaison sont résumés dans le tableau 3.

On remarque cette fois que les solutions OFDM et WF-CDMA ont des performances très nettement supérieures aux solutions WF-TDMA, CDMA-MMSE et TDMA-MMSE. Comparative-

Tableau 3. Débits obtenus avec les différentes approches et répartition des modulations utilisées.

	Débit (Mbits/s)	QAM1024	QAM256	QAM64	QAM16	QAM4
<b>OFDM</b>	1,57	5	27	24	11	5
<b>WF-CDMA</b>	1,42	0	28	23	10	8
<b>WF-TDMA</b>	0,24	1	1	1	5	13
<b>CDMA-MMSE</b>	0,34	0	0	0	0	50
<b>TDMA-MMSE</b>	0,30	0	0	0	0	45

ment à l'OFDM, l'approche WF-CDMA transmet une cinquantaine de bits en moins qui correspondent à peu près à 5 séquences porteuses de modulation QAM1024 disponibles en OFDM et absentes de l'approche WF-CDMA.

## 5. Conclusion

En généralisant l'emploi du préfixe cyclique rencontré en OFDM à d'autres formes d'ondes, les travaux présentés dans cet article, ont permis d'introduire un formalisme unifié, pour plusieurs méthodes d'accès et de multiplexage différentes : OFDM, CDMA, MC-CDMA, TDMA. Les principaux développements ont supposé que les différentes séquences d'étalement étaient synchrones, ce qui correspond, par exemple, à une voie « descendante » d'un système d'accès radio. Une fois cette unification établie, le principe du waterfilling, c'est-à-dire cette capacité qu'a un modem OFDM d'affecter des modulations plus ou moins efficaces spectralement aux bandes de fréquences en fonction de leurs qualités respectives de transmission, a été étendue au CDMA. Pour cela il a été nécessaire de concevoir des séquences d'étalement qui occupaient globalement la totalité de la bande de fréquence, donc qui étalaient le signal, mais qui avaient aussi des performances de transmission inégales. Nous avons donc construit un nouveau jeu de séquences. Les séquences de cette famille possèdent énormément de qualités. Il est ainsi possible de les désétaler au moyen d'une matrice unitaire. On reconstitue ainsi les symboles émis sans la moindre interférence entre symboles, tout en conservant des échantillons de bruits additifs décorrélés. Le récepteur est alors extrêmement simple car les décisions peuvent être prises indépendamment sur les différentes estimations des symboles émis.

Des simulations comparatives ont alors montré, sur deux canaux de propagation, que les performances de transmission atteintes avec l'approche WF-CDMA étaient extrêmement proches de celles obtenues avec l'OFDM. Ces performances sont malgré tout, pour les deux exemples présentés, en recul d'environ 10% par rapport à celles offertes par l'OFDM. Le facteur de crête de l'OFDM et du WF-CDMA est globalement le même car dans les deux cas le signal émis tend vers un signal gaussien. Enfin, la complexité de l'approche WF-CDMA est

assez importante car cette approche ne bénéficie pas des algorithmes rapides de Transformée de Fourier Rapide [19] comme c'est le cas pour l'OFDM.

Cependant, indépendamment de l'intérêt général de la méthode de conception des séquences, l'approche WF-CDMA a l'avantage, dans le cas de canaux très sélectifs, de pouvoir permettre des schémas de transmission avec des modulations à efficacité spectrale moyenne là où l'OFDM cherchera à utiliser, dans certaines bandes de fréquences très favorables, des modulations à très haute efficacité spectrale. Or l'emploi de modulations telles que les QAM1024, 4096 ou supérieures va conduire à des contraintes de synchronisation et de bruit de phase extrêmement rigoureuses. L'approche WF-CDMA qui est capable d'offrir des débits similaires en se contentant de modulations à alphabets plus réduits trouve alors tout son intérêt.

## Références

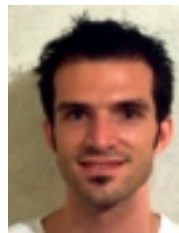
- [1] R. VAN NEE, P. RAMJEE, «OFDM for Wireless Multimedia Communications», *Artech House Publishers*, 2000.
- [2] A.J. VITERBI, «CDMA Principles of Spread Spectrum Communication», *Addison-Wesley Wireless Communications Series*, 1998.
- [3] L. HANZO, M. MÜNSTER, B.J. CHOI, T. KELLER, «OFDM and MC-CDMA for Broadband Multi-user Communications», *WLAN and Broadcasting*, Wiley, 2004.
- [4] P. GUGUEN, G. EL ZEIN, «*Les techniques multi-antennes pour les réseaux sans fil*», Hermès, 2004.
- [5] H. HOLMA, A. TOSKALA, «*WCDMA for UMTS*», Wiley, 2000.
- [6] G. MARAL, M. BOUSQUET, «*Satellite Communications Systems*», 3<sup>rd</sup> ed., pp 158-162, Wiley, 1998.
- [7] P.J. DAVIS, «*Circulant Matrices*», Wiley, 1979.
- [8] P. MÜHLETHALER, «*802,11 et les réseaux sans fil*», Eyrolles, 2002.
- [9] H. SARI, G. KARAM, I. JEANCLAUDE, «Transmission techniques for digital terrestrial TV broadcasting»; *IEEE Communications Magazine*, Vol. 33, Issue: 2, pp 100 -109, February 1995.
- [10] T. STARR, M. SORBARA, J.M. CIOFFI, P.J. SILVERMAN, «*DSL Advances*», Prentice Hall, 2003.
- [11] L. DENEIRE, B. GYSELINCKX, M. ENGELS, «Training Sequence versus Cyclic Prefix. A New Look on Single Carrier Communication», *IEEE Communications Letters*, vol 5, n° 7, July 2001.
- [12] J. LOUVEAUX, L. VANDERDORPE, T. SARTENAER, «Cyclic Prefixed Single Carrier and Multicarrier Transmission: Bit Rate Comparison», *IEEE Communications Letters*, vol 7, n° 4, April 2003.

- [13] S. HAYKIN, «*Adaptive Filter Theory*», Wiley, 1994.
- [14] J.G. PROAKIS, «*Digital Communications*», 3<sup>rd</sup> ed, Mc Graw-Hill, 1995.
- [15] J.-F. HELARD, J.-Y. BAUDAIS, J. CITERNE, «Linear MMSE detection technique for MC-CDMA», *IEEE Electronics Letters*, Vol. 36, Issue 7, pp 665 -666, March 2000.
- [16] J.I. CONCHA, S. ULUKUS, «Optimization of CDMA Signature Sequences in Multipath Channels», in *proc IEEE VTC 2001*, pp. 1978-1982.
- [17] W. YU, J.M. CIOFFI, «On constant power water-filling», in *proc. ICC 2001*, vol 6, pp. 1665-1669, June 2001.
- [18] G. MUNZ, S. PFLETSCHINGER, J. SPEIDEL, «An efficient water-filling algorithm for multiple access OFDM», *Global Telecommunications Conference, GLOBECOM '02. IEEE*, vol. 1, pp. 681 -685, 2002.
- [19] M. BELLANGER, «*Traitement Numérique du Signal, théorie et pratique*», Dunod, 2002.



Michel Terré

Michel Terré est né en 1964, il est ingénieur de l'Institut National des Télécommunications (INT 87), docteur du CNAM (1995, spécialités : systèmes physiques et métrologie). Il a passé 10 années chez TRT, Thalès et Alcatel avant de rejoindre la Chaire de RadioCommunications du CNAM en 1998 où il est actuellement Maître de Conférences. Michel Terré est membre du bureau du club 29 (Traitement du Signal) de la SEE et a été organisateur de plusieurs journées d'études SEE sur les applications du traitement du signal dans le domaine des communications numériques. Ses thèmes de recherche concernent l'estimation, les nouvelles formes d'onde, l'allocation de ressources, les méthodes de partage du spectre.



Danilo Zanatta Filho

Danilo Zanatta Filho a obtenu le diplôme d'Ingénieur Électrique (option Télécommunications) et le diplôme de Master en Télécommunications à l'Université de Campinas (UNICAMP) au Brésil, en 2001 et 2002 respectivement. Actuellement, il fait une thèse en co-tutelle au Laboratoire d'Électronique et Communications (CNAM-Paris) et au Laboratoire de Traitement du Signal appliqué aux Communications (UNICAMP-Brasil).



Luc Féty

Luc Féty est né à Chateau-Thierry en 1958. Il est diplômé de l'Université d'Orsay (82) et Docteur en sciences de Télécom Paris (88). Jusqu'en 1991, il a mené des activités de recherche à TRT puis Thomson TRT Défense en traitement d'antenne et en traitement d'image. Depuis 1991, il est maître de conférences au Conservatoire des Arts et Métiers. Il poursuit des activités de recherche en traitement du signal : traitement d'antenne en radiocommunications, séparation de sources, CDMA, transmissions multiporteuses.



Nizar Hicheri

Nizar Hicheri est né à Tunis le 1/1/1976. Il a obtenu le Doctorat spécialité électronique au Conservatoire National des Arts et Métiers en 2004. Il est enseignant-chercheur depuis 2003 à l'École Nationale d'Ingénieur de Gabès (Tunisie), département électronique. Ses domaines de recherches sont les modulations multiporteuses, la simulation des systèmes de communications, les techniques de codage.