

Estimation, en contexte non coopératif, des paramètres d'une transmission à spectre étalé par séquence directe

Blind estimation of a direct sequence spread spectrum transmission parameters in a non-cooperative context

par Céline BOUDER, Stéphane AZOU, Gilles BUREL

Laboratoire d'Electronique et Systèmes de Télécommunications (UMR CNRS 6165), 6, av. Le Gorgeu, CS 93837, 29238 BREST cedex 3, FRANCE

{Gilles.Burel, Stephane.Azou}@univ-brest.fr

résumé et mots clés

Dans le cadre de surveillance du spectre des fréquences, nous nous proposons d'élaborer des méthodes de reconnaissance automatiques des signaux à spectre étalé par séquence directe, sans aucune connaissance *a priori* sur le système de transmission.

Il s'agit d'établir des méthodes de détection de signaux qui ont la propriété d'être très discrets ; de synchroniser le signal en aveugle ; puis de déterminer la séquence pseudo-aléatoire et ses caractéristiques (période chip, longueur) ainsi que la période symbole du signal, afin de retrouver les symboles du signal informatif à l'aide d'un récepteur classique.

Une analyse théorique des performances de notre algorithme, comparée à des simulations de type Monte Carlo nous permet finalement de valider nos résultats.

Transmissions à spectre étalé, surveillance du spectre, séquence pseudo-aléatoire, détection, synchronisation aveugle, analyse des performances.

abstract and key words

In the context of spectrum surveillance, new methods for estimating all the parameters of a direct sequence spread spectrum transmission, without prior knowledge, are presented.

First, an approach is proposed to detect a spread spectrum signal, whose most important property is low probability of interception. Then, we introduce a robust blind synchronization algorithm, which enables us to precisely estimate the symbol period. The whole pseudo-noise sequence is then estimated and, finally, the transmitted symbols are retrieved.

A theoretical performance analysis of the spreading sequence estimation procedure is presented and Monte Carlo simulations are performed to show the efficiency of the proposed method.

Spread spectrum transmissions, spectrum surveillance, pseudo-noise sequence, detection, blind synchronization, performance analysis.

1. introduction

Les transmissions à spectre étalé se sont développées depuis les années 50. Autrefois utilisées dans un contexte militaire en raison de leur discrétion, elles sont depuis les années 80 employées dans un contexte civil, notamment pour les systèmes de transmission à accès multiple [1]. En effet elles permettent généralement de communiquer avec un bon niveau de sécurité et sont moins sensibles aux conséquences néfastes des trajets multiples. Ces transmissions sont caractérisées par la période symbole des données bas débit, la période des éléments de la séquence d'étalement, appelés bribes ou chips, ainsi que la longueur de la séquence.

Dans le cadre de surveillance du spectre des fréquences, il est alors intéressant d'élaborer des méthodes de traitement automatique des signaux à étalement de spectre, afin de contrôler les bandes de fréquence non autorisées, où ces transmissions pourraient passer inaperçues. La littérature concernant les transmissions à étalement de spectre en contexte coopératif est abondante. Par contre, en contexte non-coopératif, la littérature est particulièrement restreinte. À notre connaissance, seul l'article de Tsatsanis *et al.* [2] se rapproche un peu de notre problématique. Cet article porte sur l'estimation de la séquence d'étalement. L'algorithme souffre néanmoins d'une grande complexité de calculs et repose sur l'hypothèse forte de la connaissance de la fréquence chip et du nombre d'éléments de la séquence. Ces hypothèses sont, par nature, fausses en contexte non-coopératif (une méthode d'estimation de la fréquence chip est proposée en annexe dans l'article, mais ne peut fonctionner qu'à bon rapport signal à bruit). C'est pourquoi nous proposons une nouvelle méthode d'estimation de la séquence pseudo-aléatoire sans connaissance *a priori* sur la transmission et ses paramètres. La première étape consiste à détecter un signal à spectre étalé, aspect qui n'était pas pris en compte dans [2]. Une méthode repose sur l'étude des fluctuations d'un estimateur [3], qui permet de comparer les statistiques d'un bruit seul à celles du signal reçu, afin de décider de la présence d'un signal cohérent. Cette procédure nous permet par ailleurs d'estimer la période symbole de la transmission. La seconde étape consiste à déterminer la séquence pseudo-aléatoire qui a été utilisée à l'émission afin d'étalement le spectre. Une étude détaillée des éléments propres de la matrice de covariance du signal reçu nous a menés à développer un algorithme de synchronisation robuste, dont le but est double : affiner d'une part l'estimation de la période symbole et d'autre part évaluer de manière très précise le début du premier symbole. Une fois le signal synchronisé, la séquence pseudo-aléatoire est déduite du premier vecteur propre associé à la plus grande valeur propre. Cette technique est ensuite caractérisée par une analyse théorique des performances et validée par des simulations de type Monte Carlo.

Nous présentons en premier lieu les notations et le formalisme adoptés dans l'article (section 2). La troisième partie introduit le

détecteur de signaux à spectre étalé dans un contexte non coopératif. La section 4 expose l'analyse théorique, qui nous a menés à proposer l'algorithme de synchronisation aveugle de la cinquième partie. Cette méthode est ensuite caractérisée par une analyse des performances dans la section 6 avant d'être validée par des simulations (section 7) et de conclure.

2. notations et formalisme

La technique d'étalement de spectre par séquence directe consiste à moduler le signal d'information par une séquence pseudo-aléatoire, indépendante des données, dont le rythme est bien plus important que celui des informations à transmettre [4], [5]. Par exemple, dans le cas où les symboles sont binaires (BPSK), étalement le signal d'information revient à remplacer chaque symbole par la séquence pseudo-aléatoire ou son opposée selon le symbole à transmettre. D'un point de vue fréquentiel, le signal est transmis dans une bande de fréquence W bien plus large que celle requise initialement (B) pour le signal informatif seul, et sa densité spectrale de puissance est égale à celle du signal original divisée par le rapport des bandes de fréquence $\frac{W}{B}$ [6].

Soient a_k les symboles d'une modulation de phase à deux ou quatre états de durée T , un signal reçu équivalent en bande de base, à étalement de spectre par séquence directe s'écrit :

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k h(t - kT) + b(t) \quad (1)$$

où $b(t)$ est le bruit en sortie du filtre de réception et où $h(t)$ représente les effets de tous les filtres de la chaîne de transmission et de la séquence pseudo-aléatoire :

$$h(t) = \sum_{k=0}^{P-1} c_k p(t - kT_c) \quad (2)$$

avec $p(t)$ le résultat de la convolution du filtre d'émission, de la réponse impulsionnelle du canal et du filtre de réception ; $\{c_k\}_{k=0, \dots, P-1}$ désigne la séquence pseudo-aléatoire de période chip T_c et de longueur P . Nous supposons dans la suite que les hypothèses suivantes sont vérifiées :

- Les symboles sont centrés et indépendants ;
- Le bruit en entrée du filtre de réception est blanc, gaussien, centré, indépendant du signal informatif et de densité spectrale de puissance $\frac{N_0}{2}$;
- Le rapport signal à bruit en dB en sortie du filtre de réception est négatif, c'est-à-dire que le signal informatif est caché dans le bruit.

Notre étude se place dans un contexte de surveillance de spectre, où nous n'avons aucune connaissance *a priori* sur la nature de la transmission. La première difficulté est donc de détecter la présence d'un signal à spectre étalé dans un bruit ambiant. Nous proposons dans le prochain paragraphe une méthode qui répond à ce problème.

Les algorithmes développés ne nécessitent pas une récupération préalable de porteuse et de phase (ce qui, d'ailleurs, serait difficile en aveugle pour un signal totalement inconnu noyé dans un bruit). En considérant la non récupération de porteuse et de phase, on peut écrire (en notant f l'écart de fréquence et θ l'écart de phase) la contribution du signal utile dans $y(t)$ comme suit :

$$s(t) = \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k h(t - kT) \right) e^{j2\pi f t + \theta} \quad (3)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{j\theta} a_k e^{j2\pi f t} h(t - kT) \quad (4)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (e^{j\theta} e^{j2\pi f k T} a_k) (e^{j2\pi f (t - kT)} h(t - kT)) \quad (5)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \tilde{a}_k \tilde{h}(t - kT) \quad (6)$$

en posant $\tilde{a}_k = e^{j\theta} e^{j2\pi f k T} a_k$ et $\tilde{h}(t) = e^{j2\pi f t} h(t)$. D'un point de vue formel, rien n'est changé, c'est pourquoi, par souci de clarté, nous ne reviendrons pas sur cet aspect par la suite. Le fonctionnement du détecteur et de l'estimateur de séquence d'étalement sont donc inchangés. Il est par contre nécessaire, bien entendu, que le signal soit présent dans la bande de fréquence analysée.

3. détection

On cherche à mettre en valeur une périodicité statistique dans le signal reçu, qui caractériserait une certaine cohérence du signal, qu'un bruit seul ne possède pas. L'outil mathématique sollicité dans ce cas est en général le calcul de la fonction d'autocorrélation. Malheureusement, pour des signaux à spectre étalé, cette méthode n'est pas discriminante, dans la mesure où les séquences binaires pseudo-aléatoires, utilisées à l'émission pour étaler le spectre, ont des propriétés de corrélation similaires à celles d'un bruit. L'idée retenue est alors de travailler non pas sur l'autocorrélation elle-même, mais sur les fluctuations d'un estimateur de l'autocorrélation [3], [7].

3.1. principe du détecteur

Un estimateur d'autocorrélation calcule une valeur estimée $\widehat{R}_{yy}(\tau)$ de l'autocorrélation $R_{yy}(\tau)$ sur un ensemble d'échantillons du signal présents dans une certaine fenêtre temporelle. Comme l'estimateur travaille sur un nombre fini d'échantillons, les valeurs estimées $\widehat{R}_{yy}(\tau)$ vont fluctuer autour de la valeur théorique $R_{yy}(\tau)$. On peut donc, pour chaque décalage temporel τ , calculer une grandeur $\rho(\tau)$, qui représente l'importance des fluctuations de l'estimateur. Nous allons montrer que la cohérence du signal à spectre étalé, bien que faible, amplifie les fluctuations de l'estimateur lorsque τ est multiple de la période symbole T .

Afin de calculer les fluctuations de l'autocorrélation, le signal reçu $y(t)$ est divisé en fenêtres de durée T_F , dont la valeur est supposée être suffisamment grande de manière à contenir un ou plusieurs symboles. On peut alors sur chaque fenêtre calculer la valeur estimée de l'autocorrélation :

$$\widehat{R}_{yy}^m(\tau) = \frac{1}{T_F} \int_{t_m}^{t_m + T_F} y(t) y^*(t - \tau) dt \quad (7)$$

où m est le numéro de la fenêtre et t_m l'instant de début de la fenêtre numéro m . Les t_m doivent être espacés d'au moins T_F pour éviter le recouvrement entre les fenêtres.

À partir du calcul des valeurs estimées $\widehat{R}_{yy}^m(\tau)$ sur M fenêtres, on en déduit $\rho(\tau)$ estimation du moment d'ordre 2 de $\widehat{R}_{yy}(\tau)$:

$$\rho(\tau) = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M |\widehat{R}_{yy}^m(\tau)|^2 \quad (8)$$

Une comparaison des caractéristiques statistiques de $\rho(\tau)$ pour un bruit seul et pour le signal reçu va nous permettre de décider de la présence ou non d'un signal à spectre étalé caché dans le bruit.

3.2. statistiques de $\rho(\tau)$

3.2.1. dans le cas d'un bruit seul

Dans un premier temps, nous considérons la présence d'un bruit seul, pour lequel nous calculons la valeur moyenne et l'écart type des fluctuations de l'estimateur. À l'exception des faibles valeurs de τ (typiquement inférieures à quelques périodes chip), pour lesquelles la cohérence temporelle introduite par le filtre de réception est à prendre en compte, les statistiques de $\rho(\tau)$ sont indépendantes de τ .

Calculons d'abord la valeur moyenne de $\rho(\tau)$:

$$m_\rho^b = E \{ \rho(\tau) \} = E \left\{ \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M |\widehat{R}_{bb}^m(\tau)|^2 \right\} \quad (9)$$

Comme les fenêtres sont indépendantes, la valeur moyenne de $\rho(\tau)$ est égale à la puissance moyenne de $\widehat{R}_{bb}(\tau)$ ou encore à l'intégrale de sa densité spectrale de puissance $\widehat{\gamma}_R(\nu)$:

$$m_\rho^b = E \left\{ |\widehat{R}_{bb}(\tau)|^2 \right\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{\gamma}_R(\nu) d\nu \quad (10)$$

avec

$$\widehat{\gamma}_R(\nu) = \frac{1}{T_F} |\gamma_b(\nu)|^2 \quad (11)$$

Nous en déduisons ainsi l'expression de la valeur moyenne de $\rho(\tau)$:

$$m_\rho^b = \frac{1}{T_F} \int_{-\infty}^{+\infty} |\gamma_b(\nu)|^2 d\nu \quad (12)$$

où la densité spectrale de puissance de bruit en sortie du filtre de réception, de fonction de transfert $G(\nu)$, est égale à :

$$\gamma_b(\nu) = |G(\nu)|^2 \frac{N_0}{2} \quad (13)$$

Calculons maintenant l'écart type σ_ρ^b des fluctuations de l'estimateur $\rho(\tau)$:

$$\sigma_\rho^b = \sqrt{\text{var}(\rho(\tau))} \quad (14)$$

Comme les fenêtres sont indépendantes et que $\widehat{R}_{bb}(\tau)$ a un comportement gaussien¹, l'équation ci-dessus peut se réécrire comme :

$$\sigma_\rho^b(\tau) = \sqrt{\frac{1}{M} m_\rho^b(\tau)} \quad (15)$$

3.2.2. dans le cas d'un signal non bruité

De la même manière, pour un signal seul, nous pouvons montrer [7] que la moyenne des fluctuations est égale à :

$$m_\rho^s(\tau) = \frac{T}{T_F} \sigma_s^4 \quad (16)$$

dans le cas particulier où le décalage τ est égal à un multiple de la période symbole T . Dans cette équation, σ_s^2 est la variance du

1. D'après l'équation (3), on voit que c'est la somme d'un grand nombre de termes indépendants, donc sa répartition statistique est proche d'une gaussienne.

signal en sortie du filtre de réception. Ces calculs sont reproduits en annexe 1.

Lorsque τ n'est pas multiple de la période symbole T , tout se passe comme si l'on avait affaire à un bruit puisque la séquence d'étalement est une séquence pseudo-aléatoire. En pratique, la contribution du signal aux fluctuations est donc négligeable lorsque $\tau \neq T$, car le rapport signal à bruit est négatif dans le cadre des applications que nous visons.

Dans nos simulations, nous comparons la moyenne des fluctuations de l'estimateur de l'autocorrélation du signal reçu avec les statistiques de $\rho(\tau)$ pour un bruit seul. Nous décidons de la présence d'un signal à spectre étalé si des pics, correspondant aux fluctuations de l'estimateur pour τ multiple de T , dépassent un seuil théorique fixé à $m_\rho^b(\tau) + 4\sigma_\rho^b$, qu'un bruit seul a une probabilité inférieure à 0.1 % de dépasser. Illustrons graphiquement ces résultats, afin de mieux comprendre la démarche.

3.3. résultats expérimentaux

Nous générons un signal d'environ 200 symboles, modulé en phase à 4 états, étalé par une séquence de Gold de longueur P égale à 63. Le signal est de durée égale à $327.68 \mu s$, ce qui permet d'obtenir un nombre d'échantillons égal à une puissance de 2, ceci afin d'accélérer les calculs. La fréquence chip est $F_c = 40$ MHz et la fréquence d'échantillonnage est $F_e = 200$ MHz. Ce signal est noyé dans un bruit blanc gaussien, avec un rapport signal à bruit de -2 dB seulement, afin de bien mettre en valeur les résultats. La taille de la fenêtre d'analyse est $T_F = 4 \mu s$ et le nombre de fenêtres utilisées pour la détection est égal à 31. Chaque fenêtre de durée T_F comporte donc un peu plus de deux symboles et 80 symboles suffisent pour détecter le signal. Les résultats du détecteur sont représentés sur la figure 1. La figure 1 représente la courbe des fluctuations de l'estimateur $\rho(\tau)$, dont deux pics dépassent la valeur théorique maximale

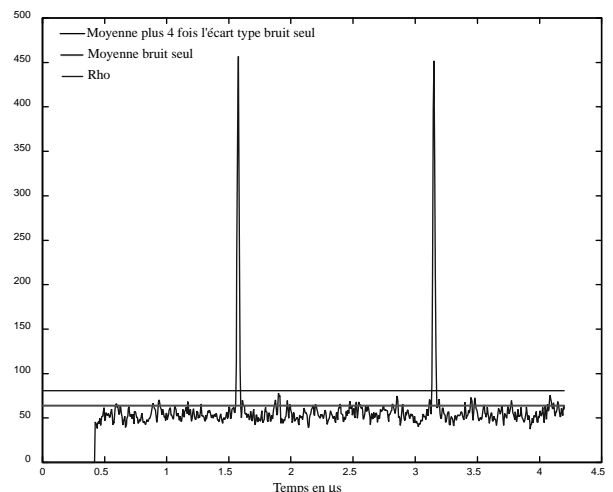


Figure 1. – Résultats du détecteur.

fixée à $m_\rho^b(\tau) + 4\sigma_\rho^b$, représentée en tirets. La droite en trait épais indique la valeur moyenne des fluctuations pour un bruit seul. Dans notre cas, nous pouvons conclure que le signal reçu est un signal à spectre étalé de période $T = 1.575 \mu\text{s}$, valeur déduite de l'espacement entre les deux pics, ce qui correspond à la valeur théorique $\frac{P}{F_C}$. La valeur de la période symbole peut encore être affinée en calculant la position d'un pic plus éloigné de l'origine d'après la valeur T déjà évaluée et en recherchant un maximum de $\rho(\tau)$ autour de cette position. En cas de signaux trop bruités, les pics sont moins francs. Nous pouvons toutefois améliorer la lisibilité des résultats en augmentant la durée du signal étudié ou en diminuant la durée de la fenêtre d'analyse. Ces deux opérations ont pour effet d'augmenter le nombre de fenêtres, ce qui améliore la précision des statistiques calculées par le détecteur. Il est cependant préférable de conserver une durée de fenêtre d'analyse suffisamment longue pour obtenir au moins deux pics.

Cette méthode est intéressante, dans la mesure où elle nous permet de décider de la présence d'un signal à spectre étalé, mais aussi d'avoir une estimation de la période symbole, ce qui va nous être utile pour synchroniser le signal reçu.

4. analyse d'un signal à spectre étalé

Le signal reçu est rééchantillonné à la période d'échantillonnage T_e , telle que la période symbole T estimée *via* le détecteur soit un multiple entier M de T_e , avant d'être divisé en fenêtres indépendantes de durée T . Le signal reçu a ainsi pour expression sur une fenêtre d'analyse le vecteur colonne $\mathbf{y}(t)$ de longueur M :

$$\mathbf{y}(t) = [y(t), y(t + T_e), \dots, y(t + T - T_e)]^T \quad (17)$$

qui s'écrit encore en fonction des symboles de la fenêtre d'analyse, pour une désynchronisation de durée t_0 , décalage entre le début d'un symbole et la fenêtre d'analyse :

$$\mathbf{y}(t) = a_m \mathbf{h}_0(t_0) + a_{m+1} \mathbf{h}_{-1}(t_0) + \mathbf{b}(t) \quad (18)$$

avec $\mathbf{h}_0(t_0)$ un vecteur de longueur M contenant la fin de la séquence pseudo-aléatoire (filtrée) pendant la durée $(T - t_0)$, suivie de zéros pendant t_0 , et $\mathbf{h}_{-1}(t_0)$ un vecteur de même taille contenant des zéros pendant la durée $(T - t_0)$, suivis du début de la séquence pendant t_0 . L'équation (18) peut être illustrée à l'aide du schéma de la figure 2. Le vecteur \mathbf{h}_0 contient la fin de la séquence pseudo-aléatoire, qui a modulé le symbole a_m , et le vecteur \mathbf{h}_{-1} contient le début de la séquence qui a modulé le symbole a_{m+1} . Nous pouvons en déduire l'expression de la matrice de covariance \mathbf{R} associée à l'ensemble de fenêtres d'analyse :

$$\mathbf{R} = E\{\mathbf{y}(t)\mathbf{y}(t)^H\} \quad (19)$$

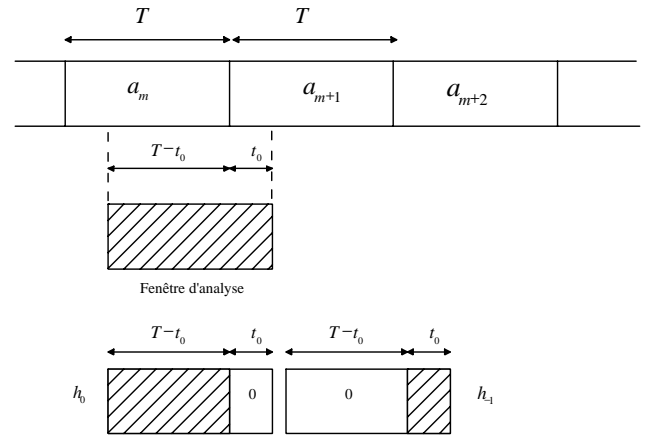


Figure 2. – Schéma du signal reçu sur une fenêtre d'analyse.

Nous avons montré [8] que nous pouvons également l'exprimer en fonction du temps de désynchronisation t_0 , de la période symbole T , de la période d'échantillonnage T_e et du rapport signal à bruit η :

$$\mathbf{R} = \sigma_b^2 \left\{ \eta \frac{T - t_0}{T_e} \mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{v}_0^H + \eta \frac{t_0}{T_e} \mathbf{v}_{-1} \cdot \mathbf{v}_{-1}^H + \mathbf{I} \right\} \quad (20)$$

où \mathbf{v}_0 et \mathbf{v}_{-1} sont égaux respectivement aux vecteurs \mathbf{h}_0 et \mathbf{h}_{-1} normés. Le rapport signal à bruit η est défini comme suit :

$$\eta = \frac{\sigma_s^2}{\sigma_b^2} \quad (21)$$

où σ_s^2 et σ_b^2 représentent les variances du signal et du bruit en sortie du filtre de réception. Le détail du calcul de la matrice de covariance est indiqué en annexe 2. Cette forme de la matrice de covariance met en évidence deux valeurs propres particulières dont les expressions sont :

$$\begin{cases} \lambda_1 = \left(1 + \eta \frac{T - t_0}{T_e} \right) \sigma_b^2 \\ \lambda_2 = \left(1 + \eta \frac{t_0}{T_e} \right) \sigma_b^2 \end{cases} \quad (22)$$

avec $\lambda_1 > \lambda_2$ quand $t_0 < \frac{T}{2}$, les autres valeurs propres étant égales à la puissance de bruit.

Dans le contexte de surveillance de spectre où nous nous plaçons, nous n'avons cependant pas les informations concernant la puissance de bruit, le rapport signal à bruit et le temps de désynchronisation. Par contre, en estimant les valeurs des deux premières valeurs propres de la matrice de covariance et en moyennant les autres pour en déduire la variance de bruit, il est pos-

sible d'estimer le rapport signal à bruit ainsi que le temps de désynchronisation. En effet en résolvant le système d'équation (22) où les inconnues sont t_0 et η , nous obtenons comme valeurs estimées $\widehat{\eta}$ et \widehat{t}_0 telles que :

$$\widehat{\eta} = \left(\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\widehat{\sigma}_b^2} - 2 \right) \frac{T_e}{T} \quad (23)$$

et

$$\widehat{t}_0 = \frac{T_e}{\widehat{\eta}} \left(\frac{\lambda_2}{\widehat{\sigma}_b^2} - 1 \right) \quad (24)$$

avec

$$\widehat{\sigma}_b^2 = \frac{1}{M-2} \sum_{i=3}^M \lambda_i \quad (25)$$

Il faut toutefois noter que ces résultats dépendent de l'estimation de la période symbole T par le détecteur, et de l'estimation des valeurs propres λ_i pour $i \geq 3$, dont l'écart type est proportionnel à la puissance de bruit² ; c'est pourquoi nous proposons dans le prochain paragraphe un algorithme qui vise à la fois une estimation très précise de la période symbole et de la position du premier symbole dans le signal $y(t)$ reçu.

5. synchronisation aveugle

Le principe de notre technique de synchronisation est de rendre maximale la valeur de la première valeur propre de la matrice de covariance. En effet lorsque le signal est synchronisé, t_0 est nul, et l'expression de la matrice de covariance (20) devient :

$$\mathbf{R} = \sigma_b^2 \left\{ \eta \frac{T}{T_e} \mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{v}_0^H + \mathbf{I} \right\} \quad (26)$$

On peut alors en déduire qu'il ne subsiste qu'une seule valeur propre de grande amplitude égale à :

$$\lambda_1 = \left(1 + \eta \frac{T}{T_e} \right) \sigma_b^2 \quad (27)$$

Les autres valeurs propres sont égales à la puissance de bruit et le vecteur propre \mathbf{v}_0 contient à lui seul la séquence pseudo-aléatoire utilisée à l'émission pour étaler le spectre.

2. Cela provient de l'équation (58). Cette équation montre que l'écart type de l'estimation d'une valeur propre est proportionnel à la valeur propre vraie. Or, pour $i \geq 3$, la valeur propre vraie est proportionnelle à la puissance du bruit.

5.1. analyse théorique

Lorsque T est correctement estimé, on peut utiliser les équations 22, ce qui nous montre que $\lambda_1 + \lambda_2$ est indépendant de la désynchronisation t_0 . De plus, les $(M-2)$ plus petites valeurs propres dépendent du bruit et sont donc indépendantes de la désynchronisation. D'autre part, on a la relation suivante entre les valeurs propres d'une matrice et sa norme :

$$\sum_{i=1}^M (\lambda_i)^2 = \|\mathbf{R}\|^2 = \sum_i \sum_j |r_{ij}|^2 \quad (28)$$

ce qui nous permet de conclure que la norme au carré de \mathbf{R} est une fonction croissante de λ_1 . Finalement, maximiser la première valeur propre pour se synchroniser revient à maximiser la norme au carré de la matrice de covariance. Cette propriété est intéressante d'un point de vue coût de calcul, car il suffit de calculer uniquement la norme de la matrice de covariance et non plus rechercher ses valeurs propres pour chaque valeur de t_0 . Nous allons maintenant exposer l'algorithme de synchronisation, qui nous permet d'évaluer t_0 .

5.2. algorithme de synchronisation

L'algorithme se déroule en deux étapes, l'une où la période symbole est ajustée avec une précision moyenne, la seconde où elle est déterminée de manière précise, afin d'obtenir une précision relative sur la synchronisation n'excédant pas un quart de la durée chip. Pour chaque valeur T de période symbole testée, une procédure itérative est appliquée pour trouver le meilleur décalage en nombre d'échantillons d , maximisant la norme au carré de la matrice de covariance. La synchronisation est finalement obtenue pour le couple (T, d) offrant la plus grande valeur de cette norme.

Le principe général de l'algorithme proposé est évoqué dans le paragraphe ci-après ; sont données ensuite, dans un second paragraphe, des précisions relatives à l'implémentation.

5.2.1. principe général de l'algorithme

Pour une valeur T_n supposée pour la période symbole, les étapes ci-dessous sont systématiquement suivies :

- Une nouvelle valeur de la période d'échantillonnage T_e est d'abord calculée de manière à avoir un nombre entier M d'échantillons par symbole, pour chacun des N symboles entiers disponibles dans le signal analysé ;
- Le signal reçu $y(t)$ est alors rééchantillonné par interpolation linéaire pour obtenir le signal en temps discret $\mathbf{y} \in \mathbb{C}^{(MN) \times 1}$;
- Le début du premier symbole est ensuite recherché dans l'ensemble des M premiers échantillons ; pour chaque décalage

$d \in [0, M - 1]$, on calcule la matrice de covariance $\mathbf{R}_d(T_n)$ correspondant à l'ensemble de fenêtres d'analyse $\{\mathbf{y}_{d,k}; k = 1, 2, \dots, N\}$ avec

$$\mathbf{y}_{d,k} = \mathbf{y}(d + (k - 1)M + 1 : d + kM) \quad (29)$$

L'expression de la matrice de covariance s'exprime ainsi :

$$\mathbf{R}_d = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \mathbf{y}_{d,k} \mathbf{y}_{d,k}^H \simeq E \{ \mathbf{y}_{d,k} \mathbf{y}_{d,k}^H \} \quad (30)$$

Toutefois, calculer la matrice de covariance \mathbf{R}_d pour tous les décalages possibles sur une durée symbole peut devenir fastidieux. Nous proposons plutôt de calculer une matrice de covariance de taille double \mathcal{R} , contenant toutes les matrices de covariance associées à tous les décalages possibles pour une période symbole donnée. La figure 3 illustre cette construction. La matrice \mathcal{Y} est de taille $2M \times (N - 1)$ et s'exprime en fonction de \mathbf{y} comme :

$$\mathcal{Y} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_{0,1} & \mathbf{y}_{0,2} & \cdots & \mathbf{y}_{0,N-1} \\ \mathbf{y}_{0,2} & \mathbf{y}_{0,3} & \cdots & \mathbf{y}_{0,N} \end{bmatrix} \quad (31)$$

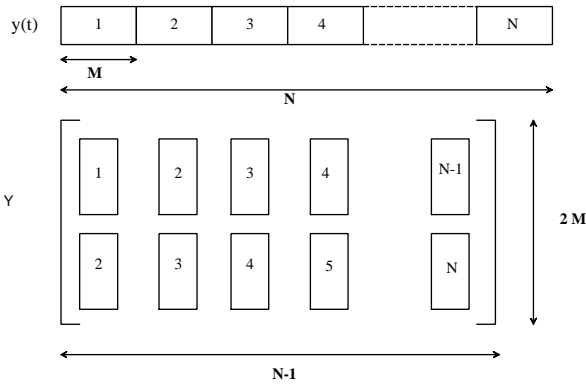


Figure 3. – Construction de \mathcal{Y} .

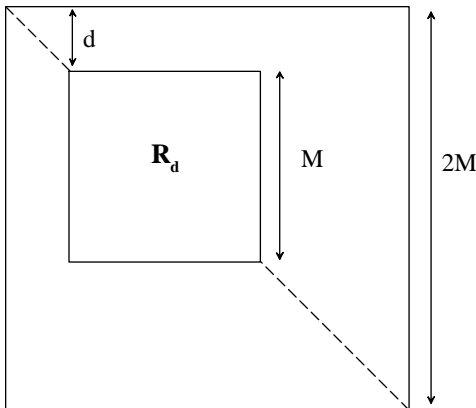


Figure 4. – Matrice de covariance \mathcal{R} .

On calcule alors la matrice de covariance \mathcal{R} associée à \mathcal{Y} , qui contient l'ensemble des matrices de covariance $\{\mathbf{R}_d(T_n)\}_{d \in [0, M-1]}$, ce que nous pouvons illustrer par la figure 4. La matrice \mathcal{R} est de taille $2M \times 2M$ et contient la matrice \mathbf{R}_d de taille $M \times M$ correspondant au meilleur décalage d .

– Pour d variant de 0 à M , on calcule

$$\|\mathbf{R}_d\|^2 = \sum_{i=d}^{M+d-1} \sum_{j=d}^{M+d-1} |\mathcal{R}(i, j)|^2 \quad (32)$$

– Finalement la valeur de d qui maximise la norme au carré de \mathbf{R}_d est retenue, pour la valeur T_n de la période symbole supposée.

5.2.2. mise en oeuvre de l'algorithme

La procédure de synchronisation est initialisée grâce à la valeur $T^{(0)}$ de période symbole trouvée par le détecteur. À l'issue de la procédure, nous visons une précision relative ε_s telle que

$$\varepsilon_s = \frac{T_e}{2D} \quad (33)$$

avec D la durée totale du signal analysé.

La synchronisation est atteinte à l'issue de deux étapes ($i = 1, 2$) ; à chaque étape, plusieurs périodes symbole vont être testées au sein d'un ensemble $T_S^{(i)}$ comportant $(2n^{(i)} + 1)$ valeurs, avec un pas $\Delta T^{(i)}$ autour de la valeur initiale $T^{(i-1)}$. La première étape conduit à une précision moyenne $\Delta T^{(1)} = 4\varepsilon_s$, alors que la seconde étape mène à la précision finale souhaitée $\Delta T^{(2)} = \varepsilon_s$. L'estimation en deux temps permet de limiter le coût de calcul. En pratique, dix huit itérations au total pour la période symbole ($n^{(1)} = 5$ et $n^{(2)} = 3$) sont normalement suffisantes pour atteindre la synchronisation.

Chaque étape délivre le meilleur couple (période symbole, indice de l'échantillon du premier symbole), comme suit :

$$(T^{(i)}, d^{(i)}) = \arg_{d \in [0, M-1]} \max_{T \in T_S^{(i)}} (\|\mathbf{R}_d(T)\|^2) \quad (34)$$

où

$$T_S^{(i)} = \{T_n \in \mathbb{R} : T_n = T^{(i-1)}(1 + n\Delta T^{(i)})\}, \quad (35)$$

$$n \in [-n^{(i)}, n^{(i)}], i = 1, 2$$

Nous obtenons ainsi une estimation $\hat{T} = T^{(2)}$ de la période symbole T , et une valeur $\hat{d} = d^{(2)}$ du décalage permettant de déduire le temps de désynchronisation :

$$\hat{t}_0 = \hat{d} \cdot T_e \quad (36)$$

Connaissant le couple $(\widehat{T}, \widehat{t}_0)$ il est maintenant possible de synchroniser le signal reçu et nous allons montrer que nous pouvons estimer la séquence pseudo-aléatoire, utilisée à l'émission pour étaler le spectre du signal informatif.

5.3. estimation de la séquence d'étalement

Lorsque le signal est synchronisé, nous avons vu qu'il ne restait qu'une seule valeur propre prépondérante (27). Dans ce cas, le vecteur propre associé contient à lui seul l'information sur la séquence pseudo-aléatoire. Notons que, puisque le modèle inclut le filtrage réalisé par le canal de transmission, c'est la version filtrée de la séquence d'étalement qui est estimée. Cependant, cela n'est pas du tout un inconvénient en pratique, puisque l'objectif ultime est de retrouver les symboles. Les symboles sont retrouvés par corrélation avec la séquence estimée. Lorsque l'on corrèle avec une séquence incluant l'effet du filtrage, les symboles estimés sont même meilleurs que lorsque l'on corrèle avec la séquence de l'émetteur, puisque l'on prend en compte, implicitement, l'effet du canal de transmission.

Comme la matrice de covariance est composée d'éléments à valeurs complexes, le vecteur \mathbf{v}_0 également. Or la séquence pseudo-aléatoire peut être réelle. Il est alors nécessaire de déterminer avant toute chose la nature de la séquence.

Afin de déterminer si la séquence est initialement complexe ou réelle, on compare les écarts types des parties réelle et imaginaire du vecteur \mathbf{v}_0 après normalisation de sa phase. Normaliser la phase de \mathbf{v}_0 consiste à maximiser sa partie réelle ou encore à se ramener sur l'axe des réels et à imposer la positivité de la partie réelle de la première composante par convention. On décide que la séquence est réelle si le rapport de l'écart type de la partie réelle sur l'écart type de la partie imaginaire est supérieur à 2.5.

Lorsque la séquence est complexe, on redresse la séquence en ramenant les phases des composantes de la séquence à $\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$ au sens des moindres carrés. Cette opération nous permet de retrouver une constellation carrée, typique des modulations de phase à quatre états, le plus souvent employées dans ces transmissions. Toutefois notre algorithme d'estimation de la séquence s'applique à tout type de modulation numérique, puisque nous ne faisons aucune hypothèse sur la nature des symboles de la transmission.

Il faut cependant noter que toute l'analyse théorique est basée sur le calcul de la matrice de covariance, que nous pouvons en pratique seulement estimer sur un nombre fini de fenêtres d'analyse. Cette approximation induit par conséquent une erreur sur le calcul de ses valeurs et vecteurs propres [9], que nous devons évaluer pour vérifier la robustesse de notre algorithme.

6. analyse des performances

Nous allons caractériser les erreurs d'estimation des valeurs et vecteurs propres de la matrice de covariance en fonction du nombre de fenêtres d'analyse. Cette étude s'appuie sur quelques résultats de la théorie des perturbations [10] et des propriétés des matrices de Wishart [11].

Nous définissons $\widehat{\mathbf{R}}$ la matrice de covariance estimée sur N fenêtres d'analyse :

$$\widehat{\mathbf{R}} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \mathbf{y}_n \mathbf{y}_n^H \quad (37)$$

Lorsque les vecteurs \mathbf{y}_n sont centrés, indépendants³, la matrice $\widehat{\mathbf{R}}$ suit une loi de Wishart [11]. Notons $\Delta \mathbf{R}$ l'erreur d'estimation de la matrice de covariance :

$$\widehat{\mathbf{R}} = \mathbf{R} + \Delta \mathbf{R} \quad (38)$$

et $\{\Delta \lambda_k, \Delta \mathbf{u}_k\}$ les erreurs induites sur ses éléments propres. Nous pouvons ainsi écrire les valeurs estimées $\widehat{\lambda}_k$ et $\widehat{\mathbf{u}}_k$ selon les équations ci-dessous :

$$\widehat{\lambda}_k = \lambda_k + \Delta \lambda_k \quad (39)$$

$$\widehat{\mathbf{u}}_k = \mathbf{u}_k + \Delta \mathbf{u}_k \quad (40)$$

avec la contrainte d'orthogonalité suivante⁴ :

$$\mathbf{u}_k^H \cdot \Delta \mathbf{u}_k = 0 \quad (41)$$

L'information recherchée reste toutefois l'estimation de la séquence pseudo-aléatoire. Nous avons vu qu'elle est déterminée à l'aide du premier vecteur propre ($k = 1$), lorsque le signal est synchronisé. Il est alors intéressant de définir un critère jugeant de la qualité d'estimation de la séquence. Un critère simple est de calculer le produit scalaire normalisé entre la séquence estimée et la séquence réelle. En effet les récepteurs à spectre étalé retrouvent les symboles d'information en effectuant une corrélation, c'est-à-dire un produit scalaire entre le signal reçu et la séquence utilisée à l'émission. En choisissant ce critère, nous assurons donc une parfaite cohérence entre la théorie et la pratique. Définissons ce critère noté \mathcal{C} :

$$\mathcal{C} = \frac{\widehat{\mathbf{u}}_1 \cdot \mathbf{u}_1}{\|\widehat{\mathbf{u}}_1\| \|\mathbf{u}_1\|} \quad (42)$$

3. Dans notre contexte, les y_n sont les échantillons du signal reçu. Il s'agit donc d'un bruit dans lequel est caché un signal à spectre étalé.

4. Les vecteurs propres étant définis à un facteur multiplicatif près, on impose que $\widehat{\mathbf{u}}_k$ ait une composante égale à 1 selon \mathbf{u}_k . Cette hypothèse nous conduit à la condition d'orthogonalité.

avec $\widehat{\mathbf{u}}_1$ le premier vecteur propre représentant la séquence estimée et \mathbf{u}_1 la séquence exacte. Ce critère sous entend par conséquent que le signal ait été synchronisé au préalable.

Proposition 1. *Le moment d'ordre un de ce critère est donné par la relation (43) :*

$$E\{C\} = 1 - \frac{(M-1) \left(1 + \eta \frac{T}{T_e}\right)}{2N \left(\eta \frac{T}{T_e}\right)^2} \quad (43)$$

Démonstration : Comme \mathbf{u}_1 et $\Delta\mathbf{u}_1$ sont des vecteurs orthonormés, l'équation (42) peut encore se réécrire :

$$C = \frac{1}{\|\widehat{\mathbf{u}}_1\|} = \frac{1}{(\widehat{\mathbf{u}}_1^H \cdot \widehat{\mathbf{u}}_1)^{\frac{1}{2}}} \quad (44)$$

On peut écrire :

$$\widehat{\mathbf{u}}_1^H \cdot \widehat{\mathbf{u}}_1 = 1 + \Delta\mathbf{u}_1^H \cdot \Delta\mathbf{u}_1$$

Supposons que $|\Delta\mathbf{u}_1^H \cdot \Delta\mathbf{u}_1| \ll 1$, la relation (44) s'exprime, après un développement à l'ordre un, comme :

$$C = 1 - \frac{1}{2} \Delta\mathbf{u}_1^H \cdot \Delta\mathbf{u}_1 \quad (45)$$

En remplaçant $\Delta\mathbf{u}_1$ par son développement limité à l'ordre un (cf. annexe 3), nous obtenons la relation :

$$E\{C\} = 1 - \frac{\lambda_1}{2N} \sum_{i=2}^M \frac{\lambda_i}{(\lambda_1 - \lambda_i)^2} \quad (46)$$

Comme le signal est synchronisé, λ_1 peut être remplacée par son expression (27) et λ_i par σ_b^2 . Ce qui nous permet après développement d'obtenir la relation (43) uniquement fonction du nombre de fenêtres d'analyse N , du nombre d'échantillons M dans une fenêtre, des périodes symbole T et d'échantillonnage T_e et du rapport signal à bruit η . ■

Nous allons maintenant vérifier ces résultats par des simulations et étudier la dégradation des éléments propres de la matrice de covariance lorsque nous disposons d'un nombre de fenêtres d'analyse N réduit.

7. résultats de simulations

Un premier exemple illustre toutes les étapes d'estimation des paramètres d'une transmission à spectre étalé par séquence directe pour un canal idéal. Un deuxième exemple présente les résultats de nos algorithmes pour un canal à trajets multiples.

7.1. canal idéal

Considérons un signal modulé en phase, étalé par une séquence de Gold de longueur 31 et de fréquence chip $F_c = 40$ MHz, noyé dans un bruit blanc gaussien dont le rapport signal à bruit est égal à -5 dB. La figure 5 représente les résultats de la détection. Nous obtenons cinq pics, régulièrement espacés, dépassant le seuil maximal théorique au delà duquel il est peu probable d'avoir un bruit seul. Nous pouvons donc conclure de la présence d'un signal à spectre étalé et estimer la période symbole T comme l'espacement moyen entre les pics, qui est égal dans notre exemple à $0.775 \mu\text{s}$.

Nous calculons ensuite les valeurs propres de la matrice de covariance du signal reçu (Fig. 6), échantillonné et divisé en fenêtres d'analyse de durée égale à T . Nous avons montré que nous pouvions alors estimer le rapport signal à bruit (23) et le temps de désynchronisation (24) selon l'amplitude des deux premières valeurs propres. Nous obtenons ainsi comme estimation du rapport signal à bruit $\widehat{\eta} = 0.2205$ soit environ -6.5 dB et pour le temps de désynchronisation $\widehat{t}_0 = 0.3392 \mu\text{s}$. Appliquons maintenant l'algorithme de synchronisation afin d'estimer le couple $(\widehat{T}, \widehat{d})$ qui permet d'affiner la valeur de la période symbole T et de déterminer le début du premier symbole dans le signal reçu. La figure 7 représente les valeurs maximales de $\|\mathbf{R}_d(T)\|^2$ en fonction des valeurs testées de la période symbole. Les raies les plus espacées de part et d'autre du centre correspondent aux itérations de la première étape, tandis que les raies du centre correspondent à la deuxième étape de l'algorithme. On remarque que la valeur maximale de $\|\mathbf{R}_d(T)\|^2$ est atteinte pour $\widehat{T} = 0.775 \mu\text{s}$. Cette valeur est égale à celle que nous avons à l'aide des résultats du détecteur, car le rapport signal à bruit est suffisamment élevé pour que la première estimation de la période soit précise.

Étudions maintenant les résultats de l'algorithme en ce qui concerne l'estimation du décalage. La figure 8 représente les valeurs maximales de $\|\mathbf{R}_d(T)\|^2$ en fonction des valeurs du décalage t_0 en μs . La valeur maximale du carré de la norme est atteinte pour un nombre d'échantillons $\widehat{d} = 32$, ce qui correspond à un temps de désynchronisation $\widehat{t}_0 = 0.3179 \mu\text{s}$.

Une manière de vérifier que ce couple $(\widehat{T}, \widehat{d})$ est celui qui nous permet de synchroniser le signal est de calculer les valeurs propres de la matrice de covariance $R_{\widehat{d}}(\widehat{T})$. La figure 9 représente ces valeurs propres.

Estimation des paramètres d'une transmission à spectre étalé par séquence directe

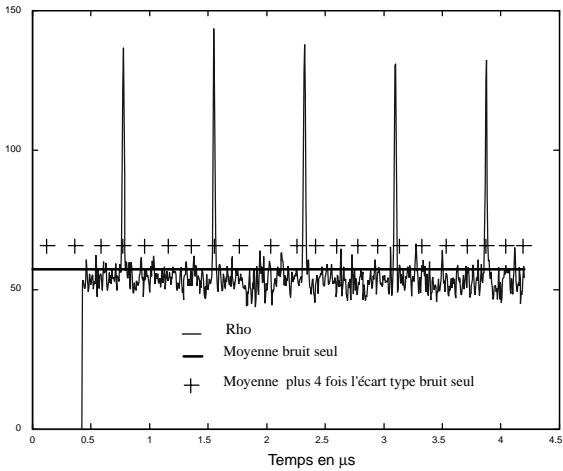


Figure 5. – Résultats du détecteur.

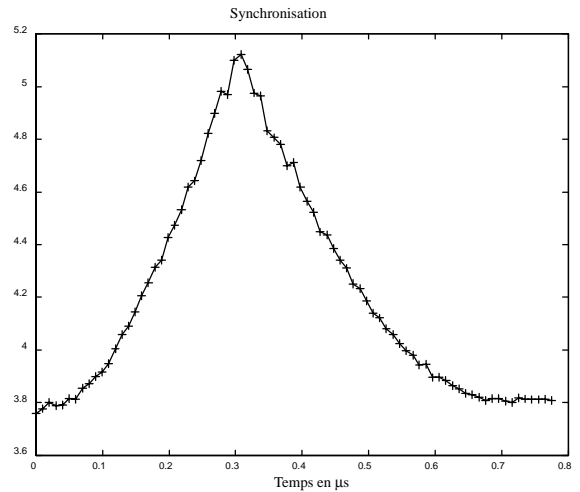


Figure 8. – Estimation du décalage.

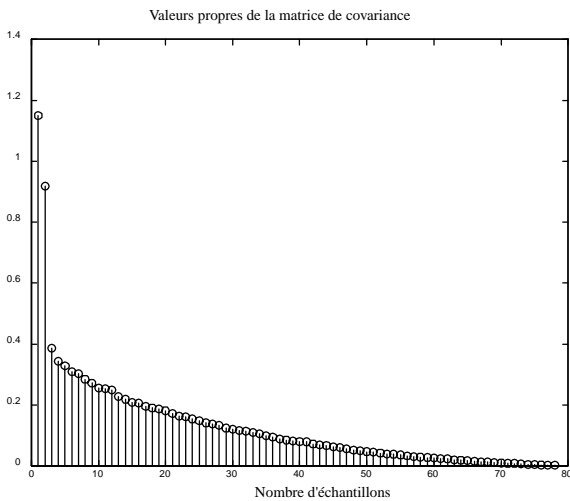


Figure 6. – Valeurs propres de la matrice de covariance du signal reçu.

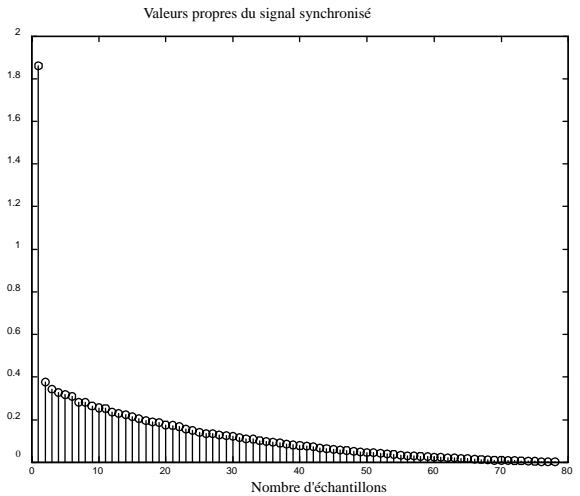


Figure 9. – Valeurs propres de la matrice de covariance du signal synchronisé.

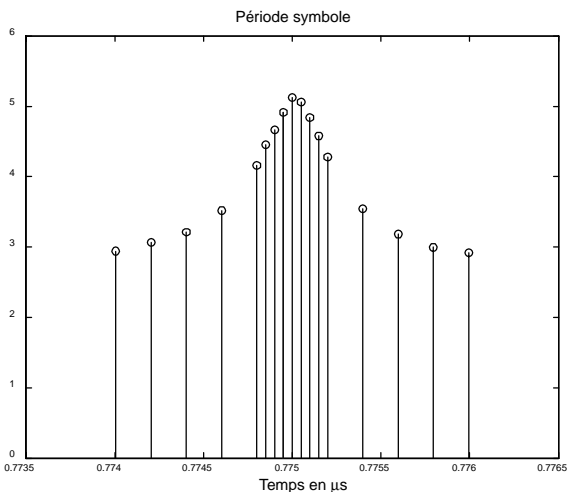


Figure 7. – Estimation précise de la période symbole.

On remarque qu'une seule valeur propre est bien plus importante que les autres, ce qui confirme l'analyse du paragraphe 5. Nous avons alors montré que le vecteur propre associé à la plus grande valeur propre constitue une estimation filtrée de la séquence pseudo-aléatoire, utilisée à l'émission pour étaler le spectre. La figure 10 représente respectivement les parties réelles de la séquence estimée et de la séquence exacte. La figure 11 illustre quant à elle les parties imaginaires de la séquence estimée et de la séquence exacte.

D'autre part, la figure 12 nous permet d'avoir une idée des conditions d'expérience (nombre de fenêtres d'analyse en fonction du rapport signal à bruit) conduisant à une estimation correcte de la séquence. Nous avons représenté le moment d'ordre un du critère (46) ('*'), ainsi que la valeur moyenne ('o') calculée sur un ensemble de simulations de type Monte Carlo de

100 itérations pour un nombre variable de fenêtres d'analyse N et de rapports signal à bruit SNR . Nous remarquons que les résultats théoriques sont plus pessimistes qu'en pratique en raison de la troncature prématurée des séries de Taylor des erreurs d'estimation. Cependant, nous pouvons conclure que les couples (N, SNR) pour lesquels le moment d'ordre un du critère est proche de 1 correspondent à une estimation correcte de la séquence pseudo-aléatoire. Comme nous pouvons estimer grossièrement le rapport signal à bruit (23), nous pouvons en déduire selon cette figure le nombre de fenêtres d'analyse N nécessaire pour une estimation correcte de la séquence pseudo-aléatoire. Par exemple, si on veut obtenir une bonne estimation à -10 dB, la figure montre qu'il faut traiter une durée de signal correspondant au moins à $N = 200$ symboles.

Etudions maintenant les résultats de nos algorithmes pour un signal à spectre étalé sur un canal à trajets multiples.

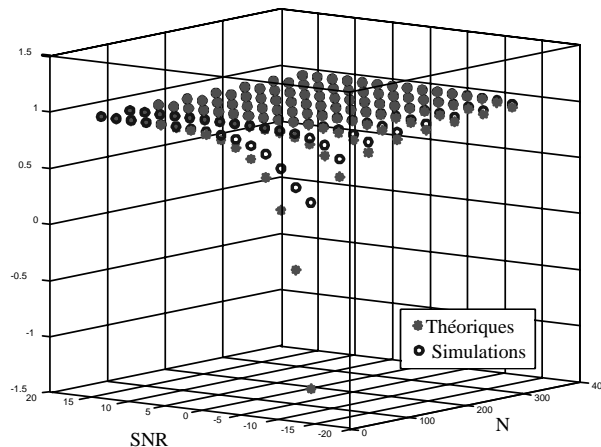


Figure 12. – Analyse des performances.

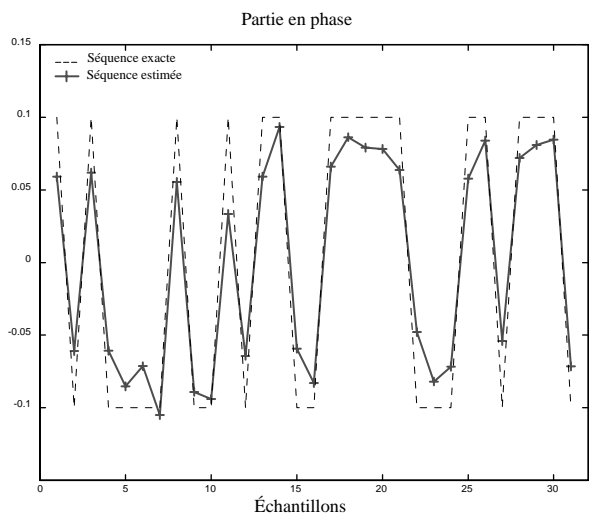


Figure 10. – Séquences en phase.

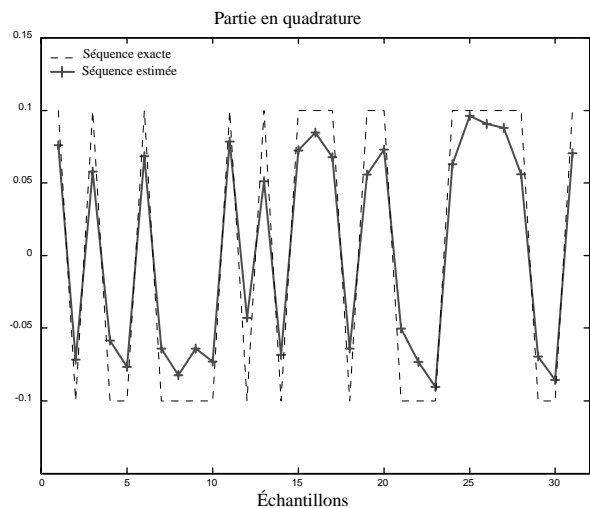


Figure 11. – Séquences en quadrature.

7.2. canal à trajets multiples

Considérons un signal modulé en phase à quatre états d'environ 400 symboles de durée égale à $327,68 \mu s$, à spectre étalé à l'aide d'une séquence de Gold de longueur 31 et de fréquence chip $F_c = 40$ MHz. Ce signal est noyé dans un bruit blanc gaussien avec un rapport signal à bruit égal à -7 dB. Nous utilisons pour cet exemple un canal COST 207 (European Cooperation in the field of Scientific and Technical research) [12], canal de communications radio mobile en milieu urbain. La réponse impulsionnelle de ce canal est représentée sur la figure 13. La figure 14 représente les résultats du détecteur. Nous obtenons cinq pics remarquables, qui nous permettent de déterminer la période symbole $T = 0.775 \mu s$. Nous appliquons ensuite l'algorithme de synchronisation et nous vérifions que le signal est correcte-

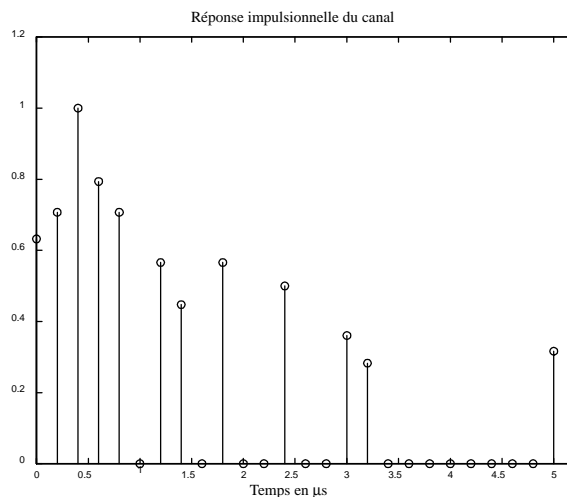


Figure 13. – Réponse impulsionnelle du canal.

ment synchronisé en observant les valeurs propres de la matrice de covariance du signal. Ces valeurs propres sont représentées sur la figure 15. Il ne reste qu'une seule valeur propre de grande amplitude ce qui confirme la bonne synchronisation du signal. Le vecteur propre associé à cette valeur propre nous permet ensuite d'estimer la version filtrée de la séquence pseudo-aléatoire, utilisée à l'émission pour étaler le spectre du signal informatif. Les symboles de ce signal sont finalement retrouvés par corrélation de la séquence estimée et du signal étalé reçu (Figure 16). Nous retrouvons une constellation représentative d'une modulation PSK-4, avec dans ce cas une estimation sans erreur des symboles.

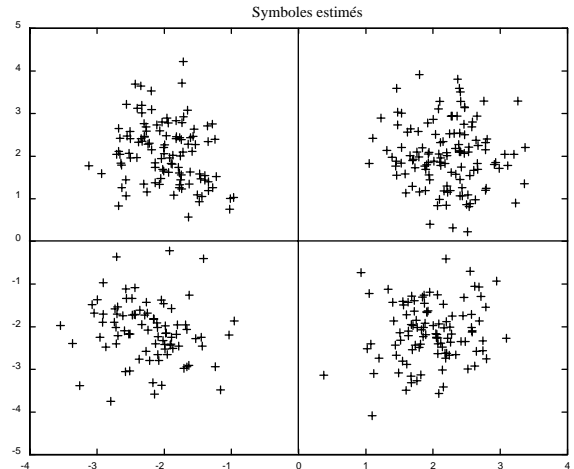


Figure 16. – Constellation des symboles.

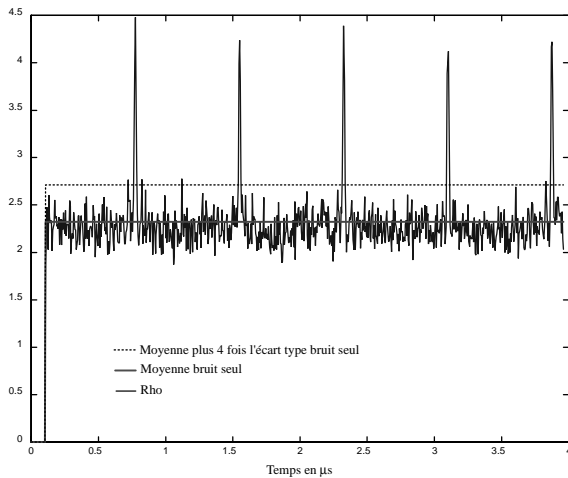


Figure 14. – Résultats du détecteur.

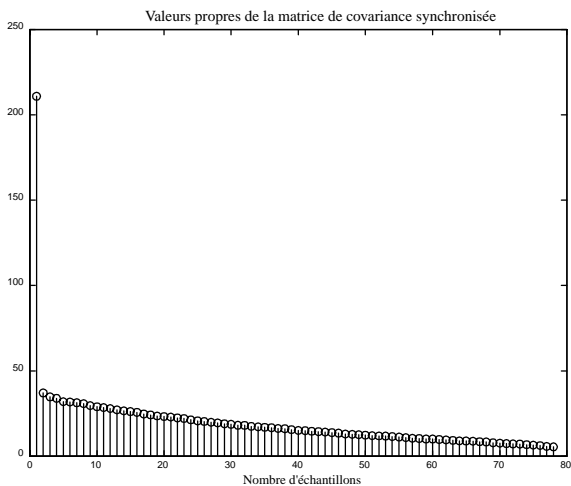


Figure 15. – Valeurs propres de la matrice de covariance du signal synchronisé.

8. conclusion

Nous avons montré que nous pouvons déterminer automatiquement les paramètres d'une transmission numérique à spectre étalé par séquence directe. Par comparaison des propriétés statistiques du signal reçu et des propriétés théoriques pour un bruit seul, nous pouvons en effet détecter un signal à spectre étalé inconnu, et en estimer la période symbole. Nous avons ensuite élaboré un algorithme de synchronisation aveugle, qui nous a permis d'estimer de manière plus précise la période symbole et de localiser le début du premier symbole. La séquence pseudo-aléatoire correspond alors au vecteur propre associé à la valeur propre de plus grande amplitude de la matrice de covariance du signal synchronisé. Suite à une analyse des performances de cette démarche, nous avons également montré que nous pouvons déterminer le nombre de fenêtres d'analyse nécessaire, pour un rapport signal à bruit donné, afin d'estimer de manière correcte la séquence pseudo-aléatoire. Ce code peut ensuite être utilisé par un récepteur classique de transmissions à spectre étalé, afin de retrouver les symboles.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] R. L. Pickholtz, D. L. Schilling, L. B. Milstein, « Theory of spread spectrum communications – A Tutorial », *IEEE Trans. on Communications*, Vol. COM 30, N° 5 pp 855-884, May, 1982.
- [2] M. K. Tsatsanis, G. B. Giannakis, « Blind estimation of direct sequence spread spectrum signals in multipath », *IEEE Trans. on Signal Processing*, Vol. 45, N° 5, pp 1241-1252, May, 1997.
- [3] G. Burel, « Detection of spread spectrum transmissions using fluctuations of correlation estimators », *IEEE ISPACS'2000*, Honolulu, Nov. 2000.
- [4] C. E. Cook, H. S. Marsh, « An introduction to spread spectrum », *IEEE Communications Magazine*, pp 8-16, March, 1983.

[5] R. C. Dixon, « Spread spectrum techniques », The Institute of Electronics Engineers, Inc. New York, 1976.
 [6] J. G. Proakis, « Digital Communications », Third Edition, Mac Graw Hill International Edition, 1995.
 [7] G. Burel, C. Boudier, O. Berder, « Detection of direct sequence spread spectrum transmissions without prior knowledge », *IEEE Globecom 2001*, San Antonio, Nov. 2001.
 [8] G. Burel, C. Boudier, « Blind Estimation of the pseudo-random sequence of a direct sequence spread spectrum signal », *2000 Military Communications International Symposium (IEEE-MILCOM' 2000)*, Los Angeles, Oct. 22-25, 2001.
 [9] H. Krim, J. G. Proakis, « Smoothed eigenspace-based parameter estimation », *Automatica, Special Issue on statistical Signal Processing and Control*, Jan. 1994.
 [10] S. Marcos, « Les méthodes à haute résolution - Traitement d'antenne et analyse spectrale », Hermès, 1998, ISBN : 2-86601-662-9.
 [11] R. J. Muirhead, « Aspects of multivariate statistical theory », J. Wiley & Sons, 1982.
 [12] COST 207 (sous la direction de Mr. FAILLY). COST 207 : Digital land mobile radio communications. Technical Report EUR 12 160, Commission of the European Communities, September 1988.

Annexe 1 : calcul des fluctuations dans le cas d'un signal seul

Dans le cas d'un signal à spectre étalé seul, nous montrons que des fluctuations importantes de l'estimateur d'autocorrélation sont obtenues pour chaque τ multiple de la période symbole. Par souci de clarté, nous limitons la démonstration à $\tau = T_s$. La généralisation à $\tau = k \cdot T_s$ est évidente.

Pour un signal seul, la moyenne des fluctuations de l'estimateur s'exprime comme :

$$m_\rho^s(T) = E \left\{ |\widehat{R}_{ss}(T)|^2 \right\} \quad (47)$$

où

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k h(t - kT) \quad (48)$$

Par définition, nous avons :

$$\widehat{R}_{ss}(T) = \frac{1}{T_F} \int_0^{T_F} s(t) s^*(t - T) dt \quad (49)$$

$$\widehat{R}_{ss}(T) = \frac{1}{T_F} \int_0^{T_F} \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k h(t - kT) \right) \left(\sum_{k'=-\infty}^{+\infty} a_{k'}^* h^*(t - (k' + 1)T) \right) dt \quad (50)$$

Comme le filtre $h(t)$ est de durée limitée, le produit se simplifie et est non nul uniquement pour $k' + 1 = k$, ce qui donne pour

l'expression de $\widehat{R}_{ss}(T)$:

$$\widehat{R}_{ss}(T) = \frac{1}{T_F} \int_0^{T_F} \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k a_{k-1}^* |h(t - kT)|^2 \right) dt \quad (51)$$

$$= \frac{1}{T_F} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k a_{k-1}^* \int_0^{T_F} |h(t - kT)|^2 dt \quad (52)$$

Posons $\sigma_a^2 = E(|a_k|^2)$ la variance des symboles et $\sigma_h^2 = \frac{1}{T} \int_0^T |h(t)|^2 dt$. Les symboles étant centrés et indépendants, nous avons :

$$E\{|\widehat{R}_{ss}(T)|^2\} = \frac{1}{T_F^2} \sigma_a^4 \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(\int_0^{T_F} |h(t - kT)|^2 dt \right)^2 \quad (53)$$

$$= \frac{1}{T_F^2} \sigma_a^4 \frac{T_F}{T} (T \sigma_h^2)^2 \quad (54)$$

Et, comme la puissance du signal est $\sigma_s^2 = \sigma_a^2 \sigma_h^2$, nous obtenons :

$$m_\rho^s(T) = E\{|\widehat{R}_{ss}(T_s)|^2\} = \frac{T}{T_F} \sigma_s^4 \quad (55)$$

Ce qui correspond à l'équation 16.

Annexe 2 : matrice de corrélation des fenêtres de durée T

Développons l'expression (19) à l'aide de l'équation (18) :

$$\mathbf{R} = E \{ a_m a_m^* \} \mathbf{h}_0 \cdot \mathbf{h}_0^H + E \{ a_{m+1} a_{m+1}^* \} \mathbf{h}_{-1} \cdot \mathbf{h}_{-1}^H + E \{ \mathbf{b}(t) \cdot \mathbf{b}(t)^H \} \quad (56)$$

ce qui peut se réécrire :

$$\mathbf{R} = \sigma_a^2 \|\mathbf{h}_0\|^2 \mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{v}_0^H + \sigma_a^2 \|\mathbf{h}_{-1}\|^2 \mathbf{v}_{-1} \cdot \mathbf{v}_{-1}^H + \sigma_b^2 \mathbf{I} \quad (57)$$

où \mathbf{v}_0 et \mathbf{v}_{-1} sont égaux respectivement aux vecteurs \mathbf{h}_0 et \mathbf{h}_{-1} normés. Notons ε_h l'énergie de $h(t)$:

$$\varepsilon_h = \int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)|^2 dt \quad (58)$$

Comme nous avons supposé que $h(t) = 0$ en dehors de l'intervalle $[0, T[$ et que le signal est échantillonné à la période T_e avec $T = MT_e$ où $M \in \mathbb{N}^*$, nous pouvons exprimer l'énergie sous la forme :

$$\varepsilon_h = T_e \sum_{n=0}^{M-1} |\mathbf{h}(n)|^2 \simeq T_e \|\mathbf{h}\|^2 \quad (59)$$

avec $\|\mathbf{h}\|^2 = \|\mathbf{h}_0\|^2 + \|\mathbf{h}_{-1}\|^2$ selon les définitions des vecteurs \mathbf{h}_0 et \mathbf{h}_{-1} . Exprimons les normes carrées de \mathbf{h}_0 et \mathbf{h}_{-1} en fonction de la norme carrée de \mathbf{h} en supposant l'énergie de $h(t)$ uniformément répartie sur une période symbole, on obtient :

$$\begin{cases} \|\mathbf{h}_0\|^2 \simeq \left(1 - \frac{t_0}{T}\right) \|\mathbf{h}\|^2 \\ \|\mathbf{h}_{-1}\|^2 \simeq \frac{t_0}{T} \|\mathbf{h}\|^2 \end{cases} \quad (60)$$

La matrice de corrélation s'écrit alors en fonction de l'énergie ε_h :

$$\mathbf{R} = \sigma_a^2 \frac{\varepsilon_h}{T_e} \left\{ \left(1 - \frac{t_0}{T}\right) \mathbf{v}_0 \mathbf{v}_0^H + \frac{t_0}{T} \mathbf{v}_{-1} \mathbf{v}_{-1}^H \right\} + \sigma_b^2 \mathbf{I} \quad (61)$$

ou encore en fonction du rapport signal à bruit η comme la relation (20).

Annexe 3 : perturbations sur l'estimation des valeurs propres et vecteurs propres

Nous supposons que les perturbations $\{\Delta\lambda_k, \Delta\mathbf{u}_k\}$ admettent un développement limité en série de Taylor :

$$\Delta\lambda_k = \delta\lambda_k + \delta^{(2)}\lambda_k + \dots + \delta^{(n)}\lambda_k \quad (62)$$

$$\Delta\mathbf{u}_k = \delta\mathbf{u}_k + \delta^{(2)}\mathbf{u}_k + \dots + \delta^{(n)}\mathbf{u}_k \quad (63)$$

où $\{\delta^{(n)}\lambda_k, \delta^{(n)}\mathbf{u}_k\}$ désignent les termes d'ordre n , dont les expressions en fonction de $\Delta\mathbf{R}$ sont données par le théorème suivant.

Théorème 6.1. Les perturbations $\{\Delta\lambda_k, \Delta\mathbf{u}_k\}$ s'expriment en fonction de $\Delta\mathbf{R}$ selon les expressions ci-dessous [10] :

– Au premier ordre :

$$\delta\lambda_k = \mathbf{u}_k^H \Delta\mathbf{R} \mathbf{u}_k \quad (64)$$

$$\delta\mathbf{u}_k = \mathbf{S}_k^+ \Delta\mathbf{R} \mathbf{u}_k \quad (65)$$

– À un ordre n supérieur ($n > 1$) :

$$\delta^{(n)}\lambda_k = \mathbf{u}_k^H \Delta\mathbf{R} \delta^{(n-1)}\mathbf{u}_k \quad (66)$$

$$\delta^{(n)}\mathbf{u}_k = \mathbf{S}_k^+ \Delta\mathbf{R} \delta^{(n-1)}\mathbf{u}_k - \sum_{l=1}^{n-1} \delta^{(n-l)}\lambda_k \mathbf{S}_k^+ \delta^{(l)}\mathbf{u}_k \quad (67)$$

où $\mathbf{S}_k = \lambda_k \mathbf{I} - \mathbf{R}$, avec \mathbf{I} la matrice identité et \mathbf{S}_k^+ est la pseudo-inverse de \mathbf{S}_k :

$$\mathbf{S}_k^+ = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^M \frac{1}{\lambda_k - \lambda_i} \mathbf{u}_i \mathbf{u}_i^H \quad (68)$$

Les propriétés suivantes des matrices de Wishart [11] sont au cœur de l'évaluation des éléments propres de la matrice de covariance estimée.

Proposition 2.

– L'erreur d'estimation satisfait les relations suivantes :

$$E \{\Delta\mathbf{R}\} = 0 \quad (69)$$

$$E \left\{ \Delta\mathbf{R}(i, j) \Delta\mathbf{R}(i', j') \right\} = \frac{1}{N} \mathbf{R}(i, j') \mathbf{R}(i', j) \quad (70)$$

Quelle que soit la matrice complexe \mathbf{A} carrée :

$$E \{\Delta\mathbf{R} \mathbf{A} \Delta\mathbf{R}\} = \frac{1}{N} \text{tr}(\mathbf{R} \mathbf{A}) \mathbf{R} \quad (71)$$

À l'aide de ces relations et des développements en série de Taylor, nous allons pouvoir évaluer les moments des valeurs estimées $\{\widehat{\lambda}_k, \widehat{\mathbf{u}}_k\}$. Nous nous sommes restreints à un développement limité à l'ordre deux des perturbations $\Delta\lambda_k$ et $\Delta\mathbf{u}_k$ pour l'estimation des moments d'ordre un et à un développement à l'ordre un pour l'estimation des moments d'ordre deux des éléments propres de la matrice de covariance estimée.

Proposition 3. Le développement à l'ordre deux de (62) et de (63) ainsi que les propriétés des matrices de Wishart nous conduisent aux expressions suivantes pour les moments d'ordre un de $\widehat{\lambda}_k$ et $\widehat{\mathbf{u}}_k$:

$$E \{\widehat{\lambda}_k\} = \lambda_k + \frac{\lambda_k}{N} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^M \frac{\lambda_i}{\lambda_k - \lambda_i} \quad (72)$$

$$E \{\widehat{\mathbf{u}}_k\} = \mathbf{u}_k \quad (73)$$

Démonstration : Exprimons le développement limité à l'ordre deux de l'erreur d'estimation des valeurs propres

$$\Delta\lambda_k = \delta\lambda_k + \delta^{(2)}\lambda_k \quad (74)$$

Comme la perturbation $\Delta\mathbf{R}$ est centrée, selon le théorème (6.1) nous obtenons

$$E\{\Delta\lambda_k\} = E\{\mathbf{u}_k^H \Delta\mathbf{R} \mathbf{S}_k^+ \Delta\mathbf{R} \mathbf{u}_k\} \quad (75)$$

Appliquons la relation (71) à l'expression ci-dessus :

$$E\{\Delta\lambda_k\} = \frac{\lambda_k}{N} \mathbf{u}_k^H \text{tr}(\mathbf{R} \mathbf{S}_k^+) \mathbf{u}_k \quad (76)$$

La trace de $\mathbf{R} \mathbf{S}_k^+$ peut facilement être calculée à l'aide de l'expression de la pseudo-inverse \mathbf{S}_k^+ (68), afin de retrouver le résultat (72).

La démonstration est similaire pour le calcul du moment d'ordre un des vecteurs propres estimés. ■

Proposition 4. *Le développement à l'ordre un des séries de Taylor (62) et (71) et la proposition (6.2) nous conduisent aux expressions des moments d'ordre deux de $\{\hat{\lambda}_k, \hat{\mathbf{u}}_k\}$:*

LES AUTEURS

Céline BOUDER



Céline BOUDER est née le 26 octobre 1973. Elle a obtenu le Doctorat en Electronique de l'Université de Bretagne Occidentale en décembre 2001. Ses activités de recherche au sein de l'équipe « Traitement du Signal pour les Télécommunications » du laboratoire d'Electronique et Systèmes de Télécommunications (LEST – UMR CNRS 6165) concernent les transmissions à spectre étalé.

Stéphane AZOU



Stéphane AZOU a obtenu le Doctorat de l'Université de Bretagne Occidentale (Brest) dans la spécialité Electronique, en 1997. Jusqu'en février 2000, il a été enseignant-chercheur à l'Ecole Navale, dans la spécialité Traitement du Signal. Depuis février 2000, il est Maître de Conférences à l'Université de Bretagne Occidentale et mène ses activités de recherche au sein de l'équipe « Traitement du Signal pour les Télécommunications » du

Laboratoire d'Electronique et Systèmes de Télécommunications (LEST – UMR CNRS 6165). Ses travaux de recherche portent sur les problèmes de détection et d'interception de signaux en communications numériques, ainsi que sur l'amélioration des propriétés de furtivité des transmissions à l'aide de systèmes non-linéaires.

$$\text{var}(\hat{\lambda}_k) = \frac{\lambda_k^2}{N} \quad (77)$$

$$\text{cov}(\hat{\mathbf{u}}_k) = \frac{\lambda_k}{N} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^M \frac{\lambda_i}{\lambda_k - \lambda_i} \mathbf{u}_i \mathbf{u}_i^H \quad (78)$$

Démonstration : Par définition nous avons :

$$\text{var}(\hat{\lambda}_k) = E\left\{(\hat{\lambda}_k - E(\hat{\lambda}_k))^2\right\} \quad (79)$$

En remplaçant $\hat{\lambda}_k$ par son expression (39) développée au premier ordre (64), nous obtenons :

$$\text{var}(\hat{\lambda}_k) = \frac{\lambda_k^2}{N} \mathbf{u}_k^H \text{tr}\{\mathbf{u}_k \mathbf{u}_k^H\} \mathbf{u}_k \quad (80)$$

Comme \mathbf{u}_k est normé et que

$$\text{tr}\{\mathbf{u}_k \mathbf{u}_k^H\} = \|\mathbf{u}_k\|^2$$

nous obtenons la relation (77). La démonstration est similaire pour la covariance des vecteurs propres. ■

Gilles BUREL



Gilles BUREL a obtenu le diplôme d'ingénieur de l'Ecole Supérieure d'Electricité (Supélec) en 1988, le Doctorat de l'Université de Bretagne Occidentale en décembre 1991 et l'Habilitation à Diriger des Recherches en avril 1996. Il est auteur de 19 brevets et de 90 articles. Après avoir débuté sa carrière à Thomson CSF en 1988, dans le domaine du traitement d'images, il a ensuite rejoint Thomson Multimédia. Depuis septembre 1997, il est Professeur à l'Université de Bretagne Occidentale, où il assure la responsabilité de l'une des trois équipes de recherche du Laboratoire d'Electronique et Systèmes de Télécommunications (UMR CNRS 6165), l'équipe « Traitement du Signal pour les Télécommunications ». Ses activités de recherche se situent essentiellement dans le domaine des communications numériques (interception et analyse, systèmes MIMO, transmissions furtives).

Manuscrit reçu le 25 juin 2002