

# La trajectoire déformable : un modèle de variété active fondé sur le principe de Fermat

---

## The deformable path: a Fermat principle-based model of active contour

par Eric DELÉCHELLE, J. LEMOINE

Laboratoire d'Étude et de Recherche en Instrumentation Signaux et Systèmes, Université Paris-XII Val de Marne  
61, avenue du Général de Gaulle, F-94010 Créteil cedex

### *résumé et mots clés*

Un modèle de contours déformables élaboré à partir du principe de Fermat est présenté. Le principe de moindre temps permet de définir la trajectoire d'un rayon lumineux dans un milieu d'indice de réfraction non homogène et s'exprime sous forme variationnelle. Pour les images, en assimilant les valeurs du gradient des niveaux de gris à cet indice de réfraction, on aboutit à un système d'équations définissant une variété active - la trajectoire déformable - pour la détection des contours sur les images. La résolution numérique du problème de minimisation qui en découle est fondée sur le principe de programmation dynamique qui permet d'obtenir des solutions stables et robustes. De nombreux exemples de détection sur images synthétiques et réelles illustrent la méthode proposée.

Contours déformables, trajectoires déformables, équations d'Euler-Lagrange, principe de Fermat, programmation dynamique.

### *abstract and key words*

We present a new deformable contour variety. Our technique is based on the development of a new class of physics-based deformable model - the deformable path - from the Fermat principle or less time principle. For image analysis, with grey levels viewed as refraction indexes, we define the deformable path by a set of equations for a minimisation problem. Numerical solutions are obtained with a dynamic programming technique, which produces very robust and stable results. We present experiments involving the detection of contours from synthetic and real images.

*Deformable contours, deformable paths, Euler-Lagrange equation, Fermat principle, dynamic programming.*

# 1. introduction

Depuis leur introduction en 1987, les contours déformables, ou contours actifs, sont devenus très populaires. Leur application se situe dans de nombreux domaines tels que la reconnaissance des formes, la biologie ou l'imagerie médicale. Le plus souvent, le modèle utilisé repose sur une analogie mécanique. Dans cet article, nous proposons une méthode qui s'appuie sur une analogie optique pour définir un nouveau modèle de contour déformable. La résolution numérique du problème de minimisation qui en découle est fondée sur le principe de programmation dynamique. De nombreux exemples de détection sur images synthétiques et réelles illustrent la méthode proposée.

## 1.1. contours actifs

Les modèles classiques de contours actifs font appel à la notion de corps élastiques subissant des contraintes extérieures [1], [2] et [3]. La forme prise par l'élastique est liée à une minimisation d'énergie totale. Celle-ci est composée par la somme d'une énergie interne (énergie de régularisation) liée à l'élongation et à la torsion du corps, et d'une énergie externe liée aux forces extérieures (définies à partir du gradient ou des niveaux de gris d'une image) auxquelles l'élastique est soumis. La dynamique de déformation, et donc le temps, ne sont pas pris en compte. Pour cela, afin d'ajouter à l'information de position (statique) celle qui concerne l'évolution de chaque « élément » de l'élastique, il convient de définir un système de type inertiel-dissipatif. Le caractère inertiel est obtenu en définissant une densité de masse pour l'élastique, alors que le caractère dissipatif est obtenu en considérant que le milieu (l'image) présente une certaine viscosité. Ainsi, masse et viscosité régissent la dynamique de déformation.

Il se pose alors le problème suivant : de quelle manière définir ces deux grandeurs compte tenu des images à traiter ? Pour cela, le modèle est généralement simplifié d'une part en ne considérant que l'aspect dissipatif de la dynamique (le corps est sans masse), d'autre part en fixant un coefficient de viscosité constant dans tout le milieu. La minimisation de l'énergie totale aboutit à un résultat qui dépend fortement du choix de la valeur retenue pour la viscosité.

Certaines méthodes tentent d'énoncer une loi d'évolution locale pour la viscosité [3], mais là encore, la loi obtenue, le plus souvent à partir d'heuristiques, n'est valable que pour certaines familles d'images [4]. Une autre solution consiste à modifier l'énergie extérieure en intégrant de nouvelles forces qui ne sont pas attachées aux données mais peuvent être réglées suivant les images à traiter, c'est le cas par exemple du modèle du ballon [2].

On peut noter également l'existence de modèles de variétés actives qui ne sont pas fondés sur le modèle de l'élastique, par

exemple une déformation géométrique de contour simule l'expansion d'un liquide sur un relief [5], la formalisation s'inspire de celle utilisée en mécanique pour caractériser la propagation d'un front d'onde.

Les inconvénients principaux des techniques de contours actifs peuvent être résumés ainsi, (i) *l'initialisation* : le contour initial doit être placé très près des contours de l'objet pour ne pas être arrêté par des éléments non significatifs (minimums locaux), (ii) *le paramétrage* : l'énergie interne n'est pas invariante par changement d'échelle, de plus la force de contraction n'est pas toujours appropriée à une bonne progression du contour vers la solution. Toutefois, des travaux récents ont permis d'améliorer ces faiblesses en introduisant la multirésolution soit directement sur les données, par transformation pyramidale des images, soit en appliquant des modèles paramétriques hiérarchiques de contours [6].

Une approche dérivée du modèle mécanique classique pour le contour actif est présentée dans [7]. L'idée développée par les auteurs est de s'affranchir du problème du choix des paramètres de régularisation en constituant une énergie externe (donc liée aux données) qui intègre de manière naturelle un terme de régularisation. Le modèle issu de la nouvelle formulation du problème de minimisation d'énergie n'est alors plus à caractère mécanique mais repose sur la recherche de la *géodésique minimale* sur une surface d'action minimale, en d'autres termes le chemin le plus court entre deux points au travers d'un relief. Bien que la démarche initiale soit différente de celle que nous présentons dans cet article, le formalisme qui en découle est semblable à celui qui est associé au modèle optique que nous présentons.

## 1.2. principe de Fermat

Le principe de Fermat, dont l'énoncé est le suivant :

*Pour aller d'un point à un autre, la lumière emprunte le trajet pour lequel le temps de parcours est minimum,* représente une surprenante transition entre la loi qui régit la déformation d'un corps élastique et celle qui décrit la dynamique d'une masse en mouvement.

Un ruban, ou un fil élastique, est un corps dont certains points peuvent subir une contrainte de traction induisant un étirement local. La déformation ne varie pas dans le temps si les contraintes sont maintenues constantes. La description de l'état du corps, c'est-à-dire la position des éléments qui le composent collectivement, est indépendante du temps.

Inversement, un objet en mouvement est vu comme une entité individuelle (un bloc) qui traverse l'espace au cours du temps. Le mouvement de l'objet est alors associé à une trajectoire spatio-temporelle pour laquelle, par définition, il est indispensable de prendre en compte le temps.

En ce qui concerne la lumière, son trajet est défini à la fois dans l'espace (par le chemin emprunté entre deux points) et dans le

temps (par la vitesse entre ces points). Il est généralement plus naturel de percevoir ce trajet spatio-temporel sous forme d'une courbe occupée en tout point et à tout moment par la lumière. En conséquence, l'aspect temporel disparaît. Le rayon de lumière, bien que défini par une entité isolée occupant tour à tour chaque site du trajet, est vu comme un fil indivisible, d'où le terme de « rai de lumière ».

Il est important de noter que la loi de minimisation extraite du principe de Fermat d'une part aboutit à un problème variationnel semblable à celui rencontré avec les contours déformables, et d'autre part permet d'élaborer aisément le modèle d'une nouvelle variété active que nous avons appelé « trajectoires actives » afin de détecter les contours sur les images.

## 2. chemin optique

D'après le principe de Fermat, le temps de parcours  $T$  entre deux points  $A$  et  $B$  est défini par

$$T = \int_A^B \frac{ds}{v} \quad (1)$$

où  $v$  est la vitesse de la lumière dans le milieu, elle est fonction de l'indice de réfraction  $n$  de ce milieu

$$v = \frac{c}{n} \quad (2)$$

$c$  est la vitesse de la lumière dans le vide.

Dans un milieu non homogène, l'indice de réfraction varie d'un point à un autre et le temps de parcours est exprimé en fonction de  $n$  à l'aide de (1) et (2)

$$T = \frac{1}{c} \int_A^B n ds \quad (3)$$

### 2.1. principe de moindre temps

Dans le cas d'une trajectoire planaire, le chemin emprunté entre deux points peut être décrit par la trajectoire  $y = f(x)$ , avec

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} \quad (4)$$

En considérant par exemple la variabilité en  $y$ ,  $x$  définit alors le paramètre de la trajectoire. Le temps de parcours entre les points est donné par

$$T = \frac{1}{c} \int_{x_A}^{x_B} n \sqrt{1 + \dot{y}^2} dx \quad (5)$$

où  $\dot{y} = dy/dx$ .

Le principe de Fermat, ou principe de moindre temps, pose que  $T$  est *minimum* sur la trajectoire, on a

$$\delta T = 0 \quad (6)$$

En fait, l'équation (6) indique que l'intégrale du temps de parcours (5) est *stationnaire* par rapport aux variations de la trajectoire, mais nous considérons ici que le temps de parcours de la lumière est réellement minimum.

### 2.2. équation d'Euler-Lagrange

La résolution de l'équation (6) à partir de l'expression (5) du temps de parcours est obtenue pour

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) - \frac{\partial L}{\partial y} = 0 \quad (7)$$

où  $L$  est un lagrangien qui a pour expression

$$L = \frac{n}{c} \sqrt{1 + \dot{y}^2} \quad (8)$$

La relation (7) est l'équation d'Euler-Lagrange associée à la trajectoire  $y = f(x)$  suivie par la lumière.

## 3. résolution numérique

En exprimant les dérivées partielles dans (7) à l'aide de (8) et après simplifications on obtient une équation aux dérivées partielles (EDP) non linéaire du second ordre en  $y$  (démonstration en annexe)

$$n\ddot{y} + \frac{\partial n}{\partial x} \dot{y}^3 - \frac{\partial n}{\partial y} \dot{y}^2 + \frac{\partial n}{\partial x} \dot{y} - \frac{\partial n}{\partial y} = 0 \quad (9)$$

que l'on peut mettre sous la forme

$$n\ddot{y} + \alpha \dot{y} = \beta \quad (10)$$

avec

$$\alpha = \frac{\partial n}{\partial x} (1 + \dot{y}^2) - \frac{\partial n}{\partial y} \dot{y} \quad (11)$$

$$\beta = \frac{\partial n}{\partial y}$$

La résolution numérique est obtenue par approximation des dérivées partielles à l'aide des différences finies centrées au point  $(x_j, y_j)$

$$\dot{y}_j = \frac{y_{j+1} - y_{j-1}}{2h} \quad (12a)$$

$$\ddot{y}_j = \frac{y_{j+1} - 2y_j + y_{j-1}}{h^2} \quad (12b)$$

pour  $j = 1, \dots, L$ , où  $L$  est le nombre de points pris entre les deux extrémités fixes,  $A$  et  $B$ .  $h$  est le pas suivant  $x$ .

### 3.1. méthode variationnelle

En exprimant les dérivées dans (10) à l'aide des expressions (12a) et (12b), on obtient pour  $j = 1, \dots, L$

$$y_j = \frac{1}{2}(y_{j+1} + y_{j-1}) + \frac{h\alpha_j}{4n_j}(y_{j+1} - y_{j-1}) - \frac{h^2}{2n_j}\beta_j \quad (13)$$

La forme matricielle de (13) est donnée par

$$\mathbf{M}\mathbf{y} = \mathbf{B} \quad (14)$$

avec

$$\mathbf{y} = [y_1, y_2, \dots, y_L]^T$$

$$\mathbf{B} = h^2[\beta'_1, \beta_2, \dots, \beta_{L-1}, \beta'_L]$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} b_1 & c_1 & & & & \mathbf{0} \\ a_2 & b_2 & c_2 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & a_{L-1} & b_{L-1} & c_{L-1} \\ \mathbf{0} & & & & a_L & b_L \end{bmatrix} \quad (15)$$

où  $a_j = 2n_j - h\alpha_j$ ,  $b_j = -4n_j$ ,  $c_j = 2n_j + h\alpha_j$  et  $\beta'_1 = \beta_1 - a_1y_A$ ,  $\beta'_L = \beta_L - c_Ly_B$

La matrice  $\mathbf{M}$  est tridiagonale, la résolution de (14) est donc facilement obtenue par décomposition LU.

On note toutefois que les éléments de la matrice dépendent de  $y$  (non linéarité de l'équation d'Euler-Lagrange) et en pratique, la résolution matricielle nécessite une initialisation très proche de la solution réelle. Dans le cas contraire, une méthode itérative de type Gauss-Seidel utilisant la relation (13) est préférable.

### 3.2. programmation dynamique

La méthode variationnelle définie ci-dessus fait appel à la discrétisation des équations d'Euler-Lagrange de la trajectoire. Les

dérivées sont approchées par les différences finies (12) ce qui confère à la méthode une certaine sensibilité au bruit. De plus, la convergence de l'algorithme est retardée par la non linéarité de l'EDP (9). Nous avons donc utilisé une technique différente de résolution numérique.

La programmation dynamique est dans certains cas l'un des instruments les plus efficaces pour rechercher l'optimum d'une fonction. Cependant, afin d'appliquer la programmation dynamique dans un processus de décision, ce processus doit satisfaire aux conditions suivantes : (i) la décision est composée de plusieurs sous-décisions (dénombrables ou non) qui sont des suites de décisions faisant partie d'une décision, (ii) le processus est séquentiel (dans une étape de décision donnée, les résultats des étapes précédentes sont déjà traités), (iii) le processus de décision est un processus de Markov (la décision d'une étape ne dépend que de l'étape présente et est indépendante des étapes antérieures).

Nous ne présenterons ici que le principe sur lequel repose la technique de programmation dynamique [8] pour le problème de minimisation qui nous concerne.

Si l'on reprend l'expression du temps de parcours donné par (5)

$$T = \int_{x_A}^{x_B} L(x, y, \dot{y}) dx \quad (16)$$

à partir de l'équation (16), on définit la fonctionnelle suivante

$$J(y) = \int_{\xi_0}^{\xi_1} L(\xi, y, \dot{y}) d\xi \quad (17)$$

et la fonction à valeur optimale  $S$  telle que pour  $x \in [\xi_0, \xi_1]$

$$S(x, y) = \min_{\{P\}} \left[ \int_x^{\xi_1} L(\xi, y, \dot{y}) d\xi \right] \quad (18)$$

où  $\{P\}$  contient tous les parcours admissibles entre les points  $(x, f(x))$  et  $(\xi_1, f(\xi_1))$ .

Ecrivons à présent sous forme discrète l'intégrale (16)

$$T^* = \sum_{j=1}^L L(x_j, y_j, \dot{y}_j) \Delta x_j \quad (19)$$

Le problème est alors de minimiser la fonction

$$T^*(y_1, y_2, \dots, y_L) = T_1(y_1, y_2) + T_2(y_2, y_3) + \dots + T_{L-1}(y_{L-1}, y_L) \quad (20)$$

avec

$$T_j(y_j, y_{j+1}) = \frac{n_j}{c} \sqrt{\Delta x_j^2 + (y_{j+1} - y_j)^2} \quad (21)$$

où  $\Delta x_j$  est le pas en  $x$ , ce pas peut être variable sur la trajectoire.

L'idée utilisée en programmation dynamique est la suivante : partant d'un point initial de la trajectoire, le problème de minimisation peut être traité en un nombre fini d'étapes successives ( $j_1, j_2, \dots, j_L$ ) tel que pour chacune d'elles un nombre limité de décisions est défini en allouant à chaque  $y_j$  dans l'équation (21)  $M$  valeurs. Ainsi, chaque variable d'état  $y_j$  peut prendre  $m$  valeurs autour de sa valeur courante. La grandeur  $m$  détermine la taille  $M (= 2m + 1)$  du voisinage 1D au point courant.

Pour obtenir la solution au problème de minimisation on définit une séquence de fonctions  $\{S_j\}_{j=1}^{j=L-1}$  (fonctions à valeur optimale) pour lesquelles les  $y_j$  définissent les variables d'état.

Etant donné l'expression du temps de parcours  $T$ , la minimisation de (20) est obtenue par la procédure récursive suivante

$$\begin{aligned} S_1(y_2) &= \min_{y_1} [T_1(y_1, y_2)] \\ &\dots \\ S_j(y_{j+1}) &= \min_{y_j} [S_{j-1}(y_j) + T_j(y_j, y_{j+1})] \\ &\dots \\ S_{L-1}(y_L) &= \min_{y_{L-1}} [S_{L-2}(y_{L-1}) + T_{L-1}(y_{L-1}, y_L)] \end{aligned} \quad (22)$$

Dans l'expression générale de la relation de récurrence,  $j$  représente l'étape et  $y_j$  la variable d'état pour cette étape.

On dispose ainsi, en fin de procédure, d'un ensemble de  $m$  trajectoires admissibles. Parmi celles-ci, la trajectoire de temps minimum est celle pour laquelle

$$T_{\min} = \min_{y_1, y_2, \dots, y_L} T = \min_{y_L} [S_{L-1}(y_L)] \quad (23)$$

Dans le cas d'une trajectoire fermée (les extrémités  $A$  et  $B$  sont alors confondues) la procédure décrite est également appliquée en considérant les  $x_j$  comme variables d'état. Pour chaque point de la trajectoire, on dispose ainsi des nouvelles coordonnées  $(x_j, y_j)$  de ce point.

## 4. trajectoires déformables

Le principe de Fermat, appliqué à l'image, nous permet de définir un nouveau modèle de contours déformables. Le contour n'est pas assimilé à un corps élastique qui se déforme dans un milieu visqueux, mais il est représenté par la trajectoire d'un rayon lumineux qui se propage dans le plan de l'image. Nous parlerons de « trajectoire déformable ».

### 4.1. indice de réfraction

L'image est assimilée à un milieu de propagation de la lumière. L'intensité des niveaux de gris est alors liée à l'indice de réfraction qui caractérise ce milieu.

La relation qui lie les deux grandeurs est obtenue soit directement par

$$n(x, y) = I(x, y) \quad (24a)$$

ou 
$$n(x, y) = \text{inv}\{I(x, y)\} \quad (24b)$$

où  $\text{inv}\{\}$  est une fonction d'inversion des valeurs de manière à associer aux faibles indices de réfraction les fortes valeurs d'intensité des niveaux de gris.

Les expressions (24a) et (24b) permettent respectivement de détecter de fines structures sombres ou claires sur les images en niveaux de gris.

Soit par l'intermédiaire du gradient de l'image, par exemple

$$n(x, y) = \frac{1}{1 + |\nabla I(x, y)|} \quad (25)$$

de manière à doter les régions de contours de valeurs faibles de l'indice de réfraction.

### 4.2. mise en œuvre algorithmique

La mise en œuvre algorithmique adoptée est similaire à celle décrite dans [9]. Etant donné une image en niveaux de gris et une trajectoire initiale définie par  $L$  points, l'algorithme de détection de contours est appliqué suivant les étapes suivantes :

- 1) former une liste indexée de points  $\{p_j = (x_j, y_j)\}_{j=1, \dots, L}$  et choisir la valeur de  $m$  pour le voisinage d'analyse,
- 2) pour chaque point  $p_j$  de la liste, calculer la valeur  $T_j$  suivant l'équation (21) et la valeur de  $m$ , en déduire  $S_j$  à l'aide de l'équation (22),
- 3) en fin de liste, trouver la trajectoire optimale à l'aide de l'équation (23) et déplacer les points sur cette trajectoire,
- 4) tant que la convergence n'est pas atteinte, reprendre l'algorithme à la seconde étape.

La formulation de  $S_j$  dans l'équation (22) ne tient compte que du déplacement en  $y$  (à  $x$  fixé) d'un point de la trajectoire. Mais, une écriture équivalente est obtenue pour  $x$  en considérant  $x$  comme variable d'état (avec  $y$  fixe). Pour permettre à la trajectoire de se déformer suivant les deux directions, la valeur de  $S_j$  retenue est celle qui correspond à

$$S_j = \min_{x_j, y_j} \{S_j(x_{j+1}), S_j(y_{j+1})\} \quad (26)$$

avec comme précédemment

$$S_j(y_{j+1}) = \min_{y_j} [S_{j-1}(y_j) + T_j(y_j, y_{j+1})] \quad (27a)$$

et

$$S_j(x_{j+1}) = \min_{x_j} [S_{j-1}(x_j) + T_j(x_j, x_{j+1})] \quad (27b)$$

où

$$T_j(x_j, x_{j+1}) = \frac{n_j}{c} \sqrt{(x_{j+1} - x_j)^2 + \Delta y_j^2} \quad (28)$$

est la version suivant  $x$  de l'équation (21) du temps de parcours. Les équations (21) et (28) dépendent du paramètre  $m$  qui fixe la taille de la fenêtre d'analyse en chaque point. En effet

$$T_j(v_j, v_{j+1}) = \frac{n_j}{c} \sqrt{(v_{j+1} - v_j)^2 + h_j^2} \quad (29)$$

avec  $v_j \in [x_j - m, x_j + m]$  (respectivement  $[y_j - m, y_j + m]$ ) et pour tout  $v_{j+1} \in [x_{j+1} - m, x_{j+1} + m]$  (respectivement  $[y_{j+1} - m, y_{j+1} + m]$ ),  $h$  étant le pas en  $y$  (respectivement en  $x$ ). Pour une direction,  $x$  ou  $y$ , chacune des  $m$  positions  $v_j$  est associée à  $m$  positions  $v_{j+1}$ , soit  $m^2$  temps de parcours possibles pour chaque couple de points. Pour un contour défini à partir de  $n$  points la complexité est  $O(nm^2)$ .

L'équation (26) permet le déplacement d'un point de la trajectoire dans une des deux directions (figure 1).

La convergence de l'algorithme est assurée étant donné que la configuration des points sur le contour n'est modifiée que si le temps de parcours total peut être réduit sur une nouvelle configuration dans la fenêtre d'analyse. Le temps de parcours est donc une fonction monotone décroissante du nombre d'itérations. La convergence de l'algorithme est donc normalement obtenue lorsque tous les points de la trajectoire se stabilisent sur une position donnée (pas de modification du temps de parcours). En réalité, pour assurer cette convergence, la stabilité est recon-

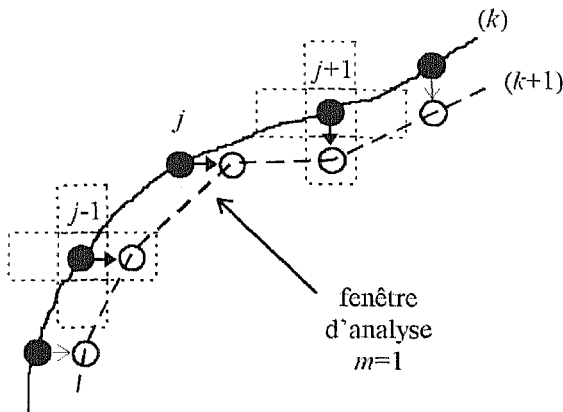


Figure 1. - Pour chaque point, la fenêtre d'analyse (ici  $m = 1$ ) limite la recherche du déplacement entre deux itérations ( $k$ ) et ( $k+1$ ) respectivement pour chaque direction  $x$  ou  $y$ .

nue lorsque le déplacement moyen de tous les points ou que la variation du temps de parcours entre deux itérations ne dépasse pas un seuil donné. Ce critère d'arrêt permet de pallier le problème d'éventuelles oscillations de la trajectoire autour de la solution.

## 5. résultats et discussion

Cette section est illustrée d'un certain nombre de résultats de détection de contours, ouverts ou fermés, ou de structures particulières sur des images synthétiques et réelles. De plus, nous montrerons de quelle manière la définition de l'indice de réfraction permet de contrôler la régularité de la trajectoire de Fermat.

### 5.1. exemples de détections

Dans cette section, les résultats sont obtenus à partir d'une mise à l'échelle des valeurs de l'indice de réfraction dans l'intervalle  $[1, 2]$ .

Le premier résultat est obtenu sur une image synthétique représentant un cercle sur un fond composé d'éléments de contours (image  $256 \times 256$  pixels). Les résultats illustrés sur la figure 2 sont obtenus pour deux valeurs du paramètre  $m$  (colonne de gauche) et différentes valeurs du niveau de bruit gaussien (colonne de droite) ajouté à l'image originale. Le contour initial figuré sur l'image originale est constitué de 64 points régulière-

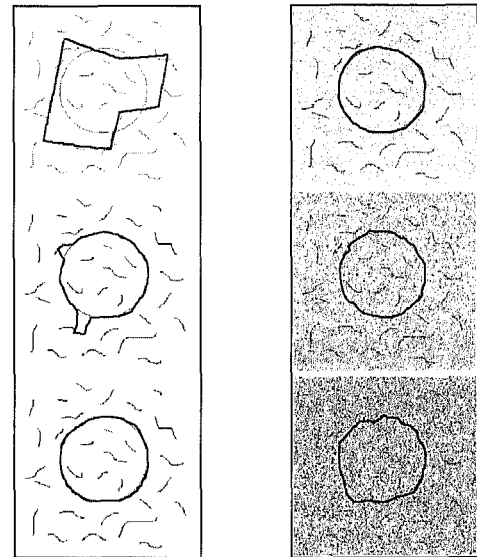


Figure 2. - Détection sur une image synthétique. Colonne de gauche, contour initial et résultats obtenus respectivement pour  $m = 2$  (au centre) et  $m = 4$  (en bas). Colonne de droite, détections ( $m = 4$ ) en présence de bruit pour une variance de 0,1 (en haut), 0,35 (au centre) et 0,7 (en bas).

ment espacés le long de la trajectoire fermée. Pour  $m = 2$ , la trajectoire reste accrochée, après convergence, sur des éléments de contours non significatifs. Une légère augmentation de la taille de la fenêtre d'analyse ( $m = 4$ ) permet à la trajectoire de se déformer pour venir épouser approximativement le cercle. Dans le cas d'une image dégradée, l'algorithme montre une bonne robustesse au bruit. Les résultats obtenus, pour des variances égales à 0,1, 0,35 et 0,7, sont satisfaisant même pour un fort niveau de bruit.

Le second exemple porte sur la détection de fines structures sur des images d'angiographie rétinienne. A partir d'une trajectoire initiale ouverte, on cherche à détecter les vaisseaux qui apparaissent plus clairs que le reste de l'image (figure 3). Les valeurs de l'indice de réfraction sont obtenues à l'aide de l'équation 25b appliquée sur les niveaux de gris de l'image originale. Les résultats de la détection de deux vaisseaux, illustrés sur la figure 4, sont obtenus respectivement après 30 et 34 itérations, pour une valeur de  $m = 2$ .

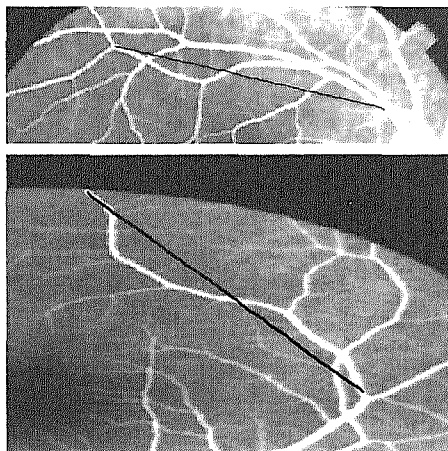


Figure 3. – Détection de structures linéaires. Deux exemples d'initialisation du chemin optique.

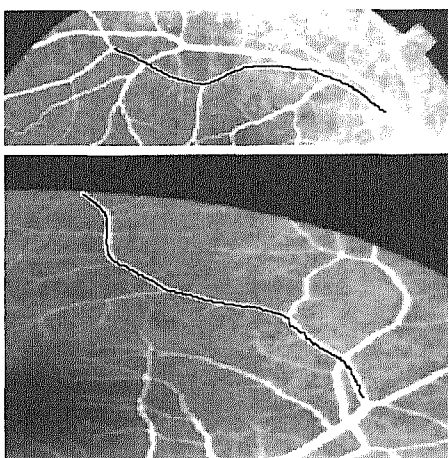


Figure 4. – Résultats de la détection des vaisseaux sélectionnés sur la figure 3, après respectivement 30 et 34 itérations, pour une valeur de  $m = 2$ .

Le troisième exemple porte sur l'image en niveau de gris d'une clé que l'on cherche à détecter à partir d'une trajectoire initiale illustrée sur la figure 5. Dans ce cas, l'indice de réfraction est exprimé à l'aide des valeurs du gradient de l'image originale, équation 26. La trajectoire est constituée de 128 points et la taille de la fenêtre d'analyse est définie par la valeur  $m = 1$ . La déformation de la trajectoire est illustrée aux itérations 5, 15 et 24 de l'algorithme.

Le quatrième exemple illustre également la détection d'un contour à partir d'une trajectoire fermée initialisée sur une image échographique du coeur (coupe transversale), figure 6. La trajectoire initiale est constituée de 128 points. Les valeurs de l'indice de réfraction sont données par l'équation 25b appliquée sur les niveaux de gris de l'image originale.

Le résultat, obtenu après 42 itérations, montre la stabilisation de la trajectoire dans la région correspondant au contour du myocarde.

Le cinquième exemple porte sur la détection du ventricule gauche sur une image échographique (coupe longitudinale, 4 cavités). Le contour initial est positionné de part et d'autre du contour recherché (figure 7). La convergence est obtenue après 27 itérations.

Le dernier exemple montre le résultat de la détection d'une cellule musculaire (figure 8). L'indice de réfraction est calculé à partir de la norme du gradient inversée. La taille de la fenêtre d'analyse est fixée à la valeur  $m = 2$  et le résultat final est

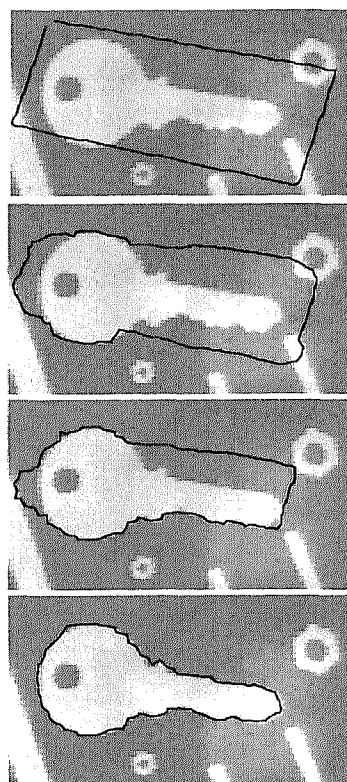


Figure 5. – Détection de la clé. De haut en bas, contour initial et contours détectés respectivement aux itérations 5, 15 et 24. (avec  $m = 1$ ).

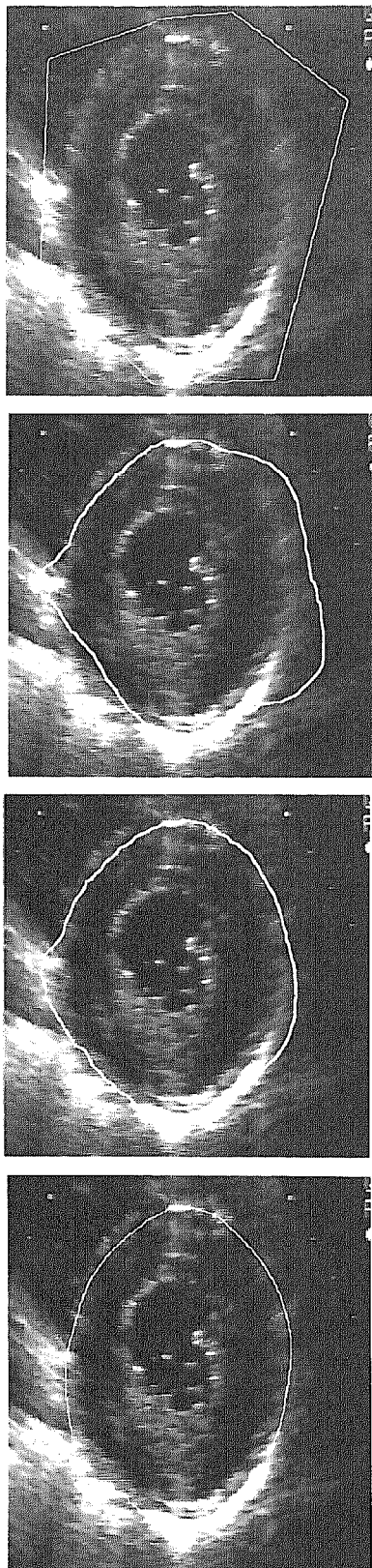


Figure 6. – Résultat de la détection sur l'image échographique du cœur. Contour initial et évolution du contour respectivement après 15, 35 et 42 itérations (avec  $m = 2$ ).

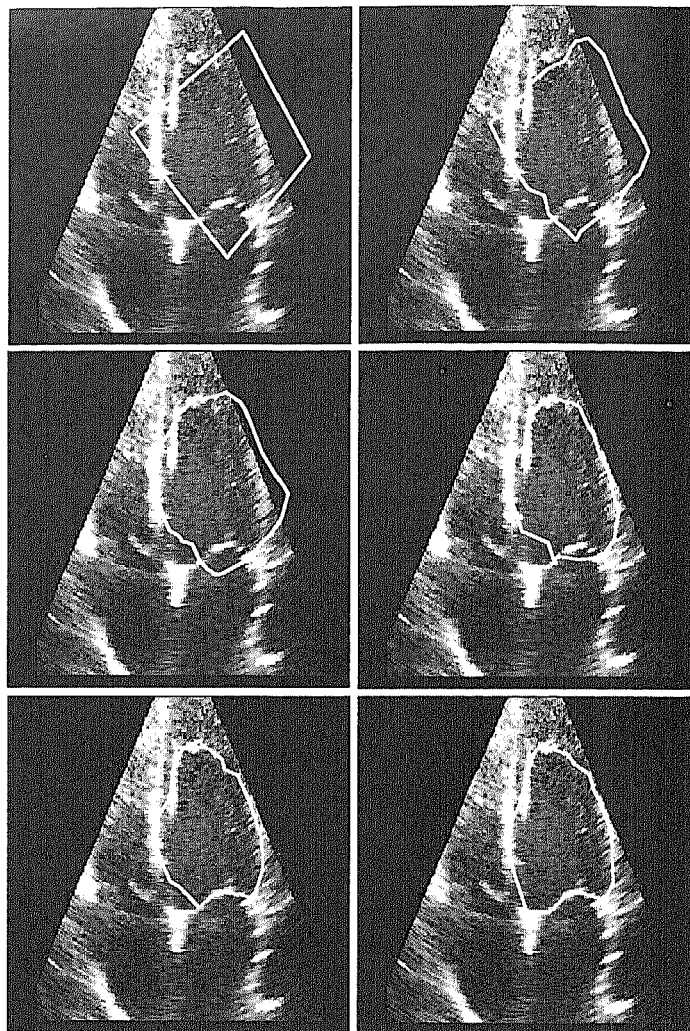


Figure 7. – Résultat de la détection sur l'image échographique du cœur. Contour initial et évolution du contour respectivement après 5, 10, 15, 20 et 27 itérations (avec  $m = 2$ ).

obtenu après 29 itérations de l'algorithme. La trajectoire est initialisée par une forme rectangulaire placée de part et d'autre des contours de la cellule. L'évolution de cette trajectoire est illustrée sur la figure 8 aux itérations 5, 10, 15, 20 et 25.

## 5.2. indice de réfraction et régularisation

Dans la section précédente la définition de l'indice de réfraction comme fonction des niveaux de gris ou des valeurs du gradient de l'image est donnée par les équations (24) et (25). Mais qu'en est-il de l'influence de l'échelle des valeurs de l'indice de réfraction  $n$  ainsi obtenues sur le résultat final ? En effet, bien que l'expression du temps de parcours (équation 3) montre que la trajectoire est invariante par changement d'échelle des valeurs



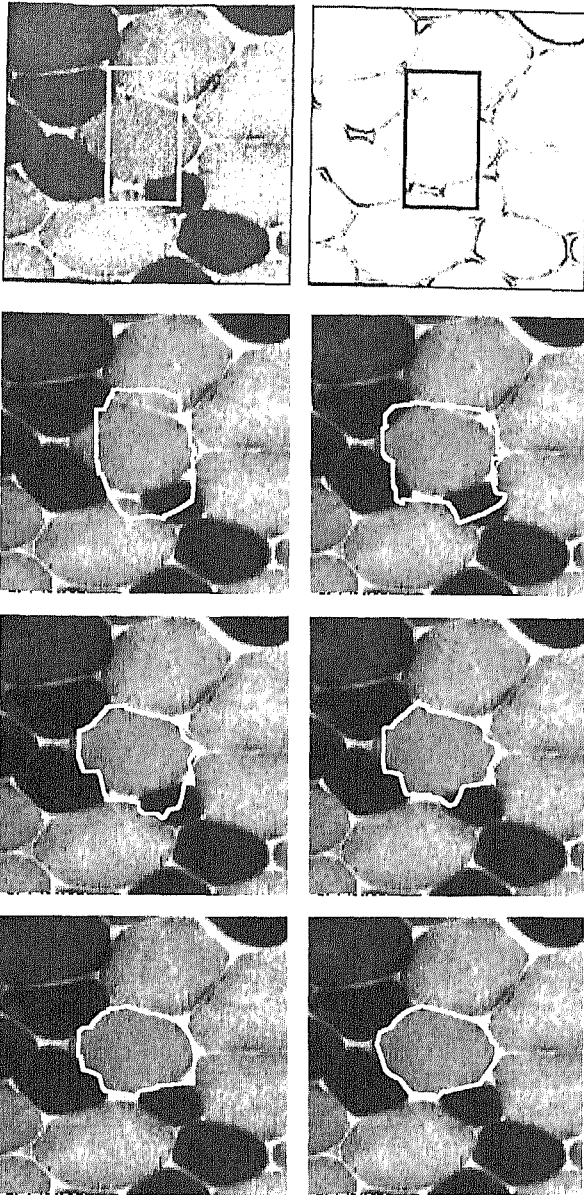


Figure 8. – Résultat de la détection sur une cellule musculaire. Première ligne, contour initial reporté respectivement sur l'image originale et sur l'image du gradient inversé. Lignes suivantes, évolution du contour aux itérations 5, 10, 15, 20, 25 et 29 (avec  $m = 2$ ).

de  $n$ , il n'en demeure pas moins que dans l'expression de l'EDP associée à cette trajectoire (équation 9) la valeur du rapport entre  $n$  et ces variations (suivant  $x$  ou  $y$ ) influe sur la solution finale. Nous proposons donc de définir un nouvel indice de réfraction de la manière suivante

$$n(x, y) = n_0 + \Delta n(x, y) \quad (30)$$

où  $\Delta n$  est obtenu à l'aide des équations (24) ou (25) et normalisé ( $\Delta n \in [0, 1]$ ).  $n_0$  est un *offset* à valeur constante pour tous les pixels de l'image. De la sorte, l'équation (3) devient

$$T = \frac{1}{c} \int_A^B (n_0 + \Delta n) ds = \frac{n_0}{c} \int_A^B ds + \frac{1}{c} \int_A^B \Delta n ds \quad (31)$$

avec  $n_0 > 0$ .

Le temps de parcours total est donc la somme du temps de parcours de la lumière dans un milieu d'indice de réfraction homogène  $n_0$  et du temps de parcours de la lumière dans un milieu non homogène. Or dans le milieu homogène, nous savons que la trajectoire de Fermat est une droite alors que pour le milieu non homogène la courbure en un point de cette trajectoire dépend de la variation relative de l'indice de réfraction. Par analogie avec la théorie des fibres optiques à gradient d'indice, nous pouvons considérer dans ce cas l'image comme un milieu initialement homogène (à valeur  $n_0$ ) « dopé par diffusion » de manière à augmenter l'indice de réfraction dans les régions dépourvues de contours. La courbure de la trajectoire de Fermat est alors fonc-

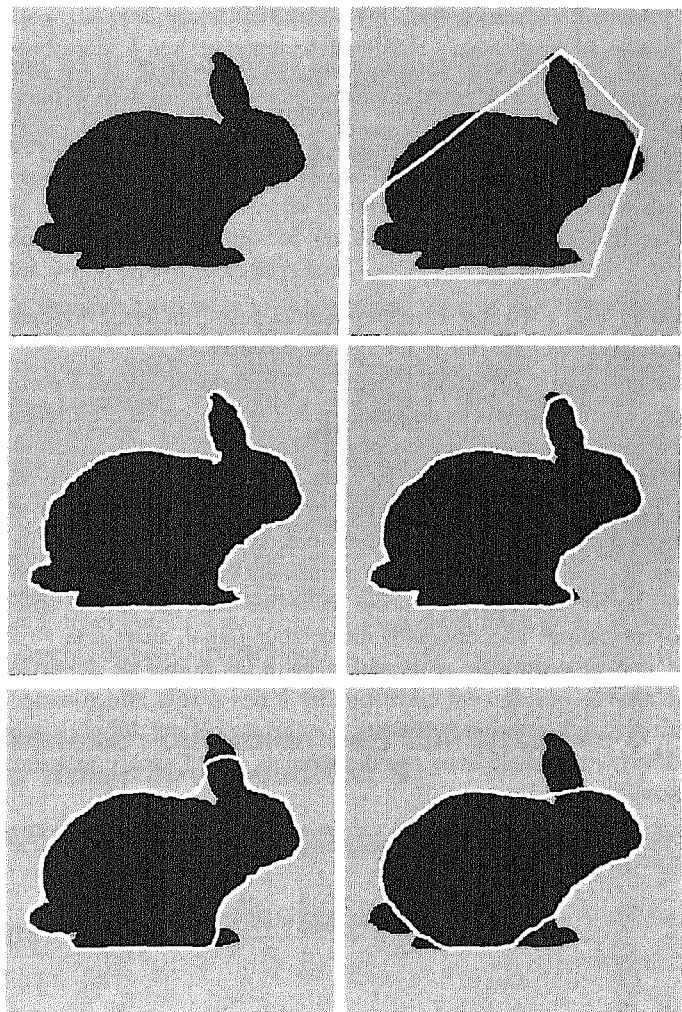


Figure 9. – Modification de la régularité de la trajectoire de Fermat par accroissement de la valeur minimale  $n_0$  de l'indice de réfraction. En haut, image du lapin et trajectoire initiale. Lignes suivantes, trajectoire finale obtenues pour les valeurs respectives de  $n_0 = 0.01, 1, 2$  et  $4$ .

tion de la variation relative de l'indice de réfraction. En d'autres termes, la régularité de la trajectoire est contrôlée par la valeur  $n_0$ . La figure 9 illustre l'influence du paramètre de régularisation  $n_0$  sur le résultat final ( $n_0$  est respectivement fixé aux valeurs 0.01, 1, 2 et 3). L'augmentation de  $n_0$  a pour conséquence une augmentation de la régularité de la trajectoire.

### 5.3. équivalence avec l'approche « géodésique minimale »

Dans l'approche proposée par Cohen et Kimmel [7], la détection d'un contour est obtenue par la recherche du chemin  $C$  d'action minimum entre deux points  $A$  et  $B$ . L'énergie à minimiser a pour expression

$$E(C) = \int_A^B [w \|C'(s)\|^2 + P(C(s))] ds \quad (32)$$

$P$  est le potentiel d'attraction lié aux données et  $w$  est une constante de pondération du terme de régularisation. Si le paramètre  $s$  représente la longueur d'arc de la courbe  $C$ , alors  $\|C'(s)\|^2 = 1$  et l'équation (32) devient

$$E(C) = \int_A^B [w + P(C(s))] ds = \int_A^B \tilde{P}(C(s)) ds \quad (33)$$

où  $\tilde{P} = P + w$  représente un potentiel doté d'un terme de régularisation qui contrôle le lissage de la courbe.

Le potentiel d'attraction  $P$  peut-être directement calculé à partir des niveaux de gris ou du gradient de l'image, ou (et c'est le cas lorsque les contours recherchés présentent certaines discontinuités) être une fonction de la carte des distances des pixels de l'image aux points de contours préalablement détectés par un opérateur *ad hoc*. Dans les deux cas, la méthode de résolution numérique diffère de celle classiquement utilisée pour les variétés actives. En effet, le contour recherché n'est pas détecté après déformations successives d'un contour initial, mais à la suite d'une procédure de propagation entre les points de départ et d'arrivée qui doivent correspondre à des pixels effectivement situés sur le contour à détecter. Le chemin obtenu définit la géodésique minimale entre ces deux points dans l'espace métrique sous-jacent.

Les auteurs montrent qu'en valeur absolue la courbure  $\kappa$  du chemin est bornée par

$$|\kappa| \leq \frac{\sup_D \{ \|\nabla P\| \}}{w} \quad (34)$$

où  $D$  est le domaine de l'image sur lequel est calculé le potentiel  $P$ . Le terme de régularisation introduit dans le modèle des contours géodésiques permet de contrôler le lissage de la courbe. Il est intrinsèque aux données. Le formalisme de l'approche

géodésique étant identique à celui de l'approche que nous proposons, nous donnons dans ce qui suit une interprétation physique de la géodésique et du terme de régularisation à l'aide du principe de Fermat.

A partir des équations d'Euler-Lagrange associées à la trajectoire du rayon lumineux

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) = \frac{\partial L}{\partial y} = 0, \quad \frac{d}{dy} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \quad (35)$$

avec  $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ , on exprime l'équation de mouvement du photon dans le milieu hétérogène à l'aide du paramètre spatial  $s$

$$\nabla n = \frac{d}{ds} (n \vec{t}) \quad (36)$$

où  $\vec{t}$  est un vecteur unitaire tangent à la trajectoire. On a  $ds = \frac{c}{n} dt$ , l'équation de mouvement (36) s'exprime par

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x}{dt^2} &= -\frac{n_x}{n} \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 - 2 \frac{n_y}{n} \left( \frac{dx}{dt} \right) \left( \frac{dy}{dt} \right) + \frac{n_x}{n} \left( \frac{dy}{dt} \right)^2, \\ \frac{d^2 y}{dt^2} &= \frac{n_y}{n} \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 - 2 \frac{n_x}{n} \left( \frac{dx}{dt} \right) \left( \frac{dy}{dt} \right) - \frac{n_y}{n} \left( \frac{dy}{dt} \right)^2 \end{aligned} \quad (37)$$

où  $n_x = \frac{\partial n}{\partial x}$  et  $n_y = \frac{\partial n}{\partial y}$ .

Les expressions (37) sont des géodésiques dans l'espace muni d'une métrique temporelle, donc la recherche de la trajectoire de Fermat correspond bien à l'obtention de la géodésique minimale entre deux points dans cet espace.

A partir des équations (36) nous pouvons exprimer la courbure sur la trajectoire, en effet en développant (36) on a

$$\nabla n = n \frac{d\vec{t}}{ds} + \frac{dn}{ds} \vec{t} \quad (38)$$

soit sous forme vectorielle

$$\nabla n = n \kappa \vec{u} + \frac{dn}{ds} \vec{t} \quad (39)$$

où  $\vec{u}$  est un vecteur unitaire normal à la trajectoire. Ainsi, on a

$$\langle \nabla n, \vec{u} \rangle - n \kappa = 0 \quad (40)$$

On retrouve donc l'expression équivalente à (34), en effet d'après (40)

$$|\kappa| = \frac{\|\nabla n\|_{\perp}}{n} \quad (41)$$

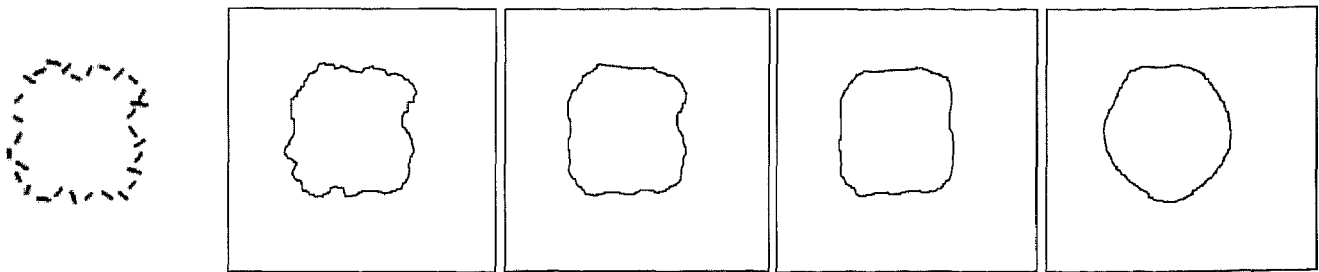


Figure 10. – Trajectoires obtenues pour différentes valeurs maximales de la courbure. De gauche à droite, image initiale puis contours détectés respectivement pour  $\kappa_{\max} = 10, 1, 0.5$  et  $0.3$ .

la valeur de  $\kappa$  sur le contour  $C$  est donc bornée par

$$|\kappa| \leq \sup_C \left\{ \frac{\|\nabla n\|_{\perp}}{n} \right\} \quad (42)$$

avec  $n = n_0 + \Delta n$ , d'où

$$|\kappa| \leq \sup_C \left\{ \frac{\|\nabla(n_0 + \Delta n)\|_{\perp}}{n_0 + \Delta n} \right\} = \frac{\sup_C \{\|\nabla(\Delta n)\|_{\perp}\}}{n_0 + \inf_C \{\Delta n\}} \quad (43)$$

sachant que sur le domaine  $D$  de l'image on a défini  $\Delta n$  tel que  $0 \leq \Delta n \leq 1$ , alors

$$|\kappa| \leq \frac{\sup_D \{\|\nabla(\Delta n)\|_{\perp}\}}{n_0 + \inf_D \{\Delta n\}} = \frac{1}{n_0} \quad (44)$$

le paramètre  $n_0$  qui définit en quelque sorte le rayon de courbure minimum de la trajectoire de Fermat. La figure 10 donne les trajectoires obtenues pour différentes valeurs  $\kappa_{\max}$  de la courbure maximale.

## 6. conclusion

Nous avons considéré l'image comme un milieu non homogène de propagation de la lumière. Ce milieu est doté d'un indice de réfraction dont les valeurs dépendent, suivant les cas, des valeurs des niveaux de gris ou du gradient de l'image. Ce modèle est fondé sur le principe de Fermat pour estimer la trajectoire de la lumière entre deux points choisis parmi les pixels de l'image. Ces points permettent de définir une trajectoire initiale (ouverte ou fermée), puis, cette trajectoire est déformée au cours d'une procédure de minimisation qui tend à estimer la trajectoire de temps de parcours minimum. Un algorithme élaboré sur le principe de la programmation dynamique est utilisé pour résoudre ce problème. L'ensemble du traitement est faiblement paramétré et les différents résultats obtenus indiquent une bonne robustesse au bruit et montrent que le modèle est adapté à une grande variété d'images. Les paramètres principaux de l'algorithme sont donnés par le nombre de points définis sur la trajectoire et leur déplacement maximum possible (défini par  $m$ ) entre deux itérations. Ces valeurs qui peuvent être ajustées faci-

lement suivant le type des images à traiter sont liées à la « résolution » des contours présents sur les images. Par exemple, une trop faible valeur de  $m$ , peut aboutir à un blocage de la trajectoire sur des contours parasites isolés. Une trajectoire constituée d'un trop petit nombre de points risque de traverser une région de contour peu marquée sans s'y stabiliser.

Bien que totalement différentes, les deux approches « contour géodésique » et « trajectoire déformable » aboutissent au même formalisme. Pour la première, partant du modèle mécanique classique les auteurs [7] proposent un modèle qui est fondé sur la recherche d'un chemin d'action minimale et qui perd toute analogie avec le principe physique initial. L'approche présentée ici est réellement fondée sur un principe physique à partir du modèle optique, le temps de parcours et le terme de régularisation y trouvent un sens physique.

De manière à rendre la méthode moins sensible aux valeurs des paramètres, nous avons élaboré une extension du modèle. Cette extension définit un modèle de *trajectoire duale* dans lequel deux trajectoires sont initialisées l'une à l'extérieur et l'autre à l'intérieur de la région délimitée par le contour à détecter ou, dans le cas d'un contour ouvert, de part et d'autre de la structure à localiser. Les deux trajectoires sont mises en relation par une force de liaison et doivent répondre au principe de moindre temps. Cette approche, que nous ne présentons pas ici, donne de bons résultats par exemple, dans les cas où le modèle initial (une seule trajectoire) est en échec (blocage de la trajectoire sur des éléments de contours parasites).

## Annexe : obtention de l'EDP associée à la trajectoire (équation 9)

Partant de l'expression du lagrangien (8), on obtient d'une part

$$\frac{\partial L}{\partial y} = \frac{1}{c} \frac{\partial n}{\partial y} \sqrt{1 + \dot{y}^2} \quad (A1)$$

d'autre part

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) \dot{y} + \frac{\partial}{\partial \dot{y}} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) \ddot{y} \quad (A2)$$

avec

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = \frac{n}{c} \frac{\dot{y}}{\sqrt{1 + \dot{y}^2}} \quad (A3)$$

et

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) &= \frac{1}{c} \frac{\partial n}{\partial x} \frac{\dot{y}}{\sqrt{1 + \dot{y}^2}} \\ \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) \dot{y} &= \frac{1}{c} \frac{\partial n}{\partial y} \frac{\dot{y}^2}{\sqrt{1 + \dot{y}^2}} \\ \frac{\partial}{\partial \dot{y}} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) \ddot{y} &= \frac{n}{c} \ddot{y} (1 + \dot{y}^2)^{-\frac{3}{2}} \end{aligned} \quad (A4)$$

soit

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) = \frac{1}{c} \frac{1}{\sqrt{1 + \dot{y}^2}} \left( \frac{\partial n}{\partial x} \dot{y} + \frac{\partial n}{\partial y} \dot{y}^2 + \frac{n}{1 + \dot{y}^2} \ddot{y} \right) \quad (A5)$$

finalement, en utilisant (A1) et (A5), l'équation d'Euler-Lagrange (7) associée à la trajectoire peut être réécrite sous la forme

$$\begin{aligned} \frac{\partial n}{\partial x} \dot{y} + \frac{\partial n}{\partial y} \dot{y}^2 + \frac{n}{1 + \dot{y}^2} \ddot{y} - \frac{\partial n}{\partial y} (1 + \dot{y}^2) &= 0 \\ \frac{\partial n}{\partial x} \dot{y} + \frac{n}{1 + \dot{y}^2} \ddot{y} - \frac{\partial n}{\partial y} &= 0 \\ n \ddot{y} + \frac{\partial n}{\partial x} \dot{y}^3 - \frac{\partial n}{\partial y} \dot{y}^2 + \frac{\partial n}{\partial x} \dot{y} - \frac{\partial n}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \quad (A6)$$

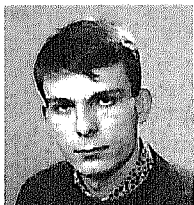
■

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] M. Kass, A. Witkin, and D. Terzopoulos, « Snakes : Active contour models », *Int. J. Comput. Vision*, vol. 1, no 4, pp. 321-331, 1988.
- [2] L. D. Cohen, « On active contour models and balloons », *Comput. Vision Graphics Image Processing : Image Understanding*, vol. 53, pp. 211-218, Mar. 1991.
- [3] R. Samadani, « Adaptative snakes : Control of damping and material parameters », in *Proc. SPIE Conf. Geometric Methods Comput. Vision'91*, (San Diego, CA), pp. 202-213, vol. SPIE-1570, July 1991.
- [4] E. Maurincombe, D. Friboulet, G. Finet, I. E. Magnin, and J. H. C. Reiber, « ADDER : A snake-based segmentation approach for intravascular ultrasound images », in *Conf. Proc. DICTA-93 : Digital Image Computing, Techniques and Applications*, edited by K. K. Fung and A. Ginige, Sydney, pp. 422-429, Australia, Dec. 1993.
- [5] S. Djeziri, E. Petit et J. Lemoine, « Un algorithme de croissance de région par déformation géométrique de contours », *9<sup>ème</sup> Congrès RFIA*, vol. 1, pp. 715-720, 11-14 janvier 1994
- [6] B. Leroy, I.L. Herlin, and L.D. Cohen, « Multi-resolution algorithms for active contour models », in *Proc. of the 12<sup>th</sup> Int. Conf. On Analysis and Optimization of Systems Images, Wavelets and PDE'S*, Rocquencourt, France, 1996.
- [7] L.D. Cohen, and R. Kimmel, « Minimum for active contour models : a minimal path approach », in *IEEE Int. Conf. On Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR'96)*, San Fransisco, California, USA, June 16-21 1996.
- [8] R. Bellman, *Dynamic Programming*, Princeton, NJ : Princeton University Press, 1957.
- [9] A. A. Amini, T. E. Weymouth, and R. C. Jain, « Using dynamic programming for solving variational problems in vision », *IEEE Trans. Patt. Anal. Machine Intell.*, vol. 12, pp. 855-867, Sept. 1990.

## LES AUTEURS

E. DELÉCHELLE



Eric DELÉCHELLE, a obtenu le diplôme de docteur en signaux et images en 1998, à l'Université de Paris 12 à Créteil, au sein du Laboratoire d'Etude et de Recherche en Instrumentation Signaux et Systèmes. Il est actuellement Maître de Conférences à l'UT de Créteil-Vitry. Ses travaux de recherche portent essentiellement sur les méthodes d'analyse de l'Equilibre chez l'Homme et l'analyse d'images médicales.

J. LEMOINE



Jacques LEMOINE est ingénieur Supelec et actuellement Professeur à l'Université de Paris 12 à Créteil, responsable de l'opération Equilibre chez l'Homme. Ses activités de recherche portent sur la caractérisation d'images médicales, plus particulièrement par analyse de texture, et la reconnaissance de formes appliquée aux signaux posturographiques.