Au sujet de la théorie géométrique des systèmes linéaires

On the geometric approach of linear control systems

par Emmanuel DELALEAU

Université Paris-sud, Centre scientifique d'Orsay, Laboratoire des signaux et systèmes,
CNRS – Supélec, Plateau de Moulon, 91 192 Gif-sur-Yvette cedex.
Tél. 01 69 85 17 15 – Fax 01 69 41 30 60.
courriel : delaleau@lss.supelec.fr

résumé et mots clés

Cet article propose de préciser la localisation dans l'espace d'état d'un système linéaire des sous-espaces (A, B)-invariants associés aux noyaux des sorties « naturelles » de la forme canonique contrôleur. Il en résulte qu'il n'est pas possible de rejeter de ces sorties les perturbations qui influencent la partie commandable du système.

Rejet de perturbations, Sous-espaces (A, B)-invariants, Systèmes linéaires, Théorie géométrique.

abstract and key words

This paper expose the localization inside the state space of a linear time-invariant control system of the (A, B)-invariant subspaces associated to "natural" outputs associated with the controller canonical form. It results the impossibility to reject from these outputs the disturbances which influence the controllable part of the system.

(A, B)-invariant subspaces, Disturbance decoupling, Geometric approach, Linear time-invariant control systems.

En hommage au Professeur B. Picinbono pour ses 65 ans.

1. introduction

La *théorie géométrique* des systèmes linéaires est apparue à la fin des années 60 grâce aux travaux simultanés et indépendants de Basile et Marro, d'une part, et de Wonham et Morse, d'autre part. Elle a permis d'obtenir de nombreux résultats de synthèse par bouclage [5, 1] et a eu une influence sur l'enseignement, notamment à l'Université Paris-sud en second cycle [2].

Nous nous proposons de caractériser la localisation de certains sous-espaces (A, B)-invariants associés aux noyaux des sorties « naturelles » de la « forme canonique contrôleur », c'est-à-dire aux variables qui sont en bout des chaînes d'intégrateurs de cette forme canonique. En conséquence nous démontrons qu'il n'est pas possible de rejeter de ces sorties les perturbations qui influencent la partie commandable du système. Ce résultat paraît important pour la pratique car on constate que les sorties des chaînes d'intégrateurs de la forme canonique contrôleur (sorties « naturelles ») sont dans de nombreux cas les variables que l'on cherche à contrôler.

Par souci de concision, nous limitons cet exposé au cas des systèmes linéaires monovariables, c'est-à-dire à une seule entrée. L'extension au cas multivariable se fait aisément grâce à la généralisation multivariable de la forme canonique contrôleur présentée dans [3].

2. forme contrôleur modifiée

Nous considérons un système linéaire monovariable, c'est-à-dire à une seule entrée, dont la représentation d'état est de la forme

$$\dot{x} = Ax + Bu \tag{1}$$

Les vecteurs d'état x et d'entrée u sont respectivement à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}$. Les matrices A et B sont à coefficients réels et respectivement de tailles $n \times n$ et $n \times 1$.

Pour être tout à fait général nous ne supposerons pas nécessairement ce système commandable. Par conséquent nous noterons par $\mathcal{C} = \mathrm{Im}\,[B\;AB\;\cdots\;A^{n-1}B]$ le sous-espace de commandabilité de (1). Lorsque $\dim \mathcal{C} < n$, tout supplémentaire $\bar{\mathcal{C}}$ de $\mathcal{C}$ dans $\mathbb{R}^n$ correspond à un sous-espace non commadable de $\mathbb{R}^n$ et l'égalité

$$\mathbb{R}^n = \mathcal{C} \oplus \bar{\mathcal{C}} \tag{2}$$

est une *décomposition de Kalman* de l'espace d'état relativement à la notion de commadabilité.

Théorème 1

Soit un système (1) tel que $\dim \mathcal{C} = q \leq n$. Il existe un changement de base $x = T\xi^\natural$ de l'espace d'état $\mathbb{R}^n$ tel que

$$\dot{\xi}^\natural = \begin{pmatrix} \dot{\xi}^\sharp \\ \dot{\xi}^\flat \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^\sharp_{11} & A^\sharp_{12} \\ 0 & A^\flat_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi^\sharp \\ \xi^\flat \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B^\sharp_1 \\ 0 \end{pmatrix} u \tag{3}$$

avec $\xi^\sharp$ à valeurs dans $\mathbb{R}^q$ et $\xi^\flat$ dans $\mathbb{R}^{n-q}$, et les matrices[1] $A^\sharp_{11}$, $A^\sharp_{12}$ et $B^\sharp_1$ ont la forme suivante :

$$A^\sharp_{11} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ * & * & \cdots & \cdots & * & * \end{pmatrix}$$

$$A^\sharp_{12} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ \vdots & & & & & \vdots \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ * & * & \cdots & \cdots & * & * \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B^\sharp_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(Quant à la matrice $A^\flat_{22}$, elle ne possède pas de structure particulière.)

Remarque

La nouveauté de (3) par rapport à la forme que l'on obtiendrait en effectuant une décomposition de l'espace d'état sous la forme $\mathbb{R}^n = \mathcal{C} \oplus \bar{\mathcal{C}}$ et en mettant la partie commandable sous forme contrôleur est la structure de la matrice A_{12} : dans une base particulière, la partie non commandable influence la partie commandable uniquement par l'entrée de la chaîne d'intégrateurs constituant la forme contrôleur (toutes les lignes de $A^\sharp_{12}$ sont nulles sauf la dernière). La forme (3) est obtenue grâce à un choix judicieux d'une base dans la partie non commandable comme cela est fait dans [4].

Preuve

Soit P une matrice de changement de base $x = Pz$, avec $z = \begin{pmatrix} \tilde{z} \\ \bar{z} \end{pmatrix}$, conduisant à une décomposition de Kalman (2). Dans la nouvelle base (1) se transforme en

$$\dot{z} = \begin{pmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} \\ 0 & \tilde{A}_{22} \end{pmatrix} z + \begin{pmatrix} \tilde{B}_1 \\ 0 \end{pmatrix} u \tag{4}$$

Dans la partie commandable de l'espace d'état, on peut effectuer le changement d'état $\tilde{z} = Q\tilde{\xi}$ pour avoir la forme compagnon de la matrice $\tilde{A}_{11}$ et $Q^{-1}\tilde{B}_1 = {}^t(0\;\cdots\;0\,1)$. Nous aboutissons à la forme contrôleur de la partie commandable du système. Nous renvoyons à [2] pour la forme des équations (4), le choix de la matrice inversible P et la construction de la matrice Q.

Par conséquent, après le changement d'état

$$x = P\begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \tilde{\xi} \\ \bar{\xi} \end{pmatrix}$$

les équations du système (1) s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{\tilde{\xi}}_1 & = & \tilde{\xi}_2 + {}_1\tilde{A}_{12}\bar{\xi} \\ & \vdots & \\ \dot{\tilde{\xi}}_{q-1} & = & \tilde{\xi}_q + {}_{q-1}\tilde{A}_{12}\bar{\xi} \\ \dot{\tilde{\xi}}_q & = & -\alpha_0\tilde{\xi}_1 - \cdots - \alpha_{q-1}\tilde{\xi}_q + {}_q\tilde{A}_{12}\bar{\xi} + u \\ \dot{\bar{\xi}}_1 & = & {}_1\tilde{A}_{22}\bar{\xi} \\ & \vdots & \\ \dot{\bar{\xi}}_{n-q} & = & {}_{n-q}\tilde{A}_{22}\bar{\xi} \end{array} \right. \tag{5}$$

où ${}_jM$ désigne la j-ème ligne de la matrice M et les coefficients α_i sont ceux du polynôme caractéristique de la matrice $\tilde{A}_{11}$.

Il est aisé de vérifier que le changement d'état

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \xi^\sharp_1 & = & \tilde{\xi}_1 \\ \xi^\sharp_2 & = & \dot{\tilde{\xi}}_1 \\ & \vdots & \\ \xi^\sharp_i & = & \tilde{\xi}_1^{(i-1)} \\ & \vdots & \\ \xi^\sharp_q & = & \tilde{\xi}_1^{(q-1)} \\ \xi^\flat_1 & = & \bar{\xi}_1 \\ & \vdots & \\ \xi^\flat_{n-q} & = & \bar{\xi}_{n-q} \end{array} \right. \tag{6}$$

conduit à la forme canonique (3). Notons que ce changement d'état à déjà été utilisé dans [4] pour obtenir une nouvelle forme canonique par changement d'état et bouclage. Nous l'appliquons

1. Avec la convention habituelle que «$*$» désigne, à chaque occurrence, un coefficient réel quelconque.

ici pour obtenir une nouvelle forme canonique par changement état uniquement. De plus il est de la forme $\begin{pmatrix} \tilde{\xi} \\ \bar{\xi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & R \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi^{\sharp} \\ \xi^{\flat} \end{pmatrix}$, c'est-à-dire que les composantes $\xi^{\sharp}$ du nouveau vecteur d'état correspondent à la partie commandable $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^n$.

3. invariance et forme canonique contrôleur

Rappelons les principales notions de la théorie géométrique. Nous renvoyons à [5] pour plus de détails.

Un sous-espace V est appelé un (A, B)-invariant du système (1) s'il vérifie :

$$AV \subset V + \mathcal{B} \tag{7}$$

où $\mathcal{B}$ désigne le sous-espace $\operatorname{Im} B$.

Pour tout sous-espace V de $\mathbb{R}^n$ il est possible de définir $\mathcal{I}(V)$, le plus grand sous-espace (A, B)-invariant contenu dans V. Il est déterminé par l'algorithme :

$$\begin{aligned} V_0 &= V \\ V_i &= V \cap A^{-1}(V_{i-1} + \mathcal{B}), \qquad i = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

qui s'arrête en un nombre fini d'étapes lorsque $V_i = V_{i+1} = \mathcal{I}(V)$ (en tout cas lorsque $i \leq n$).

Rappelons enfin que la notion d'(A, B)-invariant permet d'exprimer la condition nécessaire et suffisante rejet de perturbations par bouclage : il est possible de rejeter la perturbation de la sortie y si et seulement si l'influence de la perturbation est contenue dans le plus grand sous-espace (A, B)-invariant contenu dans les noyau de C où C est telle que $y = Cx$.

Appelons $\mathcal{E} = (e_1^{\sharp}, \dots, e_q^{\sharp}, e_1^{\flat}, \dots, e_{n-q}^{\flat})$ la base dans laquelle la forme canonique (3) est écrite. Nous noterons par $\mathbb{R}a$ la droite vectorielle de $\mathbb{R}^n$ engendrée par le vecteur $a \neq 0$.

Lemme 1

Le plus grand (A, B)-invariant contenu dans le sous-espace

$$S_i = \mathbb{R}e_1^{\sharp} \oplus \cdots \mathbb{R}e_{i-1}^{\sharp} \oplus \mathbb{R}e_{i+1}^{\sharp} \oplus \cdots \oplus \mathbb{R}e_q^{\sharp} \oplus \mathbb{R}e_1^{\flat} \oplus \cdots \mathbb{R}e_{n-q}^{\flat}$$

est

$$\mathcal{I}(S_i) = \mathbb{R}e_1^{\sharp} \oplus \cdots \mathbb{R}e_{i-1}^{\sharp} \oplus \mathbb{R}e_1^{\flat} \oplus \cdots \mathbb{R}e_{n-q}^{\flat}$$

La démonstration de ce Lemme résulte d'une application dans la base $\mathcal{E}$ de l'algorithme de détermination du plus grand (A, B)-invariant contenu dans un sous-espace; elle est laissée au loisir du lecteur.

4. application au rejet de perturbations

Considérons maintenant un système linéaire de la forme

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + E\varpi \\ y = Cx \end{cases} \tag{8}$$

Le vecteur d'état x est à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, l'entrée (commande) u est scalaire, la sortie à valeurs dans $\mathbb{R}^p$ et la perturbation ϖ à valeurs dans $\mathbb{R}^s$. Les matrices A, B, E et C sont de tailles appropriées.

Le changement de base $x = T\xi^{\natural}$ du Théorème 1 appliqué au système (8) conduit à la forme

$$\begin{aligned} \dot{\xi}^{\natural} &= \begin{pmatrix} A_{11}^{\sharp} & A_{12}^{\sharp} \\ 0 & A_{22}^{\flat} \end{pmatrix} \xi^{\natural} + \begin{pmatrix} B_1^{\sharp} \\ 0 \end{pmatrix} u + \begin{pmatrix} E_1^{\sharp} \\ E_2^{\flat} \end{pmatrix} \varpi \\ y &= (C_1^{\sharp}\ C_2^{\flat})\,\xi^{\natural} \end{aligned}$$

où les matrices possédant une particularité sont explicitées au Théorème 1.

Théorème 2

Supposons $y = \xi_1^{\sharp}$, c'est-à-dire $C_1^{\sharp} = (1\,0 \cdots 0)$ et $C_2^{\flat} = (0 \cdots 0)$. Si $E_1^{\sharp} \neq 0$ il n'est pas possible de rejeter l'influence de la perturbation sur la sortie y.

Remarque

L'hypothèse $y = \xi_1^{\sharp}$ est raisonnable pour un système réel et se rencontre dans de nombreux exemples. La variable à commander est précisément celle en sortie de la chaîne d'intégrateur qui constitue la forme contrôleur de la partie commandable du système. Nous qualifions cette sortie de « naturelle » par rapport à la forme contrôleur. Notons de plus que l'hypothèse $E_1^{\sharp} \neq 0$ est obligatoire dans la majorité des cas de la pratique si le système est commadable; autrement le système ne serait pas sujet à des perturbations.

Preuve

Travaillons dans la base $\mathcal{E}$ précédemment introduite. Le noyau lié à cette sortie est $\operatorname{Ker}(C_1^{\sharp}\ C_2^{\flat}) = \operatorname{Ker}(1\,0 \cdots 0) = S_1$ (défini Lemme 1). D'après le Lemme 1, $\mathcal{I}(\operatorname{Ker}(C_1^{\sharp}\ C_2^{\flat})) = \bar{\mathcal{C}}$. Si $E_1^{\sharp} \neq 0$ la condition nécessaire de rejet de perturbation [5] $\Im \begin{pmatrix} E_1^{\sharp} \\ E_2^{\flat} \end{pmatrix} \subseteq \mathcal{I}(\operatorname{Ker}(C_1^{\sharp}\ C_2^{\flat})) = \bar{\mathcal{C}}$ n'est pas satisfaite.

Terminons par une autre application du Lemme 1.

Théorème 3

Le plus grand sous-espace (A, B)-invariant contenu dans le noyau de la sortie $y = C^{\sharp}\xi^{\sharp}$, avec $\operatorname{rg} C^{\sharp} = q$, est $\bar{\mathcal{C}}$. Si $E_1^{\sharp} \neq 0$ il n'est pas possible de rejeter l'influence de la perturbation sur la sortie y.

Preuve

La condition $\operatorname{rg} C^{\sharp} = q$ entraîne $\mathcal{I}(\operatorname{Ker} C^{\sharp}) = \bar{\mathcal{C}}$. La démonstration se termine comme la précédente.

BIBLIOGRAPHIE

[1] G. Basile and G. Marro. *Controlled and Conditionned Invariants in Linear System Theory*. Prentice-Hall, New Jersey, 1992.

[2] D. Claude. *Systèmes linéaires en temps continu : représentation d'état*. Paris onze édition/De Bœck université, 1995.

[3] D. G. Luenberger. Canonical forms for linear multivariable systems. *IEEE Trans. Automat. Control*, AC–12 :290–293, 1967.

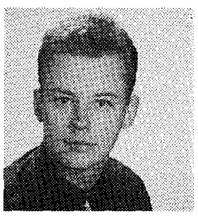
[4] P. S. Pereira da Silva. On canonical forms for noncontrollable linear systems. In *Proc. CBA – Congresso Brasileiro de Automática*, pages 1509–1513, São Paulo, Brasil, 1996.

[5] W. M. Wonham. *Linear Multivariable Control : a Geometric Approach*. Springer-Verlag, New York, 3rd edition, 1985.

Manuscrit reçu le 1 mars 1999.

L'AUTEUR

Emmanuel DELALEAU



Emmanuel Delaleau a obtenu en 1988 le diplôme d'ingénieur de l'*Institut supérieur d'électronique du Nord* à Lille et a soutenu sa thèse de doctorat en 1993 à l'*Université Paris-sud* à Orsay. Il est actuellement Maître de conférences à l'Université Paris-sud où il enseigne l'Automatique et l'Électronique analogique. Son principal domaine de recherche est la commande des systèmes non linéaires.