Estimation de probabilités faibles en détection

Estimation of tail probabilities in detection

par Georges VEZZOSI* et Eric VILLIER**

*Laboratoire Traitement du Signal, Université de Rennes 1
Campus de Beaulieu 35042 Rennes Cédex - France
**Motorola, GSM Research, 16 Euroway, Blagrove
Swindon
Wiltshire SN5 8YQ Grande Bretagne

résumé et mots clés

On présente deux méthodes analytiques approchées permettant l'évaluation rapide d'une probabilité de fausse alarme en détection. La première repose sur la borne de Chernov, complétée par un facteur correctif pour transformer cette borne en un équivalent de la probabilité de fausse alarme lorsque le seuil tend vers l'infini. Elle s'applique chaque fois que la fonction génératrice des moments est disponible, notamment dans le cas du détecteur quadratique. La seconde repose sur l'expression classique donnant le volume du tube associé à une variété portée par la sphère unité dans $\mathbb{R}^n$. Elle s'applique aux détecteurs maximisant la norme au carré d'une projection dans une famille de sous espaces. Dans les deux cas, le résultat obtenu s'exprime en fonction du seuil par le produit d'une constante, d'une puissance et d'une exponentielle.

Détection, probabilité de fausse alarme, méthodes asymptotiques, borne de Chernov, volume d'un tube.

abstract and key words

Two approximate analytical methods allowing a quick evaluation of the false alarm probability in detection are presented. The first one is based on the Chernov bound, properly modified to give an equivalent of the false alarm probability when the threshold tends to infinity. It can be applied whenever the moment generating function is available, for instance in the case of the quadratic detector. The second one is based on the classical formula for the volume of a tube about a manifold on the unit sphere of $\mathbb{R}^n$. It can be applied to all detectors which maximize the squared norm of a projection in a family of subspaces. As a function of the threshold, the result can be expressed in both cases as the product of a constant, a power, and an exponential.

False alarm probability, asymptotic methods, Chernov bound, volume of tubes.

1. introduction

Quels que soient la structure du récepteur ou le critère d'optimalité considérés, la détection d'un signal dans un bruit est un problème de test entre deux hypothèses H_0 (bruit seul) et H_1 (signal présent) dans lequel on peut commettre deux types d'erreurs : la fausse alarme, c'est-à-dire le rejet à tort de l'hypothèse H_0; la non détection, c'est-à-dire le rejet à tort de l'hypothèse H_1 . Les conséquences de ces deux types d'erreur n'étant pas jugées comparables, on est conduit pratiquement à caractériser tout détecteur par le couple classique (P_d, P_{fa}) d'une probabilité de détection P_d et d'une probabilité de fausse alarme P_{fa}. Les ordres de grandeur rencontrés pratiquement pour ces deux probabilités sont totalement différents : une probabilité de détection varie couramment de 0.2 à 0.8; une probabilité de fausse alarme reste toujours un nombre faible, voire très faible, en tous cas toujours inférieur à 10^{-2}. Cette différence d'ordres de grandeur entraîne que les moyens analytiques mis en jeu pour l'évaluation de ces deux probabilités ne sont pas les mêmes. Une détection est un événement *probable* dont la probabilité peut s'estimer de beaucoup de façons, par exemple par une approximation gaussienne de la loi de la variable aléatoire (va) X qui sert à prendre la décision. Une fausse alarme est un événement *rare* dont la probabilité ne peut pas s'estimer, sauf cas très particulier, par une approximation gaussienne. Supposant le récepteur défini par une relation de la forme :

$$X \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} t,$$

la probabilité de fausse alarme est en effet définie comme le *reste* de l'intégrale de la densité $f(x)$ de X sous H_0, soit

$$P_{fa}(t) = P\{X \geq t | H_0\} = \int_t^\infty f(x)\, dx, \tag{1}$$

qui, dans le domaine d'intégration considéré, n'a en général rien à voir avec celle d'une loi de Gauss.

Il est fréquent pratiquement qu'un reste d'intégrale de la forme (1) décroisse exponentiellement vers zéro, ce qui suggère de tenter de l'évaluer par des techniques de grands écarts [1]. Mais ces techniques sont mal adaptées au contexte de la détection. D'une part, elles supposent que le temps d'observation tend vers l'infini, ce qui n'est pas très réaliste (en détection, c'est plutôt le rapport signal sur bruit qu'on accepte de faire tendre vers l'infini). D'autre part, elles donnent en général un équivalent du *logarithme* de la probabilité de fausse alarme, c'est-à-dire qu'elles fournissent sans problème le terme exponentiel qui apparaît dans (1) si $t \to \infty$, mais qu'*elles négligent tous les autres termes.*

Or, il suffit de considérer quelques exemples simples pour voir que de tels termes existent et qu'ils ne peuvent pas être négligés. Par exemple, si X est gaussienne centrée réduite, on obtient par une simple intégration par parties

$$\begin{aligned} P_{fa}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_t^\infty \mathrm{e}^{-x^2/2} dx &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_t^\infty \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \left\{ -\mathrm{e}^{-x^2/2} \right\} dx \\ &\approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{t} \mathrm{e}^{-t^2/2}, \quad t \to \infty \end{aligned} \tag{2}$$

De même, si X est une variable du khi2 à ν degrés de libertés, c'est-à-dire si

$$f_\nu(x) = \frac{1}{2} \frac{1}{\Gamma(\nu/2)} \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu/2-1} \mathrm{e}^{-x/2}, \quad x \geq 0, \tag{3}$$

on obtient par le même procédé

$$P_{fa}(t) \approx \frac{1}{\Gamma(\nu/2)} \left(\frac{t}{2}\right)^{\nu/2-1} \mathrm{e}^{-t/2} = 2 f_\nu(t) \quad t \to \infty \tag{4}$$

La forme des relations (2) et (4) suggère qu'une probabilité de fausse alarme doit pouvoir s'estimer sous des conditions très générales comme le produit d'une constante, d'une puissance et d'une exponentielle, c'est-à-dire qu'il doit exister un résultat du type

$$P_{fa}(t) \approx C t^\alpha \exp\{-\gamma t^\beta\}, \quad t \to \infty, \tag{5}$$

où C, α, β et γ peuvent dépendre lentement de t et tendent vers des limites finies non nulles si $t \to \infty$. Ce qui suit vise à montrer qu'on a bien un résultat de ce type dans deux cas particuliers :

(i) le cas d'un détecteur quadratique défini par une relation de la forme

$$X = \underline{\mathbf{Y}}^T \underline{\underline{\mathbf{A}}}\, \underline{\mathbf{Y}} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} t, \tag{6}$$

où $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ est une matrice symétrique définie positive et $\underline{\mathbf{Y}}$ est un vecteur aléatoire centré de covariance connue;

(ii) le cas d'un détecteur défini par le maximum de la norme au carré d'une projection, suivant une relation du type

$$X = \sup_{\underline{\theta}} \underline{\mathbf{Y}}^T \underline{\underline{\Pi}}_{\underline{\theta}} \underline{\mathbf{Y}} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} t, \tag{7}$$

où le vecteur aléatoire $\underline{\mathbf{Y}}$ est gaussien, centré, de covariance identité et $\left\{\underline{\underline{\Pi}}_{\underline{\theta}}\right\}$ est une famille de projecteurs indexés par le paramètre multidimensionnel $\underline{\theta}$.

Le détecteur quadratique est un grand classique du traitement du signal puisque c'est lui qu'on rencontre en détection passive à large bande. Ses performances ont été largement étudiées (*cf.* par exemple [2 vol. I p. 124 et vol. III p. 39]. Comme on sait calculer la fonction génératrice des moments, la borne de Chernov complétée par son facteur correctif fournit d'excellents résultats. Nous reprenons ici l'approche de [2] en précisant la valeur de la constante, le facteur $1/\sqrt{2\pi}$ préconisé dans [2] provenant d'une approximation qui mérite d'être élucidée puisqu'elle *ne produit pas* un équivalent de la probabilité de fausse alarme si le seuil tend vers l'infini.

Le détecteur défini par des projections est également très important puisque c'est lui qu'on utilise en détection active en présence de paramètres inconnus (le paramètre $\underline{\theta}$ étant alors le couple d'un retard et d'un doppler), ou en détection passive à bande étroite après une formation de voies ($\underline{\theta}$ représentant alors les paramètres de direction). Il est beaucoup plus difficile à analyser en raison de l'opération de passage au maximum dans la relation qui le définit. La pratique courante consiste à quantifier $\underline{\theta}$ avec un pas assez grand pour se ramener à prendre un maximum sur des variables indépendantes, ce qui constitue évidemment une approximation très grossière. Nous reprenons ici les arguments géométriques mis au point dans [3] pour établir le résultat annoncé.

2. le cas du détecteur quadratique

2.1. fonction génératrice des moments et borne de Chernov

Nous considérons dans ce qui suit une va X admettant une densité $f(x)$ dont la fonction génératrice des moments

$$\Phi(p) = E e^{px} = \int_{\mathbb{R}} e^{px} f(x)\, dx, \quad p \in \mathbb{R},$$

possède un intervalle de convergence $]\sigma_0, \sigma_1[$ qui contient l'origine. Pour p variant dans l'intervalle ouvert $]\sigma_0, \sigma_1[$, la fonction $\Phi(p)$ est positive strictement et possède donc un logarithme $\mu(p) = \log \Phi(p)$, appelé la seconde fonction génératrice. Les fonctions $\Phi(p)$ et $\mu(p)$ possèdent dans $]\sigma_0, \sigma_1[$ des dérivées à tous les ordres et y sont strictement convexes. D'après un résultat classique de transformée de Laplace, la fonction $\Phi(p)$ est, pour p complexe, une fonction holomorphe dans la bande ouverte $B(\sigma_0, \sigma_1)$; la densité $f(x)$ se déduit de $\phi(p)$ par la formule d'inversion

$$f(x) = \frac{1}{2i\pi} \int_{-i\infty}^{i\infty} e^{-px} \Phi(p) dp, \tag{8}$$

pour peu que la fonction f soit continue au point x et admette en ce point une dérivée finie.

L'importance des deux fonctions génératrices des moments dans l'estimation de la quantité $P_{fa}(t) = P\{X \geq t\}$ provient de l'inégalité élémentaire

$$1_{\{x \geq t\}} \leq e^{p(x-t)}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad p \geq 0,$$

qui entraîne que pour toute va X

$$1_{\{x \geq t\}} \leq e^{p(X-t)}, \quad p \geq 0,$$

et donc en prenant l'espérance des deux côtés et en observant que si un nombre est plus petit qu'une fonction, il est plus petit que sa borne inférieure

$$P_{fa}(t) \leq \inf_{p \geq 0} E e^{p(X-t)} = \inf_{0<p<\sigma_1} e^{\mu(p)-pt}. \tag{9}$$

Le cas intéressant pratiquement est celui où la borne inférieure est atteinte en un point de l'intervalle ouvert $]0, \sigma_1[$. Ce point, nécessairement unique en raison de la convexité, s'obtient en résolvant l'équation $\dot{\mu}(p) = t$. Soit s la solution de cette équation. On peut considérer que la relation $t = \dot{\mu}(s)$ définit paramétriquement le seuil t en fonction de la variable s. L'inégalité (9) prend ainsi la forme de la borne de Chernov :

$$P_{fa}\{\dot{\mu}(s)\} = P\{X \geq \dot{\mu}(s)\} \leq B(s) = \exp\{\mu(s) - s\dot{\mu}(s)\}, \quad 0 < s < \sigma_1 \tag{10}$$

On notera que cette relation définit une simple borne. Elle ne définit pas un équivalent de la probabilité de fausse alarme qui pourrait s'appliquer lorsque s tend vers σ_1. Par exemple, si X obéit à la loi du khi2 à ν degrés de liberté définie en (3), on obtient :

$$\sigma_0 = -\infty, \quad \sigma_1 = 1/2, \quad \Phi_\nu(s) = \exp\{\mu_\nu(s)\} = (1-2s)^{-\nu/2}$$

$$\dot{\mu}_\nu(s) = \frac{\nu}{2} \frac{1}{1/2 - s}, \quad s = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\nu}{t}\right),$$

$$B_\nu(s) = \frac{1}{(1-2s)^{\nu/2}} \exp - \frac{\nu s}{1-2s} \tag{11}$$

soit encore en réexprimant la borne (10) en fonction du seuil t :

$$P_{fa}(t) \leq \left(\frac{et}{\nu}\right)^{\nu/2} e^{-t/2}, \quad t \geq \nu. \tag{12}$$

Comparant cette relation à celle obtenue en (4), on voit que la borne de Chernov fournit la bonne valeur du terme exponentiel $e^{-t/2}$. Mais elle ne produit ni la bonne valeur de l'exposant de la puissance (il manque $1/t$), ni celle de la constante. Même si l'on accepte l'approximation de Stirling de la fonction gamma, soit

$$\Gamma(\nu/2) \approx \sqrt{2\pi}(\nu/2)^{(\nu-1)/2} e^{-\nu/2},$$

il manque à la majoration (12) le facteur correctif $\sqrt{\frac{\nu}{\pi}\frac{1}{t}}$ pour retrouver l'estimation asymptotique (4).

2.2. densité associée et estimation du facteur correctif

L'estimation du facteur correctif s'effectue en deux étapes :

(i) mise en facteur de la borne de Chernov dans l'intégrale qui définit la probabilité de fausse alarme, ce qui fait apparaître dans l'intégrant la densité *associée* [4, p. 549]

$$g(x, s) = e^{-\mu(s)+sx} f(x), \tag{13}$$

(ii) normalisation de cette densité et changements de variable pour extraire de l'intégrale obtenue le terme qui la fait tendre vers zéro lorsque s tend vers σ_1.

Fixons s dans l'intervalle ouvert $]0, \sigma_1[$. La mise en facteur de la borne de Chernov dans l'intégrale de la fausse alarme amène la relation :

$$P_{fa}\{\dot{\mu}(s)\} = \int_{\dot{\mu}(s)}^{\infty} f(x)dx = B(s) \int_{\dot{\mu}(s)}^{\infty} e^{-\mu(s)+s\dot{\mu}(s)} f(x)dx$$

$$= B(s) \int_{\dot{\mu}(s)}^{\infty} e^{-s(x-\dot{\mu}(s))} g(x,s)dx, \tag{14}$$

où $g(x,s)$ est la densité associée (13). Cette densité admet une fonction génératrice $\Psi(p,s)$ qui se déduit de celle de $f(x)$, puisque

$$\begin{aligned}\Psi(p,s) &= \int_{\mathbb{R}} e^{px} g(x,s)dx = e^{-\mu(s)} \int_{\mathbb{R}} e^{(p+s)x} f(x)dx \\ &= \Phi(p+s)/\Phi(s) = \exp\{\mu(p+s) - \mu(s)\}. \quad (15)\end{aligned}$$

La bande de convergence correspondante est définie par $p+s \in B(\sigma_0,\ \sigma_1)$, soit $p \in B(\sigma_0 - s,\ \sigma_1 - s)$. La relation (15) montre de plus que la moyenne et la variance de la densité associée valent respectivement $\dot{\mu}(s)$ et $\ddot{\mu}(s)$. La densité associée normalisée

$$\tilde{g}(x,s) = \sqrt{\ddot{\mu}(s)}\, g(x\sqrt{\ddot{\mu}(s)} + \dot{\mu}(s), s) \quad (16)$$

est alors par construction de moyenne nulle et de variance unité. Sa fonction génératrice vaut :

$$\begin{aligned}\tilde{\Psi}(p,s) &= \int_{\mathbb{R}} e^{px} \tilde{g}(x,s)dx = e^{-p\dot{\mu}(s)/\sqrt{\ddot{\mu}(s)}} \int_{\mathbb{R}} e^{px/\sqrt{\ddot{\mu}(s)}} g(x,s)dx \\ &= e^{-p\dot{\mu}(s)/\sqrt{\ddot{\mu}(s)}}\, \Psi\left(p/\sqrt{\ddot{\mu}(s)}, s\right) \\ &= \exp\left\{-p\frac{\dot{\mu}(s)}{\sqrt{\ddot{\mu}(s)}} + \mu\left(s + \frac{p}{\sqrt{\ddot{\mu}(s)}}\right) - \mu(s)\right\} \quad (17) \\ &= \exp\left\{\frac{p^2}{2} + \sum_{n\geq 3} \frac{\mu^{(n)}}{[\ddot{\mu}(s)]^{n/2}} \frac{p^n}{n!}\right\},\end{aligned}$$

avec une bande de convergence définie maintenant par $p/\sqrt{\ddot{\mu}(s)} \in B(\sigma_0 - s,\ \sigma_1 - s)$, soit $p \in B((\sigma_0 - s)\sqrt{\ddot{\mu}(s)},\ (\sigma_1 - s)\sqrt{\ddot{\mu}(s)})$. Il reste à effectuer le changement de variable $y = (x - \dot{\mu}(s))/\sqrt{\ddot{\mu}(s)}$ dans l'intégrale (14) pour y faire apparaître la densité associée normalisée :

$$\begin{aligned}P_{fa}\{\dot{\mu}(s)\} &= B(s) \int_0^{\infty} e^{-s\sqrt{\ddot{\mu}(s)}y} \tilde{g}(y,s)dy \\ &= \frac{B(s)}{s\sqrt{\ddot{\mu}(s)}} \int_0^{\infty} e^{-y} \tilde{g}\left(y/s\sqrt{\ddot{\mu}(s)}, s\right) dy, \quad s \in]0, \sigma_1[\quad (18a)\end{aligned}$$

soit encore en écrivant la densité associée comme une transformée de Laplace inverse et en échangeant l'ordre des intégrations

$$P_{fa}\{\dot{\mu}(s)\} = \frac{B(s)}{s\sqrt{\ddot{\mu}(s)}} \frac{1}{2i\pi} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{\tilde{\Psi}(p,s)}{1 + p/s\sqrt{\ddot{\mu}(s)}} dp, \quad s \in]0,\ \sigma_1[\quad (18b)$$

Jusqu'à présent, nous n'avons fait aucune approximation : les relations (18a) et (18b) donnent les valeurs de la probabilité de fausse alarme exacte, pour les valeurs de seuil $t = \dot{\mu}(s)$ où s est choisi dans l'intervalle ouvert $]0, \sigma_1[$. Les approximations commencent à partir de maintenant.

Supposons que lorsque s tend vers σ_1, $s\sqrt{\ddot{\mu}(s)}$ tende vers l'infini, et que la densité normalisée $\tilde{g}(y,s)$ admette une densité limite, notée pour simplifiée $\tilde{g}(y,\sigma_1)$. Les intégrants dans (18a) et (18b) tendent alors respectivement vers $\tilde{g}(0,\sigma_1)e^{-y}$ et $\tilde{\Psi}(p,\sigma_1)$ Supposons de plus que l'échange de la limite et du signe somme soit permis dans les intégrales (18a) et (18b), ce qui est le cas le plus fréquent. Les deux intégrales tendent alors vers la constante $\tilde{g}(0,\ \sigma_1)$, ce qui permet de poser l'estimation :

$$P_{fa}\{\dot{\mu}(s)\} \approx \frac{\exp\{\mu(s) - s\dot{\mu}(s)\}}{s\sqrt{\ddot{\mu}(s)}} C(s), \quad s \to \sigma_1 \quad (19)$$

$$C(s) = \tilde{g}(0,s) = \frac{1}{2i\pi} \int_{-i\infty}^{i\infty} \tilde{\Psi}(p,s)dp.$$

Cette estimation peut d'ailleurs s'exprimer avec la densité de départ $f(x)$. D'après (13) et (16), on a en effet

$$\begin{aligned}\tilde{g}(0,s) &= \sqrt{\ddot{\mu}(s)}\, g\{\dot{\mu}(s)\} \\ &= \sqrt{\ddot{\mu}(s)} \exp\{-\mu(s) + s\dot{\mu}(s)\} f\{\dot{\mu}(s)\},\end{aligned}$$

donc la relation (19) ne dit rien de plus que :

$$P_{fa}\{\dot{\mu}(s)\} \approx \frac{1}{s} f\{\dot{\mu}(s)\}, \quad s \to \sigma_1. \quad (20)$$

Par exemple, pour un khi2 à ν degrés de liberté, la solution de l'équation $\dot{\mu}(s) = t$ est $s = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\nu}{t}\right)$, la relation (20) devient :

$$P_{fa}(t) \approx \frac{1}{1 - \nu/t} \frac{1}{\Gamma(\nu/2)} \left(\frac{t}{2}\right)^{\nu/2-1} e^{-t/2}, \quad t \to \infty \quad (21)$$

un résultat cohérent avec l'estimation (4) trouvée directement. Le facteur supplémentaire $(1 - \nu/t)^{-1}$ qui apparaît dans (21) est d'ailleurs très proche de celui proposé par Marcum en 1948 pour améliorer l'estimation (4) (*cf.* [5, p. 218] : le facteur de Marcum est $[1 - (\nu - 2)/t]^{-1}$).

La loi du khi2 servira de référence dans la discussion qui suit et il est utile de préciser dans son cas la forme des différentes fonctions qui viennent d'être introduites. Les fonctions $\Phi_\nu(s)$, $\dot{\mu}_\nu(s)$, $B_\nu(s)$ et la dépendance de s avec t ont déjà été explicitées (*cf.* (11)). On a de plus :

- Dérivée seconde de la 2ème fonction génératrice :

$$\ddot{\mu}_\nu(s) = \frac{\nu}{2} \frac{1}{(1/2 - s)^2} \quad (22)$$

- Densité associée normalisée $\tilde{g}(x,s)$ et fonction génératrice correspondante $\tilde{\Psi}(p,s)$: *ces fonctions ne dépendent pas de s* et valent :

$$\tilde{g}_\nu(x) = \frac{1}{\Gamma(\nu/2)} \left(\frac{\nu}{2}\right)^{(\nu-1)/2} \left(x\sqrt{\frac{2}{\nu}} + 1\right)^{\nu/2-1} \exp\left\{-\frac{\nu}{2}\left(x\sqrt{\frac{2}{\nu}} + 1\right)\right\}. \quad (23)$$

$$\tilde{\Psi}_\nu(p) = \frac{\exp\{-p\sqrt{\nu/2}\}}{\left(1 - \frac{p}{\sqrt{\nu/2}}\right)^{\nu/2}} = \exp\left\{\frac{p^2}{2} + \sum_{n\geq 3}\left(\frac{2}{\nu}\right)^{n/2-1}\frac{p^n}{n}\right\}. \quad (24)$$

• Intégrale $C(s) = \tilde{g}(0, s)$ et approximations : ce terme ne dépend pas de s et vaut d'après (23)

$$C_\nu = \frac{1}{\Gamma(\nu/2}\left(\frac{\nu}{2}\right)^{(\nu-1)/2} \mathrm{e}^{-\nu/2}. \quad (25)$$

Il peut s'évaluer à l'aide du développement classique de la fonction gamma par les nombres de Bernouilli [6, p. 257] :

$$\frac{\Gamma(z)}{z^{z-1/2}\mathrm{e}^{-z}\sqrt{2\pi}} = \exp\left\{\frac{1}{12z} - \frac{1}{360z^3} + \frac{1}{1260z^5} - \frac{1}{1680z^7} + \ldots + R_n(z)\right\},$$

où pour z réel positif, le reste $R_n(z)$ est en module plus petit que le premier terme négligé et a le même signe. Remplaçant dans ce résultat z par $\nu/2$, on en déduit l'encadrement :

$$\exp\left(\frac{1}{6\nu} - \frac{1}{45\nu^3}\right) \leq \frac{1}{C_\nu\sqrt{2\pi}} \leq \exp\left(\frac{1}{6\nu}\right), \quad (26)$$

qui montre que C_ν peut s'estimer dans le cas d'un khi2 par $1/\sqrt{2\pi}$ même pour ν proche de 1, c'est-à-dire même si on est très loin des conditions d'applications du théorème central limite invoqué dans [2] pour établir l'approximation. Par exemple, pour $\nu = 1$, on a $C_1 = 1/\sqrt{\pi \mathrm{e}} = 0,3422$ alors que $1/\sqrt{2\pi} = 0,3989$: l'erreur commise est inférieure à 16,6%. Cependant, le fait de remplacer $C(s) = C_\nu$ par $1/\sqrt{2\pi}$ au second membre de la relation (19) entraîne que le second membre n'est plus, au sens strict, un équivalent du premier lorsque s tend vers σ_1.

2.3. application au détecteur quadratique

Moyennant une diagonalisation et une normalisation convenables, le détecteur quadratique (6) peut toujours s'exprimer sous la forme

$$X = \sum_{k=1}^{N} Y_k^2/a_k, \quad 1 = a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_N, \quad (27)$$

où les va (Y_k) sont indépendantes, gaussiennes, centrées, réduites. On note K le nombre de coefficients (a_k) exactement égaux à 1. Toutes les quantités nécessaires à l'application de la borne de Chernov complétée par son facteur correctif se calculent facilement. Grâce à la normalisation (27), la bande de convergence de la fonction génératrice de X est la même que celle du khi2, soit $B(-\infty, 1/2)$. Pour exprimer les dérivées successives de $\mu(s)$ et la fonction génératrice associée normalisée $\tilde{\Psi}(p, s)$, il est commode d'introduire les variables auxiliaires :

$$\alpha_k = \alpha_k(s) = \frac{1/2 - s}{a_k/2 - s}, \quad 1 \leq k \leq N, \quad 0 < s < 1/2 \quad (28)$$

et ces variables normées à 1 :

$$\tilde{\alpha}_k = \tilde{\alpha}_k(s) = \alpha_k/|\underline{\alpha}|, \quad |\underline{\alpha}| = \sqrt{\sum_{n=1}^{N}\alpha_n^2}. \quad (29)$$

On a évidemment :

$$1 = \alpha_1 = \ldots = \alpha_K > \alpha_{K+1} \geq \ldots \geq \alpha_N.$$

Si s tend vers $\sigma_1 = 1/2$ les (α_k) tendent vers 0 pour $k > K$; les variables normées $(\tilde{\alpha}_k)$ tendent donc vers $1/\sqrt{K}$ pour $k \leq K$ et vers 0 pour $k > K$.

Nous récapitulons ci-après les différentes quantités mises en jeu.

• Fonction génératrice :

$$\begin{aligned}\Phi(s) = e^{\mu(s)} &= \prod_{k=1}^{N}(1 - 2s/a_k)^{-1/2}, \quad 0 < s < 1/2 \\ &= \Phi_K(s) \prod_{k=K+1}^{N} (1 - 2s/a_k)^{-1/2},\end{aligned} \quad (30)$$

où $\Phi_\nu(s)$ est la fonction génératrice du khi2 à ν degrés de liberté définie en (11). Si s tend vers 1/2, $\Phi(s)$ est donc équivalente à la fonction génératrice du khi2 à K degrés de liberté multipliée par le facteur $\prod_{k=K+1}^{N} (1 - 1/a_k)^{-1/2}$.

• Dérivées successives de $\mu(s)$: pour $n \geq 1$

$$\mu^{(n)}(s) = \frac{(n-1)!}{2(1/2 - s)^n}\sum_{k=1}^{N}\alpha_k^n \quad (31)$$

et donc

$$\frac{\mu^{(n)}(s)}{[\ddot{\mu}(s)]^{n/2}} = 2^{n/2-1}(n-1)!\sum_{k=1}^{N}\tilde{\alpha}_k^n. \quad (32)$$

Si s tend vers 1/2, les fonctions $\dot{\mu}(s)$ et $\ddot{\mu}(s)$ qui interviennent dans l'estimation (19) sont équivalentes à celles d'un khi2 à K degrés de liberté.

• Fonction génératrice associée $\Psi(p, s)$:

$$\Psi(p, s) = \Phi(p, s)/\Phi(s) = \prod_{k=1}^{N}\left(1 - \frac{p\alpha_k}{1/2 - s}\right)^{-1/2}. \quad (33)$$

• Fonction génératrice associée normalisée $\tilde{\Psi}(p, s)$:

$$\begin{aligned}\tilde{\Psi}(p,s) &= \mathrm{e}^{-p\dot{\mu}(s)/\sqrt{\ddot{\mu}(s)}}\,\Psi(p/\sqrt{\ddot{\mu}(s)}, s) \\ &= \exp\left\{-\frac{p}{\sqrt{2}}\sum_{k=1}^{N}\tilde{\alpha}_k\right\}\prod_{k=1}^{N}\left(1-\frac{2p\tilde{\alpha}_k}{\sqrt{2}}\right)^{-1/2} \qquad (34) \\ &= \exp\left\{\frac{p^2}{2}+\sum_{n\geq 3}2^{n/2-1}\sum_{k=1}^{N}\tilde{\alpha}_k^n\frac{p^n}{n}\right\}.\end{aligned}$$

Si s tend vers 1/2, $\tilde{\alpha}_k$ tend vers $1/\sqrt{K}$ si $k \leq K$ et vers zéro sinon, donc cette fonction tend vers celle d'un khi2 à K degrés de liberté (*cf.* (24)).

• Intégrale $\quad C(s) = \dfrac{1}{2\mathrm{i}\pi}\displaystyle\int_{-\mathrm{i}\infty}^{\mathrm{i}\infty}\tilde{\Psi}(p,s)dp.$

Sauf cas particulier, cette intégrale ne se calcule pas. Mais sa limite si s tend vers 1/2 est facilement accessible, puisque c'est la même que celle d'un khi2 à K degrés de liberté. On a donc

$$\lim_{s\to 1/2} C(s) = C_K, \qquad (35)$$

où C_ν a été défini en (25). Ce fait permet d'estimer $C(s)$ par sa limite C_K.

L'estimée de la probabilité de fausse alarme du détecteur quadratique prend ainsi la forme :

$$P_{fa}\{\dot{\mu}(s)\} \approx C_K\frac{\exp\{\mu(s)-s\dot{\mu}(s)\}}{s\sqrt{\ddot{\mu}(s)}}, \quad s\to\sigma_1 = 1/2, \ (36)$$

où C_K, $\mathrm{e}^{\mu(s)}$, $\dot{\mu}(s)$ et $\ddot{\mu}(s)$ sont donnés respectivement par (25), (30), (31) et les variables auxiliaires (α_k) sont définies en (28). La relation (36) peut se réexprimer avec le seuil t. Comme la solution de l'équation $\dot{\mu}(s) = t$ est de la forme $s = \dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{K}{t}\right)+\sigma\left(\dfrac{1}{t}\right)$, que $\ddot{\mu}(s)$ est équivalente à $\ddot{\mu}_K(s)$ et que $\Phi(s)$ est équivalente à $\Phi_K(s)$ à un facteur près, $P_{fa}(t)$ est équivalente à celle d'un khi2 à K degrés de liberté multipliée par ce facteur, soit

$$P_{fa}(t) \approx \frac{1}{\prod\limits_{k=K+1}^{N}(1-1/a_k)^{1/2}}\frac{1}{1-K/t}\frac{1}{\Gamma(K/2)}\left(\frac{t}{2}\right)^{K/2-1}\mathrm{e}^{-t/2}, \quad t\to\infty. \quad (37)$$

Les deux relations (36) et (37) sont asymptotiquement strictement équivalentes. Cependant, la première est plus intéressante pratiquement que la seconde : étant donné la façon dont elle a été obtenue, la relation (36) est apte à restituer les valeurs intermédiaires de la probabilité de fausse alarme; la relation (37) n'en restitue plus que les valeurs extrêmes, notamment si a_{K+1} est très proche de 1 ou si N est très supérieur à K.

3. le cas du détecteur défini par des projections

3.1. volume d'une variété et de son tube associé dans S^{n-1} [7].

S^{n-1} désigne la sphère unité de $\mathbb{R}^n$. La distance de deux points de S^{n-1} est leur distance *géodésique*, c'est-à-dire l'*angle* φ *des deux vecteurs dont ils sont les extrémités*, ou encore *la longueur* φ *de l'arc de grand cercle qui les joint*. Supposons donnée dans S^{n-1} une variété C_d de dimension d, définie paramétriquement par n équations de la forme $\underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{x}}(u_1 \ldots u_d)$, où $\underline{\mathbf{x}} = [x_1 \ldots x_n]^T$ est le vecteur des n coordonnées de $\mathbb{R}^n$. Considérons la matrice des dérivées partielles à n lignes et d colonnes :

$$\dot{\underline{\mathbf{x}}} = [\dot{\underline{\mathbf{x}}}_1 \ldots \dot{\underline{\mathbf{x}}}_d]$$

où $\dot{\underline{\mathbf{x}}}_j$ désigne la dérivée du vecteur colonne $\underline{\mathbf{x}}$ par rapport à u_j, et soit $\mathbf{g}$ son gramien :

$$\underline{\mathbf{g}} = \dot{\underline{\mathbf{x}}}^T\dot{\underline{\mathbf{x}}}.$$

Le volume de la variété C_d est alors par définition

$$k_0 = \int_D \sqrt{\det\underline{\mathbf{g}}}\ du_1 \ldots du_d, \qquad (38)$$

où D est le domaine de $\mathbb{R}^d$ dans lequel varient les paramètres $(u_1 \ldots u_d)$ qui définissent C_d.

Le tube de rayon géodésique φ associé à la variété est l'ensemble des points de S^{n-1} dont la distance (géodésique) à la variété est inférieure à φ. Supposons la variété sans bord (chaque point du tube est porté par un vecteur normal à la surface) et le rayon φ assez petit pour que le tube soit sans recouvrement (localement, le même point du tube n'est pas porté par des normales issues de points distincts). Alors le volume du tube se calcule exactement [7]. C'est une somme finie de $1 + [d/2]$ termes :

$$V(\varphi) = \mathrm{Vol}\,(S^{m-1})\,\{k_0J_0(\varphi)+k_2J_2(\varphi)+\ldots+k_{2q}J_{2q}(\varphi)\}, \quad q = [d/2] \quad (39)$$

où

• $m = n - d - 1$ et $\mathrm{Vol}\,(S^{m-1}) = 2\pi^{m/2}/\Gamma(m/2)$ désigne le volume de S^{m-1},

• les $\{J_{2e}(\varphi), 0 \leq e. \leq [d/2]\}$ sont les intégrales définies par

$$m(m+2)\ldots(m+2\mathrm{e}-2)J_{2\mathrm{e}}(\varphi) = \int_0^{\mathrm{tg}\,\varphi}\frac{a^{m-1+2\mathrm{e}}}{(1+a^2)^{n/2}}da, \ (40)$$

• k_0 est le volume de la variété définie en (38) et, pour $e \geq 1$, les coefficients $(k_{2\mathrm{e}})$ sont des caractéristiques de la variété qui mettent en jeu les dérivées de $\underline{\mathbf{x}}$ d'ordre supérieur à 1. Par exemple, le terme k_2 vaut [3] :

$$k_2 = \frac{1}{2}\int_D \sqrt{\det \underline{\mathbf{g}}}\ (T_1 - T_2) du_1 \dots du_d,$$

où

$$T_1 = \sum_{\alpha,\beta,\alpha',\beta'} g^{\alpha\beta} g^{\alpha'\beta'} \ddot{\underline{\mathbf{x}}}^T_{\alpha\beta} \underline{\mathbf{P}}\, \ddot{\underline{\mathbf{x}}}_{\alpha'\beta'}$$

$$T_2 = \sum_{\alpha,\beta,\alpha',\beta'} g^{\alpha\beta} g^{\alpha'\beta'} \ddot{\underline{\mathbf{x}}}^T_{\alpha\alpha'} \underline{\mathbf{P}}\, \ddot{\underline{\mathbf{x}}}_{\beta\beta'},$$

$g^{\alpha\beta}$ désignant le terme (α, β) de l'inverse du gramien et $\underline{\mathbf{P}}$ étant le projecteur dans le sous- espace normal à la variété au point $\underline{\mathbf{x}}$:

$$\underline{\mathbf{P}} = \underline{\mathbf{I}} - \underline{\mathbf{x}}\,\underline{\mathbf{x}}^T - \dot{\underline{\mathbf{x}}}\underline{\mathbf{g}}^{-1}\dot{\underline{\mathbf{x}}}^T.$$

Pour les faibles valeurs du rayon φ, le terme prépondérant au second membre de (39) est le premier. Si la variété comprend des bords, il convient d'ajouter au second membre de (39) des termes supplémentaires qui proviennent de la contribution des points du tube proches du bord et non portés par les vecteurs normaux [8]. Mais ces termes restent du second ordre par rapport au premier qui sera seul considéré ici.

3.2. application au détecteur défini par des projections

Donnons-nous dans $\mathbb{R}^N$ une famille de projecteurs $\{\underline{\Pi}_{\underline{\theta}}\}$ de rang constant r indexés par le paramètre $\underline{\theta}$ à plusieurs composantes $(\theta_1 \dots \theta_p)$. Pour chaque $\underline{\theta}$, supposons nos projecteurs définis par r vecteurs orthonormés $\{\underline{\mathbf{q}}_j(\underline{\theta})\}$, soit

$$\underline{\Pi}_\theta = \sum_{j=1}^{r} \underline{\mathbf{q}}_j(\underline{\theta})\underline{\mathbf{q}}_j^T(\underline{\theta}). \tag{41}$$

Un projecteur définit l'hyperplan sur lequel on projette. Cet hyperplan est défini paramétriquement par la relation

$$\underline{\mathbf{y}} = [y_1 \dots y_N]^T = \alpha_1 \underline{\mathbf{q}}_1(\underline{\theta}) + \dots + \alpha_r \mathbf{q}_r(\underline{\theta}). \tag{42}$$

Son intersection avec S^{N-1} est une sphère de dimension $r-1$, obtenue en imposant la condition supplémentaire $|\underline{\alpha}| = 1$ dans (42). Lorsque $\underline{\theta}$ varie, cette sphère engendre sur S^{N-1} une variété C_d de dimension

$$\boxed{d = p + r - 1}, \tag{43}$$

la paramétrisation de C_d nécessaire au calcul des coefficients $\{k_{2\mathrm{e}}\}$ se déduisant de (42) en paramétrant $\underline{\alpha}$ par ses $r-1$ coordonnées sphériques.

Supposons à présent qu'étant donné un vecteur aléatoire $\underline{\mathbf{Y}}$ d'ordre N, gaussien, centré, de covariance identité, on veuille calculer une quantité de la forme

$$P_{fa}(t) = P\left\{\sup_{\underline{\theta}} \left|\underline{\Pi}_\theta \underline{\mathbf{Y}}\right|^2 \geq t\right\} = P\left\{\sup_{\underline{\theta}} \left|\underline{\Pi}_\theta \tilde{\underline{\mathbf{Y}}}\right|^2 \geq t/|\underline{\mathbf{Y}}|^2\right\} \tag{44}$$

où $\tilde{\underline{\mathbf{Y}}} = \underline{\mathbf{Y}}/|\underline{\mathbf{Y}}|$. La va $|\underline{\mathbf{Y}}|^2$ est un khi2 à N degrés de liberté et le vecteur $\tilde{\underline{\mathbf{Y}}}$ est équiparti sur la sphère unité. Conditionnellement en $|\underline{\mathbf{Y}}|^2 = r$, l'événement

$$\left\{\sup_{\underline{\theta}} \left|\underline{\Pi}_\theta \tilde{\underline{\mathbf{Y}}}\right|^2 \geq t/r\right\},$$

est réalisé si et seulement si $\tilde{\underline{\mathbf{Y}}}$ appartient à l'ensemble des points de S^{N-1} qui forment un angle inférieur ou égal à $\varphi = \arccos\sqrt{t/r}$ avec l'un des hyperplans définis par la famille de projecteurs. Mais cet ensemble est exactement le tube de rayon φ de la variété C_d. On a donc

$$P_{fa}(t|r) = \frac{V(\varphi)}{\mathrm{Vol}\,(S^{N-1})},$$

et par suite en moyennant par la loi du khi2 :

$$P_{fa}(t) = \frac{1}{\mathrm{Vol}\,(S^{N-1})}\frac{1}{2}\frac{1}{\Gamma(N/2)}\int_t^\infty V(\varphi)\left(\frac{r}{2}\right)^{N/2-1} e^{-r/2} dr \tag{45}$$

En raison de la présence du facteur exponentiel dans l'intégrale du second membre, cette intégrale ne dépend que des valeurs de l'intégrant dans le voisinage immédiat de la borne inférieure t.

Dans ce voisinage, l'angle $\varphi = \arccos\sqrt{t/r}$ est petit et $V(\varphi)$ peut donc se calculer par (39).

Le report du volume du tube (39) au second membre de (45) fait apparaître les intégrales

$$I_{\mathrm{e}}(t) = \int_t^\infty J_{2\mathrm{e}}(\varphi)\left(\frac{r}{2}\right)^{N/2-1} \mathrm{e}^{-r/2} dr$$

qui peuvent s'évaluer en calculant $I_{\mathrm{e}}(t)$ par dérivation sous le signe somme et en observant que $I_{\mathrm{e}}(t) = -\int_t^\infty \dot{I}_{\mathrm{e}}(x)\,dx$. On obtient ainsi

$$I_{\mathrm{e}}(t) = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\frac{1}{2^{\mathrm{e}}}\int_t^\infty \left(\frac{x}{2}\right)^{(N-m)/2-\mathrm{e}-1} \mathrm{e}^{-x/2} dx.$$

Puisque $m = N - d - 1$ et que le volume de la sphère unité de $\mathbb{R}^n$ vaut $\mathrm{Vol}\,(S^{n-1}) = 2\pi^{n/2}/\Gamma(n/2)$, la relation (45) prend ainsi la forme :

$$P_{fa}(t) = \frac{1}{4}\frac{1}{\pi^{(d+1)/2}}\int_t^\infty \left[k_0 + \frac{k_2}{x} + \dots + \frac{k_{2q}}{x^q}\right]\left(\frac{x}{2}\right)^{(d-1)/2} \mathrm{e}^{-x/2} dx,$$
$$q = [d/2].$$

Dans cette somme, le terme prépondérant est le premier, la fonction gamma incomplète correspondante peut s'évaluer par l'approximation (4), ce qui donne le résultat remarquable

$$P_{fa}(t) \approx \frac{1}{2}\frac{k_0}{\pi^{(d+1)/2}}\left(\frac{t}{2}\right)^{(d-1)/2} \mathrm{e}^{-t/2}, \quad t \to \infty, \qquad (46)$$

où $d = p + r - 1$.

Lorsque $\underline{\theta}$ est un paramètre scalaire ($p = 1$), ce résultat est cohérent avec celui qu'on peut établir directement par une technique classique de comptage [9, p. 421], qui conduit à la relation :

$$P_{fa}(t) = \int_D d\theta \int_0^\infty y w_2(t, y, \theta)\, dy, \qquad (47)$$

où $w_2(t, y, \theta)$ est la densité du couple formé par la va $F(\theta) = |\underline{\Pi}_\theta \underline{\mathbf{Y}}|^2$ et par sa dérivée $\dot{F}(\theta)$. Mais même dans ce cas, la relation (46) est bien plus simple à utiliser que la relation (47), puisqu'elle donne explicitement la dépendance de la fausse alarme avec le seuil et qu'elle fournit l'interprétation géométrique de la constante k_0.

Enfin, le résultat (46) mérite d'être rapproché de celui fourni par l'approximation pratiquée couramment pour traiter le même problème. Supposons qu'on ait réussi à quantifier le domaine D dans lequel varie le paramètre $\underline{\theta}$ en K points $(\underline{\theta}_1 \ldots \underline{\theta}_K$, choisis de façon que les K va $\{F(\underline{\theta}_j) = |\underline{\Pi}_{\underline{\theta}_j} \underline{\mathbf{Y}}|^2\}$ soient indépendantes. L'approximation consiste à remplacer, dans la définition du récepteur, le maximum en $\underline{\theta} \in D$ par un maximum en $\underline{\theta} \in \{\underline{\theta}_1 \ldots \underline{\theta}_K\}$. Comme à $\underline{\theta}$ fixé $F(\underline{\theta})$ est un khi2 à r degrés de liberté, on obtient la relation :

$$P_{fa}(t) \approx \frac{K}{\Gamma(r/2)}\left(\frac{t}{2}\right)^{r/2-1} \mathrm{e}^{-t/2}. \qquad (48)$$

Comparant (46) et (48), on voit qu'on retrouve bien le bon terme exponentiel, mais pas la bonne valeur de l'exposant de la puissance (il manque $p/2$ à l'exposant dans (48)). Par exemple, dans la détection d'une fréquence pure dans un bruit blanc gaussien [3], la relation (48) donne une dépendance en fonction du seuil de la forme $\mathrm{e}^{-t/2}$, alors que la dépendance correcte est $\sqrt{t}\mathrm{e}^{-t/2}$.

4. conclusion

Il y a un besoin évident en détection de résultats analytiques faciles à exploiter, donnant la probabilité de fausse alarme au delà de 10^{-2}, et produisant également des équivalents de cette probabilité lorsque le seuil tend vers l'infini. Les deux méthodes présentées plus haut répondent à ces exigences. Quand on les teste en simulation sur les deux problèmes pour lesquels elles ont été mises au point (le détecteur quadratique et le détecteur maximisant une projection), elles donnent des résultats d'une remarquable précision *cf.* [2] pour la première et [3] pour la seconde). L'inconvénient de la première est qu'elle ne s'applique que dans des conditions très particulières : il faut connaître la fonction génératrice des moments. La seconde s'applique en principe dans des conditions plus générales, puisqu'elle n'utilise rien de plus que la symétrie sphérique de la loi de Gauss, ce qui ramène le problème au calcul de certains volumes sur les sphères de $\mathbb{R}^N$. Peut-on effectuer de tels calculs dans des conditions plus générales que celles considérées précédemment, par exemple dans le cas de détecteurs de la forme $\sup_{\underline{\theta}} \underline{\mathbf{Y}}^T \underline{\mathbf{A}}_\theta \underline{\mathbf{Y}}$ où $\{\underline{\mathbf{A}}_\theta\}$ est une famille de matrices définies positives, ou dans celui des détecteurs quartiques recherchant les fréquences cycliques en télécommunications? Autant de questions sans réponses actuellement et qui donnent un nouvel intérêt à un problème très ancien.

BIBLIOGRAPHIE

[1] V.V. Petrov, «Sums of Independent Random Variables», *Springer-Verlag* (1976)

[2] H.L. Van Trees, «Detection, Estimation, and Modulation Theory», vol. I et III, Wiley (1968)

[3] E. Villier, «Contribution aux méthodes à sous espace en traitement du signal», thèse de l'Université de Rennes 1 (1995)

[4] W. Feller, «An Introduction to Probability Theory and its Applications», vol. II, Wiley (1971)

[5] C.W. Helstrom, «Statistical Theory of Signal Detection», Pergamon Press (1968)

[6] M. Abramowitz and I.A. Stegun, «Handbook of Mathematical Functions», Dover (1970)

[7] H. Weyl, «On the Volume of Tubes», *American Journal of Mathematics*, vol. 61, pp. 461-472 (1939)

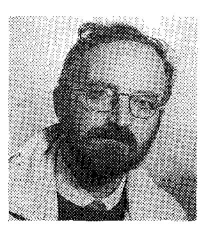
[8] I. Johnstone and D. Siegmund, «On Hotelling's Formula for the Volume of Tubes and Naiman's Inequality», *The Annals of Statistics*, vol. 17, pp. 184-194 (1989)

[9] B. Lévine, «Fondements théoriques de la radiotechnique statistique», tome 1, Ed. Mir (1973).

Manuscrit reçu le 2 mars 1999.

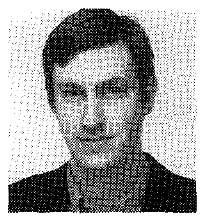
LES AUTEURS

Georges VEZZOSI



Georges Vezzozi est Professeur à l'Université de Rennes 1. Il s'intéresse aux problèmes de détection, de traitement d'antennes et d'égalisation adaptative.

Eric VILLIER



Eric Villier est Ingénieur de recherches à Motorola (Swindon, UK). Il participe à la mise au point d'antennes adaptatives et de techniques de localisation des usagers dans les réseaux GSM.