Géométrie des polyspectres

Geometry of polyspectra

par Bernard PICINBONO
Laboratoire des Signaux et Systèmes, Supélec, Plateau de Moulon, 91190 Gif-sur-Yvette, France
Tél. : (33)-(1)-69 85 17 40, Courrier électr. : picinbono@lss.supelec.fr

résumé et mots clés

Les polyspectres de signaux sont reliés aux transformées de Fourier des moments ou des cumulants de ces signaux dénommés moments spectraux. Ces moments spectraux ont des propriétés géométriques remarquables faisant intervenir des surfaces spécifiques dans le domaine des fréquences. Ainsi la multiplicité stationnaire caractérise la propriété de stationnarité d'un signal. Il en est de même pour les multiplicités normales qui, avec la densité normale, caratérisent les signaux normaux. L'article analyse les liens existant entre ces multiplicités et certaines propriétés statistiques des signaux telles que la circularité, le caractère sphériquement invariant, la réversibilité ou l'ergodicité. Par ailleurs il introduit une classe de signaux dits ordonnés pour lesquelles des relations d'ordre doivent apparaître dans le temps. Les conséquences fréquentielles des ces propriétés sont analysées.

Moments, cumulants, polyspectres, multiplicités stationnaire et normales, signaux ordonnés.

abstract and key words

Polyspectra of signals are related to Fourier transforms of moments or cumulants called spectral moment functions. These functions have remarkable geometrical properties involving some specific surfaces in the frequency domain. Thus stationary manifold charaterizes the stationarity of a signal. The same appears for normal manifolds and normal densities related with normal signals. In this paper are analyzed the connections between these manifolds and some properties of signals such as circularity, spherically invariance, time reversibility or ergodicity. Furthermore relationships between these properties and the class of ordered signals are discussed.

Moments, cumulants, polyspectra, stationary and normal manifolds, ordered signals.

1. introduction

La dualité temps-fréquence a balisé toute l'histoire des signaux aléatoires au cours des dernières décennies. Du coté temporel on trouve tous les travaux concernant la définition même des fonctions aléatoires par leur loi temporelle. Le concept de stationnarité s'introduit également naturellement comme une propriété temporelle. Il en est de même pour toutes les propriétés des fonctions de corrélation. Enfin la vision temporelle a été très renforcée, au point de parfois éliminer la vision en fréquence, par l'approche des signaux aléatoires au moyen de la représentation interne des systèmes. Ainsi le filtrage de Kalman, fondé sur le concept de récurrence dans le temps, a paru parfois détrôner toutes les approches fréquentielles dans les problèmes d'estimation.

Du coté de la fréquence on trouve évidemment tous les problèmes posés par la représentation harmonique des signaux aléatoires, et en particulier les propriétés spectrales du second ordre dominées par le concept de densité spectrale et de matrice spectrale dans le cas multidimensionnel. Tous les travaux sur le filtrage statistique ou sur les antennes se placent systématiquement de ce coté.

Cette dualité se retrouve évidemment dans les travaux concernant les statistiques d'ordre supérieur à deux et cet exposé se place systématiquement du coté fréquentiel, ne serait-ce que pour des limitations de durée de présentation. J'ai choisi ce versant car dans une certaine mesure je l'ai fréquenté depuis mes premiers travaux jusqu'à aujourd'hui, et même si je l'ai souvent quitté pour d'autres horizons, j'y suis toujours de temps à autre revenu. Ainsi c'est dans ma thèse de doctorat [17] en 1960 qu'a été introduit et utilisé systématiquement le concept de multiplicités normales dont il sera amplement question dans la suite. C'est dans celle J. Pouget [22] qu'une première vision des signaux ordonnés est apparue, même si j'ai été conduit à reprendre la question très récemment. Enfin les signaux sphériquement invariants et les processus composés sont apparus à partir de préoccupations d'optique statistique [18], même si certaines implications en théorie du signal sont beaucoup plus récentes.

L'idée d'utiliser des statistiques d'ordre supérieur à deux n'est pas du tout récente et apparaît dans les premiers travaux sur la modélisation du bruit de fond. Ainsi tous les récepteurs de radiocommunications comportent un élément non-linéaire dont l'exemple le plus simple est celui de la quadration, antérieurement appelée détection quadratique. Cela consiste à transformer le signal $x(t)$ en $y(t) = x^2(t)$. Il est alors évident que l'étude de la fonction de corrélation de $y(t)$ nécessite la connaissance de moments d'ordre 4 de $x(t)$. Ceci est déjà étudié dans les ouvrages de base [1][3]. Ces moments d'ordre 4 sont également nécessaires pour étudier les récepteurs à corrélation introduits en acoustique sous-marine dans les années cinquante. En optique statistique le concept de cohérence permettant de décrire les phénomènes d'interférences lumineuses utilise une fonction de corrélation, c'est-à-dire un moment d'ordre 2 du champ optique. Par contre les expériences de corrélation d'intensité nécessitent l'usage de moments d'ordre 4. Ce sont ces moments qui permettent de distinguer deux champs optiques de même spectre dont l'un est créé par une source naturelle et l'autre par une source laser [9].

Dès lors que l'on a introduit les moments d'ordre 4, rien n'empêche d'aller plus loin, en tout cas du point de vue théorique. Il semble bien que les premières approches dans ce sens sont apparues dans [1]. Les moments spectraux d'ordre quelconque y sont introduits et le concept de multiplicité stationnaire qui va jouer un rôle capital dans la suite y apparaît déjà, même sous une forme qui n'est plus celle aujourd'hui utilisée. En Optique statistique les fonctions de cohérence d'ordre quelconque introduites dans [10] sont en fait des moments d'ordre supérieurs dans le domaine temporel.

2. définitions et rappels

Soit $x(t)$ un signal aléatoire réel, centré et stationnaire. Nous ne ferons pas de distinction systématique entre le temps continu et le temps discret et la variable t est utilisée indifféremment dans les deux cas. Le moment temporel d'ordre n de $x(t)$ vaut

$$\begin{aligned} m_n(t_1, t_2, ..., t_n) &= m_n(\{t_i\}) = m_n(\mathbf{t}) \\ &= E[x(t_1)x(t_2)...x(t_n)]. \end{aligned} \tag{1}$$

Au lieu d'utiliser ces moments, il est souvent plus commode d'utiliser les *cumulants temporels* [13]. Le passage de moments aux cumulants se fait par la formule suivante [5]

$$c(X_1, ..., X_n) = \sum_{p=1}^{n} (-1)^{p-1}(p-1)! \, E\left(\prod_{j\in\pi_1} X_j\right) ... E\left(\prod_{j\in\pi_p} X_j\right), \tag{2}$$

où la somme est prise sur toutes les partitions $(\pi_1, ..., \pi_p)$ de $p = 1, 2, ..., n$. Cette expression est évidemment assez compliquée d'usage. Nous en donnerons une interprétation ultérieurement, mais le seul point à noter actuellement est que la connaissance de tous les moments temporels jusqu'à un ordre donné est équivalente à celle de tous les cumulants temporels jusqu'au même ordre. Notons enfin que l'hypothèse de stationnarité introduite implique que ces fonctions ne dépendent pas de n mais seulement de $n-1$ variables.

Lorsque le signal $x(t)$ est *normal* (ou gaussien), le moment (1) est nul pour n impair et pour n pair on a la célèbre formule écrite ici sous la forme

$$m_{2k}^G(\{t_i\}) = \{m_2(t_1, t_2)...m_2(t_{2k-1}, t_{2k}\}_{(2k-1)!!}, \tag{3}$$

où G fait référence à la loi de Gauss et $\{\}_{(2k-1)!!}$ signifie une somme de $(2k-1)!!$ termes distincts correspondant aux « partitions normales ». Pour $k = 2$ ces trois partitions sont les suivantes $(12)(34), (13)(24), (14)(23)$. Il résulte de la formule permettant le passage des moments aux cumulants que pour un signal normal tous les cumulants d'ordre supérieur à 2 sont nuls. Dans une certaine mesure on peut dire que les cumulants ont été partiellement introduits pour cette propriété. Mais il est clair que celle-ci ne caractérise pas les cumulants. Il suffit en effet de retrancher les moments normaux aux moments d'un signal pour l'obtenir, et ceci ne donne la formule des cumulants que pour $n = 4$. Nous reviendrons sur cette propriété.

Passons maintenant dans le domaine des fréquences. Par transformation de Fourier des moments ou des cumulants on obtient les moments ou cumulants spectraux $M_n(\mathbf{f})$ (voir p. 73 de [19]. La propriété essentielle de ces fonctions est leur mode de transformation par filtrage linéaire. Si le signal de départ est traité par un tel filtre de réponse en fréquence $H(f)$, la relation entre moments ou cumulants spectraux de l'entrée et de la sortie s'écrit

$$M_{ns}(\mathbf{f}) = H(f_1)H(f_2)...H(f_n)M_{ne}(\mathbf{f}). \tag{4}$$

Dans le cas des signaux stationnaires les moments ou cumulants spectraux sont nuls en dehors de la surface du domaine des fréquences définie par $f_1 + f_2 + ... + f_n = 0$, dénommée dans la suite *multiplicité stationnaire*. Ceci permet d'introduire le concept de polyspectre de moment ou de cumulant par la relation

$$M_n(\{f_i\}) = \Gamma_{n-1}(f_1, ..., f_{n-1})\delta(f_1 + ... + f_n), \tag{5}$$

où $\delta(.)$ est la distribution de Dirac. La fonction $\Gamma_{n-1}(.)$ apparaissant dans cette équation est dénommée *polyspectre* d'ordre $n-1$ du signal. Elle s'applique aussi bien aux moments qu'aux cumulants. Le polyspectre d'ordre 1 est évidemment la densité spectrale du signal. Le mode de transformation des polyspectres se déduit immédiatement de (4) et (5) qui donnent

$$\Gamma_s(\mathbf{f}) = \prod_{i=1}^{n-1} H(f_i) H^* \left(\sum_{i=1}^{n-1} f_i \right) \Gamma_e(\mathbf{f}). \tag{6}$$

Compte-tenu de son importance pour ce qui va suivre, examinons maintenant le cas normal. Par transformation de Fourier de (3) on obtient les fonctions $M_{2k}^G(\{f_i\})$ valant

$$M_{2k}^G(\{f_i\}) = \{\Gamma(f_i)\delta(f_i + f_j)\}_{(2k-1)!!}, \tag{7}$$

où $\Gamma(f)$ est la densité spectrale du signal, ou son polyspectre d'ordre 1. Ceci signifie que les moments spectraux sont nuls en dehors des multiplicités de l'espace des fréquences du type

$$f_1 + f_2 = 0,\ f_3 + f_4 = 0,\ \ldots, f_{2k-1} + f_{2k} = 0. \tag{8}$$

Ces multiplicités sont évidemment des sous-multiplicités de la multiplicité stationnaire définie précédemment. Elles joueront un rôle essentiel dans la suite et sont dénommées *multiplicités normales* [16]. On voit clairement qu'il y a $(2k-1)!!$ multiplicités normales distinctes et que le terme $(2k-1)!!$ qui apparaît dans l'expression des moments d'un variable aléatoire normale est d'origine géométrique. Mais (7) révèle également que sur ces multiplicités normales la densité n'est pas quelconque : elle se présente comme un produit de k termes $\Gamma(f_i)$ qui sont des densités spectrales. On dit alors que la densité est *normale*. On peut évidemment exprimer tout ceci en termes de polyspectres. Ainsi le trispectre de moment d'un signal normal vaut

$$\begin{aligned}\Gamma_3^G(f_1, f_2, f_3) &= \Gamma(f_1)\Gamma(f_3)\delta(f_1 + f_2) + \Gamma(f_1)\Gamma(f_2) \\ &\quad \delta(f_1 + f_3) + \Gamma(f_1)\Gamma(f_2)\delta(f_2 + f_3). \end{aligned} \tag{9}$$

On voit que les 3 multiplicités normales sont 3 plans dans l'espace $f_1 \times f_2 \times f_3$. Ces multiplicités normales ont été introduites et appliquées dans [17].

Examinons maintenant les propriétés de symétrie de toutes ces fonctions. Le moment (1) est évidemment une fonction symétrique des variables t_i. Ceci signifie qu'il est invariant dans toute permutation de ces instants, ce qui jouera un rôle important dans la suite. La même symétrie se retrouve sur les moments ou cumulants spectraux $M_n(\{f_i\})$. Par ailleurs lorsque les signaux sont réels, ce que l'on admet dans toute la suite, $M_n(\{f_i\})$ possède la symétrie hermitienne, soit $M_n(\{f_i\}) = M_n^*(\{-f_i\})$, où l'étoile signifie le complexe conjugué. Toutes ces propriétés peuvent se transférer aisément sur les polyspectres en utilisant (5). On en déduit une propriété plus subtile. Comme $M_n(\{f_i\})$ est inchangé quand on remplace une fréquence quelconque f_i, $i < n$, par f_n, et comme, en raison de la distribution de Dirac, $f_n = -f_1 - f_2 - \ldots - f_{n-1}$, on voit que le polyspectre $\Gamma_{n-1}(f_1, \ldots, f_{n-1})$ reste invariant quand on remplace une fréquence quelconque f_i par la somme $-f_1 - f_2 - \ldots - f_{n-1}$.

Toutes ces propriétés de symétrie ont été utilisées pour chercher le domaine minimum de fréquences f_i permettant de définir complètement un polyspectre [6] [7][12]. Ces travaux entrent évidemment dans le cadre de cet exposé, mais en raison de la limitation de durée, ils ne seront pas systématiquement présentés.

Terminons cette revue par quelques mots sur la modélisation linéaire des signaux. Tout signal stationnaire du second ordre $x(t)$ peut être modélisé comme la sortie d'un filtre linéaire attaqué par un bruit blanc. Par modélisation il faut entendre que le modèle a les même propriétés du second ordre que le signal, mais n'a aucune raison de lui être identique. Il est évident que si l'on n'introduit pas de contraintes sur le filtre linéaire telles que la causalité ou le caractère de phase minimale, il y a une infinité de modélisations différentes. Une idée similaire peut s'introduire en utilisant les statistiques d'ordre supérieur à 2. Ceci conduit à commencer par donner quelques propriétés du bruit blanc [4]. Un bruit à temps discret $b(t)$ blanc au sens strict est une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées (IID). C'est ici que l'usage des cumulants est particulièrement intéressant. En effet les polyspectres des cumulants d'un bruit blanc sont constants, soit $\Gamma_{n-1}(\mathbf{f}) = c_n$, où c_n est le cumulant commun à toutes les variables aléatoires constituant le bruit blanc. En appliquant (6) on obtient donc que les polyspectres de $x(t)$ valent

$$\Gamma_{n-1}(\mathbf{f}) = c_n H(f_1) \ldots H(f_{n-1}) H^*(f_1 + \ldots + f_{n-1}). \tag{10}$$

Cette expression met en évidence une propriété de factorisation qui est caractéristique d'un modèle linéaire. Par ailleurs il apparaît que si la réponse en fréquence $H(f)$ est bornée, les polyspectres de cumulants le sont aussi.

3. interprétation géométrique du passage des moments aux cumulants

Les cumulants d'un vecteur aléatoire $\mathbf{X}$ se déduisent du développement de la seconde fonction caractéristique $\psi(\mathbf{u}) = \ln E[\exp(j\mathbf{u}^T\mathbf{X})]$. Le passage des moments aux cumulants (2) peut donc être considéré comme un simple exercice d'algèbre, même si la formule explicite n'est pas très simple à manier. L'étude du bruit blanc dans le domaine temporel et surtout spectral permet de comprendre la structure de cette expression.

Pour ceci commençons par l'ordre 4. Le moment (1) d'un tel bruit blanc à temps discret s'écrit

$$\begin{aligned} m_4(\mathbf{t}) &= m_2^2\{\delta[t_1 - t_2]\delta[t_3 - t_4]\}_3 \\ &\quad + (m_4 - 3m_2^2)\delta[t_1 - t_2]\delta[t_2 - t_3]\delta[t_3 - t_4], \end{aligned} \tag{11}$$

où $\delta[.]$ représente le symbole de Kronecker scalaire ou vectoriel et les m_n sont les moments de la distribution commune aux variables aléatoires constituant le bruit blanc. Par ailleurs la quantité $\{\}_3$ à la même signification qu'en (3). Par transformation de Fourier on voit que le moment spectral est distribué d'une part sur les multiplicités normales avec la densité normale valant m_2^2 et de l'autre sur la multiplicité stationnaire avec la densité $m_4 - 3m_2^2$ qui est d'ailleurs le cumulant de la distribution du bruit blanc.

On voit donc que pour obtenir une densité bornée sur la multiplicité stationnaire il suffit de retrancher les contributions des multiplicités normales, et c'est ce que fait la formule algébrique (2). Il convient de noter que la densité sur la multiplicité stationnaire $m_4 - 3m_2^2$ peut être négative, comme c'est le cas pour un bruit blanc ne prenant que les valeurs ± 1 avec des probabilités égales.

Considérons maintenant le moment d'ordre 6. On voit sur (1) qu'il n'est différent de 0 que si les instants t_i sont associés. Une association de p instants de type $t_1 = t_2 = ... = t_p$ entraîne dans le domaine spectral un terme de type $\delta(f_1 + f_2 + ... + f_p)$, c'est-à-dire une distribution sur une sous-multiplicité de la multiplicité stationnaire. En conséquence on trouvera des densités constantes valant $m_2 m_4$, m_3^3 et m_2^3 respectivement sur les multiplicités du type (1234)(56), (123)(456) et (12)(34)(56). Les nombres de multiplicités distinctes de ces types sont respectivement de 15, 10 et 15. Ceci donne donc finalement un assez grand nombre de termes. Pour obtenir une densité constante sur la multiplicité stationnaire il faut donc retrancher les contributions de toutes ces sous-multiplicités, et c'est exactement ce que fait algébriquement la formule permettant de passer des moments aux cumulants. Ceci montre également que le passage des moments aux cumulants ne se fait pas simplement en retranchant le terme normal. Ceci n'est vrai que pour $n = 4$.

D'une manière générale le grand avantage des cumulants spectraux sur les moments spectraux est qu'ils sont bornés sur la multiplicité stationnaire. Nous verrons toutefois que cette propriété n'est pas générale.

4. sphéricité et circularité

Un vecteur aléatoire sphériquement invariant est caractérisé par un densité de probabilité de la forme $f(-\mathbf{x}^T\mathbf{R}^{-1}\mathbf{x})$. Cette loi est une généralisation de la loi normale pour laquelle $f(.) = \exp(.)$. L'expression d'invariance sphérique provient du fait qu'après une transformation linéaire convenable, les courbes d'équiprobabilité deviennent des sphères à n dimensions. Un signal sphériquement invariant est tel que sa loi temporelle ne fait intervenir que des lois sphériquement invariantes. C'est une sorte de généralisation des signaux normaux. On peut alors montrer (voir p. 134 de [19]) que les moments spectraux d'ordre impair sont nuls et que ceux d'ordre pair sont uniquement distribués sur les multiplicités normales, mais avec des densités non-normales, c'est-à-dire qui ne sont pas des produits de densités spectrales. Comme le passage aux cumulants spectraux consiste sur les multiplicités normales à retrancher la contribution liée à la densité normale, on voit que cette opération ne peut annuler la densité sur ces multiplicités. Il y a donc dans les cumulants spectraux une contribution non-nulle des multiplicités normales et il en résulte que, contrairement à ce qui se passe pour les modèles linéaires, les polyspectres de cumulants ne sont pas bornés sur la multiplicité stationnaire. Ceci signifie en particulier que les signaux sphériquement invariants ne peuvent avoir une modélisation linéaire.

La circularité est une propriété concernant les variables aléatoires complexes. On dit qu'une variable aléatoire Z est circulaire si sa loi de probabilité et celle de $Z\ \exp(j\alpha)$ sont les mêmes, quel que soit α. Ceci signifie une invariance de la distribution de probabilité dans une rotation du plan complexe. La circularité peut s'étendre aux signaux en analysant leur représentation harmonique qui fait intervenir des éléments aléatoires complexes, mêmes si les signaux sont réels [20]. Pour bien expliquer la question considérons le cas d'un signal ne comportant que des raies spectrales, c'est-à-dire pouvant s'écrire sous la forme $x(t) = \sum X_n \exp(jn\omega t)$ la somme ne comportant qu'un nombre fini de termes. On dit que le signal est circulaire si ses propriétés statistiques sont invariantes quand toutes les composantes spectrales subissent des rotations quelconques. Faire de telles rotations consiste à filtrer le signal $x(t)$ dans un filtre de phase, c'est-à-dire un filtre dont la réponse en fréquence est de la forme $H(f) = \exp[j\phi(f)]$. On peut alors abandonner le cas particulier des raies spectrales et dire qu'un signal est circulaire si son passage dans tout filtre de phase ne modifie pas ses propriétés statistiques. Il est clair que dans le cas des signaux réels qui est celui considéré dans cet article, on utilisera aussi des filtres de phase réels, ce qui est caractérisé par $\phi(f) = -\phi(-f)$.

Etudions tout d'abord le cas des moments spectraux du second ordre. La circularité est caractérisée par $H(f_1)H(f_2)M_2(f_1, f_2) = M_2(f_1, f_2)$ pour tout filtre de phase. Ceci peut se mettre sous la forme

$$\{1 - \exp j[\phi(f_1) + \phi(f_2)]\}M_2(f_1, f_2) = 0, \forall\phi(.). \qquad (12)$$

Ceci entraîne que $M_2(f_1, f_2)$ ne peut être différent de zéro que si $\phi(f_1) = -\phi(f_2)$. Comme les phases sont quelconques mais doivent être impaires, cette relation entraîne que $M_2(f_1, f_2)$ est de la forme (5), ce qui caractérise la stationnarité. Ceci montre que la circularité entraîne la stationnarité, et réciproquement tout signal stationnaire du second ordre est circulaire du second ordre. Ceci traduit en fait l'invariance bien connue de la densité spectrale dans tout filtrage de phase.

Considérons maintenant le cas des moments spectraux d'ordre supérieur à 2. La propriété de circularité est caractérisée par

$$\{1 - \exp j[\phi(f_1) + \phi(f_2) + ... + \phi(f_n)]\}M_n(f_1, f_2, ..., f_n) = 0, \qquad (13)$$

quelle que soit la fonction impaire $\phi(.)$. Cette relation ne peut se réaliser pour n impair, ce qui entraîne que les moments spectraux d'ordre impair sont nuls. Par ailleurs cette relation entraîne que pour n pair les moments spectraux sont uniquement distribués sur les multiplicités normales. Ceci établit donc une relation importante entre deux propriétés géométriques : la circularité des signaux et les multiplicités normales de l'espace des fréquences. Ainsi les signaux normaux sont circulaires, mais également les signaux sphériquement invariants.

5. exemples d'application

5.1. normalité asymptotique

Il est certain que la loi normale joue un rôle essentiel à la fois théorique et pratique dans l'étude des signaux aléatoires. On invoque souvent pour justifier l'usage de cette loi le théorème de normalisation (ou de la limite centrale) disant qu'un somme convenablement pondérée de variables aléatoires tend à devenir normale. Ce théorème a été l'objet d'un très grand nombre de travaux jusqu'à ce jour en raison de son importance pratique et théorique. La question qui va être abordée ici est de savoir si un filtrage linéaire peut rendre normal un signal qui ne l'est pas. Beaucoup de raisonnements intuitifs ont été faits pour justifier cette idée, le plus simple consistant à dire que lorsque la constante de temps du filtre est très grande devant le temps de corrélation du signal d'entrée, la normalisation apparaît comme une conséquence d'un mélange de contributions plus ou moins indépendantes.

Revenant sur la dualité évoquée tout au début de ce texte, on peut se dire que cette propriété doit pouvoir se présenter dans le domaine des fréquences en utilisant les polyspectres. C'est ce que nous allons brièvement présenter en reprenant pour l'essentiel mais dans une présentation nouvelle des résultats anciens [16][17].

Pour simplifier les notations commençons par utiliser le trispectre des moments défini par (5). Il en résulte que le moment du quatrième ordre peut s'écrire

$$m_4(\{t_i\}) = \int\int\int \Gamma_3(f_1, f_2, f_3)\exp\{2\pi j[f_1(t_1 - t_4) + f_2(t_2 - t_4) + f_3(t_3 - t_4)]\}df_1 df_2 df_3 \,. \quad (14)$$

Le trispectre peut se décomposer en une somme de deux types de termes : celui correspondant à une répartition sur la multiplicité stationnaire et ceux correspondant à une répartition sur les multiplicités normales. Soit par exemple $A(f_1, f_3)$ la densité sur la première multiplicité normale correspondant au premier terme du membre de droite de (9). La contribution de ce terme au moment (14) vaut

$$n_1(\{t_i\}) = \int\int A(f_1, f_3)\exp\{2\pi j[f_1(t_2 - t_1) + f_3(t_4 - t_3)]\}df_1 df_3 \,. \quad (15)$$

Si la densité est normale, c'est-à-dire si $A(f_1, f_3) = \Gamma(f_1)\Gamma(f_3)$, ce terme vaut $\gamma(t_2 - t_1)\gamma(t_4 - t_3)$, qui est le terme générique apparaissant dans la formule (3) relative aux moments d'un signal normal.

Considérons alors un filtre passe bande parfait F_b dépendant du paramètre b dont la réponse en fréquence $G_b(f)$ vaut $1/\sqrt{b}$ pour $f_0 - (b/4) < |f| < f_0 + (b/4)$, et zéro dans le cas contraire. Ce filtre élimine toutes les fréquences, sauf celles situées dans dans les bandes $(-f_0 - b/4, -f_0 + b/4)$ et $(f_0 - b/4, f_0 + b/4)$. Soit alors $y_b(t)$ la sortie de ce filtre associée à l'entrée $x(t)$. La variance de $y_b(t)$ vaut

$$E[y_b^2(t)] = \int |G_b(f)|^2\Gamma(f)df \,, \quad (16)$$

On voit que si la densité spectrale $\Gamma(f)$ n'est pas nulle en f_0, cette variance reste constante et égale à $\Gamma(f_0)$ quand la largeur de bande b tend vers 0.

Examinons maintenant ce qui se passe pour les moments d'ordre 4. Pour ceci on utilise la formule (6) de transformation des polyspectres par filtrage. Montrons tout d'abord que le filtrage passe bande sélectif élimine la contribution de la multiplicité stationnaire. Pour ceci supposons que la densité sur la multiplicité stationnaire soit bornée, propriété que nous avons notée à plusieurs reprises antérieurement. Dans ce cas la contribution à $m_4(\{t_i\})$ donnée par (14) fait intervenir un intégrant qui, en raison de (6), contient 4 fonctions $G_b(f)$. On voit alors que la contribution de la multiplicité stationnaire est de l'ordre de $1/b^2$, et tend donc vers 0 quand $b \to 0$.

Examinons maintenant les contributions des multiplicités normales au moment du quatrième ordre de $y(t)$. Celle de la première multiplicité s'écrit

$$m_{y,b,1}(\{t_i\}) = \int\int A(f_1, f_3)|G_b(f_1)|^2|G_b(f_3)|^2 \exp\{2\pi j[f_1(t_2 - t_1) + f_3(t_4 - t_3)]\}df_1 df_3 \,. \quad (17)$$

Il résulte de la définition de $G_b(f)$ que ce terme tend vers une limite finie quand $b \to 0$. En particulier si la densité est normale sur la multiplicité normale, ce terme tend vers $\gamma_y(t_2 - t_1)\gamma_y(t_4 - t_3)$. Le même raisonnement peut se faire pour les deux autres multiplicités normales, et il en résulte que si la densité y est normale, ces multiplicités conduisent à un moment temporel de $y_b(t)$ normal. Si par contre la densité n'est pas normale, comme par exemple dans le cas des signaux sphériquement invariants, le moment du quatrième ordre de $y(t)$ ne peut avoir une forme normale du type (3).

Nous venons de présenter le principe d'un raisonnement général se trouvant dans [16] [17]. L'idée générale qu'il faut retenir est qu'un filtrage passe-bande très sélectif élimine les contribution de toutes les multiplicités, à l'exception des multiplicités normales. En conséquence, si la densité y est normale, il y normalisation par filtrage et si la densité n'est pas normale, comme dans le cas des signaux sphériquement invariants, le filtrage sélectif ne peut faire apparaître asymptotiquement une loi normale.

5.2. reversibilité

On dit qu'un signal aléatoire est réversible si ses propriétés statistiques sont invariantes lorsque l'on remplace t par $-t$. Il est clair que la transformation de $x(t)$ en $x(-t)$ est linéaire, mais elle n'est pas un filtrage linéaire puisque les fréquences ne sont pas conservées. En termes de moments la réversibilité se traduit par le fait que $m_n(\{t_i\})$ défini par (1) est égal à $m_n(\{-t_i\})$ quels que soient les t_i ou encore que $m_n(\mathbf{t})$ est une fonction paire. Dans le domaine spectral ceci se traduit par $M_n(\{f_i\}) = M_n(\{-f_i\})$ et la même relation se retrouve sur les polyspectres. L'exemple le plus simple de signal réversible est évidemment le bruit blanc à temps discret. Mais l'autre exemple évident est celui des signaux normaux, en vertu de (3) et de la parité des fonctions de corrélation.

La réversibilité n'a aucune raison de se conserver par filtrage linéaire et il est clair que les modèles linéaires ne sont en général pas des signaux réversibles. Examinons les contraintes imposées par la conservation de la réversibilité par filtrage linéaire. Cette question a été abordée déjà depuis longtemps [2], puis reprise différemment plus récemment [11][25].

Reprenons pour l'essentiel le raisonnement de [2]. Pour simplifier commençons par raisonner sur les moments d'ordre 4. Soit $H(f)$ la réponse en fréquence d'un filtre quelconque mais réel, ce qui entraîne la symétrie hermitienne $H(-f) = H^*(f)$. Posons $H(\mathbf{f}) = H(f_1)H(f_2)H(f_3)H(f_4)$. La conservation de la réversibilité par filtrage se traduit par la relation $M_4(\mathbf{f})[H(\mathbf{f}) - H^*(\mathbf{f})] = 0$, valable quel que soit le filtre, c'est-à-dire $H(\mathbf{f})$. En conséquence $M_4(\mathbf{f})$ ne peut être différent de 0 que pour les fréquences $\mathbf{f}$ telles que $H(\mathbf{f})$ est réel. Or il résulte de la définition de $H(\mathbf{f})$ que les fréquences pour lesquelles cette quantité est réelle quel que soit $H(f)$ sont les fréquences situées sur les multiplicités normales. En conséquence un signal réversible ne conserve sa réversibilité que si ses moments spectraux sont nuls en dehors des multiplicités normales. C'est évidemment le cas des signaux normaux, mais c'est aussi les cas des signaux sphériquement invariants précédemment introduits. Ce raisonnement valable pour le moment d'ordre 4 s'étend sans difficulté à tous les ordres. Appliqué au cas du bruit blanc qui est réversible, on voit que le seul bruit blanc conservant la réversibilité dans tout filtrage est le bruit blanc normal. C'est essentiellement ce qui est montré dans [11][25].

5.3. ergodisme

Les relations entre l'ergodisme et les moments spectraux sont connues depuis longtemps, et la question a été envisagée pour la première fois dans [23] et [24] dans un formalisme très peu accessible à la communauté du traitement du signal. La question a été reprise sous une autre forme dans des cas particuliers de processus harmoniques [8][15]. Nous allons en présenter une vision différente au moyen d'outils développés ci-dessus [21].

A tout signal $x(t)$ on peut associer sa moyenne temporelle causale définie par

$$y_T(t) = \frac{1}{T}\int_{t-T}^{t} x(\theta)d\theta. \tag{18}$$

On dit que $x(t)$ est ergodique au sens faible si cette moyenne temporelle tend en moyenne quadratique vers m, moyenne de $x(t)$. On sait (voir p. 62 de [19]) que cela se produit uniquement si le spectre de $x(t)$ ne contient pas de raie spectrale à la fréquence 0. Ainsi les raies spectrales à cette fréquence sont la clef de voûte de l'ergodisme au sens faible pour la mesure de la moyenne.

On peut évidemment se poser la même question pour les moments d'ordre supérieur à 2. Ainsi la convergence de la moyenne temporelle de $x(t)x(t-s)$ vers la fonction de corrélation $\gamma(s)$ est reliée à l'inexistence de raie spectrale à la fréquence nulle du spectre de $x(t)x(t-s)$. Il est évident que le calcul de ce spectre met en jeu des moments d'ordre 4 de $x(t)$.

Pour calculer le spectre de $y(t;s) = x(t)x(t-s)$ écrivons le moment spectral d'ordre 4 de $x(t)$ sous la forme

$$\begin{aligned} M_4(\mathbf{f}) &= \{A(f_i, f_k)\delta(f_i + f_j)\delta(f_k + f_l)\}_3 \\ &\quad + B(f_1, f_2, f_3)\delta(f_1 + f_2 + f_3 + f_4) \end{aligned} \tag{19}$$

qui fait apparaître une densité bornée B sur la multiplicité stationnaire et des densités A sur les multiplicités normales. La densité spectrale de $y(t;s)$ peut après quelques calculs élémentaires s'écrire

$$\begin{aligned} \Gamma_y(f;s) = &\int\int\int M_4(f_1, f_2, f_3, -f - f_3) \\ &\exp[-2\pi j(f_2 - f - f_3)s]df_1df_2df_3 - \gamma^2(s)\delta(f). \end{aligned} \tag{20}$$

La première multiplicité normale apporte à la densité spectrale une contribution donnée par

$$T_1 = \delta(f)\int\int A(f_1, f_3)\exp[2\pi j(f_1 + f_3)s]df_1df_3. \tag{21}$$

Par ailleurs on peut montrer que si A et B sont bornés, toutes les autres contributions fournissent des termes bornés au voisinage de la fréquence nulle. On peut donc dire que le spectre de $y(t;s)$ possède une raie spectrale à cette fréquence avec une amplitude valant

$$a = \int\int A(f_1, f_3)\exp[2\pi j(f_1 + f_3)s]df_1df_3 - \gamma^2(s). \tag{22}$$

La condition d'ergodisme faible pour la mesure de la fonction de corrélation est donc que cette raie disparaisse, c'est à dire que $a = 0$. Comme ceci doit se produire quel que soit s, on voit que la condition d'ergodisme revient à l'existence d'un densité normale sur les multiplicités normales. On retrouve ainsi un résultat connu à savoir que tout signal normal avec une densité spectrale bornée est ergodique.

Le raisonnement doit être complété lorsque $A(f_i, f_j)$ n'est plus borné [21]. En particulier un signal normal dont la densité spectrale contient une raie à une fréquence quelconque non nulle n'est ergodique que pour la moyenne, mais ne l'est plus pour la fonction de corrélation.

6. signaux ordonnés

6.1. définitions et exemples

Comme on l'a indiqué précédemment le moment $m_n(\mathbf{t})$ défini par (1) est symétrique par rapport aux variables t_i. Ceci signifie qu'il est invariant dans toutes les $n!$ permutations de ces instants t_i. Appelons θ_i les instants déduits des t_i par la permutation qui assure que $\theta_i \leq \theta_{i+1}$. On dit que cette permutation est la permutation ordonnée des t_i. Il est évident que $m_n(\mathbf{t})$ est connu quels que soient les t_i dès lors que $m_n(\{\theta_i\})$ est connu.

On appelle *signal ordonné* un signal tel que seul $m_n(\{\theta_i\})$ est connu. Ceci signifie que l'expression explicite de $m_n(\mathbf{t})$ n'est connue que pour la permutation ordonnée. Bien entendu, en raison de la symétrie des moments, cette connaissance est suffisante pour déterminer entièrement $m_n(\mathbf{t})$. On peut noter que pour $n = 2$ cette propriété d'ordonnancement est décrite mathématiquement par la valeur absolue. Ainsi la fonction de corrélation exponentielle $\exp[-|t_1 - t_2|]$ est définie explicitement pour $t_1 > t_2$ et s'en déduit par symétrie pour $t_1 < t_2$. Par contre la fonction de corrélation gaussienne $\exp[(t_1 - t_2)^2]$ est définie explicitement par cette formule quels que soient les t_i.

Le meilleur exemple de signal ordonné et qui sera souvent utilisé dans la suite est celui du basculeur poissonien (BP) introduit dans tous les ouvrages sur les signaux aléatoires et parfois dénommé signal télégraphique. C'est un signal ne prenant que les valeurs ± 1 avec les mêmes probabilités, les changements de signe se produisant aux instants (ou points) p_i d'un processus de Poisson stationnaire de densité λ. On peut montrer (voir p. 168 de [19]) que la fonction de corrélation est exponentielle, soit $m_2(t_1, t_2) = \gamma(t_1 - t_2) = \exp(-2\lambda|t_1 - t_2|)$, que les moments (1) d'ordre impair sont nuls et que ceux d'ordre pair valent

$$m_{2k}(\{t_i\}) = \gamma(\theta_2 - \theta_1)\gamma(\theta_4 - \theta_3)...\gamma(\theta_{2k} - \theta_{2k-1}). \quad (23)$$

Il est intéressant de comparer cette relation à (3) valable pour les signaux normaux. On voit que (3) est une somme de $(2k - 1)!!$ termes qui comme (23) sont des produits de fonctions de corrélation alors que (23) ne comporte qu'un seul terme mais explicité au moyens des instants ordonnés θ_i. Les moments (3) sont évidemment invariants dans toute permutation des instants t_i, et cela résulte de la structure de la formule (3), alors que cette invariance pour les moments du BP résulte de la propriété générale des moments, la formule explicite n'étant connue que pour la permutation ordonnée qui définit les θ_i. Par ailleurs il est évident que si les moments du BP sont simples à écrire, il n'en est plus de même pour les cumulants qui doivent s'exprimer au moyen des moments à l'aide de (2).

Le BP n'est qu'un exemple, mais le plus simple, de signal ordonné. Beaucoup d'autres exemples peuvent être donnés aussi bien dans le cas du temps continu que celui du temps discret.

Commençons par le temps continu. De nombreux systèmes physiques présentent des changements brusques d'état arrivant de manière aléatoire. Ceci peut se modéliser par des signaux à sauts aléatoires. Partons à nouveau d'un processus de Poisson stationnaire de densité λ. A chaque instant du processus on tire au sort une variable aléatoire, toutes ces variables étant indépendantes entre elles et du processus. Le signal $x(t)$ est alors défini comme étant constant entre deux instants successifs du processus et à chaque instant prend la valeur de la variable aléatoire qui y est associée. On appelle m_i les moments communs à toutes ces variables aléatoires. On trouve alors que ce signal a une fonction de corrélation exponentielle, soit $m_2(t_1, t_2) = \gamma(t_1 - t_2) = m_2\exp[-\lambda|t_2 - t_1|]$. Les propriétés du second ordre sont donc les mêmes que celles du BP. Il n'en est plus de même pour les ordres supérieurs à 2. Pour ceci il faut utiliser les instants ordonnés θ_i définis comme ci-dessus. On trouve alors que les moments du troisième et quatrième ordre sont

$$m_3(t_1, t_2, t_3) = m_3\exp[-\lambda(\theta_3 - \theta_1)], \quad (24)$$

$$m_4(\{t_i\}) = \gamma(\theta_2 - \theta_1)\gamma(\theta_4 - \theta_3) + (m_4 - m_2^2)e^{-\lambda(\theta_4 - \theta_1)}. \quad (25)$$

Le premier terme de cette dernière expression est exactement le moment d'ordre 4 du BP. Quant au second il disparaît si $m_4 = m_2^2$, c'est-à-dire si la variable aléatoire ne prend que deux valeurs avec des probabilités égales. On retrouve alors le BP mais avec une densité deux fois plus faible, ce qui s'explique aisément.

Bien d'autres exemples de signaux ordonnés à temps continu peuvent être construits, mais ce n'est pas le but de cet exposé d'en faire une présentation exhaustive.

Dans le cas du temps discret il y a une relation très simple entre les signaux ordonnés et ceux qui sont markoviens d'ordre 1. Le signal markovien le plus simple est évidemment le signal autorégressif d'ordre 1 défini par l'équation $x_k = ax_{k-1} + u_k$, où u_k est un bruit blanc au sens strict noté ici u_k et non $u(k)$, comme précédemment. Dans ce cas il est inutile d'utiliser de longs développements. En effet x_k se déduit de u_k par un filtrage linéaire et l'on a un des modèles linéaires les plus simples, ce qui permet d'exprimer le polyspectre à l'aide de (10). Pour retrouver la structure de signaux ordonnés il faut que le signal soit produit par une récurrence d'ordre 1, mais non linéaire. Vérifions ce fait sur quelques exemples.

Le modèle le plus simple et qui donnera les résultats les plus maniables est représenté par la relation : $x_k = (-1)^{u_k}x_{k-1}$, où les u_k sont des VA de pile ou face ne prenant que les valeurs 0 ou 1 la probabilité de pile (1) valant p. Si x_k ne prend que les valeurs

± 1 avec des probabilités égales, cette propriété se conserve sur x_{k+1}, ce qui assure la stationnarité. Le signal est évidemment du second ordre. Il est clair que ce signal est l'analogue à temps discret du BP et les moments d'ordre supérieur à 2 sont donnés par l'analogue à temps discret de (23).

Le signal à temps discret modélisant les systèmes à sauts recontrés en automatique peut être décrit par la relation $x_k = u_k x_{k-1} + (1 - u_k)v_k$. Les v_k sont indépendants des u_k et sont également IID. Les u_k sont des VA de pile ou face ne prenant que les valeurs 0 ou 1. Les v_k sont des VA quelconques mais de moments finis. Ils représentent les états possibles du système et l'on voit que si $u_k = 1$, l'état du système ne change pas à l'instant k, alors qu'il prend une autre valeur indépendante de la précédente dans le cas contraire. On peut montrer que ce signal est stationnaire et possède des moments bornés. Ses moments d'ordre supérieur à 2 sont donnés par l'analogue à temps discret de (24) ou (25).

Enfin considérons le signal représentant une diffusion à temps discret avec remise à zéro aléatoire. Il est représenté par la relation $x_k = u_k^2 x_{k-1} + u_k$, où u_k prend les valeurs ± 1 avec des probabilités égales à $p/2$ et 0 avec la probabilité $q = 1 - p$. On voit que si $u_k = 0$, le signal x_k vaut 0, quelle que soit sa valeur antérieure, alors que dans le cas contraire il augmente ou diminue de 1. S'il n'y avait pas de retour à zéro, ce signal représenterait une promenade aléatoire (diffusion) qui n'est évidemment pas stationnaire. Par contre le retour à zéro entraîne la stationnarité et garantit que les moments sont finis.

Le calcul des moments d'ordre supérieur à deux est un peu plus compliqué et nous ne reproduisons pas ici le résultat. Mais le seul point à noter est qu'il s'agit encore d'un signal ordonné dans le sens que ce calcul de moment nécessite au préalable que les instants t_i soient ordonnés.

Il est clair que cette propriété est une conséquence immédiate du caractère markovien de ces signaux. En effet le signal est défini par une récurrence dans le temps qui se déroule dans un sens déterminé et tous les moments se calculent à partir de cette récurrence. Ceci est évidemment vrai pour les signaux autorégressifs d'ordre 1, mais on évite le calcul de l'expression temporelle des moments en appliquant une formule valable en fréquences mais ne s'appliquant que dans le cas linéaire.

6.2. calcul des polyspectres

C'est la partie la plus « calculatoire » de cet article, mais il est nécessaire d'en présenter les principes pour en comprendre les résultats. Le problème principal à résoudre consiste à calculer la transformée de Fourier de fonctions ordonnées, c'est-à-dire dont la valeur n'est connue que pour la permutation ordonnée des instants. Il saute aux yeux que la transformation de Fourier n'est pas adaptée à l'ordonnancement car elle effectue une intégrale sur toutes les variables temporelles sans tenir compte de l'ordre dans lesquelles celles-ci sont écrites.

Pour plus de souplesse dans les calculs qui suivent considérons une fonction ordonnée du type

$$\begin{aligned} s(\mathbf{t}) &= s(\theta_1, \theta_2, ..., \theta_n) \\ &= s_1(\theta_2 - \theta_1) s_2(\theta_3 - \theta_2) ... s_{n-1}(\theta_n - \theta_{n-1}). \end{aligned} \quad (26)$$

Les moments d'ordre supérieur des signaux introduits ci-dessus sont tous de cette forme générale. Il s'agit donc de calculer la TF $S(\mathbf{f})$ définie par

$$S(\mathbf{f}) = \int s(\mathbf{t}) \tau \exp(-2\pi j \mathbf{f}^T \mathbf{t}) d\mathbf{t}. \quad (27)$$

A tout point $\mathbf{t}$ on peut associer la permutation ordonnante, c'est-à-dire définie par

$$P[t_1, t_2, ..., t_n] = \theta_1, \theta_2, ..., \theta_n \ , \ \theta_i < \theta_{i+1}. \quad (28)$$

L'application de cette permutation aux fréquences f_i introduit les fréquences μ_i définies par

$$P[f_1, f_2, ..., f_n] = \mu_1, \mu_2, ..., \mu_n \quad (29)$$

et il est clair que l'on a

$$\mathbf{f}^T \mathbf{t} = \sum f_i t_i = \sum \mu_i \theta_i. \quad (30)$$

A toute permutation P on peut associer la contribution à la TF qui vaut

$$\begin{aligned} S_P(\{\mu_i\}) = \int\int ... \int_{D(P)} s(\{\theta_i\}) \\ \exp\left[-2\pi j \sum \mu_i \theta_i\right] d\theta_1 d\theta_2 ... d\theta_n, \end{aligned} \quad (31)$$

où $D(P)$ est le domaine défini par la relation $\theta_1 < \theta_2 < ... \theta_n$ et la TF $S(\mathbf{f})$ vaut alors

$$S(\mathbf{f}) = \sum_P S_P(\{\mu_i\}), \quad (32)$$

où la somme est étendue à toutes les $n!$ permutations des fréquences f_i. Par des intégrations successives on trouve

$$\begin{aligned} S_P(\{\mu_i\}) &= S_{n-1,+}(\mu_n) S_{n-2,+}(\mu_{n-1} + \mu_n) ... \\ &\quad S_{1,+}(\mu_2 + \mu_3 + ... + \mu_n) \delta\left(\sum \mu_i\right), \end{aligned} \quad (33)$$

où $S_{n-1,+}(\mu)$ est défini par

$$S_{n-1,+}(\mu) = \int_0^{+\infty} s_{n-1}(\theta) \exp(-2\pi j \mu \theta) d\theta, \quad (34)$$

qui est la TF monolatérale de $s_{n-1}(t)$. Comme $\sum \mu_i = \sum f_i$, on voit que la TF $S(\mathbf{f})$ est nulle en dehors de la multiplicité stationnaire. Il reste maintenant à déterminer comment elle se comporte sur cette multiplicité.

Appliquons cette formule au moment d'ordre $2n$ du BP donné par (23) et dont on a vu qu'il se retrouvait dans les moments des autres signaux ordonnés. Ceci donne alors

$$\begin{aligned} S_P(\{\mu_i\}) = &\Gamma_+(\mu_1)\Gamma_+(\mu_1+\mu_2+\mu_3)... \\ &\Gamma_+(\mu_1+\mu_2+...+\mu_{2n-1})\,U(\mu_1+\mu_2) \\ &\times U(\mu_1+\mu_2+\mu_3+\mu_4)...U(\mu_1+\mu_2+... \\ &+\mu_{2n-2})\delta(\mu_1+\mu_2+...+\mu_{2n}), \end{aligned} \tag{35}$$

où $\Gamma_+(.)$ est la TF monolatérale de la fonction de corrélation définie comme en (34) et $U(f)$ celle de l'échelon unité donnée par

$$U(f) = (1/2)[\delta(f) + V(f)] = \frac{1}{2}\left[\delta(f) + \frac{\text{v.p.}}{\pi j f}\right] \tag{36}$$

qui fait intervenir la distribution de Dirac et celle en valeur principale.

Commençons par l'étude du trispectre, c'est-à-dire le cas $n = 2$. Après des manipulations algébriques simples on peut mettre (35) sous la forme

$$\begin{aligned} S_P(\{\mu_i\}) = &(1/2)\Gamma_+(\mu_2)\Gamma_+(\mu_4)\delta(\mu_1+\mu_2)\delta(\mu_3+\mu_4) \\ &-(1/2)V(\mu_1+\mu_2)\Gamma_+(-\mu_1)\Gamma_+(-\mu_1-\mu_2-\mu_3) \\ &\delta(\mu_1+\mu_2+\mu_3+\mu_4). \end{aligned} \tag{37}$$

Cette expression met bien en évidence 2 types de termes : le premier correspond à une répartition sur une multiplicité normale, tandis que le second correspond à une répartition sur la multiplicité stationnaire, avec une densité pouvant devenir infinie en raison de la valeur principale. Il faut maintenant faire la somme de tous ces termes correspondant aux 24 permutations des 4 fréquences f_i. A chacune des 3 multiplicités normales on peut associer 8 permutations. Ainsi la densité sur la multiplicité (12)(34) provient de la somme des termes (37) associés aux 8 permutations suivantes

$$\begin{array}{cccccccc} f_1 & f_2 & f_3 & f_4 & \quad f_3 & f_4 & f_1 & f_2 \\ f_2 & f_1 & f_3 & f_4 & \quad f_3 & f_4 & f_2 & f_1 \\ f_1 & f_2 & f_4 & f_3 & \quad f_4 & f_3 & f_1 & f_2 \\ f_2 & f_1 & f_4 & f_3 & \quad f_4 & f_3 & f_2 & f_1 \end{array} \tag{38}$$

En regroupant tous les termes correspondants et en utilisant la relation

$$\Gamma_+(f) + \Gamma_+(-f) = \Gamma_+(f) + \Gamma_+^*(f) = \Gamma(f), \tag{39}$$

déduite de la définition de $\Gamma_+(.)$, on trouve que la densité sur la première multiplicité normale vaut $\Gamma(f_1)\Gamma(f_3)$, qui est une densité normale.

Pour des raisons un peu plus subtiles qu'il est difficile de développer ici on peut montrer que malgré la présence de la valeur principale, la densité sur la multiplicité stationnaire reste bornée. En conséquence le trispectre des cumulants est borné sur la multiplicité stationnaire. Cela ne veut évidemment pas dire qu'il s'agit d'un trispectre de modèle linéaire et il est aisé de prouver que la propriété de factorisation (10) n'est pas satisfaite.

Le cas $n = 2$ correspondant au trispectre est particulièrement simple car il n'y a qu'une seule fonction $U(.)$ dans (35). Ceci n'est plus vrai dès que $n > 2$ et il n'est alors plus possible de se limiter à la prise en considération des produits de distributions delta pour obtenir la densité sur les multiplicités normales. En effet la contribution de ces distributions conduit à une densité sur la première multiplicité normale valant

$$D(\{f_i\}) = \frac{n!}{2^{n-1}}\Gamma(f_1)\Gamma(f_3)...\Gamma(f_{2n-1}). \tag{40}$$

Dès que $n > 2$ le coefficient devant le terme de droite montre qu'il ne s'agit plus d'une densité normale.

La solution du problème provient du fait qu'un mélange de distributions en valeur principale peut, contrairement à l'intuition, engendrer une distribution de Dirac. En utilisant une procédure dépassant le cadre restreint de cet article, on peut ainsi montrer que

$$\begin{aligned} \delta\ (f_1+f_2+...+f_n)\textstyle\sum_P U(\mu_1)U(\mu_1+\mu_2)...U(\mu_1+\mu_2 \\ +...+\mu_{n-1}) = \delta(f_1)\delta f_2)...\delta(f_n) = \delta(\mathbf{f}), \end{aligned} \tag{41}$$

En regroupant alors convenablement les termes de (35) et en utilisant cette expression on trouve que les moments spectraux d'ordre quelconque possèdent une densité normale sur les multiplicités normales. Ceci entraîne en particulier la normalité asymptotique par filtrage sélectif qui avait déjà été analysée de manière beaucoup plus restrictive dans [14] et [26].

Ce que les signaux ordonnés font apparaître c'est l'existence dans les moments d'ordre supérieurs à 2 de termes contenant des distributions en valeur principale comme on le voit sur (35) et (36). Ceci provient essentiellement de la propriété de coupure entre le passé et le futur qui dans le domaine temporel se traduit par l'existence de la fonction échelon unité liée à l'ordonnancement des instants dont la transformée de Fourier fait intervenir les valeurs principales. Ceci peut entraîner des structures géométriques très différentes de celles des multiplicités définies par des distributions de Dirac. Mais l'étude de ces questions nous entraînerait trop loin et est encore partiellement à faire. Elle s'appuie sur des relations peu courantes comme par exemple (41).

BIBLIOGRAPHIE

[1] Blanc-Lapierre A. et Fortet R., Théorie des fonctions aléatoires, Masson, Paris, 1953.

[2] Blanc-Lapierre A., «Les fonctions aléatoires réversibles», Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, 251, p. 1957–1959, 1960.

[3] Blanc-Lapierre A. et Picinbono B., Propriétés statistiques du bruit de fond, Masson, Paris, 1960.

[4] Bondon P. et Picinbono B. «De la blancheur et de ses transformations», Traitement du signal, vol. 7, p. 385–395, 1990.

[5] Brillinger D. Time Series Analysis, Data Analysis and Theory, Holt, Rinehart and Winston Inc., New-York, 1975.

[6] Chandran V. and Elgar S., «A General Procedure for the Derivation of Principal Domains of Higher-Order Spectra», IEEE Trans. Signal Processing, 42, p. 229–233, 1994.

[7] Dalle Molle J.W. and Hinich M. V., «Trispectral Analysis of Stationary Random Times Series», Journal of Acoust. Soc. Am., 97, p. 2963–2978, 1995.

[8] Ferrari A. and Alengrin G., «High-Order Ergodicity of a Complex Harmonic Process», IEEE Trans. on Information Theory, vol. 40, p. 1228–1229, 1994.

[9] Glauber R. «Optical Coherence and Photon Statistics», in Quantum optics and Electronics, C. de Witt *et al.* Editors, Gordon and Breach, 1965.

[10] Glauber R. «The Quantum Theory of Optical Coherence», Phys. Rev. 130, p. 2529–2539, 1963.

[11] Halin M., Lefèvre C. and Puri M. «On Time Reversibility and the Uniqueness of MA Representation for Non-Gaussian Stationary Time Series», Biometrika, 75, p. 170–171, 1988.

[12] Hinich M. V. and Messer H., «On the Principal Domain of the Discrete Bispectrum», IEEE Trans. Signal Processing, 43, p. 2130–2134, 1995.

[13] Leonov V. and Shiryaev A., «On a Method of Calculation of Semi-Invariants», Theory of Probability and Applications, 5, p. 460–464, 1960.

[14] Mac Fadden J., «The Probability Density of the Output of a Filter when the input is a Random Telegraphic Signal : Differential Equations Method», IEEE Trans. Circuit Theory, 6, p. 225–233, 1959.

[15] Parthasarathy H., Prasad S. and Joshi S.D., «Conditions for», IEEE Trans. on Signal Processing, vol. 42, p. 222–225, 1994.

[16] Picinbono B., «Tendance vers le caractère gaussien par filtrage sélectif». Comptes Rendus Ac. Sc., 250, p. 1174–1177, 1960.

[17] Picinbono B., «Sur certains problèmes concernant la détection des signaux faibles», Annales Télécomm., 16, p. 6-31, 1961.

[18] Picinbono B. Bendjaballah C. and Pouget J., «Photoelectron Shot Noise» Jour. of Math. Phys. 11, p. 2166–2176, 1970.

[19] Picinbono B., Signaux aléatoires, tome 2, Dunod, Paris, 1994.

[20] Picinbono B., «On Circularity», IEEE Trans. Signal Processing, 42, p. 3473–3482, 1994.

[21] Picinbono B., «Ergodicity and Fourth-Order Spectral Moments», IEEE Trans. Inf. Theory, 43, p. 1273–1276, 1997.

[22] Pouget J., «Contribution à l'étude de certains processus aléatoires composés, Application à des problèmes de physique statistique et de théorie des signaux», Thèse de doctorat, Orsay, 1970.

[23] Shiryaev A.N., «On Conditions for Ergodicity of Stationary Processes in Terms of Higher Order Moments», Theory of Prob. and its Appl., vol. 8, p. 436–439, 1963.

[24] Sinai Y. G., «On Higher Order Spectral Measures of Ergodic Stationary Processes», Theory of Prob. and its Appl., vol. 8, p. 429–436, 1963.

[25] Weiss G., «Time Reversibility of Linear Stochastic Processes», Journal of Applied Probability, 12, p. 831–836, 1975.

[26] Wonham W. and Fuller A., «Probability Densities of the Smoothed Random Telegraph Signal», Jour. Electr. and Control, 4, p. 567–576, 1958.

Manuscrit reçu le 22 mars 1999.