

# Estimation de la qualité des méthodes de synthèse du mouvement brownien fractionnaire

## Quality Estimation of Synthesis Methods of Fractional Brownian Motion

par Rachid JENNANE\*, Rachid HARBA\*, Gérard JACQUET\*\*

\*Laboratoire d'Electronique, Signaux, Images (LESI)

et GDR ISIS du CNRS

ESPEO, Université d'Orléans, BP 6744

F-45067 Orléans cedex 2

\*\*Laboratoire Traitement du Signal et Instrumentation UMR-CNRS 5516

Université Jean Monnet – 23, rue Paul Michelon F-42023 Saint-Etienne cedex 2

### *résumé et mots clés*

Cet article a pour but de présenter un ensemble de tests permettant d'évaluer la qualité des méthodes de synthèse du mouvement brownien fractionnaire. Pour ce faire, trois tests statistiques sont nécessaires et suffisants. Le premier consiste à vérifier que le processus aléatoire synthétisé est gaussien, le deuxième est un test de stationnarité des incréments du processus et le dernier permet de vérifier que ces mêmes incréments sont statistiquement similaires. A l'aide de ces tests, cinq méthodes de synthèse parmi les plus connues sont évaluées : la méthode du « midpoint displacement », la synthèse par transformée de Fourier rapide inverse, la génération par décomposition de Cholesky de la matrice de covariance des incréments, la synthèse par la fonction de Weierstrass-Mandelbrot et enfin une synthèse par ondelettes. Les résultats montrent que seules les synthèses par la fonction de Weierstrass-Mandelbrot et par décomposition de Cholesky sont globalement satisfaisantes.

Mouvement brownien fractionnaire, fractal, synthèse, tests statistiques, auto-similarité, similarité.

### *abstract and key words*

This work presents a set of tests which allows to estimate the quality of synthesis methods of fractional Brownian motion. Three statistical tests are necessary and sufficient. The first one is to check that the random process is Gaussian, the second one is a stationarity test of the process increments and the last one is to verify that these increments are statistically similar. Five synthesis methods among the most well known are implemented : the midpoint displacement method, the synthesis by inverse fast Fourier transform, the simulation by Cholesky decomposition of the increments covariance matrix, the Weierstrass-Mandelbrot function and finally a wavelets synthesis. Only the Weierstrass-Mandelbrot function and the Cholesky decomposition method give proper results.

Fractional Brownian motion, fractal, synthesis, statistical tests, self-similarity, similarity.

## 1. introduction

Le mouvement brownien fractionnaire (noté fBm pour fractional Brownian motion) proposé par Mandelbrot et Van Ness [1] est un modèle fractal statistique. Ce type de modèle peut servir à caractériser des signaux en hydrologie [2], de turbulences [3], de séries économiques [4] ou des fluctuations dans les solides, ces fluctuations étant regroupées sous le terme générique de bruit en

$1/f$  [5]. Ce modèle peut aussi être utilisé en biologie et médecine [6] [7].

Le fBm est principalement décrit par un paramètre nommé  $H$  ( $0 < H < 1$ ) qui est relié à la dimension fractale  $D$  d'un signal par la relation  $D = 2 - H$ . Le paramètre  $H$  peut caractériser le degré d'agitation du signal : plus  $H$  est proche de 0, plus le signal est agité [8]. Ce modèle est aussi utilisé pour caractériser, en une dimension [9] [10] ou en deux dimensions [11] [12], les textures.  $H$  donne alors une indication chiffrée à la notion intuitive de rugosité.

La mesure du paramètre  $H$  sur des données réelles peut se faire par de nombreuses méthodes; méthode des boîtes [13], analyse spectrale [1], mesure de diverses longueurs [14] [15], maximum de vraisemblance [9], morphologie mathématique [16], analyse par ondelettes [17]. De la même manière, il existe de nombreuses méthodes de synthèse de signaux fBm dont certaines sont les duales de méthodes d'analyse. Dans le but de comparer la pertinence des estimateurs de  $H$ , une étude a été menée par N. Gache *et al.* [18]. Pour ce faire, des signaux de synthèse ont été générés puis analysés par diverses méthodes et la valeur estimée de  $H$  a été comparée à celle donnée lors de la création des signaux. Les résultats ont montré une très nette interaction entre l'analyse et la synthèse interdisant toute conclusion relativement au problème traité. Pour mener à bien une telle étude, il faudrait disposer de signaux de référence de type fBm. Ces signaux devraient être validés *a priori* sans recourir à des méthodes d'analyse.

Pour répondre à cette préoccupation, nous proposons dans cet article une méthode permettant d'évaluer la qualité des méthodes de synthèse de fBm. Cette méthode découle directement des 3 conditions nécessaires et suffisantes (CNS) définies par Mandelbrot et Van Ness [1] pour qu'un signal  $X(t)$  soit fBm. Ceci donne lieu à un ensemble de 3 tests statistiques pour valider la conformité au modèle pour un niveau de signification donné. Seules les statistiques ensemblistes sont considérées car elles assurent l'indépendance des échantillons. Nous utilisons ces tests pour évaluer 5 méthodes de synthèse classiques.

Le plan de cet article est le suivant : dans la section 2 nous rappelons les principales propriétés du fBm ainsi que les 3 CNS pour qu'un processus soit de type fBm. La section 3 est divisée en 3 parties, chacune d'elles est consacrée à la description d'un test statistique relatif à une propriété du fBm. Dans la section 4, les méthodes de synthèse que nous avons implémentées sont décrites et les résultats des trois tests sur ces méthodes sont présentés et commentés dans la section 5. Enfin, quelques remarques concluent cette étude.

## 2. propriétés du mouvement brownien fractionnaire

Après un rappel des définitions et propriétés essentielles du fBm et de ses incréments, nous présenterons les 3 CNS pour qu'un processus aléatoire soit de type fBm.

### 2.1. définitions et propriétés du fBm

Le fBm, noté  $B_H$ , est un processus aléatoire continu gaussien défini par l'intégrale stochastique suivante :

$$B_H(t) - B_H(0) = \frac{1}{\Gamma(H+\frac{1}{2})} \left[ \int_{-\infty}^0 \left( (t-s)^{H-1/2} - (-s)^{H-1/2} \right) dB(s) + \int_0^t (t-s)^{H-1/2} dB(s) \right] \quad (1)$$

où  $t$  est le temps,  $\Gamma$  représente la fonction Gamma et  $B(s)$  est le mouvement brownien.

Pour  $H = 1/2$ , (1) se simplifie et  $B_{1/2}$  est alors le mouvement brownien ordinaire.

Pour pouvoir être utilisé comme modèle de signaux, il est nécessaire de considérer comme processus de type fBm la classe des processus :

$$\{aB_H(t), \text{ tels que } t \geq 0, a \neq 0\} \quad (2)$$

où  $B_H(t)$  est le processus défini par (1). Par convention, on prend souvent  $B_H(0) = 0$ , c'est ce que nous ferons par la suite.

La fonction d'autocorrélation  $r_{B_H}$  du fBm met en évidence la non stationnarité du processus :

$$r_{B_H}(t, s) = \frac{a^2 V_H}{2} [|t|^{2H} + |s|^{2H} - |t-s|^{2H}], \quad (3)$$

où  $V_H$  ne dépend que de  $H$  :

$$V_H = \Gamma(1-2H) \frac{\cos(\pi H)}{\pi H} \quad (4)$$

Si  $s = t$  dans (3), on peut alors exprimer la variance du processus :

$$\sigma_{B_H}^2(t) = a^2 V_H |t|^{2H} \quad (5)$$

On voit donc que l'écart-type de  $B_H$  augmente en fonction de  $t$  en  $t^H$ . Cette propriété est visible sur les figures 1, 2 et 3 pour  $H = 0.2, 0.5$  et  $0.8$  respectivement. Dans chacune des figures, 8 réalisations d'un processus fBm de synthèse pour  $a = 1$  sont visualisées et l'enveloppe correspondant à  $2.58V_H^{1/2}t^H$  est représentée. Théoriquement, 99% des réalisations devraient se trouver à l'intérieur de cette enveloppe.

On remarque que plus  $H$  est proche de 0, plus le signal est agité. Bien que le fBm soit un processus non stationnaire, Flandrin a montré [19] que la notion de densité spectrale de puissance (DSP) moyenne pour un intervalle de temps très grand avait un sens pour ce type de signaux. Cette DSP varie comme :

$$DSP_{B_H}(f) \approx f^{-(2H+1)} \quad (6)$$

où  $\approx$  signifie proportionnel à.

De ce fait, le fBm peut représenter des processus dont le spectre décroît en  $f^{-1}$  (pour  $H = 0$ ) à  $f^{-3}$  (pour  $H = 1$ ).

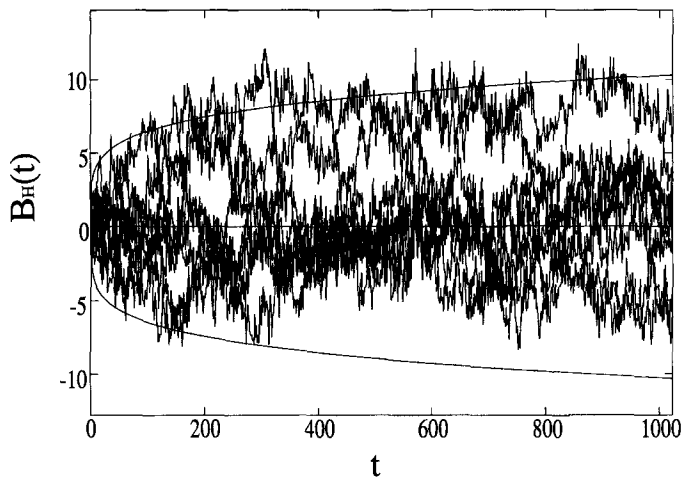


Figure 1. – 8 réalisations d'un fBm de synthèse avec leur enveloppe pour  $H = 0.2$ .

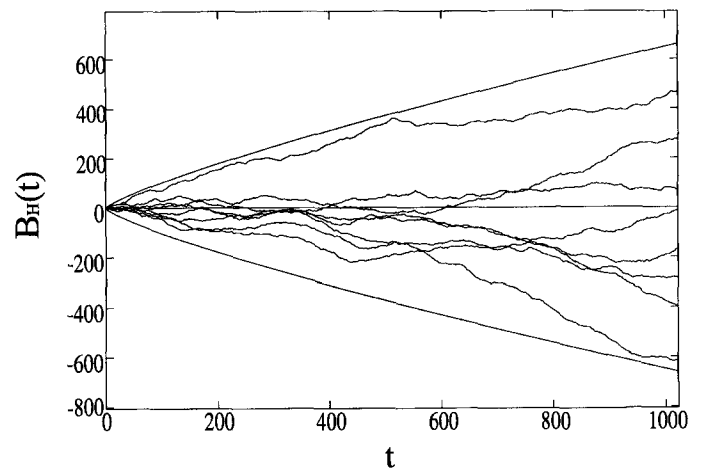


Figure 3. – 8 réalisations d'un fBm de synthèse avec leur enveloppe pour  $H = 0.8$ .

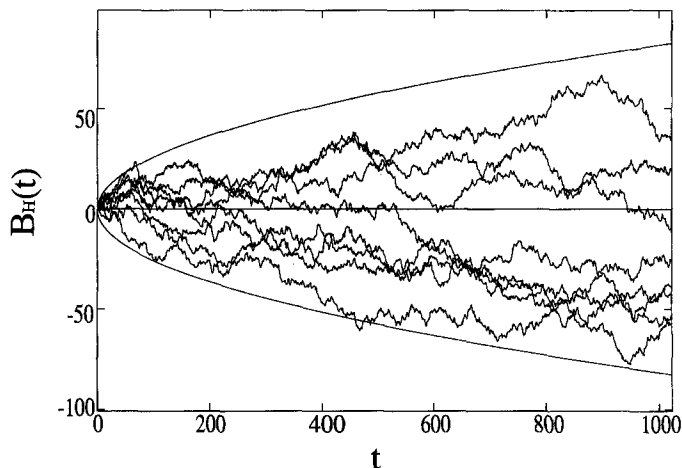


Figure 2. – 8 réalisations d'un fBm de synthèse avec leur enveloppe pour  $H = 0.5$ .

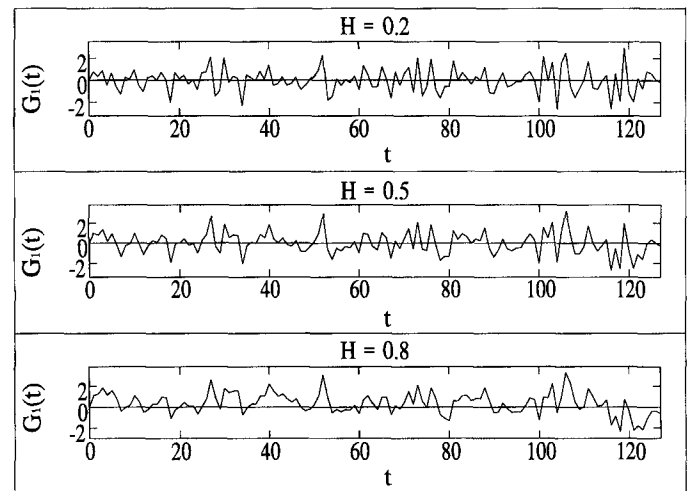


Figure 4. – Une réalisation du fGn pour  $\delta t = 1$  et  $H = 0.2, 0.5$  et  $0.8$ .

## 2.2. définitions et propriétés des incréments du fBm

Comme le mouvement brownien, le fBm n'a pas de dérivée. On peut malgré tout définir ses incréments appelés bruits gaussiens fractionnaires (fGn pour fractional Gaussian noises) notés  $G_{\delta t}$  pour un intervalle de temps  $\delta t$  :

$$G_{\delta t}(t) = B_H(t + \delta t) - B_H(t) \quad (7)$$

Ce sont des processus gaussiens stationnaires à moyenne nulle. Ces propos sont illustrés par la figure 4 où l'on voit une réalisation d'un processus  $G_1$  de synthèse pour  $H = 0.2, 0.5$  et  $0.8$ .

Le fGn étant gaussien centré, sa fonction d'autocorrélation  $r_{G_{\delta t}}$  est suffisante pour le décrire entièrement :

$$r_{G_{\delta t}}(\tau) = \frac{\sigma_{\delta t}^2}{2|\delta t|^{2H}} [|\tau + \delta t|^{2H} - 2|\tau|^{2H} + |\tau - \delta t|^{2H}], \quad (8)$$

où  $\sigma_{\delta t}^2 = a^2 V_H |\delta t|^{2H}$  représente la variance de  $G_{\delta t}$ .

$r_{G_{\delta t}}$  dépend de  $H$ , sa représentation sur la figure 5 permet de donner un sens physique à  $G_{\delta t}$  pour différentes valeurs de  $H$  : pour  $H < 0.5$  le fGn est corrélé négativement, pour  $H = 0.5$  il n'existe aucune corrélation pour  $\tau > \delta t$  et pour  $H > 0.5$  le fGn est corrélé positivement. Une analyse attentive de la figure 4 permet de vérifier ce comportement en fonction de  $H$ .

La transformée de Fourier de  $r_{G_{\delta t}}$  donne le comportement spectral de  $G_{\delta t}$  lorsque  $\delta t$  tend vers 0 [1] :

$$DSP_{G_{\delta t}}(f) \approx f^{1-2H}. \quad (9)$$

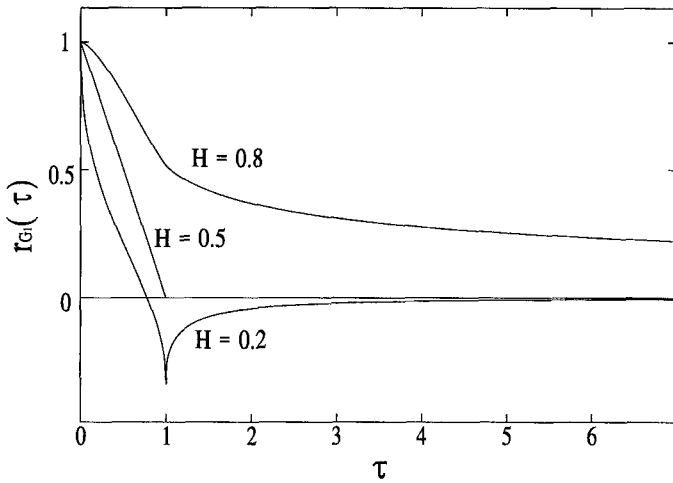


Figure 5. – Allure de la fonction d'autocorrélation du fGn pour  $\delta t = 1$  et pour des valeurs de  $H$  différentes.

$G_{\delta t}$  est donc un processus dont le spectre varie entre un spectre en  $f$  et en  $f^{-1}$ .

L'auto-similarité statistique est l'une des propriétés les plus notables des processus de type fBm. En fait, cette propriété fractale se traduit essentiellement sur les incréments du fBm par la relation suivante déduite de (1) :

$$\{B_H(t + \delta t) - B_H(t)\} \triangleq \left\{ \frac{1}{\lambda^H} [B_H(t + \lambda \delta t) - B_H(t)] \right\} \quad (10)$$

pour tout  $\lambda > 0$  et pour tout  $t$ .  $\triangleq$  signifie égalité en distribution.

Les incréments du fBm sont dits statistiquement auto-similaires [1]. Cette dénomination n'est pas tout à fait exacte. En effet, la relation statistique définie par (10) n'est pas une relation d'auto-similarité mais de similarité entre différents processus fGn obtenus à partir du même processus fBm par décrémentation à des pas différents. Il serait plus juste de dénommer cette propriété « similarité d'échelle de décrémentation » ou « similarité d'échelle » ou tout simplement similarité. C'est cette dénomination que nous utiliserons par la suite.

Si  $t = 0$  dans (10) et avec la convention  $B_H(0) = 0$ , on trouve alors :

$$B_H(\delta t) \triangleq \frac{1}{\lambda^H} B_H(\lambda \delta t) \quad (11)$$

ce qui définit une véritable relation d'auto-similarité pour le fBm.

### 2.3. application au cas discret

En pratique, les signaux sont à valeurs et à temps discrets. Ils sont aussi de longueur et d'amplitude finies. Dans un premier temps nous allons redéfinir les propriétés du fBm en discret, puis nous étudierons brièvement les effets généraux induits par ces limitations.

Si  $\Delta T$  désigne la période d'échantillonnage, le fBm discrétisé peut s'écrire :

$$B_H(n) \equiv B_H(n \Delta T) \quad (12)$$

où  $n$  est un indice entier.

La fonction d'autocorrélation du fBm discrétisé est donnée par :

$$r_{B_H}(i, j) = \frac{a^2 V_H}{2} |\Delta T|^{2H} (|i|^{2H} + |j|^{2H} - |i - j|^{2H}), \quad (13)$$

où  $i$  et  $j$  sont des indices entiers.

Dans le cas discret, le fGn est défini à partir du fBm comme :

$$G_m(n) = B_H(n + m) - B_H(n), \quad (14)$$

$m$  étant un intervalle de temps discret.

Sa fonction d'autocorrélation  $r_{G_m}$  est donnée par :

$$r_{G_m}(k) = \frac{\sigma_m^2}{2|m|^{2H}} (|k + m|^{2H} - 2|k|^{2H} + |k - m|^{2H}). \quad (15)$$

$\sigma_m^2 = a^2 V_H |m \Delta T|^{2H}$  représente la variance de  $G_m$ .

La propriété de similarité s'écrit alors :

$$G_m(i) \triangleq \frac{1}{k^H} G_{km}(i) \quad (16)$$

qui est une égalité en distribution pour tout  $m$  et pour tout  $k > 0$ .

La discrétisation du fBm pose un certain nombre de problèmes. En effet, un signal fBm possède des détails jusqu'à la plus petite échelle. Ces détails seront forcément perdus lors de l'échantillonnage et de la quantification.

En pratique, un signal numérique ne sera fractal que sur une gamme d'échelle limitée : la plus petite échelle sera définie par la période d'échantillonnage et la plus grande par la taille du signal. Le comportement spectral du fBm sera globalement conservé. Son spectre décroissant moins rapidement pour les faibles valeurs de  $H$ , les effets d'échantillonnage seront plus sensibles lorsque  $H$  sera proche de 0. En ce qui concerne la quantification, elle peut être assimilée à un bruit venant se rajouter au fBm, elle aura une influence plus importante pour les signaux lisses, c'est à dire pour les  $H$  élevés. La discrétisation s'accompagne obligatoirement d'une troncature des données mais la dynamique des réels en double précision sur un ordinateur est telle que seule la limitation du nombre des échantillons est à considérer.

Ces dégradations agiront sur la qualité de synthèse du fBm à des degrés différents suivant les méthodes. Certains de ces effets sont prévisibles, ils seront précisés lors de la description de chaque méthode. D'autres sont moins évidents et seront révélés à l'aide des tests statistiques proposés.

## 2.4. conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un processus soit fBm

Parmi toutes les propriétés décrites dans les paragraphes précédents, seulement 3 d'entre elles sont nécessaires et suffisantes pour qu'un processus aléatoire soit de type fBm [1] : si  $X(t)$  est un processus aléatoire gaussien ayant des incréments stationnaires et possédant une similarité d'échelle alors c'est un mouvement brownien fractionnaire. Cette proposition dérive du fait qu'un processus gaussien est totalement défini par sa moyenne et sa fonction d'autocorrélation. La propriété de similarité se traduit aussi sur la forme de sa fonction d'autocorrélation et de sa densité spectrale de puissance.

A partir de ces 3 CNS, le degré d'adéquation entre un processus aléatoire et le modèle fBm peut être fait à l'aide de 3 tests d'hypothèse à un niveau de signification  $\alpha$  donné :

- i) test de normalité du processus,
- ii) test de stationnarité des incréments du processus,
- iii) test de similarité des incréments du processus.

La description de ces 3 tests est réalisée dans le paragraphe suivant, les raisons du choix de chaque test y sont aussi exposées.

## 3. méthode

Les tests d'hypothèse sont appliqués sur  $R$  réalisations indépendantes et discrétisées de longueur  $N$  d'un processus de synthèse de type fBm. Afin de respecter les contraintes d'indépendance, seules les statistiques ensemblistes sont considérées.

Ces tests vont nous donner des indicateurs de qualité relativement à chaque propriété, permettant ainsi de comparer les méthodes de synthèse entre elles. La validation intrinsèque d'une méthode ne peut être faite que relativement à un niveau de signification des tests donc relativement à un niveau de qualité souhaité.

Dans la suite,  $i$  est un indice temporel discret ( $0 \leq i < N$ ),  $j$  est un indice muet,  $k$  et  $m$  sont des indices discrets équivalents à l'intervalle  $\delta t$ .

### 3.1. test de normalité

De nombreuses méthodes existent pour réaliser des tests de correspondance à une distribution donnée et plus particulièrement à une distribution gaussienne [20][21][22]. Nous avons choisi d'utiliser le test du chi-deux. Il est directement adapté à une mise en œuvre avec détermination des paramètres des distributions. De plus, il permet d'avoir une indication sur la puissance du test.

Dans sa mise en œuvre ensembliste, ce test consiste à comparer la densité de probabilité (ddp) théorique à celle observée pour chaque instant  $i$ . Ce test n'est valide que si les échantillons sont

indépendants ce qui est le cas ici car les réalisations le sont. Les observations sont regroupées en  $C$  classes équiprobables si bien que le nombre de réalisations par classe doit théoriquement être de  $R/C$ . Les limites entre classes sont calculées à partir de la moyenne et de la variance estimées sur les données [23][24] sous l'hypothèse nulle  $H_0$  d'égalité entre la ddp normale et celle observée.

Pour apprécier l'écart entre la distribution théorique et observée, la statistique suivante est formée :

$$\chi_i^2 = \sum_{j=1}^C \frac{(R_{i,j} - \frac{R}{C})^2}{\frac{R}{C}} \quad (17)$$

où  $R_{i,j}$  est le nombre d'échantillons observé à l'instant  $i$  pour la classe  $j$ .

$\chi_i^2$  est approximativement une variable du chi-deux à  $C - c_0$  degrés de liberté (ddl) si  $R/C$  est supérieur à 5.  $c_0$  est le nombre de contraintes sur les données. Dans notre cas, ces contraintes sont au nombre de 3 : la première vient du fait que  $\sum_j R_{i,j} = R$  et les deux autres du fait que la moyenne et la variance des réalisations sont estimées à partir des données.  $\chi_i^2$  a donc  $C - 3$  ddl.

Au niveau de signification  $\alpha$ , l'hypothèse de normalité à l'instant  $i$  est retenue si :

$$\chi_i^2 \leq \chi_{C-3,\alpha}^2 \quad (18)$$

$\chi_{C-3,\alpha}^2$  est la limite supérieure pour ce test unilatéral.

Le choix du nombre d'intervalles  $C$  doit être réalisé de manière judicieuse. En effet, il peut exister plusieurs distributions dont la répartition dans les intervalles serait identique à celle de la distribution théorique. Il est donc possible d'accepter une hypothèse alors qu'elle devrait être rejetée. Certains choix pour le nombre d'intervalles conduiront à accepter l'hypothèse et d'autres à la refuser. Ceci montre que ce choix influe sur la puissance du test (égale à  $1 - \beta$ , où  $\beta$  est la probabilité d'accepter une hypothèse fausse).

Mann et Wald ont proposé [23] une méthode pour choisir le nombre d'intervalles ainsi que les bornes de ceux-ci. Pour ce faire, ils ont défini une mesure  $\Delta$  qui représente la plus grande distance en valeur absolue entre deux distributions cumulées. Ils ont remarqué que si les intervalles sont équiprobables, alors la distance  $\Delta$  entre deux ddp ayant même répartition dans les intervalles est minimale. Ces deux distributions seront les plus proches possibles au sens de la distance  $\Delta$ . Cette idée les a guidés pour trouver le nombre  $C$  optimum d'intervalles équiprobables en fonction du nombre d'échantillons pour  $\alpha$  donné. Cette relation n'est valable en pratique que si le nombre d'échantillons indépendants est d'au moins 200.

De plus, le nombre d'intervalles étant déterminé, il est possible d'avoir une idée sur la puissance du test. Si une distribution est éloignée de plus d'une distance seuil  $\Delta_s$  de la distribution relative à l'hypothèse nulle, alors la puissance du test sera supérieure à 0.5.

Le tableau 1 donne quelques valeurs de  $C$  et  $\Delta_s$  en fonction de  $R$  pour  $\alpha = 0.01$  à titre indicatif [24] :

**Tableau 1. – Quelques valeurs du nombre d’intervalles  $C$  et de la distance seuil  $\Delta_s$  en fonction de la taille des données  $R$ .**

R	C	$\Delta_s$
200	27	0.1847
500	39	0.1273
900	49	0.0997
1200	55	0.0888
1500	61	0.0823
2000	68	0.0728

Les limites entre intervalles sont calculées sous l’hypothèse nulle  $H_0$  à partir de la moyenne et de la variance estimées sur les données.

Ce test fournit, pour chaque instant  $i$ , une réponse d’acceptation ou de refus. Une moyenne du nombre d’acceptation sur tous les  $i$  donne une indication globale de qualité relativement à la propriété gaussienne. Un écart type sur cette indication peut être calculé en segmentant le signal en blocs successifs et en calculant sur chacun d’eux une moyenne.

### 3.2. test de stationnarité des incréments

Un processus  $X(t)$  est dit stationnaire au sens strict si toutes ses propriétés statistiques sont invariantes par translation de l’origine des temps. En toute rigueur, il faudrait tester la stationnarité pour tous les ordres. Le fBm étant un processus gaussien, il est donc entièrement décrit par ses moments jusqu’à l’ordre 2. Le test de normalité ayant lieu avant le test de stationnarité, il est suffisant de réaliser un test de stationnarité aux ordres 1 et 2.

D’un point de vue pratique, nous nous limiterons à vérifier que la moyenne et la variance des incréments du processus sont indépendantes du temps. Une évolution non stationnaire de la forme de la fonction d’autocorrélation sera très probablement détectée au niveau du test de similarité.

#### 3.2.1. test de stationnarité pour la moyenne

Les incréments du fBm étant théoriquement à moyenne nulle, le test de stationnarité pour la moyenne pourra être réalisé par un test bilatéral avec l’hypothèse nulle  $H_0$  telle que :  $\mu = 0$ . Ce test est plus puissant qu’un simple test de stationnarité de la moyenne. Pour un niveau de signification  $\alpha$ ,  $H_0$  sera acceptée à l’instant  $i$  et pour  $m$  donné si :

$$t_{\alpha/2} \leq \sqrt{R} \frac{\mu_{m,i}}{\sigma_{m,i}} \leq t_{1-\alpha/2} \quad (19)$$

où  $t$  est le coefficient de confiance de la loi de Student à  $(R - 1)$  ddl.  $\mu_{m,i}$  et  $\sigma_{m,i}$  représentent respectivement les estimations de la moyenne et de l’écart-type pour les incréments calculés avec un intervalle  $m$  à l’instant  $i$ .

Les incréments sont calculés à partir de l’ensemble des  $R$  réalisations discrétisées de longueur  $N$  pour  $m$  variant de 1 à  $L$ . On ne garde que les  $N - L$  premiers échantillons afin que les signaux aient tous la même longueur. La valeur moyenne du nombre d’acceptation est effectuée sur tous les instants  $i$ . L’indice global de qualité est déterminé en moyennant sur tous les intervalles  $m$ . On obtient une variance de l’indice calculée sur tous les intervalles.

#### 3.2.2. test de stationnarité pour la variance

La mise en œuvre de ce test ne peut être réalisée comme le précédent car la valeur de la variance n’est pas connue *a priori*. En effet, le processus n’est défini qu’à un facteur multiplicatif près. Nous avons donc préféré utiliser un test global de stationnarité basé sur des tests de blocs [20][25]. Le test retenu, le run test, permet de détecter des tendances dans un signal ainsi que d’éventuelles fluctuations de courte période.

La mise en œuvre de ce test nécessite d’estimer la variance à chaque instant puis de déterminer la médiane de ces valeurs. Un instant est dit positif si sa variance est supérieure à la médiane des variances; autrement, il est dit négatif. Il faut ensuite compter le nombre de runs  $NR$ , chacun d’entre eux est défini comme une séquence d’observations successives du même côté de la médiane.  $NR$  est donc le nombre de blocs d’échantillons successifs tous au dessus ou tous en dessous de la médiane.  $NR$  est approximativement une variable du Run si le nombre de réalisations indépendantes est supérieur ou égal à 10. Un exemple est donné ci-dessous où  $NR$  et  $N$  valent respectivement 12 et 30 :

+ + + - + + - - - - + + + - - + - - - + + + - - - - -  
 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12  
 + et - représentent respectivement une variance au-dessus et en-dessous de la médiane.

Pour ce test d’hypothèse bilatéral, il faut que la dépendance entre les échantillons successifs soit réduite. Pour ce faire, les incréments sont calculés sur des intervalles de temps disjoints pour  $m$  variant de 1 à  $L$ . A  $m$  donné, on peut calculer  $N/m$  instants ayant des incréments peu corrélés. L’hypothèse de stationnarité pour la variance est acceptée au niveau de signification  $\alpha$  si :

$$r_{n,1-\alpha/2} < NR \leq r_{n,\alpha/2}$$

$r$  est le coefficient de confiance pour la loi du run à  $n = N/(2m)$  ddl. On définit donc une zone d’acceptation  $]r_{n,1-\alpha/2}, r_{n,\alpha/2}]$  et une zone de rejet à partir de la connaissance du nombre total d’échantillons  $N/m$  et du niveau de signification  $\alpha$ .

### 3.3. test de similarité des incréments

Ce test consiste à vérifier que les incréments discrets du processus de synthèse sont similaires, c'est-à-dire qu'ils vérifient la relation (16). Pour adapter le test aux données discrétisées, il faut faire en sorte que  $km \in \mathbb{N}^*$ . La valeur de  $H$  est celle donnée lors de la synthèse.

$G_m(i)$  est théoriquement une variable aléatoire gaussienne si bien que l'égalité en distribution consiste à vérifier que les 2 variables aléatoires de (16) ont une ddp normale de mêmes paramètres. En pratique, on ne vérifie cette égalité que pour  $m = 1$  et pour  $k$  variant de 2 à  $L$ . En effet, les tests pour  $m \neq 1$  conduisent à des résultats très redondants.

Le test de similarité consiste donc à vérifier que :

$$G_1(i) \triangleq \frac{1}{k^H} G_k(i) \quad (20)$$

L'égalité définie par l'équation (20) est vérifiée à l'aide du test du chi-deux décrit précédemment. Le test de normalité du processus ayant été effectué préalablement, le test de similarité est réalisé entre la répartition pour  $m = 1$ , modélisée par une gaussienne, et la répartition pour  $m = k$ .

Pour  $m = 1$ , on calcule la moyenne et la variance des incréments des réalisations pour un instant  $i$  donné. Ceci permet de calculer les limites entre les classes sous l'hypothèse de normalité de la ddp de  $G_1(i)$ . Pour ce même instant  $i$  et pour  $k$  variant de 2 à  $L$ , on peut calculer  $1/k^H G_k(i)$  et vérifier la normalité de cette variable aléatoire avec la moyenne et la variance calculées sur  $G_1(i)$ . La figure 6 illustre les comparaisons effectuées entre les distributions des incréments pour un instant  $i$ .

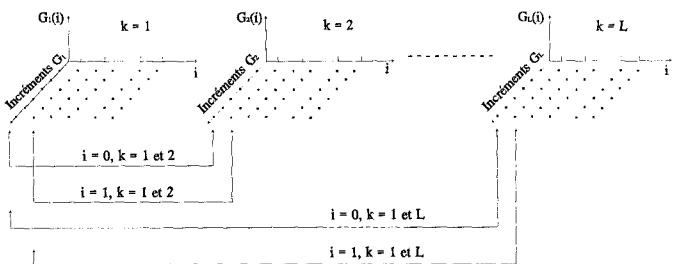


Figure 6. – Comparaison de la ddp de  $G_1(i)$  et de celle de  $k^{-H} G_k(i)$  pour  $k$  variant de 2 à  $L$ .

Pour apprécier la différence entre les 2 variables aléatoires de (20) nous formons la statistique :

$$d_i^2(k) = \sum_{j=1}^C \frac{(R_{k,j} - \frac{R}{C})^2}{\frac{R}{C}} \quad (21)$$

où  $R_{k,j}$  est le nombre d'échantillons, pour un  $k$  donné, de la classe  $j$  de  $1/k^H G_k(i)$ .

$d_i^2(k)$  est approximativement une variable aléatoire du chi-deux à  $C - 1$  ddl. En effet, les bornes sont calculées à partir des estimations de la moyenne et de l'écart-type des données pour  $m = 1$  et la seule contrainte restante est  $\sum_j R_{k,j} = R$ .

Pour un niveau de signification  $\alpha$  et à l'instant  $i$ ,  $G_k$  pour  $k \geq 2$  sera dit similaire à  $G_1$  si :

$$d_i^2(k) \leq \chi_{C-1, \alpha}^2 \quad (22)$$

## 4. méthodes de synthèse

Nous allons décrire 5 méthodes de synthèse du fBm parmi les plus connues : la méthode du « midpoint displacement » (MID), la synthèse par transformée de Fourier rapide inverse (FRI), la génération par décomposition de Cholesky de la matrice de covariance des incréments (CHO), la synthèse par la fonction de Weierstrass–Mandelbrot (WMA) et enfin la synthèse par ondelettes (OND). Nous tenterons de faire apparaître les limites *a priori* de ces méthodes.

Bien entendu, il existe d'autres méthodes de synthèse, par exemple : la génération par sauts indépendants, une variante du « midpoint displacement » avec interpolation, la synthèse par coupes aléatoires [33]. Plus récemment, une synthèse approximative par décomposition de Cholesky de la matrice de covariance du fBm a été proposée [26]. Il est possible de faire une synthèse temps–fréquence de tels signaux [27] ou aussi de faire la synthèse par intégration ou dérivation fractionnaire [28][29]. Enfin, une autre méthode basée sur les ondelettes a été proposée récemment [30].

### 4.1. synthèse par la méthode du « midpoint displacement » (MID)

Cette méthode [31] est basée sur la propriété suivante du fBm découlant de (10) :

$$\text{Var}[B_H(x_1) - B_H(x_2)] = K(x_1 - x_2)^{2H} \quad (23)$$

où  $x_1$  et  $x_2$  sont des indices de position et  $K$  une constante de proportionnalité. Cette méthode itérative consiste à donner à un point situé à égale distance de deux autres points  $x_1$  et  $x_2$  une valeur aléatoire gaussienne centrée sur la moyenne de  $x_1$  et  $x_2$  et de variance définie par (23). A chaque itération le nombre d'échantillons du signal est doublé. L'initialisation est faite en prenant  $B_H(0) = 0$  et  $B_H(1)$  comme étant un échantillon gaussien de moyenne nulle et de variance donnée par (23). Ensuite, le point  $1/2$  est la demi-somme de  $B_H(1)$  et  $B_H(0)$  plus un offset  $D_1$  aléatoire gaussien de moyenne nulle et de variance  $\Delta_1^2$ . Les autres points milieux sont construits itérativement de la même

## Estimation de la qualité

manière à partir des points précédents. Un calcul simple montre que la variance  $\Delta_n^2$  de l'offset  $D_n$  est donnée par :

$$\Delta_n^2 = \frac{K}{(2^n)^{2H}} [1 - 2^{2H-2}]. \quad (24)$$

Cette méthode à l'inconvénient de générer des signaux dont les incréments ne sont ni stationnaires ni similaires pour  $H$  différent de 0.5 [32]. A titre d'exemple, le tableau 2 regroupe pour les trois premières itérations, les valeurs de la variance effective et de la variance théorique.

Tableau 2. – Variance théorique et variance effective pour la synthèse d'un fBm par « midpoint displacement » jusqu'à la troisième itération.

| Point | variance théorique | variance effective                     |
|-------|--------------------|--|
| 1/8   | $K(1/8)^{2H}$      | $K(1/8)^{2H}$                          |
| 1/4   | $K(1/4)^{2H}$      | $K(1/4)^{2H}$                          |
| 3/8   | $K(3/8)^{2H}$      | $K[(1/2)^{2H+1} + (1/2)^{6H}]$         |
| 1/2   | $K(1/2)^{2H}$      | $K(1/2)^{2H}$                          |
| 5/8   | $K(5/8)^{2H}$      | $K[(1/4) + (1/2)^{2H+1} + (1/2)^{6H}]$ |
| 6/8   | $K(6/8)^{2H}$      | $K[(1/2) + (1/4)^{2H}]$                |
| 7/8   | $K(7/8)^{2H}$      | $K[(3/4) + (1/2)^{6H}]$                |

On peut remarquer que l'écart entre la variance théorique et la variance effective est toujours nul pour  $H = 1/2$ . Autrement, pour certains points, il existe une différence qui fait que cette méthode donnera de mauvais résultats. L'écart entre les variances est plus réduit pour les fortes valeurs de  $H$  que pour les faibles valeurs comme le montre la figure 7.

Malgré ces défauts inhérents à la méthode, celle-ci a été retenue car c'est l'une des plus connues.

La figure 8 montre des signaux synthétisés par cette méthode pour 3 valeurs de  $H$  différentes.

### 4.2. synthèse par transformée de Fourier rapide inverse (FRI)

Comme nous l'avons vu dans la section 2, il est possible de définir pour le fBm une densité spectrale de puissance moyenne pour un intervalle de temps très grand. Cette DSP varie comme  $1/f^{2H+1}$  où  $f$  est un indice de fréquence. Pour générer un signal fBm réel à l'aide de cette méthode [33], il faut remplir un vecteur complexe dont le module varie en  $1/f^{H+1/2}$  et dont la phase aléatoire respecte la symétrie hermitique. Pour obtenir le fBm

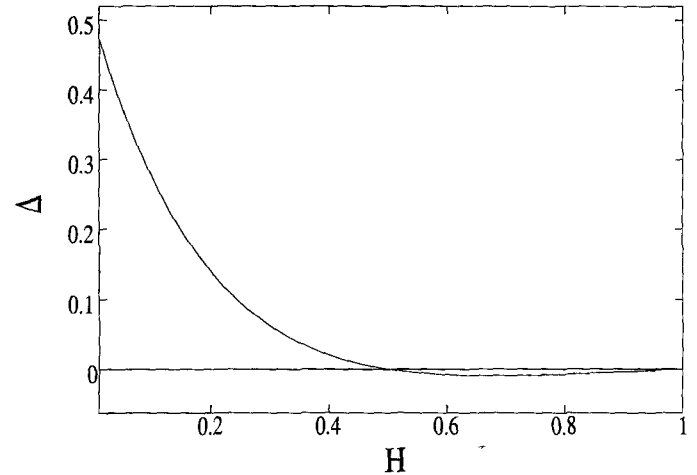


Figure 7. – Représentation de l'écart  $\Delta$  entre la variance théorique et effective en fonction de  $H$  pour MID.

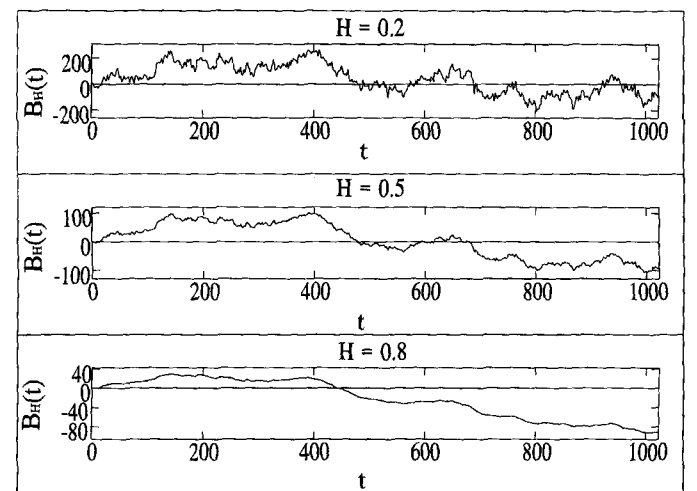


Figure 8. – Une réalisation de la synthèse par « midpoint displacement » pour  $H = 0.2, 0.5$  et  $0.8$ .

correspondant, il suffit de prendre la transformée de Fourier rapide inverse de ce vecteur. Le balayage en fréquence est limité aussi bien vers les hautes que vers les basses fréquences. Cette méthode génère des signaux périodiques comme nous pouvons le constater sur la figure 9.

### 4.3. synthèse par décomposition de cholesky (CHO)

Cette méthode [9] consiste à synthétiser  $G_1$  dont la fonction d'autocorrélation est définie par (8). Sa matrice de covariance  $R = E[G_1 G_1^T]$  est une matrice de Toeplitz définie positive, elle peut donc être décomposée par la méthode de Cholesky comme :

$$R = L L^T \quad (25)$$



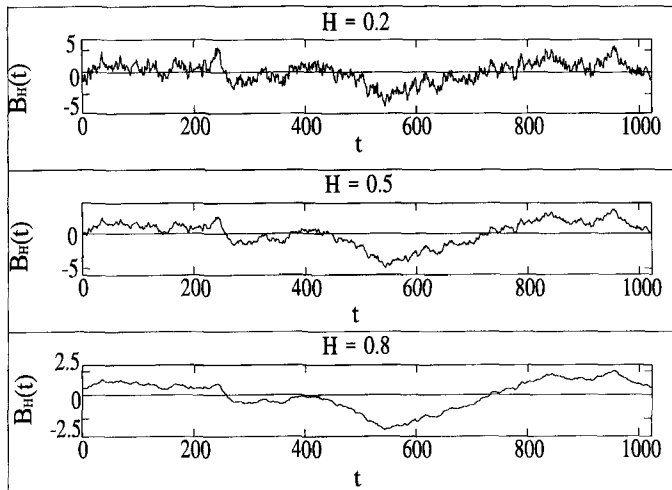


Figure 9. – Une réalisation de la synthèse par transformée de Fourier inverse pour  $H = 0.2, 0.5$  et  $0.8$ .

où  $L$  est une matrice triangulaire inférieure, définie positive.  $L$  est donc inversible.

Considérons la transformation :

$$y = L^{-1} G_1 \Leftrightarrow G_1 = L y \quad (26)$$

alors

$$E[y y^T] = L^{-1} R L^{-T} = I \quad (27)$$

où  $I$  est la matrice identité.

Les composantes de  $y$  sont donc décorréelées :  $y$  est un bruit blanc que nous choisissons gaussien en accord avec les propriétés théoriques du fGn.  $G_1$  est obtenu à partir de  $y$  par l'équation (26) et le fBm par incrémentation à partir de (14).

Le fGn a une fonction d'autocorrélation tendant rapidement vers 0 seulement pour  $H$  proche de  $1/2$  (figure 5). On est donc obligé en pratique de tronquer cette fonction pour une longueur de signal donnée. Trois signaux synthétisés par cette méthode sont présentés sur la figure 10.

#### 4.4. synthèse par la fonction de Weierstrass-Mandelbrot (WMA)

On considère la fonction de Weierstrass-Mandelbrot [34], que nous utiliserons dans sa version aléatoire :

$$W(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(1 - e^{i2\pi b^n t}) e^{i\varphi_n}}{b^{Hn}} \quad (28)$$

où  $\varphi_n$  est une phase aléatoire prise dans l'intervalle  $[0, 2\pi]$  et  $b$  est un facteur d'échelle supérieur à 0 et différent de 1 pour assurer un déplacement en fréquence. Pour synthétiser un signal fBm, nous considérons la partie réelle de  $W(t)$ ,  $Re[W(t)]$  définie par :

$$Re[W(t)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\cos \phi_n - \cos(b^n t + \phi_n)}{b^{Hn}} \quad (29)$$

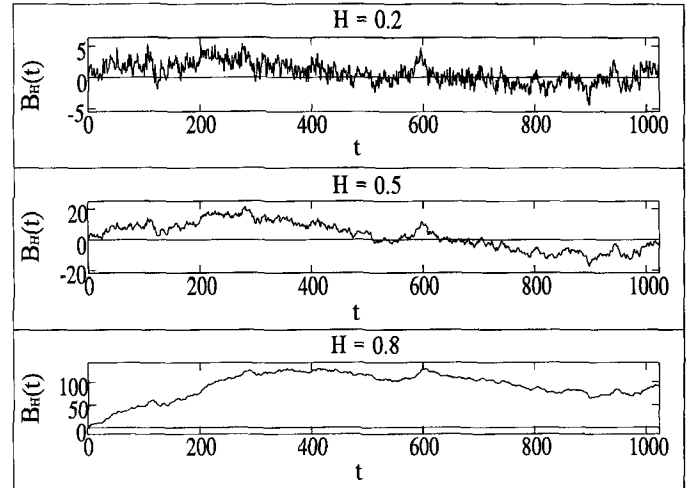


Figure 10. – Une réalisation de la synthèse par décomposition de Cholesky pour  $H = 0.2, 0.5$  et  $0.8$ .

FRI et WMA sont très voisines, dans le principe, l'une de l'autre. Pour FRI, le balayage en fréquence est en progression arithmétique et est limité en haute et basse fréquence. Pour WMA, il est en progression géométrique et est moins limité.

En pratique, pour WMA, la somme sur  $n$  est tronquée réduisant le balayage vers les hautes et les basses fréquences. Des signaux générés par cette méthode sont présentés figure 11.

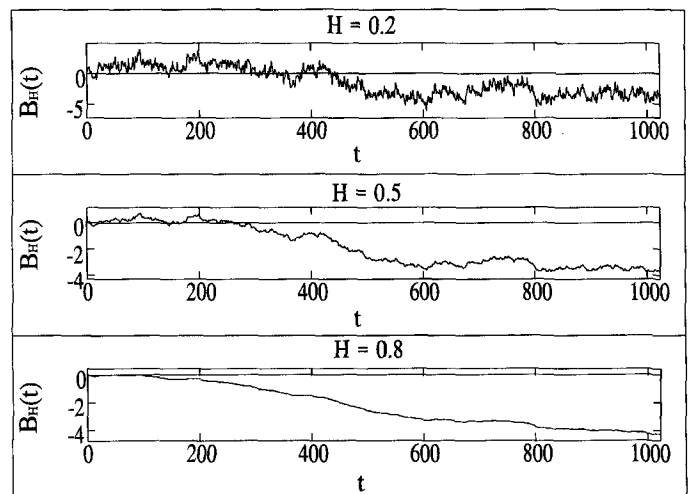


Figure 11. – Une réalisation de la synthèse par la fonction de Weierstrass-Mandelbrot pour  $H = 0.2, 0.5$  et  $0.8$ .

#### 4.5. synthèse par ondelettes (OND)

Mallat a montré le lien entre l'analyse multi-résolution d'un signal et sa décomposition sur une base d'ondelettes orthogonales dyadiques [17]. A chaque étape d'analyse à la résolution  $j + 1$ ,

on génère un signal dit de forme  $A_{j+1}$  et un signal de détail  $D_{j+1}$  en partant d'un signal de forme  $A_j$ . Mallat a montré que pour un fBm, la variance des signaux de détails suit la relation :

$$\text{Var}[D_j] = 2^{2H+1} \text{Var}[D_{j+1}]. \quad (30)$$

Comme suggéré par Wornell [35] il est possible de synthétiser un fBm en ignorant la possible corrélation des signaux de détails et en faisant en sorte que ceux-ci obéissent statistiquement à la relation (30) lors de la reconstruction. Flandrin a montré [36] que si  $M > H + 1/2$  avec  $M$  le nombre de moments nuls de l'ondelette, alors les échantillons des signaux de détails sont décorrélés en pratique.

La synthèse par ondelettes est limitée par la méconnaissance du signal de forme de départ et par les effets de bord lors du filtrage. Le choix de l'ondelette intervient sans que l'on puisse prévoir *a priori* son influence. La figure 12 présente des signaux synthétisés à l'aide de cette méthode.

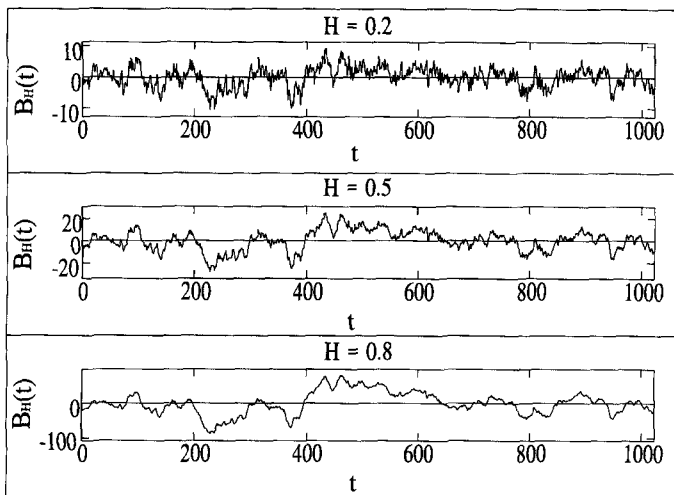


Figure 12. - Une réalisation de la synthèse par ondelettes pour  $H = 0.2, 0.5$  et  $0.8$ .

#### 4.6. discussion sur les méthodes

En théorie, toutes les méthodes de synthèse que nous avons retenues exceptée MID devraient générer une trace fBm. Pour les autres méthodes, des problèmes pratiques vont empêcher une synthèse correcte. Ces problèmes sont de natures différentes. Discrétisation des signaux qui induit un repliement du spectre. Cette limitation est surtout présente pour les méthodes basées sur une approche spectrale limitée (FRI). Ensuite, les signaux générés sont de taille finie. Toutes les méthodes sont sensibles à cette restriction. Enfin, des limitations spécifiques à certaines méthodes auront une importance : effets de bord lors du filtrage (OND), approximations diverses (signal de forme de départ inconnu pour OND, approximation du spectre temps-fréquence par un spectre

moyen). Dans le paragraphe suivant, nous allons appliquer les tests sur les 5 méthodes de synthèse que nous avons retenues. Ceci permettra de mettre en évidence les effets des diverses limitations et de choisir pour une méthode donnée les bons paramètres.

## 5. résultat des tests

Les 5 méthodes de synthèse ont été évaluées pour  $H$  valant respectivement 0.2, 0.5 et 0.8 correspondant aux 3 cas possibles de corrélation et pour 200 réalisations indépendantes de 1000 échantillons chacune. En effet, pour 200 réalisations le test de normalité peut être effectué convenablement. D'autre part, nous nous sommes limités à 1000 échantillons car l'implémentation de CHO ne peut être réalisée pour des tailles supérieures avec le matériel dont nous disposons (station IBM Power PC avec 32 Moctets de mémoire).

Pour la synthèse par la fonction de Weierstrass-Mandelbrot, nous avons choisi de prendre  $b = 1.5$  qui permet d'assurer une bonne couverture en fréquence. D'autre part, nous limitons la somme à 1000 éléments car au-delà, les résultats sont sensiblement identiques.

Pour la synthèse par ondelettes, nous avons utilisé l'algorithme proposé dans [37] en choisissant des filtres à 20 coefficients de Daubechies [38]. Le signal de forme de départ est de 2 échantillons choisis nuls.

Les autres méthodes de synthèse ne nécessitent aucun choix de paramètre *a priori*.

Enfin, les 3 tests ont été effectués avec un niveau de signification  $\alpha = 0.01$ . Les résultats sont exprimés en pourcentage représentatif d'un indice de qualité.

### 5.1. test de normalité

Pour vérifier qu'à tout instant le processus de synthèse est gaussien, on met en œuvre un test du chi-deux. Le nombre de classes correspondant aux 200 réalisations est donné par le tableau 1 et vaut 27. Le nombre de ddl est donc égal à 24 ce qui donne la borne supérieure du test  $\chi_{24, 0.01}^2 = 42.98$ . On peut alors calculer le pourcentage des instants gaussiens. Pour ce test, afin d'obtenir une indication sur l'écart-type de la mesure, on scinde temporellement les signaux en segments jointifs et on calcule sur chacun le nombre d'instants gaussiens. Nous avons pris 10 segments de 100 instants chacun. Les résultats sont présentés tableau 3.

Les méthodes de synthèse génèrent bien des signaux gaussiens sauf pour FRI et pour WMA pour  $H = 0.8$ . En effet, celles-ci consistent à additionner des sinusoides à phases aléatoires dont le module décroît avec la fréquence en  $f^{-(2H+1)/2}$ . La ddp d'une harmonique haute fréquence est en comparaison plus

**Tableau 3. – Pourcentage moyen et écart-type constaté des instants gaussiens. Les valeurs inférieures à 95% sont reportées sur fond grisé.**

| $H$ | MID        | FRI         | CHO        | WMA        | OND        |
|-----|------------|-------------|------------|------------|------------|
| 0.2 | 99.2 ± 0.6 | 99.0 ± 1.0  | 99.0 ± 0.9 | 99.4 ± 0.7 | 99.3 ± 0.6 |
| 0.5 | 99.3 ± 1.1 | 97.7 ± 2.1  | 99.4 ± 0.7 | 99.4 ± 0.8 | 99.1 ± 1.2 |
| 0.8 | 98.4 ± 2.5 | 73.9 ± 14.1 | 98.0 ± 3.8 | 94.6 ± 7.6 | 99.4 ± 0.8 |

étroite que celle des premières harmoniques lorsque  $H$  est proche de 1. La ddp de la somme, produit de convolution des ddp des harmoniques, sera alors peu modifiée par celle des harmoniques hautes fréquences pour  $H$  élevé. En effet, la largeur des ddp étant très réduite, elles auront peu d'effet dans la convolution. Par contre, pour  $H$  faible, ce produit de convolution sera plus influent et la somme sera plus proche d'une gaussienne en vertu du théorème central limite. Ce défaut se retrouve à un degré moindre pour WMA car la somme sur les fréquences est moins limitée que pour FRI.

## 5.2. test de stationnarité des incréments

Nous effectuons ce test sur les incréments  $G_m$  pour  $1 \leq m \leq L$ . Nous prenons  $L = 100$  car cela nous donne au moins 10 incréments pour le run test ce qui correspond à la limite inférieure de validité de ce test.

### 5.2.1. Test sur la moyenne

Concernant le test de stationnarité sur la moyenne des incréments, la longueur utile des signaux incréments est de 900 échantillons car la taille maximale des intervalles est 100. Les coefficients de confiance pour la loi de Student à 199 ddl (nombre de réalisations moins 1) sont sensiblement égaux à  $-2.6$  et  $2.6$ . Le tableau 4 montre les résultats moyens sur  $m$  et  $i$  exprimés en pourcent. Les écart-types sont calculés sur les 100 valeurs de  $m$ .

**Tableau 4. – Test de stationnarité pour la moyenne des incréments. Pourcentage moyen des instants à moyenne nulle avec écart-types constatés.**

| $H$ | MID        | FRI        | CHO        | WMA        | OND        |
|-----|------------|------------|------------|------------|------------|
| 0.2 | 99.4 ± 0.3 | 99.6 ± 0.6 | 98.1 ± 0.8 | 99.0 ± 0.8 | 96.3 ± 1.4 |
| 0.5 | 99.9 ± 0.3 | 99.9 ± 0.3 | 96.4 ± 1.7 | 99.5 ± 0.9 | 95.3 ± 1.5 |
| 0.8 | 99.9 ± 0.1 | 99.9 ± 0.1 | 96.7 ± 0.9 | 99.9 ± 0.6 | 95.2 ± 1.1 |

Ces résultats montrent clairement que toutes ces méthodes de synthèse génèrent des signaux dont les incréments sont à moyenne nulle.

### 5.2.2. test sur la variance

Concernant le test sur la stationnarité de la variance des incréments, les bornes du run test varient avec  $m$ . A titre d'exemple, pour  $m = 1$ , on dispose de 1000 instants et le nombre de runs doit être compris entre 414 et 495. Pour  $m = 100$ , on ne dispose que de 10 instants et le nombre de runs doit être compris entre 2 et 9. Le nombre d'incréments stationnaires pour la variance est donné dans le tableau 5. Le score maximal est de 100 correspondant à  $m$  variant entre 1 et 100. Vu le principe du test, nous ne disposons pas pour cette méthode des écart-types constatés.

**Tableau 5. – Test de stationnarité pour la variance des incréments. Nombre d'incréments stationnaires pour la variance.**

| $H$ | MID | FRI | CHO | WMA | OND |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 0.2 | 99  | 100 | 99  | 100 | 100 |
| 0.5 | 100 | 98  | 100 | 99  | 97  |
| 0.8 | 97  | 96  | 95  | 99  | 96  |

Comme pour la moyenne, la stationnarité pour la variance est satisfaisante pour toutes les méthodes.

## 5.3. test de similarité des incréments

Nous prenons comme précédemment  $L = 100$ . Conformément au tableau 1, le nombre de classes est égal à 27. Le nombre de contraintes est réduit à 1 car les bornes des intervalles sont calculées à partir des estimations de la moyenne et de l'écart-type pour  $m = 1$ . Dans ce cas, la borne du test vaut  $\chi_{26,0.01}^2 = 45.64$ . Pour des pas incrémentaux de 2 à 100, le tableau 6 donne le pourcentage moyen sur les instants et sur les pas qui ont des incréments similaires avec l'incrément calculé pour un pas de 1.

**Tableau 6. – Test de similarité des incréments. Pourcentage avec écart-types constatés des incréments similaires avec l'incrément calculé pour  $m = 1$ . Les valeurs inférieures à 95% sont reportées sur fond grisé.**

| $H$ | MID         | FRI         | CHO        | WMA        | OND         |
|-----|-------------|-------------|------------|------------|-------------|
| 0.2 | 28.8 ± 12.3 | 10.6 ± 12.6 | 98.7 ± 0.5 | 96.6 ± 2.6 | 34.2 ± 8.1  |
| 0.5 | 99.3 ± 0.5  | 91.5 ± 1.5  | 98.2 ± 0.7 | 98.3 ± 0.6 | 88.6 ± 2.0  |
| 0.8 | 82.3 ± 10.0 | 90.1 ± 10.5 | 99.1 ± 0.6 | 99.4 ± 0.6 | 45.8 ± 27.2 |

Le test de similarité est le plus sélectif des trois. En effet, seules deux méthodes donnent des résultats corrects pour les valeurs de

$H$  testées : la synthèse par décomposition de Cholesky et celle par la fonction de Weierstrass–Mandelbrot.

Concernant les autres méthodes, certains résultats médiocres peuvent être expliqués.

Pour la méthode du « midpoint displacement », les incréments sont similaires uniquement pour  $H = 0.5$ . La différence de comportement entre  $H = 0.2$  et  $H = 0.8$  peut s'expliquer par un écart moindre pour les grandes valeurs de  $H$  entre la variance théorique et celle obtenue comme nous l'avons montré dans la section 4.1.

En ce qui concerne la méthode de synthèse par transformée de Fourier rapide inverse, les mauvais résultats pour  $H$  petit s'expliquent par la troncature du spectre due à la méthode de calcul par transformée de Fourier rapide. Un calcul plus précis mettant en œuvre une transformée de Fourier discrète avec beaucoup plus de points en haute fréquence conduit à des résultats proches de ceux obtenus par la fonction de Weierstrass–Mandelbrot. Ceci n'est pas étonnant car la seule différence entre les 2 méthodes est liée à la répartition des fréquences (linéaires ou en puissance) servant à la synthèse.

Enfin, les résultats obtenus par la méthode de synthèse par ondelettes sont médiocres. L'effet de bord lors du filtrage dû à la troncature des signaux n'est pas en cause : une synthèse de signaux de 8192 échantillons dont seuls les 1000 échantillons centraux ont été conservés donne des résultats identiques. De même, la taille du filtre a une faible influence. La méconnaissance du signal de forme de départ est la principale cause. L'utilisation de méthodes mixtes (signal de forme créé par une autre méthode de synthèse puis construction itérative par ondelettes) semblerait apporter une nette amélioration [30].

## 5.4. synthèse des résultats

Afin de pouvoir classer ces méthodes, nous proposons ici de considérer l'indicateur qui consiste à ne garder que le minimum des résultats obtenus par les différents tests (tableau 7).

**Tableau 7. – Indicateur global de qualité.**  
Les valeurs inférieures à 95% sont reportés sur fond grisé.

| $H$ | MID  | FRI  | CHO  | WMA  | OND  |
|-----|------|------|------|------|------|
| 0.2 | 28.8 | 10.6 | 98.1 | 96.6 | 34.2 |
| 0.5 | 99.3 | 91.5 | 96.4 | 98.3 | 88.6 |
| 0.8 | 82.3 | 73.9 | 95.0 | 94.6 | 45.8 |

Ce tableau montre que les valeurs les plus fortes de l'indicateur de qualité sont pour  $H = 0.5$  et les plus faibles pour  $H = 0.2$ .

Seules 2 méthodes génèrent des signaux fBm pour les valeurs de  $H$  testées : CHO et WMA.

La méthode de synthèse par la fonction de Weierstrass–Mandelbrot étant moins exigeante en espace mémoire, elle permet de générer des signaux de plus grande longueur. Par contre, pour de nombreuses réalisations de même  $H$ , la synthèse par décomposition de Cholesky est plus rapide.

## 5.5. application aux signaux physiques

La méthode présentée, basée sur des tests statistiques ensemblistes, est bien adaptée pour qualifier des méthodes de synthèse où le nombre de réalisations indépendantes n'est pas limité. Son application à des signaux physiques pose plusieurs problèmes liés principalement au nombre de réalisations et à leur indépendance.

Si l'on ne possède qu'une seule réalisation, il est difficile de tester la normalité directement car le processus est non stationnaire. Ce test peut être remplacé par un test de normalité sur les incréments supposés stationnaires et ergodiques. Une difficulté subsiste : les échantillons des incréments ne sont pas indépendants et il faut alors employer des tests adaptés. De la même manière, les tests de stationnarité et d'auto-similarité doivent tenir compte de cette dépendance. Des tests fiables nécessitent une longueur de signal importante.

Plusieurs applications ont été développées. La première a consisté à déterminer si le modèle fBm peut être appliqué à des images de textures osseuses obtenues par radiographies [39]. Pour cela, le processus modélisé correspond à un ensemble de lignes d'image prise sur un site osseux particulier. On peut ainsi obtenir plusieurs réalisations quasi-indépendantes (une par radiographie). Les résultats ont montré que le modèle ne s'appliquait que sur une échelle très limitée confirmant d'autres études [40]. Une application plus générale a été faite sur un ensemble de textures naturelles à partir d'images uniques, cela a nécessité une redéfinition des indices de qualité car l'indépendance entre les réalisations n'est pas respectée [41].

## 6. conclusion

Dans cet article, nous avons présenté une méthode permettant d'évaluer la qualité relative des méthodes de synthèse du mouvement brownien fractionnaire. La méthode proposée est basée sur les trois conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un processus aléatoire soit de type fBm. Les tests statistiques qui en découlent consistent à vérifier la normalité du processus, la stationnarité et la similarité de ses incréments.

Les résultats obtenus montrent que seules la synthèse par la fonction de Weierstrass–Mandelbrot ainsi que celle par décomposition de Cholesky donnent de bons résultats.

Relativement à une méthode de synthèse donnée, cet ensemble de tests peut permettre de comprendre l'influence de chaque paramètre sur la qualité de synthèse et donc de choisir pour

chaque valeur de  $H$  un paramétrage adéquat. Ces tests ont permis de vérifier que la méthode du « midpoint displacement » n'était utilisable que pour  $H = 0.5$ . Ils ont mis en évidence qu'une synthèse par un algorithme de transformée de Fourier rapide était trop sensible aux troncatures pour être valable. Ils ont aussi permis de montrer que la qualité des synthèses par ondelettes était fortement dégradée par méconnaissance du signal de forme. Ces tests sont applicables à d'autres méthodes de synthèse. Ils pourront ainsi déterminer si il existe des méthodes plus précises que celles sélectionnées et dans quelles conditions elles doivent être utilisées.

En ce qui concerne une validation pratique des méthodes d'analyse, cet article apporte des réponses relativement au choix des méthodes de synthèse à utiliser pour cette validation. Seules les deux méthodes citées précédemment parmi les 5 testées peuvent être employées.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] B.B. Mandelbrot, J.W. Van Ness, « Fractional Brownian Motion, Fractional Noises and Applications », *SIAM*, Vol. 10, N°4, 1968, pp. 422–438.
- [2] A.I. McLeod, K.W. Hipel, « Preservation of the Rescaled Adjusted Range : A Reassessment of the Hurst Phenomenon », *Water Resources Research*, Vol. 14, N°3, June 1978, pp. 491–508.
- [3] K.R. Sreenivasan, « Fractals in Fluid Mechanics », *Fractals*, Vol. 2, N°2, June 1992, pp. 253–263.
- [4] C.W.J. Granger, « The Typical Spectral Shape of an Economic Variable », *Econometrica*, N°34, 1966, pp. 150–161.
- [5] B.B. Mandelbrot, « Noises with  $1/f$  Spectrum, a Bridge Between Direct Current and White Noise », *IEEE transactions on Information Theory*, IT-13, 1967, pp. 289–298.
- [6] C.L. Benhamou, R. Harba, E. Lespessailles, G. Jacquet, D. Tourlière, R. Jennane, « Changes in Fractal Dimension of Trabecular Bone in Osteoporosis : A Preliminary Study », *Fractals in Biology and Medicine*, Birkhäuser Verlag, 1993, pp. 292–299.
- [7] W.S. Kuklinski, K. Chandra, U.E. Ruttimann, R.L. Webber, « Application of Fractal Texture Analysis to Segmentation of Dental Radiographs », *SPIE, Medical Imaging III : Image Processing*, Vol. 1092, 1989, pp. 111–117.
- [8] A.P. Pentland, « Fractal-Based Description of Natural Scenes », *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, N°6, Novembre 1984, pp. 661–674.
- [9] T. Lundahl, W.J. Ohley, S.M. Kay, R. Siffert, « Fractional Brownian Motion : A Maximum Likelihood Estimator and Its Applications to Image Texture », *IEEE Transactions on Medical Imaging*, Vol. MI-5, N°3, September 1986, pp. 152–161.
- [10] G. Jacquet, W.J. Ohley, M. Mont, R. Siffert, R. Schmuckler, « Measurement of Bone Structure by Use of Fractal Dimension », *Proceedings of the 12<sup>th</sup> Conference of the IEEE Engineering in Medicine and Biology Society*, N°12, 1990, pp. 1402–1403.
- [11] S. Peleg, J. Naor, R. Hartley, D. Avnir, « Multiple Resolution Texture Analysis and Classification », *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, Vol. PAMI-6, N°4, July 1984, pp. 518–523.
- [12] S. Hofer, H. Hannachi, M. Pandit, R. Kumaresan, « Isotropic Two-Dimensional Fractional Brownian Motion and its Applications in Ultrasonic Analysis », *Proceedings of the 14<sup>th</sup> Conference of the IEEE Engineering in Medicine and Biology Society*, N°3, 1992, pp. 1267–1269.
- [13] K.J. Falconer, « The Geometry of Fractal Sets », *Cambridge University Press*, Cambridge, 1985.
- [14] L.F. Burlaga, L.W. Klein, « Fractal Structure of the Interplanetary Magnetic Field », *Journal of Geophysical Research*, Vol. 91, N°A1, 1986, pp. 347–350.
- [15] T. Higuchi, « Approach to an Irregular Time Series on the Basis of the Fractal Theory », *Physica D*, Vol. 31, 1988, pp. 277–283.
- [16] P. Maragos, F.K. Sun, « Measuring the Fractal Dimension of Signals : Morphological Covers and Iterative Optimization », *IEEE Transactions on Signal Processing*, Vol. 41, N°1, January 1993.
- [17] S.G. Mallat, « A Theory for Multiresolution Signal Decomposition : The Wavelet Representation », *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, Vol. 11, N°7, July 1989, pp. 674–693.
- [18] N. Gache, P. Flandrin, D. Garreau, « Fractal Dimension Estimators for Fractional Brownian Motions », *Proceedings of the ICASSP*, Vol. 5, 1991, pp. 3557–3560.
- [19] P. Flandrin, « On the Spectrum of Fractional Brownian Motions », *IEEE Transactions on Informations Theory*, Vol. 35, N°1, January 1989, pp. 197–199.
- [20] J.S. Bendat, A.G. Piersol, « RANDOM DATA : Analysis and Measurement Procedures », *Wiley-Interscience*, 1986.
- [21] S. Aivazian, « Etude statistique des dépendances », *Editions de Moscou*, 1970.
- [22] B.L. Van Der Waerden, « Statistique mathématique », *Dunod*, 1967.
- [23] H.B. Mann, A. Wald, « On the Choice of the Number of Class Intervals in the Application of the Chi Square Test », *Annals of Mathematical Statistics*, September 1942, pp. 306–317.
- [24] C.A. Williams, « On the Choice of the Number and Width of Classes for the Chi Square Test of Goodness of Fit », *American Statistical Association Journal*, March 1950, pp. 77–86.
- [25] S. Aivazian, I. Enikov, L. Mechakline, « Eléments de modélisation et traitement primaire des données », *Editions MIR Moscou*, 1986.
- [26] S. Hofer, H. Hannachi, M. Pandit, R. Kumaresan, « Isotropic Two-Dimensional Fractional Brownian Motion and its Applications in Ultrasonic Analysis », *Proceedings of the 14<sup>th</sup> Conference of the IEEE Engineering in Medicine and Biology Society*, N°3, 1992, pp. 1267–169.
- [27] F. Hlawatsch, W. Krattenthaler, « Bilinear Signal Synthesis », *IEEE Transactions on Signal Processing*, Vol. 40, N°2, February 1992, pp. 352–363.
- [28] C.W. Granger, R. Joyeux, « An Introduction to long Memory Time Series Models and Fractional Differencing », *Journal of Time Series Analysis*, Vol. 1, N°1, 1980, pp. 15–29.
- [29] J.R. Hosking, « Fractional Differencing », *Biometrika*, Vol. 68, N°1, 1981, pp. 165–176.
- [30] F. Sellan, « Synthèse de mouvements browniens fractionnaires à l'aide de la transformation par ondelettes », *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, Tome 321, Série I, 1995, pp. 351–358.
- [31] A. Fournier, D. Fusselle, L. Carpenter, « Computer Rendering of Stochastic Models », *Communications of the ACM* 25, 1982, pp. 371–384.
- [32] B.B. Mandelbrot, « Comment on Computer Rendering of Fractal Stochastic Models », *Communications of the ACM* 25, 1982, pp. 581–583.
- [33] M.F. Barnsley, R.L. Devaney, B.B. Mandelbrot, H.O. Peitgen, D. Saupe, R.F. Voss, « The Science of Fractal Images », *Springer-Verlag*, 1988.
- [34] M.V. Berry, Z.V. Lewis, « On the Weierstrass-Mandelbrot Fractal Function », *Proceedings of the Royal Society of London*, A 370, 1980, pp. 459–484.
- [35] G.W. Wornell, « A Karhunen-Loève-Like Expansion for  $1/f$  Processes via Wavelets », *IEEE Transactions on Information Theory*, Vol. 36, N°4, July 1990, pp. 859–861.
- [36] P. Flandrin, « Wavelet Analysis and Synthesis of Fractional Brownian Motion », *IEEE Transactions on Information Theory*, Vol. 38, N°2, March 1992, pp. 910–917.
- [37] W.H. Press, S.A. Teukolsky, W.T. Vetterling, B.P. Flannery, « Numerical Recipes in C », *Cambridge University Press*, 1992.

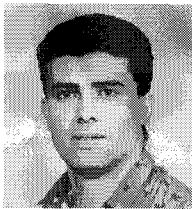
## Estimation de la qualité

- [38] I. Daubechies, « Orthonormal Bases of Compactly Supported Wavelets », *Communications on Pure and Applied Mathematics*, Vol. XLI, 1988, pp. 909–996.
- [39] R. Jennane, « Modélisation fractale de textures : application à l'analyse de l'architecture osseuse », *Thèse de l'Université d'Orléans*, 1995.
- [40] R. Harba, G. Jacquet, R. Jennane, T. Loussot, C.L. Benhamou, E. Lespessailles, D. Tourlière, « Determination of Fractal Scales on Trabecular Bone X-Ray Images », *Fractals*, Vol. 2, 1994, pp. 451–456.
- [41] R. Jennane, R. Harba, « Fractional Brownian Motion : A Model for Image Texture », *EUSIPCO, Signal Processing*, Vol. 3, September 1994, pp. 1389–1392.

*Manuscrit reçu le 20 Avril 1995.*

### LES AUTEURS

#### Rachid JENNANE



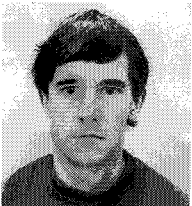
Rachid Jennane a obtenu en 1992 un Diplôme d'Études Approfondies en Automatique et Génie Informatique avec une spécialisation en Traitement du Signal et de l'Image à l'Université d'Orléans. En 1995, il a soutenu dans cette même université une thèse de Doctorat sur la modélisation fractale de textures avec une application à l'analyse de l'architecture osseuse. Actuellement, il continue ses recherches au Laboratoire d'Électronique, Signaux, Images (LESI) de l'Université d'Orléans en temps qu'Attaché Temporaire d'Enseignement et de Recherche.

#### Rachid HARBA



Rachid Harba est un ancien élève de l'ENSET Cachan où il a obtenu son agrégation en génie électrique en 1983. Il a ensuite passé une thèse au Laboratoire d'Électrotechnique de Grenoble en 1985 sur la conception de machines électriques. Depuis 1987, il est Maître de Conférences à l'Université d'Orléans et effectue ses recherches au LESI en traitement du Signal et des Images. Il s'est d'abord intéressé à l'analyse d'images de pierres puis à des méthodes de caractérisation de textures appliquées au domaine médical. Il est membre du GDR ISIS.

#### Gérard JACQUET



Diplômé de l'ENSER Bordeaux (80), Gérard Jacquet a soutenu en 1985 sa thèse de Docteur Ingénieur au LERM (Clermont-Ferrand) sur une application industrielle du Traitement d'Images. Assistant, puis Maître de Conférences à l'Université d'Orléans jusqu'en 1995, ses travaux de recherche au LESI en Électronique et Traitement du Signal et des Images l'ont conduit à s'intéresser à l'analyse de textures appliquée au domaine biomédical. Actuellement, il travaille au laboratoire TSI dans le groupe « Systèmes de Vision pour l'Étude des Mouvements ».