

Amélioration du filtre de Canny Deriche pour la détection des contours sous forme de rampe.

An Improvement of Canny-Deriche Filter for Ramp Edge Detection

par E. Bourennane, M. Paindavoine et F. Truchetet

(membres du GRECO de traitement du Signal et des Images – GDR 134)

Université de Bourgogne, Laboratoire GERE,
6, bd Gabriel, 21000 Dijon, France
Tél : 80 39 60 43 – Fax : 80 39 50 66

Résumé

Nous présentons dans cet article une généralisation du filtre de Canny-Deriche pour des contours d'images non idéaux.

Les critères d'optimisation pour le calcul du filtre sont ceux développés par Canny (rapport signal sur bruit, localisation et réponse multiple), mais appliqués à un modèle de contour de type exponentiel.

Le filtre obtenu est de type récursif d'ordre 3, ses performances illustrent une amélioration de 20% par rapport au filtre de Deriche en ce qui concerne le rapport signal sur bruit dans le cas d'images floues et bruitées.

Mots clés : Détecteur de contours, Contour sous forme de rampe, Calcul variationnel, Filtres optimaux, Filtre récursif.

Abstract

We present in this paper a generalization of the Canny-Deriche filter for ramp edge detection.

The optimisation criteria are those used by Canny (Signal to noise ratio, Localization and multiple response).

The recursive implementation of the filter gives a stable third order filter and its performances show an increasing of the signal to noise ratio about 20% in the case of blurred and noisy images in comparison with the Deriche filter.

Key words : Edge detector, Ramp edges, Variational approach, Optimal filters, IIR filters.

1. Introduction

La détection de contours est l'une des opérations de base de tout système de vision artificielle (reconnaissance de caractères, détection de défauts sur des pièces industrielles...). Les contours caractérisent une variation brusque et large des niveaux de luminance dans une image. La détection de ces variations de luminance et la localisation de ces variations ont fait l'objet de nombreuses publications. Les méthodes de gradient (Gradient, Laplacien et autres filtres passe-haut : Sobel, Prewitt...) sont des méthodes classiques qui donnent des résultats satisfaisants dans le cas d'images faiblement bruitées. Par contre les performances de tels opérateurs chutent rapidement si l'image est bruitée. Ce problème a conduit les chercheurs à développer différents opérateurs optimaux associant un filtrage passe-bas au détecteur de contour proprement dit. Nous rappelons, ci-après, les principales étapes de ces recherches.

Dans le premier filtre optimal proposé par Modestino et Fries [1] en 1977 le contour à détecter est représenté par un modèle stochastique. Le critère d'optimisation choisi est la minimisation de l'erreur quadratique moyenne du filtre spatial ce qui conduit à un filtre de Wiener. L'implantation sous forme récursive de ce filtre donne de bons résultats; on peut cependant émettre quelques critiques concernant le choix du Laplacien comme détecteur de contour idéal dans le cas d'images non bruitées.

Shanmugam, Dickey et Green [2] proposent ensuite (1979) un filtre qui maximise l'énergie du signal au voisinage des contours en se donnant un intervalle de résolution et la bande passante du filtre recherché (pour limiter le bruit). Le filtre obtenu ne conduit pas à une bonne localisation des contours car l'approximation asymptotique utilisée est incorrecte.

Comme la dérivation des fonctions numériques est un problème mal posé, Haralik [6] propose en 1984 d'utiliser des polynômes orthogonaux pour la représentation des signaux numériques (in-

terpolés par une famille de masques) sous forme continue. La dérivation est ensuite effectuée dans la direction du gradient. Dans la lignée des travaux d'Haralick, on peut citer Grimson et Hildreth [7] en 1985 ou encore Torre et Poggio [8] qui, en 1986, ont donné une théorie complète de la dérivation d'un signal numérique.

Shen et Castan [4] développent en 1986 un filtre sous forme exponentielle pour détecter les contours en forme échelon unité; ce filtre étant suivi d'une dérivée seconde. Pour la réalisation de leur filtre, ils proposent une implantation sous forme récursive (filtre d'ordre 1). Les résultats obtenus montrent une bonne résistance au bruit et une bonne localisation des contours.

Le premier à donner des expressions analytiques pour les trois critères les plus utilisés en détection de contours est Canny [9] en 1986. Il formalise, dans le cas d'un contour bruité le rapport signal sur bruit après détection, un paramètre caractérisant la bonne localisation du contour détecté et un critère sensible aux réponses multiples du détecteur.

L'application de ces trois critères à un contour idéal (sous forme d'échelon) lui permet de développer un filtre optimal. Etant donnée la complexité de mise en œuvre de ce filtre Canny propose d'en utiliser une approximation : la première dérivée d'une gaussienne.

Une extension du filtre à bande limitée de Canny, est proposée par Deriche en 1987 [11] et [5]. Pour éviter la troncature de son filtre, Deriche utilise une implantation récursive d'ordre 2. Les résultats obtenus montrent une grande amélioration par rapport à ceux obtenus par Canny en particulier pour la réduction des réponses multiples.

Les auteurs précédemment cités ont basé leurs théories sur la détection d'un contour idéal en marche d'escalier qui ne correspond pas au cas des images réelles; ceci a conduit Petrou et Kittler [13] à proposer en 1991 un filtre optimum pour un contour plus général. L'optimisation est menée en utilisant les critères définis par Canny. Le résultat est donné sous forme d'une table de masques basés sur la troncature de la réponse impulsionnelle du filtre. Les résultats présentés sont hélas largement incomplets en ce qui concerne les performances obtenues pour différentes pentes du contour en particulier. De plus, il apparaît que la comparaison de leur filtre avec celui de Deriche est biaisée par un mauvais choix des paramètres de ce dernier filtre.

Nous nous proposons de reprendre l'étude précédente en utilisant le même modèle de contour mais en menant de façon plus rigoureuse la phase d'optimisation; nous montrons, en particulier, que la méthode utilisée par [13] n'est pas la meilleure. Notre étude nous conduit à proposer un filtre récursif d'ordre 3 qui améliore sensiblement les performances de détection (au sens des critères de Canny) par rapport à un filtre de type Deriche (optimisé correctement pour le contour choisi) et par rapport au filtre de Petrou et Kittler.

Le présent article est organisé comme suit : dans la partie 2 nous présentons le modèle de contour ainsi que les critères d'optimisation. En partie 3 nous donnons les éléments du calcul du filtre. En partie 4, nous discutons le choix des paramètres. En partie 5 nous traitons le cas du filtre de Deriche (la pente du contour tend vers l'infini) et nous montrons les limites de ses performances, puis nous effectuons une comparaison du filtre avec le filtre que nous proposons. En partie 6 nous présentons

l'implantation de ce filtre sous forme récursive. En partie 7 nous développons l'extension à deux dimensions de ce filtre. En partie 8 nous analysons les résultats obtenus et en partie 9 nous présentons la conclusion et les perspectives de cette étude.

2. Modèle de contour et Critères d'optimisation du détecteur

2.1. CONTOUR RÉEL

L'acquisition d'une scène réelle, en relief, par une caméra implique la présence d'un certain flou, on admet, en général, que ce flou est correctement modélisé par un filtrage gaussien de l'image; le résultat, pour les contours est une loi de type erf pour laquelle les calculs explicites sont difficiles, voir impossibles. De plus le flou des contours réels peut avoir d'autres causes (mouvements d'objets dans la scène, faible résolution de l'imageur, éclairage diffus,...) c'est pourquoi le modèle choisi ne pourra, de toute façon, les représenter qu'approximativement.

Pour des raisons liées essentiellement à la simplicité du calcul, nous choisissons la fonction contour suivante :

$$C(x) = \begin{cases} 1 - \frac{e^{-sx}}{2} & \text{pour } x \geq 0 \\ \frac{e^{sx}}{2} & \text{pour } x < 0 \end{cases} \quad (1)$$

avec $S > 0$.

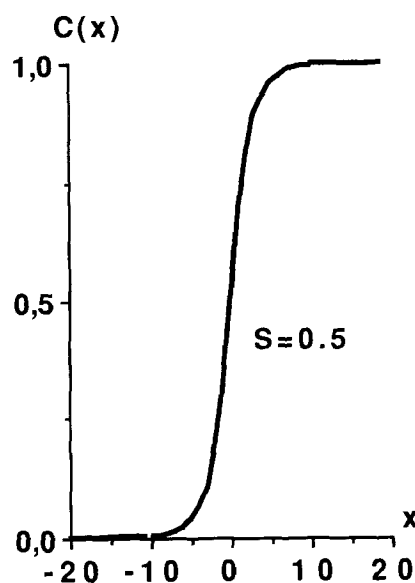


Figure 1. - Contour sous forme exponentielle avec $s = 0,5$.

Cette fonction est une approximation au premier ordre de la majorité des contours rencontrés en traitement d'images réelles et correspond au filtrage par la fonction passe bas définie en (2) du contour idéal suivant le schéma 1.

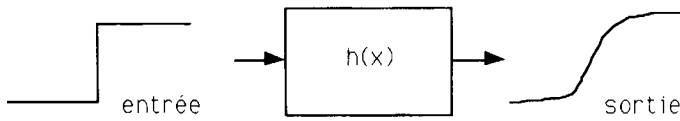


Schéma 1.

avec

$$h(x) = \frac{s}{2} e^{-s|x|} \quad \text{et} \quad H(\omega) = \frac{s^2}{s^2 + \omega^2} \quad (2)$$

Spacek [14] a critiqué l'idée de rechercher des détecteurs de contours adaptés et paramétrés, car ceci implique la connaissance de la forme du contour avant sa détection; ce problème est aussi celui du choix de l'échelle convenable à la détection de tel ou tel contour. Dans notre cas, la difficulté est limitée par le fait que notre contour dépend d'un seul paramètre «*s*» qui, nous le verrons, est directement lié à l'échelle du filtre. De plus, comme [13], on peut considérer, pour le flou dû à la prise de vue, que «*s*» est une caractéristique de la caméra et qu'il n'est donc pas nécessaire de le déterminer pour chaque contour séparément; il sera le même pour tous les contours idéaux rendus flous par la même caméra.

2.2. CRITÈRES D'OPTIMISATION

Nous cherchons un filtre réel, linéaire et pour commencer, à une seule dimension. Comme on s'intéresse aux maxima locaux à la sortie de ce filtre, celui-ci doit vérifier les conditions suivantes [8] :

- sa réponse impulsionnelle doit être impaire : $f(x) = -f(-x)$ d'où $f(0) = 0$;
- sa réponse impulsionnelle doit s'annuler à $\pm\infty$ et de préférence elle ne doit avoir qu'un seul zéro (le maximum de la réponse indicielle doit être unique : $f(0) = 0$).

Les critères d'optimisation que nous utilisons ici, sont les mêmes que ceux donnés par Canny [9] et par Petrou et Kittler [13].

- Pour le rapport signal sur bruit :

Le signal utile est le contour défini en (1), le bruit est supposé additif, blanc, gaussien et centré (cette hypothèse est correcte dans la plupart des cas courants d'images bruitées, mais est évidemment fautive dans le cas d'images texturées).

Le facteur RSB en $x = 0$, est alors donné par (3).

$$\text{RSB} = \frac{\left| \int_{-\infty}^{+\infty} C(-x)f(x)dx \right|}{n_0 \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(x)dx \right)^{\frac{1}{2}}} = K_1 \Sigma \quad (3)$$

n_0^2 étant la valeur de la densité spectrale de puissance du bruit blanc, $K_1 = \frac{1}{\sqrt{2}n_0}$ et Σ est la partie variable qui doit être rendue

maximum lors de l'optimisation.

$$\Sigma = \frac{\left| \int_{-\infty}^0 f(x)(1 - e^{sx})dx \right|}{\left(\int_{-\infty}^0 f^2(x)dx \right)^{\frac{1}{2}}} \quad (4)$$

- Pour la localisation :

Ce critère doit caractériser l'écart moyen entre la position du contour détecté en présence de bruit et sa position exacte. Pour avoir une expression à rendre maximum, Canny [9], considère la localisation comme étant l'inverse de la variance de la position du contour détecté. Le paramètre L' défini par l'expression (5) doit être le plus grand possible [9], [13].

$$L' = \frac{\left| \int_{-\infty}^{+\infty} C'(-x)f'(x)dx \right|}{n_0 \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f'^2(x)dx \right)^{\frac{1}{2}}} = K_1 L \quad (5)$$

Dans notre cas L s'écrit comme (6).

$$L = \frac{s^2 \int_{-\infty}^0 f(x)e^{sx} dx}{\left(\int_{-\infty}^0 f'^2(x)dx \right)^{\frac{1}{2}}} \quad (6)$$

- Pour le critère de suppression des réponses multiples :

En présence de bruit le signal détecté peut présenter plusieurs maxima, ces réponses parasites doivent être aussi éloignées que possible de la réponse principale. Le paramètre MRC, défini par l'expression (7) est proportionnel à la distance moyenne entre les maxima de la réponse du filtre à un bruit blanc gaussien; MRC doit donc être rendu maximum [9], [13].

$$\text{MRC} = \left(\frac{\left| \int_{-\infty}^0 |f'^2(x)| dx \right|}{\int_{-\infty}^0 |f''^2(x)| dx} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (7)$$

Le filtre optimum est, celui qui rend maximum chacun des trois critères. Pour des raisons de simplification de calculs. Canny [9] a proposé la maximisation du produit ($\text{RSB} \cdot L'$) sous la contrainte MRC qui est affectée à une constante arbitraire.

Il faut noter que Tagarre et De Figueiredo [10] ont proposé une modification du critère de localisation de Canny. Leur critère est basé sur une étude probabiliste du nombre de passages par zéro de la dérivée de la réponse du filtre au signal bruité. La forme du critère qu'ils proposent concerne uniquement les contours idéaux et leur méthode n'est donc pas générale. D'autre part Sarkar et K. Boyer [12] ont proposé la modification du critère de suppression des réponses multiples, en introduisant la notion de bande équivalente (dans le domaine spatial). Par une technique de calcul variationnel, ils développent un filtre (table de valeurs représentant les paramètres du filtre) difficile à mettre en œuvre. C'est

pour cette raison qu'ils proposent sans justification théorique une implantation récursive d'un filtre d'ordre 3.

Nous allons voir que rendre maximum le produit (RSB·L'·MRC), comme c'est le cas en [12], donne des résultats moins performants que si on rend maximum uniquement (RSB·L') sous la contrainte MRC. Mais avant de passer à cette comparaison, nous devons d'abord calculer le filtre recherché.

3. Calcul du filtre optimum

L'optimisation ne concerne que les parties variables des trois critères. On choisit de rendre maximum le produit $\Sigma \cdot L$ sous la contrainte MRC. Ainsi on transforme le problème d'optimisation en un problème sous contraintes qui utilisant le calcul variationnel [18], demande le calcul d'une fonctionnelle dans le domaine des fonctions admissibles. L'une des intégrales de l'expression $\Sigma \cdot L$ sera à optimiser, alors que les autres seront affectées à des contraintes indéterminées.

On choisira de minimiser l'intégrale du dénominateur du produit $\Sigma \cdot L$ (7) sous les contraintes C_1, C_2, C_3 et C_4 (8) :

$$\int_{-\infty}^0 f^2(x) dx \quad (7)$$

$$\begin{aligned} C_1 &= \int_{-\infty}^0 f(x)(1 - e^{sx}) dx & C_2 &= \int_{-\infty}^0 f(x)e^{sx} dx \\ C_3 &= \int_{-\infty}^0 f''^2(x) dx & C_4 &= \int_{-\infty}^0 f'^2(x) dx \end{aligned} \quad (8)$$

Les $C_i (i = 1 - 4)$ sont des constantes arbitraires. En utilisant la méthode des multiplicateurs de Lagrange [18], on peut former la fonction composite (9) :

$$\begin{aligned} Z(x, f, f', f'') &= f^2(x) + \lambda_1 f'^2(x) + \lambda_2 f''^2(x) \\ &+ \lambda_3 f(x)e^{sx} + \lambda_4 f(x)(1 - e^{sx}) \end{aligned} \quad (9)$$

Cette fonction doit vérifier l'équation d'Euler qui permet d'établir une équation différentielle dont $f(x)$ est la solution. L'annexe 1 donne les détails concernant cette équation et sa résolution. La forme générale obtenue pour $f(x)$ est (10) :

$$f(x) = a_1 e^{\alpha x} \sin \omega x + a_2 e^{\alpha x} \cos \omega x - a_2 e^{sx} \text{ avec } x \leq 0 \quad (10)$$

on remarque que si «s» tend vers l'infini (le contour devient idéal) alors a_2 (11) s'annule et on retrouve le résultat de Deriche [11] équation (12).

$$a_2 = \frac{\frac{1}{2} \lambda_3}{1 + s^2(s^2 \lambda_2 - \lambda_1)} \text{ avec } \lambda_1 = \text{constante} \quad (11)$$

$$f(x) = a_1 e^{\alpha x} \sin \omega x \quad (12)$$

En remarquant que l'optimisation ne caractérise $f(x)$ qu'à un facteur près et moyennant un changement de nom des paramètres (pour $a_2 \neq 0$) on peut écrire $f(x)$ comme en (13).

$$f(x) = k e^{\alpha x} \sin \omega x + e^{\alpha x} \cos \omega x - e^{sx} \text{ avec } x \leq 0 \quad (13)$$

Donc, pour un «s» donné, l'optimisation de notre fonction (filtre) ne dépendra que de k et des valeurs α, ω . Les expressions de L, Σ, MRC correspondant à $f(x)$ sont données en annexe 2.

Remarque : comme on souhaite que $f(x)$ n'ait qu'un passage à 0, $1/\omega$ devra être choisi grand par rapport à la taille de l'image.

4. Choix des paramètres du filtre

La façon la plus générale de choisir ces paramètres, est de tracer la surface $L \cdot \Sigma(s, \alpha, \omega, k)$ et de choisir pour chaque «s», le triplet (α, ω, k) qui donne la plus grande valeur à cette surface. En fait cette façon d'optimiser est difficilement exploitable en pratique car le nombre de variables est trop grand. Nous proposons une approche plus simple qui privilégie, dans un premier temps, la localisation pour obtenir, finalement, une solution pratique sans doute assez proche de l'optimum global.

Nous pouvons, en effet, simplifier le problème en déterminant la valeur k_{\max} de k qui rend L maximum. Nous vérifions ensuite qu'un choix de k optimum pour Σ détériore très fortement la valeur de L ; nous supposons donc que k_{\max} est proche de l'optimum pour le produit $L \cdot \Sigma$ (le calcul analytique exact ne permet pas de déterminer une expression explicite de k_{\max} pour le produit $L \cdot \Sigma$).

La localisation de ce filtre $f(x)$ pour le contour donné est de la forme (14) :

$$L = \frac{Bk + C}{(Dk^2 + Ek + F)^{\frac{1}{2}}} \quad (14)$$

On calcule k qui rend L maximum, par $\frac{dL}{dk} = 0$, ce qui donne immédiatement (15) :

$$k_{\max} = \frac{EC - 2BF}{BE - 2DC} \quad (15)$$

Les expressions de B, C, D, E et F sont données en annexe 2.

On peut vérifier (annexe 3) que pour $\omega \ll \alpha$, k_{\max} est proportionnel à s/ω . Après avoir posé $\alpha = ms$ et dans l'approximation précédente, les calculs de L et Σ présentés en annexe 3 montrent que ces paramètres ne dépendent plus que de m et de s :

$$k_{\max} = k_0 \frac{s}{\omega} \quad L = L_0(m) \sqrt{s} \quad \text{et} \quad \Sigma = \frac{\Sigma_0(m)}{\sqrt{s}}$$

Pour chaque m , on calcule k_{\max} et on le remplace dans L , ce qui nous permet d'avoir pour chaque m , la localisation optimum et de tracer $L(m)$.

Les courbes représentant la localisation, fonction de m pour différentes valeurs de «s» sont données sur la figure 2. On constate

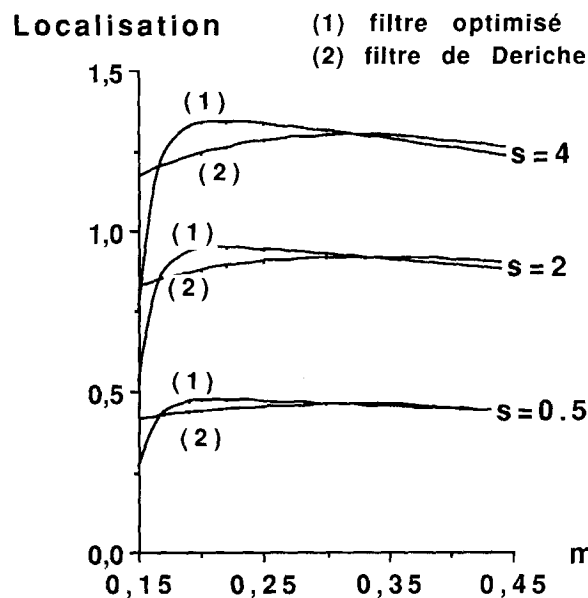


Figure 2. - Variation de la localisation en fonction de «*m*» et pour différentes valeurs de «*s*».

sur ces courbes que la localisation est limitée par un maximum, et que la meilleure valeur de *m* est située au voisinage de 0,2152 quelque soit «*s*». Les valeurs maximales de la localisation (selon *s*) varient de 0,23 à 2.

Le fait que *m* soit indépendant de *s* prouve que le filtre optimisé est une fonction d'échelle, en effet, $f(x)$, pour $\omega \ll \alpha$, est équivalent à :

$$f(x) = k_0 s x e^{msx} + e^{msx} - e^{sx} \text{ pour } x < 0$$

donc $f(x/s)$ ne dépend que de *x* et le facteur d'échelle du filtre est $1/s$. Or $1/s$ est proportionnel à «l'étendue» du contour qui est aussi une fonction d'échelle : $C(x/s)$ ne dépend que de *x*. Les performances du filtre, ou plus exactement le produit $L \cdot \Sigma$, seront donc constantes à travers les échelles.

La figure (3) représente les variations de Σ en fonction de «*m*» pour la même expression de k_{\max} donnée en (15). On remarque que le rapport signal sur bruit du filtre $f(x)$ (en $m = 0,2152$) est meilleur que celui obtenu par le filtre de Deriche au voisinage de $m = 0,33$; ceci montre que le choix de (*m*, k_{\max}) qui rend maximum la localisation, donne pratiquement de très bons résultats aussi pour le rapport signal sur bruit.

En traçant les mêmes courbes avec la valeur de *k* qui optimise Σ il s'est avéré que si Σ devient plus grand par contre la localisation devient très faible.

Nous retiendrons le résultat précédent comme étant proche de l'optimum recherché.

Remarque : l'optimisation du produit de trois critères (telle qu'elle est effectuée par Petrou et Kittler [13]) revient à prendre $\alpha = \omega$ dans la fonction du filtre $f(x)$; alors que ce cas est nettement défavorable. En effet, en traçant les courbes pour des ω croissants, nous vérifions que les performances (Σ et *L*) ne font que décroître; ce qui confirme d'ailleurs, la remarque de la section 3. C'est la

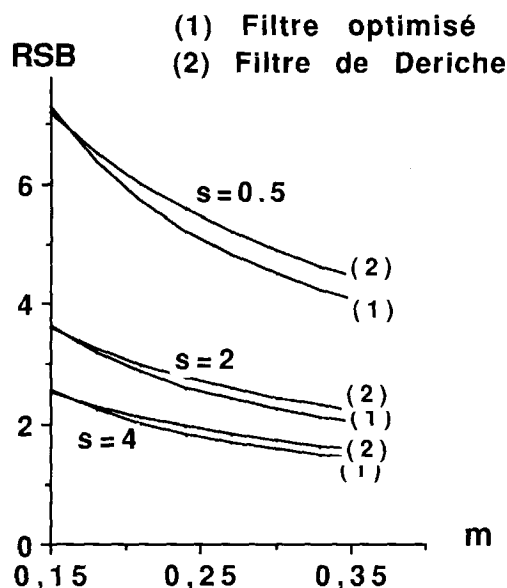


Figure 3. - Variation du rapport signal sur bruit en fonction de «*m*» et pour différentes valeurs de «*s*».

raison pour laquelle nous avons présenté uniquement les courbes pour $\omega \ll \alpha$.

5. Performances du filtre de Deriche

Nous avons vu (équation (12) paragraphe 3) que lorsque «*s*» tend vers l'infini, on retrouve le filtre proposé par Deriche [11] :

$$f(x) = be^{\alpha x} \sin \omega x$$

Ici, on étudiera les performances de ce filtre, normalement optimisé pour détecter des contours du type échelon, appliqué à un contour de type $C(x)$.

On pose $\alpha = ms$ et on se place dans l'approximation préconisée par Deriche ($\omega \ll \alpha$). Par un simple calcul de la formule (6), on trouve :

$$L = \frac{2\sqrt{m}\sqrt{s}}{(m+1)^2} \quad (16)$$

cette fonction $L(m)$ présente un maximum de localisation en $m = 1/3$, d'où $L_{\max} = 0,6495 \sqrt{s}$. La figure (2) présente aussi, pour différentes valeurs de *s*, l'allure de la localisation du filtre de Deriche lorsqu'il est appliqué à un contour non idéal ($s \neq \infty$). Lorsque l'on compare les résultats obtenus pour les deux filtres, on constate qu'ils sont limités par un maximum en localisation. Le maximum de la localisation du filtre de Deriche est situé en $\alpha = s/3$ ($m = 1/3$) alors que le maximum de localisation de notre filtre est obtenu pour $\alpha = 0,215s$. Le tableau I présente les différentes valeurs des maxima de localisation des deux filtres.

Le calcul du rapport signal sur bruit pour le filtre de Deriche, d'après la formule (3), donne :

$$\Sigma = \frac{2}{\sqrt{s}} \frac{1+2m}{\sqrt{m(m+1)^2}} \quad (17)$$

La figure (3) représente les deux rapports signal sur bruit pour les deux filtres. Pour des valeurs de m comprises en (0,215 et 0,4) on remarque que les deux (RSB) sont tangents et décroissent de la même manière suivant m . De ce fait, en nous situant en $m = 0,215$ pour avoir la meilleure localisation possible, on a un (RSB) nettement meilleur que celui du filtre de Deriche qui a L_{\max} en $m = 1/3$ (voir tableau 1).

Tableau 1. – Comparaison entre les performances des deux filtres

	m	k_0	L_0	Σ_0	$L_0\Sigma_0$
Optimum	0,215	-0,564	0,67	3,97	2,66
Deriche	0,333	-	0,65	3,25	2,11

En calculant le critère de suppression des réponses multiples pour le filtre de Deriche d'après (7) on trouve :

$$\text{MRC} = \frac{1}{\alpha\sqrt{5}} \quad (18)$$

Remarque : Le maximum du produit $\Sigma \cdot L$ (d'après les équations 16 et 17), pour le filtre de Deriche, est obtenu pour $m = -1/3$. Cette valeur est à écarter car m doit être positif. L'équation (16) montre que si la valeur de m est voisine de zéro, la localisation devient trop faible et de ce fait cause le décalage voire la suppression de certains contours. Ceci justifie le choix de la maximisation de la localisation seule.

Il est certain que la maximisation de L conduit à de meilleures performances avec le nouvel opérateur ($m = 0,215$) qu'avec celui de Deriche ($m = 0,33$). Par contre, vu l'allure des courbes $L(m)$ et $\text{RSB}(m)$, le produit $L \cdot \text{RSB}$ obtenu avec l'opérateur de Deriche sera amélioré en choisissant une valeur de m inférieure à $1/3$. Cependant cette même remarque est valable pour le filtre $f(x)$. En effet, si on admet une diminution tolérable au niveau des performances de la localisation du filtre de Deriche, on peut accepter la même tolérance pour le filtre $f(x)$. Par exemple si on accepte $m = 0,25$ (au lieu de $m = 1/3$) pour le filtre de Deriche, on obtient une localisation $L_0 = 0,64$ et un $\Sigma_0 = 3,84$. De la même façon, si on prend $m = 0,19$ (au lieu de $m = 0,215$) pour le filtre $f(x)$, on obtient une localisation $L_0 = 0,663$ et un $\Sigma_0 = 4,34$. Donc, malgré une diminution de la valeur de m (de manière à ce que certaines informations de l'image traitée demeurent localisées) la localisation ainsi que le rapport signal sur bruit du filtre $f(x)$ restent supérieurs à ceux du filtre de Deriche.

6. Implantation du filtre sous forme récursive

Le filtre que nous venons d'étudier est :

$$f(x) = ke^{\alpha x} \sin \omega x + e^{\alpha x} \cos \omega x - e^{sx} \quad \text{avec } x \leq 0$$

La normalisation de ce filtre peut être effectuée en le multipliant par une constante A, telle que :

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} A f(x) C(-x) = 1 \quad (19)$$

D'où on obtient :

$$\frac{1}{A} = \frac{1}{1-e^{-\alpha}} - \frac{1}{1-e^{-(\alpha+s)}} + k \sin \omega \left[\frac{-e^{-\alpha}}{(1-e^{-\alpha})^2} + \frac{e^{-(\alpha+s)}}{(1-e^{-(\alpha+s)})^2} \right] - \frac{e^{-s}}{1-e^{-2s}} \quad (20)$$

Nous calculons la transformée en $z(TZ)$ de $f(x)$:

$$\begin{aligned} f^-(x) &= A(ke^{\alpha x} \sin \omega x + e^{\alpha x} \cos \omega x - e^{sx}) \quad \text{avec } x \leq 0 \\ f^+(x) &= A(ke^{-\alpha x} \sin \omega x + e^{-\alpha x} \cos \omega x - e^{-sx}) \quad \text{avec } x > 0 \end{aligned} \quad (21)$$

On calcule uniquement la TZ pour la partie causale, et on déduit celle de la partie anti-causale par :

$$\begin{aligned} TZ(f^-) &= -TZ(f^+(\frac{1}{z})) \\ TZ(f^+) &= \sum_{-\infty}^{+\infty} f^+(n)z^{-n} = TZ^+ \\ TZ^+ &= \frac{a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}{1 - a_3 z^{-1} + a_4 z^{-2} - a_5 z^{-3}} = \frac{Y^+(z)}{X(z)} \\ TZ^- &= -\frac{a_1 z + a_2 z^2}{1 - a_3 z + a_4 z^2 - a_5 z^3} = \frac{Y^-(z)}{X(z)} \end{aligned}$$

avec $X(z) = TZ(x)$.

On obtient finalement le filtre récursif, stable, d'ordre 3 suivant :

$$\begin{aligned} y^+(i) &= a_1 x(i-1) + a_2 x(i-2) + a_3 y^+(i-1) \\ &\quad - a_4 y^+(i-2) + a_5 y^+(i-3) \\ y^-(i) &= -a_1 x(i+1) - a_2 x(i+2) + a_3 y^-(i+1) \\ &\quad - a_4 y^-(i+2) + a_5 y^-(i+3) \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \text{Avec : } a_1 &= A(ke^{-\alpha} \sin \omega + e^{-s} - e^{-\alpha} \cos \omega) \\ a_2 &= -A(ke^{-(\alpha+s)} \sin \omega + e^{-(\alpha+s)} \cos \omega - e^{-2\alpha}) \\ a_3 &= 2e^{-\alpha} \cos \omega + e^{-s} \\ a_4 &= e^{-2\alpha} + 2e^{-(\alpha+s)} - \cos \omega \\ a_5 &= e^{-(2\alpha+s)} \end{aligned} \quad (22)$$

7. Extension à deux dimensions

Le filtre $f(x)$ à une seule dimension présenté en section 3, permet d'obtenir la dérivée directionnelle dans la direction x . Un point de contour, dans une image 2D, est défini par son niveau de gris, sa position et l'orientation du gradient en son voisinage. Toutes les orientations sont possibles dans une image, il est donc souhaitable que notre opérateur opère d'une façon symétrique (symétrie circulaire) dans toutes les directions. Torre et Poggio [8] ont montré la nécessité d'utiliser un filtre de régularisation avant dérivation (voir aussi [16]). Sachant qu'il est difficile d'étendre d'une façon symétrique un filtre impair à 2D, alors qu'un filtre pair peut être étendu par une simple rotation, nous préférons chercher le filtre pair (de régularisation) à partir de notre filtre impair ($f(x)$). Pour ceci, on utilise la propriété de la convolution suivante :

$$f * l = \frac{d(h * l)}{dx} = \frac{dh}{dx} * l \quad \text{avec} \quad \frac{dh}{dx} = f(x) \quad \text{et} \quad l(x) : \text{l'image.}$$

En calculant l'intégrale de $f(x)$, on obtient :

$$h(x) = \frac{e^{-\alpha|x|}}{\alpha^2 + \omega^2} \left[- (k \alpha + \omega) \sin \omega|x| + (\alpha - k\omega) \cos \omega x \right] - \frac{e^{-s|x|}}{s} \quad (23)$$

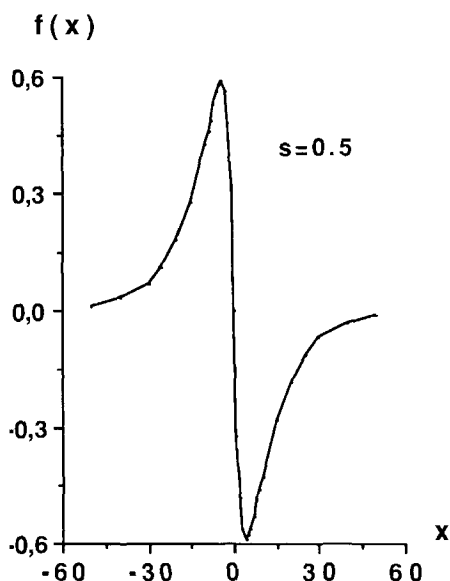


Figure 4. - La fonction $f(x)$ avec $s = 0.5$.

L'implantation récursive de cette fonction d'adoucissement (lissage) donne :

$$\begin{aligned} y^+(i) &= a'x(i) + a'_1x(i-1) + a'_2x(i-2) + a'_3x(i-3) \\ &\quad + a'_4y^+(i-1) - a'_5y^+(i-2) + a'_6y^+(i-3) \\ y^-(i) &= ax(i) + a_1x(i+1) + a_2x(i+2) \\ &\quad + a_3y^-(i+1) - a_4y^-(i+2) + a_5y^-(i+3) \end{aligned} \quad (24)$$

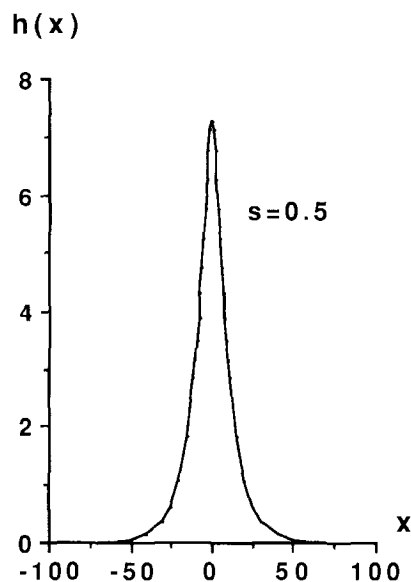


Figure 5. - La fonction d'adoucissement avec $s = 0.5$.

et $y(i) = A'[y^+(i) + y^-(i)]$; les expressions de a, a_1, a_2, \dots sont données en annexe 4.

Nous voulons garder la séparabilité de notre filtre, et en sachant que la direction d'un contour ainsi que l'amplitude du gradient peuvent être calculées dans deux directions perpendiculaires quelconques, on choisit la dérivation dans le sens x tout en effectuant le lissage suivant la direction y et vice-versa. De la séparabilité du filtre, on déduit la fonction de lissage à 2D :

$$L(m, n) = h(m) * h(n).$$

En dérivant suivant x puis suivant y on obtient :

$$\begin{aligned} L_x(m, n) &= f(m) * h(n). \\ L_y(m, n) &= h(m) * f(n). \end{aligned}$$

En convoluant ces masques avec une image $x(m, n)$, on obtient l'algorithme suivant :

$$\begin{cases} y^+(m, n) = a_1x(m, n-1) + a_2x(m, n-2) \\ \quad + a_3y^+(m, n-1) - a_4y^+(m, n-2) + a_5y^+(m, n-3) \\ y^-(m, n) = -a_1x(m, n+1) - a_2x(m, n+2) \\ \quad + a_3y^-(m, n+1) - a_4y^-(m, n+2) + a_5y^-(m, n+3) \end{cases}$$

$$y(m, n) = y^+(m, n) + y^-(m, n).$$

Avec a_i donnés par (22). $m = 0, N_1$ (indice ligne).
 $n = 0, N_2$ (indice colonne).

On effectue par la suite le lissage dans la direction y :

$$R^+(m, n) = a'_1 X(m, n) + a'_1 X(m - 1, n) + a'_2 X(m - 2, n) + a'_3 X(m - 3, n) + a'_4 R^+(m - 1, n) - a'_5 R^+(m - 2, n) + a'_6 R^+(m - 3, n).$$

$$R^-(m, n) = aX(m, n) + a_1 X(m + 1, n) + a_2 X(m + 2, n) + a_3 R^-(m + 1, n) - a_4 R^-(m + 2, n) + a_5 R^-(m + 3, n).$$

$$Ix(m, n) = R^+(m, n) + R^-(m, n).$$

Avec a'_i ($i = 1$ à 6) et a_i ($i = 1$ à 5) donnés en annexe 4.

D'une manière identique on calcule dans l'autre direction la composante $ly(m, n)$.

Pour la détection des contours, on utilise de préférence la méthode du gradient à la place du Laplacien, pour les raisons suivantes :

- Le gradient est moins sensible au bruit que le Laplacien.
- Le Laplacien tel qu'il a été proposé par Marr et Hildreth [16] crée des faux contours (voir [17]) dans le cas de coins en V et Y .

Le gradient est obtenu par la relation :

$$\left| \overrightarrow{\text{grad}}(x(m, n)) \right| = (lx^2(m, n) + ly^2(m, n))^{1/2} \approx |lx| + |ly|$$

$$\theta = \text{arc tg} \left(\frac{ly(m, n)}{lx(m, n)} \right)$$

Pour éviter les coupures des contours détectés, on effectue un seuillage par hystérésis.

8. Expériences et résultats

Les images traitées sont des images noir et blanc à 256 niveaux de gris, de format 256×256 pixels. La figure 6 représente une image réelle d'un bureau (image GRECO TDSI). Celle-ci a été noyée dans un bruit gaussien centré avec un écart type $\sigma = 127$, et l'image bruitée est donnée sur la figure 7. La figure 8 représente les contours détectés en utilisant le détecteur optimum $f(x)$ alors que la figure 9 représente ceux obtenus en utilisant le détecteur de Deriche. On remarque que la figure 9 est plus bruitée que la figure 8. Le choix du seuil dans les deux images a été fait de telle sorte qu'un même détail (un même contour) apparaisse, dans les deux figures, à partir de ce seuil.

On constate bien que pour une même quantité d'informations détectées, le détecteur de Deriche est plus sensible au bruit. Les contours sont détectés en utilisant ($s = 3, 5$ et $m = 0, 215$) pour la figure 9 et ($s = 2, 5$ et $m = 1/3$) pour la figure 8. Ce choix a été fait d'une manière expérimentale afin de trouver pour chacun des détecteurs la valeur de « s » qui permet d'obtenir la meilleure détection possible.

Puis l'image de la figure 6, a été rendue floue en utilisant un masque simple de moyennage (3×3) et bruitée par un bruit gaussien additif ($\sigma = 127$); l'image résultante est donnée en

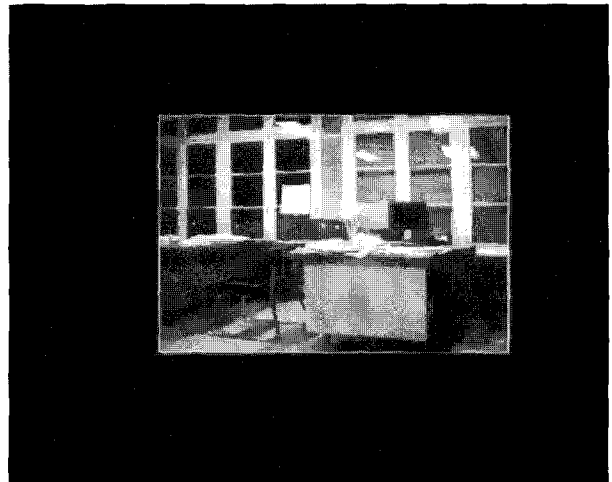


Figure 6. – Image réelle d'un bureau.

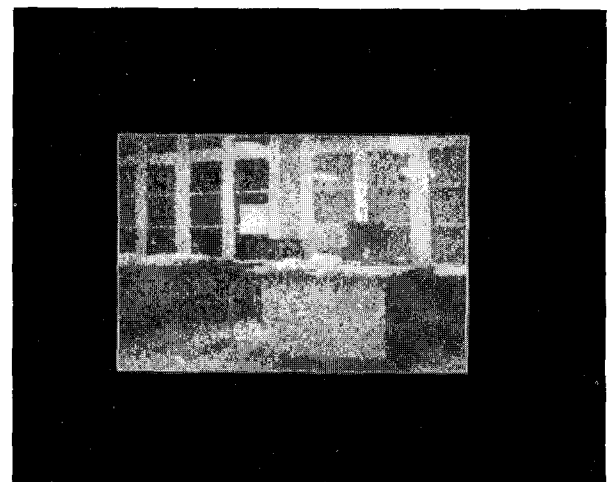


Figure 7. – Image du bureau noyée dans un bruit gaussien.

figure 10. En appliquant le détecteur que l'on vient de présenter à cette image nous obtenons les contours présentés en figure 11. La figure 12, représente les contours fournis par le détecteur de Deriche. On remarque (d'une manière subjective) que les contours détectés par le filtre de Deriche sont plus discontinus et semblent plus écartés de la position du contour réel que ceux obtenus par notre détecteur. Plus le flou est grand plus les performances du filtre de Deriche deviennent sensibles au bruit.

Ces résultats subjectifs sont confirmés par la mesure de l'indice de Pratt [19] que nous proposons sur les courbes de la figure 13.

L'image test utilisée pour la mesure est donnée à la figure 14; le contour a un profil conforme à la loi $C(x)$, le bruit est centré, gaussien et le rapport signal sur bruit est défini par C/σ où C est l'amplitude du contour et σ l'écart type du bruit. Le filtrage est suivi d'un seuillage par hystérésis dont les paramètres sont réglés au mieux (au sens de l'indice de Pratt).

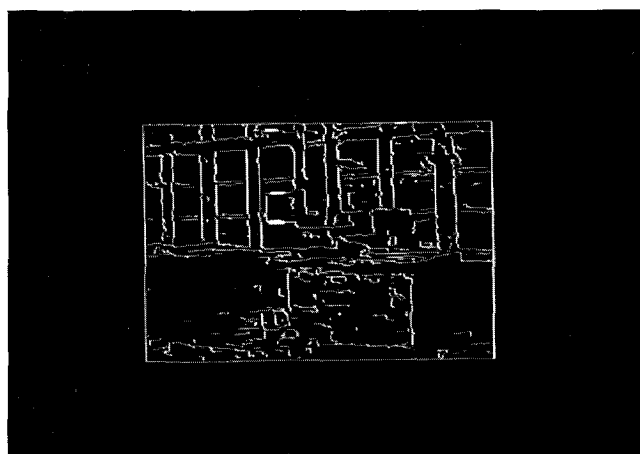


Figure 8. – Contours détectés en utilisant $f(x)$ avec $s = 3, 5$.

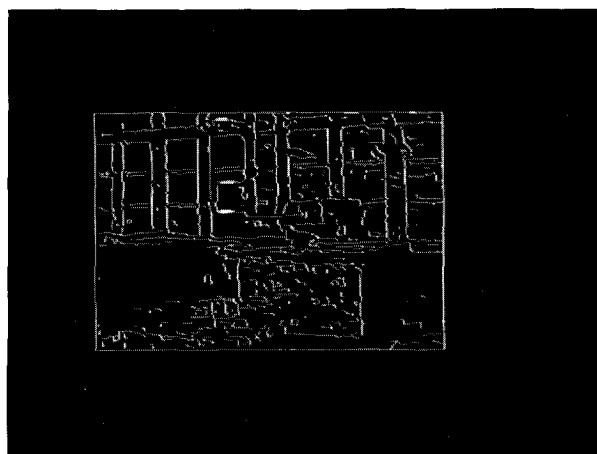


Figure 9. – Contours détectés en utilisant le filtre de Deriche avec $s = 2, 5$.

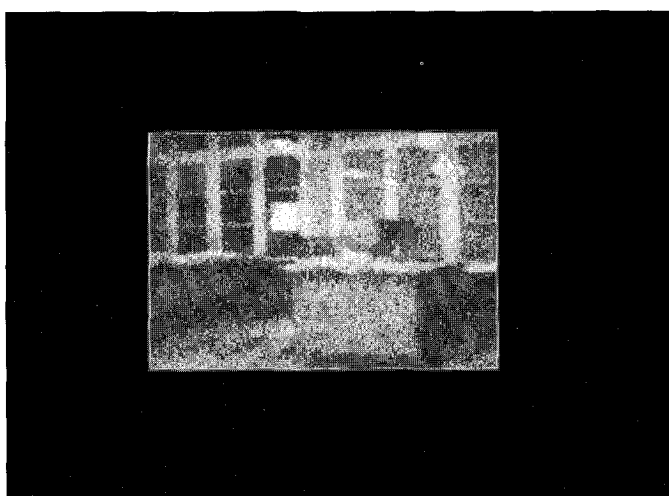


Figure 10. – Image du bureau rendue floue avec un masque

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} \end{pmatrix}$$

et noyée dans du bruit.

Nous rappelons la définition de l'indice de Pratt :

$$F = \frac{1}{\max(l_i, l_A)} \sum_{i=1}^{l_A} \frac{1}{1 + \frac{1}{9} d^2(i)}$$

avec l_i le nombre de pixels du contour idéal, l_A le nombre de pixels du contour détecté et $d(i)$ la distance entre le pixel détecté et le contour idéal.

On peut noter que le filtre optimum donne de meilleurs résultats que le filtre de Deriche pour les valeurs faibles du rapport signal sur bruit. En effet : pour un RSB de 1 l'amélioration est de 67%,

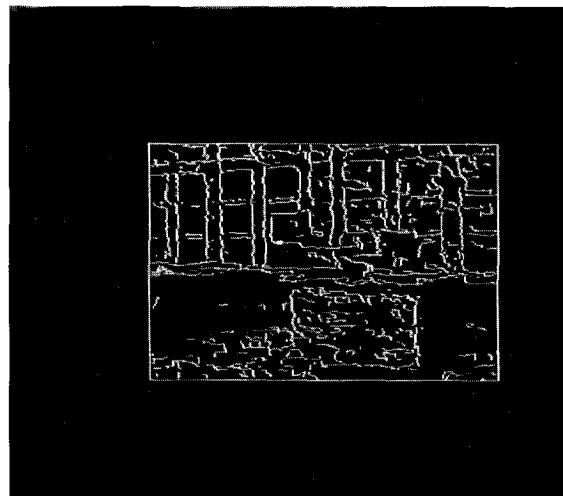


Figure 11. – Contours détectés par le filtre $f(x)$.

pour un RSB de 2 elle est de 20% et pour un RSB de 10 elle est inférieure à 1%.

Ces mesures effectuées pour $s = 0,5$ confirment les résultats théoriques (tableau 1) et l'impression subjective donnée par les images des figures 6 à 12.

9. Conclusion

Nous avons présenté dans cet article un opérateur optimal pour la détection de contours. Cet opérateur correspond à un filtre récursif

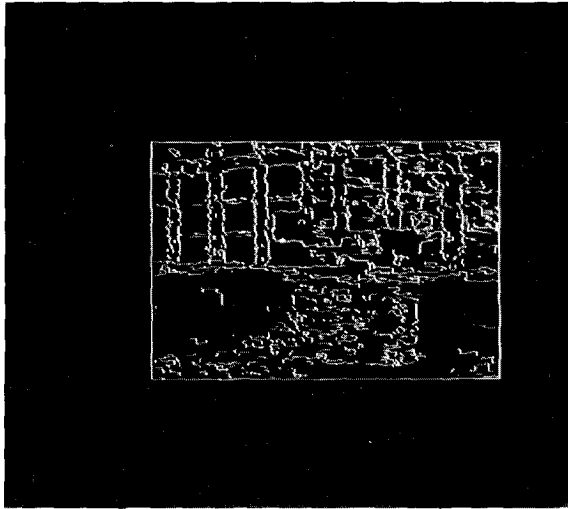


Figure 12. – Contours détectés par le filtre de Deriche.

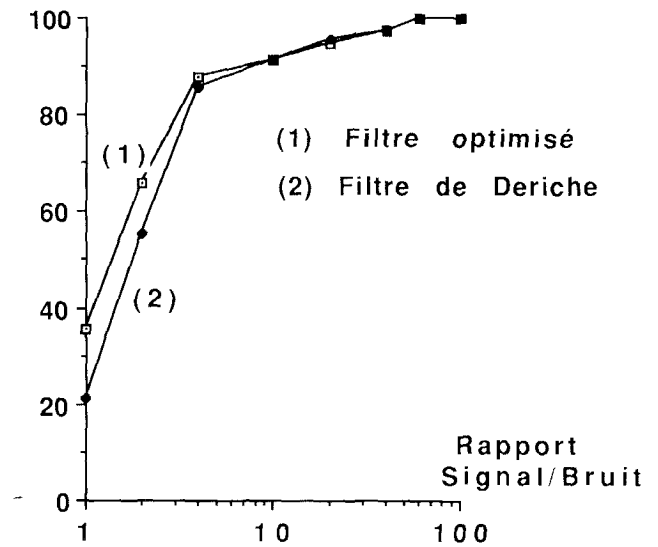


Figure 13. – Indice de Pratt.

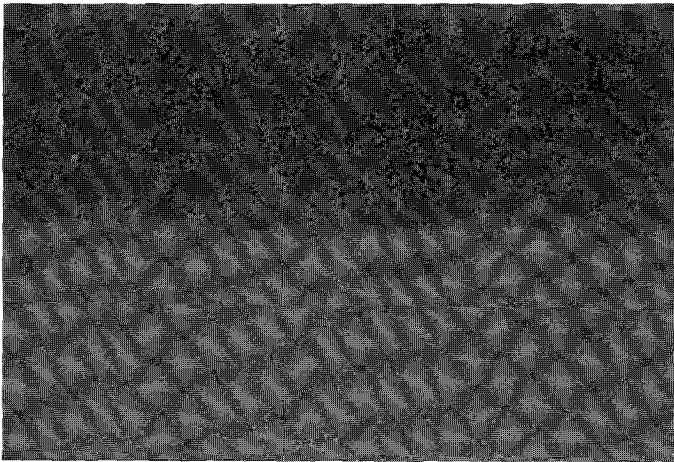


Figure 14a. – Image test pour l'indice de Pratt.

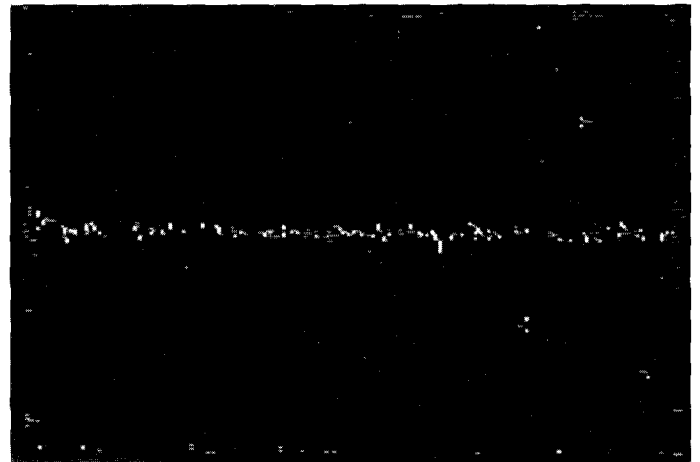


Figure 14b. – Contours détectés par le filtre $f(x)$.

d'ordre 3 et ses performances peuvent être facilement exprimées en fonction de m et ω (m détermine de largeur du filtre $f(x)$ et ω le nombre de passages par zéro du filtre $f(x)$ au voisinage de l'origine).

Nous avons montré aussi que pour un choix correct de m et de $\omega \ll \alpha$, dans le cas d'images floues et bruitées (s compris entre 0,1 et 2), notre opérateur permet d'obtenir des performances supérieures de 20% environ (pour le produit localisation \times rapport signal sur bruit) à celles obtenues par le filtre de Deriche. Ces performances sont évaluées d'une façon théorique par les critères de Canny et d'une façon pratique par l'intermédiaire de l'indice de Pratt calculé sur des images bruitées. L'intérêt de ce filtre optimum

est ainsi démontré en particulier pour les faibles rapports signal sur bruit et les contours mous (« s » petit).

L'implantation sous forme récursive de notre filtre nous a permis d'éviter de tronquer la réponse impulsionnelle de ce filtre. Ce qui facilite l'utilisation de ce filtre dans le cas d'une application à multi-échelles.

Dans le but de répondre à des applications temps réel, une intégration de notre filtre sous forme de circuit ASIC est en cours d'étude actuellement au laboratoire.

Remerciements : les auteurs remercient pour leur aide messieurs Derutin et Legrand du laboratoire d'électronique de l'université de Clermont-Ferrand ainsi que messieurs Akil et Zarka du laboratoire IAAI de l'ESIEE.

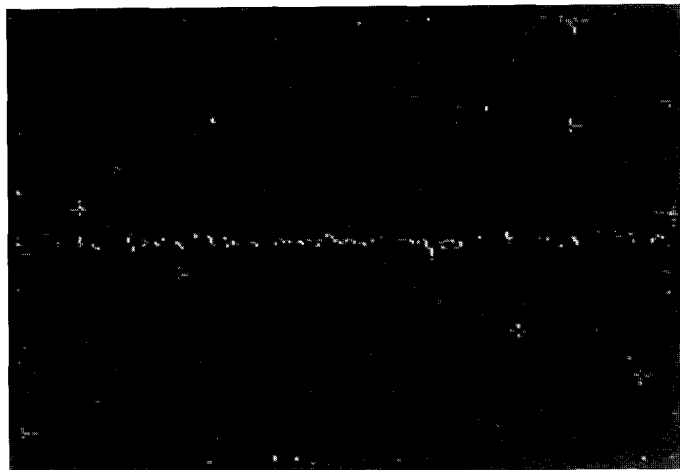


Figure 14c. – Contours détectés par le filtre de Deriche.

Les auteurs remercient les experts de la revue TS pour l'intérêt qu'ils ont porté à cet article.

ANNEXES

Annexe 1

RÉSOLUTION DE L'ÉQUATION D'EULER

$$Zf - \frac{d}{dx} Zf' + \frac{d^2}{dx^2} Zf'' = 0$$

Avec $Zf = \frac{dZ}{df} = 2f(x) + \lambda_3 e^{sx} + \lambda_4 (1 - e^{sx})$

$$Zf' = \frac{dZ}{df'} = 2\lambda_1 f' \Rightarrow -\frac{d}{dx} Zf' = -2\lambda_1 f''$$

$$Zf'' = 2\lambda_2 f'' \Rightarrow \frac{d^2 Zf''}{dx^2} = 2\lambda_2 f''''$$

en les remplaçant dans l'équation d'Euler, on obtient :

$$2f - 2\lambda_1 f'' + 2\lambda_2 f'''' = (\lambda_4 - \lambda_3)e^{sx} - \lambda_4$$

La résolution de cette équation se fait en deux étapes :

1) *Solution sans second membre :*

$$2f - 2\lambda_1 f'' + 2\lambda_2 f'''' = 0 \text{ nous conduit à :}$$

$$f_0(x) = a_1 e^{\alpha x} \sin \omega x + a_2 e^{\alpha x} \cos \omega x + a_3 e^{-\alpha x} \sin \omega x + a_4 e^{-\alpha x} \cos \omega x$$

la solution sans second membre est la même que celle obtenue par Canny [9].

2) *Solution avec second membre :*

La solution particulière est :

$$f_p(x) = \frac{(\lambda_4 - \lambda_3)e^{sx}}{2[1 + s^2(s^2\lambda_2 - \lambda_1)]} - \frac{\lambda_4}{2}$$

La solution générale est : $f(x) = f_0(x) + f_p(x)$

En appliquant les conditions aux limites, on obtient :

$$f(-\infty) = 0 \Rightarrow a_3 = a_4 = \lambda_4 = 0$$

$$\text{d'où : } f(x) = a_1 e^{\alpha x} \sin \omega x + a_2 e^{\alpha x} \cos \omega x$$

$$-\frac{\lambda_3 e^{sx}}{2[1 + s^2(s^2\lambda_2 - \lambda_1)]} x \leq 0$$

$$f(0) = 0 \Rightarrow a_2 = \frac{\lambda_3}{2[1 + s^2(s^2\lambda_2 - \lambda_1)]}$$

$$\text{D'où : } f(x) = a_1 e^{\alpha x} \sin \omega x + a_2 e^{\alpha x} \cos \omega x - a_2 e^{sx} x \leq 0$$

Annexe 2

CALCULS DE Σ , L, MRC

1) *Calcul de Σ :*

$$\Sigma = \frac{\left| \int_{-\infty}^0 f(x)(1 - e^{sx}) dx \right|}{\left(\int_{-\infty}^0 f^2(x) dx \right)^{\frac{1}{2}}}$$

avec $f(x) = K e^{\alpha x} \sin \omega x + e^{\alpha x} \cos \omega x - e^{sx}$.

$$\text{D'où : } \Sigma = \frac{B'k + C'}{(D'k^2 + E'k + F')^{\frac{1}{2}}}$$

$$B' = \omega \left(\frac{1}{(\alpha + s)^2 + \omega^2} - \frac{1}{\alpha^2 + \omega^2} \right)$$

$$C' = \frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} - \frac{\alpha + s}{(\alpha + s)^2 + \omega^2} - \frac{1}{2s}$$

$$D' = \frac{\omega^2}{4\alpha(\alpha^2 + \omega^2)}$$

$$E' = \omega \left(\frac{2}{(\alpha + s)^2 + \omega^2} - \frac{1}{2(\alpha^2 + \omega^2)} \right)$$

$$F' = \frac{2\alpha^2 + \omega^2}{4\alpha(\alpha^2 + \omega^2)} - \frac{2(\alpha + s)}{(\alpha + s)^2 + \omega^2} + \frac{1}{2s}$$

2) Calcul de L :

$$L = \frac{s^2 \int_{-\infty}^0 f(x) e^{sx} dx}{\left(\int_{-\infty}^0 f'^2(x) dx \right)^{\frac{1}{2}}}$$

$$L = \frac{Bk + C}{(Dk^2 + Ek + F)^{\frac{1}{2}}}$$

$$B = -\frac{\omega s^2}{(\alpha + s)^2 + \omega^2} \quad C = \frac{s^2(\alpha + s)}{(\alpha + s)^2 + \omega^2} - \frac{s}{2}$$

$$D = \frac{\omega^2}{4\alpha} \quad E = \omega \left(\frac{1}{2} - \frac{2s^2}{(\alpha + s)^2 + \omega^2} \right)$$

3) Calcul de MRC :

$$\text{MRC} = \left(\frac{\int_{-\infty}^{+0} f'^2(x) dx}{\int_{-\infty}^{+0} f''^2(x) dx} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\int_{-\infty}^0 f''^2(x) dx = \frac{\omega^2(\alpha(k\alpha - \omega) - \omega(k\omega + \alpha))^2}{4\alpha(\alpha^2 + \omega^2)}$$

$$+ \frac{(2\alpha^2 + \omega^2)}{4\alpha(\alpha^2 + \omega^2)} (\omega(k\alpha - \omega) + \alpha(k\alpha + \omega))^2$$

$$- \frac{\omega(\alpha(k\alpha - \omega) - \omega(k\omega + \alpha))^2}{2(\alpha^2 + \omega^2)} (\omega(k\alpha - \omega)$$

$$+ \alpha(k\omega + \alpha)) + \frac{s^3}{2}$$

$$+ \frac{2s^2\omega(\alpha(k\alpha - \omega) - (k\omega + \alpha))}{(\alpha + s)^2 + \omega^2}$$

$$- \frac{2s^2(\alpha + s)(\omega(k\alpha - \omega) + \alpha(k\omega + \alpha))}{(\alpha + s)^2 + \omega^2}$$

le calcul de $\int_{-\infty}^{+0} f'^2(x) dx$ est donné en (2)

Annexe 3

CALCULS DE k_{\max} , Σ et L dans le cas $\omega \ll \alpha$

1) Calcul de k_{\max} :

en négligeant les termes en ω^2 dans l'expression de k_{\max} (15), on peut calculer celui-ci en fonction de s et ω .

$$k_{\max} = \frac{EC - 2BF}{BE - 2DC}$$

Les coefficients B, C, D, E, F sont données en annexe 2.

Le numérateur de k_{\max} est :

$$EC - 2BF = \frac{\omega s(s - \alpha)^3}{4(s + \alpha)^3}$$

et son dénominateur est :

$$BE - 2DC = \frac{-\omega^2 s}{4\alpha(s + \alpha)^4} (4\alpha^2 s^2 - 4\alpha s^3 + s^4 - \alpha^4).$$

On pose $\alpha = ms$ et on calcule k_{\max} qui dans ce cas là s'écrit sous la forme : $k_{\max} = (s/\omega)k_0$, k_0 étant une fonction de m :

$$k_0 = \frac{m(m+1)(m-1)^3}{(1-4m+4m^2-m^4)}.$$

2) Calcul de Σ :

$$\Sigma = \frac{1}{\sqrt{s}}$$

$$\frac{-2k_0 \left(\frac{2m+1}{m(m+1)} \right) + \frac{2m-m^2-m^3}{m}}{\left(k_0^2 \frac{(m+1)^2}{m} + 2k_0(3m^2-2m-1) + 2m(m+1)(m-1)^2 \right)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\Sigma = \frac{1}{\sqrt{s}} \frac{B'k_0 + C'}{(D'k_0^2 + E'k_0 + F')^{\frac{1}{2}}}$$

$$B' = -2 \left(\frac{2m+1}{m(m+1)} \right).$$

$$C' = \frac{2m-m^2-m^3}{m} = 2 - m(m+1).$$

$$D' = \frac{(m+1)^2}{m}.$$

$$E' = 2(3m^2-2m-1).$$

$$F' = 2m(m+1)(m-1)^2$$

3) Calcul de L :

$$L = \frac{-\frac{2k_0}{m+1} + 1 - m}{\sqrt{s} \left(k_0^2 \frac{(m+1)^2}{m} + 2k_0(m^2 + 2m - 3) + 2(m+1)(m-1)^2 \right)^{\frac{1}{2}}}$$

$$L = \sqrt{s} \frac{Bk_0 + C}{(Dk_0^2 + Ek_0 + F)^{\frac{1}{2}}}$$

$$B = -\frac{2}{m+1} \quad C = 1 - m \quad D = \frac{(m+1)^2}{m}$$

$$E = 2(m-1)(m+3). \quad F = 2(m+1)(m-1)^2.$$

Annexe 4

COEFFICIENTS DU FILTRE DE LISSAGE

$$a = \frac{(\alpha s - k\omega s - \alpha^2 - \omega^2)}{s(\alpha^2 + \omega^2)}$$

$$a_1 = \frac{-((k\alpha s + \omega s)e^{-\alpha} \sin \omega + (\alpha s - k\omega s)e^{-\alpha} \cos \omega + (\alpha s - k\omega s)e^{-s} - 2(\alpha^2 + \omega^2)e^{-\alpha} \cos s\omega)}{s(\alpha^2 + \omega^2)}$$

$$a_2 = \frac{(k\alpha s + \omega s)e^{-(\alpha+s)} \sin \omega + (\alpha s - k\omega s)e^{-(\alpha+s)} \cos \omega - (\alpha^2 + \omega^2)e^{-2\alpha}}{s(\alpha^2 + \omega^2)}$$

$$a_3 = 2e^{-\alpha} \cos \omega + e^{-s}$$

$$a_4 = e^{-2\alpha} + 2e^{-(\alpha+s)} \cos \omega$$

$$a_5 = e^{-(2\alpha+s)}$$

$$a'_1 = a - h(0)$$

$$a'_1 = a_1 + a_3 h(0)$$

$$a'_2 = a_2 - a_4 h(0)$$

$$a'_3 = a_5 h(0)$$

$$a'_4 = a_3$$

$$a'_5 = a_4$$

$$a'_6 = a_5$$

$$h(0) = \frac{(\alpha - k\omega)}{(\alpha^2 + \omega^2)} - \frac{1}{s}$$

On peut utiliser le fait que $\omega \ll \alpha$ pour simplifier ces expressions.

$$A' \text{ peut être déterminé par : } \sum_{-\infty}^{+\infty} A' h(n) = 1$$

$$\frac{1}{A'} = 2 \left[\frac{-(k\alpha + \omega)e^{-\alpha} \sin \omega + (\alpha - k\omega)(1 - e^{-\alpha} \cos \omega)}{(\alpha^2 + \omega^2)(1 - 2e^{-\alpha} \cos \omega + e^{-2\alpha})} - \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{1 - e^{-s}} \right] - \frac{(\alpha - k\omega)}{(\alpha^2 + \omega^2)} + \frac{1}{s}$$

BIBLIOGRAPHIE

- [1] J.W. MODESTINO, R.W. FRIES. «Edge detection in noisy images using recursive digital filter», *Compt. Graphics and Image Processing*, 6, p. 409-433, 1977.
- [2] K.S. SHANMUGAM, J.A. GREEN. «An optimal frequency domain filter for edge detection in digital pictures», *IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intell.*, vol. 1, p. 37-49, jan. 1979.
- [3] W.H.H.J. LUNSHCER. «The asymptotic optimal frequency domain filter for edge detection», *IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intell.*, vol. PAMI-5, 6, p. 678-679, nov. 1983
- [4] J. SHEN, CASTAN. «An optimal linear operator for edge detection», *IEEE Conference on Vision and Pattern Recognition*, p. 109-114, 1986.
- [5] R. DERICHE. «Fast Algorithms For Low - Level Vision», *9th ICPR*, Rome, p. 434-438, nov. 1988.
- [6] R.M. HARALICK. «Digital step edges from zero crossing of second directional derivatives», *IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intell.*, vol. PAMI-6, No. 1, p. 58-68, jan. 1984.
- [7] W.E.L. GRIMSON, E.C. HILDRETH. «Comments Step Edges from Zero Crossings of Second Directional Derivatives», *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.*, Vol. PAMI-7, 1, p. 121-126, jan. 1985.
- [8] V. TORRE, T. POGGIO. «On edge detection», *IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intell.*, vol. PAMI-8, 2, p. 147-163, mar. 1986.
- [9] J. CANNY. «A computational approach to edge detection», *IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intell.*, vol. PAMI-8, 6, p. 679-698, nov. 1986.
- [10] H.D. TAGARE, R.J.P. de FIGUEIREDO. «On the localization performance measure and optimal edge detection», *IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intell.*, vol. 12, No. 12, p. 1186-1190, dec. 1990.
- [11] R. DERICHE. «Using Canny's criteria to derive a recursively implemented optimal edge detector», *Inter Jour. of Computer Vision*, Vol. 1, No. 2, p. 167-187.
- [12] S. SARKAR, K. BOYER. «On optimal infinite impulse response edge detection filters», *IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intell.*, Vol. 13, 11, p. 1154-1171, nov. 1991.
- [13] M. PETROU, J. KITTLER. «Optimal edge detectors for ramp edges», *IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intell.*, vol. 13, 5, p. 1483-1491, may 1991.

- [14] L.A. SPACEK. «Edge detection and motion detection», *Image Vision Comput.*, Vol. 4, p. 43-56, 1986.
- [15] V.S. NALWA, T.O. BINFORD. «On Detecting Edges», *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.*, Vol. PAMI-8, p. 699-714, nov. 1986.
- [16] D. MARR, E. HILDRETH. «Theory of edge detection», *Proc. Roy. Soc. London*, Vol. B 207, p. 187-217, 1980.
- [17] E.D. MICHELI, B. CAPRILE, P. OTTONELLO, V. TORRE. «Localization and Noise in Edge Detection», *IEEE Trans. Pattern. Anal. Mach. Intell.*, Vol. 11, 10, p. 1106-1117, oct. 1989.
- [18] R. COURANT, D. HILBERT. *Methods of Mathematical Physics*, vol. 1, New York, Wiley-Intersciences, 1953.
- [19] I.E. ABDOU, W.K. PRATT. «Quantitative Design and Evaluation of Enhancement/Thresholding Edge Detectors», *Proc. of the IEEE*, vol. 67, 5, p. 753-763, may 1979.

CURRICULUM VITAE

El-Bay BOURENNANE

Ingénieur d'état en télécommunication de l'université de Sétif (Algérie) en 1990. DEA en traitement de Signal, Image et Parole de l'INPG. Prépare actuellement une thèse de doctorat à l'université de Bourgogne. Ses travaux portent essentiellement sur l'adaptation d'algorithmes de traitement d'images bas niveau à des architectures parallèles en vue d'implantation sous forme d'ASICs.

Michel PAINDAVOINE

Après une thèse de troisième cycle en traitement du Signal et des Images soutenue à l'Université de Montpellier en 1982, Michel Painsavoine a travaillé à la Société Fairchild (caméras CCD) avant de rejoindre l'université de Bourgogne (IUT du Creusot) en 1985 en qualité de maître de conférences où il a initié une activité de recherche en traitement d'images au sein du laboratoire GERE.

Depuis 1992 il est professeur à l'École d'ingénieur FIRST de l'Université de Bourgogne et poursuit des recherches en architecture de systèmes de traitement d'images temps réel.

Frédéric TRUCHETET

F. Truchetet est né à Dijon en 1951 et après une thèse de 3^e cycle sur la spectroscopie hertzienne il a travaillé 2 ans à Thomson-CSF au sein de la division télécommunication. Maître assistant puis maître de conférence à l'IUT du Creusot, il a continué ses travaux sur l'étude des formes de raies d'absorption moléculaire avant de s'orienter vers le traitement d'image. Dans le cadre général du contrôle qualité temps réel par vision artificielle il s'intéresse plus particulièrement aux traitements bas niveau par filtrage, transformées en ondelettes et modélisation markovienne.

Manuscrit soumis le 7 mai 1992.

Dernière version le 16 mars 1993.