

## Conditions de stabilité d'une opération de déconvolution bi-dimensionnelle

### *A Two-Dimensional Deconvolution Stability Conditions*

---

Christophe DUMONT, Alain DIOU, Yvon VOISIN, Jean-Marie JOUVRARD et Patrick MOINGEON, Laboratoire GERE, IUT Le Creusot, 12, rue de la Fonderie, 71200 Le Creusot

---

#### RÉSUMÉ

La déconvolution est au centre des problèmes de reconstruction d'images. Dans cet article, nous présentons les phénomènes engendrés par cette opération. Nous définissons les conditions de stabilité des masques de convolution de type centré avec un voisinage en croix à partir du théorème de Huang.

#### MOTS CLÉS

Convolution, déconvolution, stabilité bi-dimensionnelle, filtrage récursif.

#### ABSTRACT

*Deconvolution is the main problems of images restoration. This study deals with phenomena due to deconvolution, so stability conditions are precised about center cross convolution mask with Huang's theorem.*

#### Key words

*Convolution, deconvolution, two-dimensional stability, recursive filtering.*

---

## 1. Introduction

Cet article a pour but de traiter de la généralisation bi-dimensionnelle du filtre C.F.R.D. (Convolution, Filtering and Recursive Deconvolution) mono-dimensionnel présenté par R. Dapoigny [1] sur une idée de A. Diou. Nous présentons un opérateur de convolution sous forme matricielle représentative de l'équation de convolution. Nous le structurons en une matrice triangulaire supérieure inversible quel que soit le masque de convolution, puis nous décomposons cette matrice en produits de matrices et nous en déduisons l'équation récurrente de déconvolution. La mise en œuvre du filtre C.F.R.D. fait apparaître le problème de restauration du signal qui est en traitement d'image un problème connu comme mal posé. Nous étudions alors la stabilité de l'opération de déconvolution en présence d'erreurs. Pour l'étude, nous choisissons un masque de type centré avec un voisinage en croix.

De part l'écriture de la fonction de transfert caractéristique

de la déconvolution et grâce au théorème de Huang [2], nous donnons les conditions de stabilité directement liées aux coefficients du masque de convolution. Nous les vérifions par l'expérience, puis en dernier lieu nous essayons de donner un élément de réponse en ce qui concerne la stabilisation de l'opération de déconvolution.

## 2. Structure du filtre C.F.R.D.

### 2.1. INTRODUCTION

Le filtre C.F.R.D. est caractérisé par l'équation  $y = L^{-1} \cdot F \cdot L \cdot x$ . Avec  $x$  le vecteur image initiale et  $y$  le vecteur image traitée. On note que le filtre C.F.R.D ne peut être mis en œuvre que si l'opérateur de convolution  $L$  est inversible. Nous construisons un opérateur de convolution  $L$  qui admet toujours un inverse. Nous montrons ensuite que l'application de l'opérateur de déconvolution est équivalent à l'application d'une équation récurrente.

## 2.2. OPÉRATEUR DE CONVOLUTION

### 2.2.1. Masque de convolution

Le masque étudié est de type centré avec un voisinage en croix que nous appelons type I.

$$\text{Type I: } \begin{matrix} & a & \\ b & c & d \\ & e & \end{matrix}$$

### 2.2.2. Équation de convolution

Soit  $x(i, j)$  le niveau de gris d'un pixel et  $g(i, j)$  le niveau de gris transformé par la convolution. L'équation de convolution est caractérisée par l'équation E.1.

$$(E.1) \quad g(i, j) = a \cdot x(i, j + 1) + b \cdot x(i + 1, j) + c \cdot x(i, j) + d \cdot x(i - 1, j) + e \cdot x(i, j - 1).$$

### 2.2.3. Structure matricielle

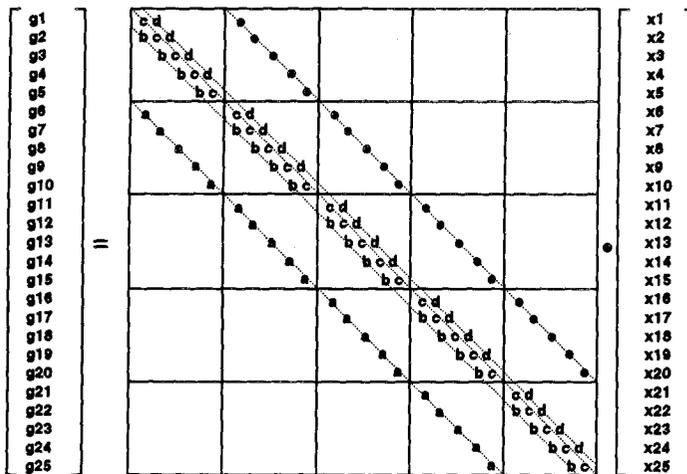
Nous définissons le vecteur image  $x$  représentatif de l'image initiale, le vecteur image  $g$  représentatif de l'image convoluée et la matrice  $L$  telle que  $g = L \cdot x$ .

$L$  est de forme carrée de dimension  $N^2 \times N^2$  (si  $N \times N$  est la dimension de l'image) et est une matrice bande dont le nombre de diagonales est égal au nombre de coefficients du masque de convolution, soient cinq diagonales.

Dans le cas d'une image  $5 \times 5$  avec les pixels numérotés de 1 à 25 :

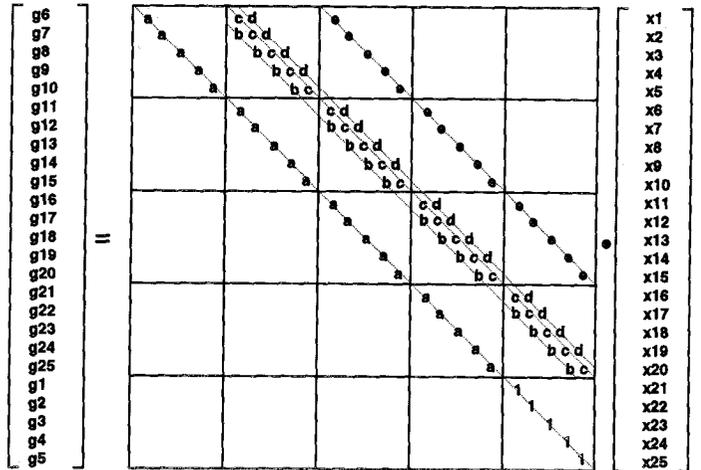
1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25

Nous proposons la structure suivante :



Rappelons que cet opérateur doit être inversible quels que soient les coefficients du masque. Malheureusement, cette

structure n'est pas inversible pour certains masques et en particulier pour le masque approchant l'opérateur Laplacien. Pour la rendre inversible nous transformons dans un premier temps la matrice en une matrice identique en rejetant les cinq premières lignes en bas de la matrice. Puis, nous modifions la matrice pour obtenir une matrice triangulaire supérieure. Cette troncature dans le cas de l'image  $5 \times 5$  s'effectue sur les pixels de 1 à 5 et dans le cas général sur  $N$  pixels parmi  $N \times N$  pixels.



Cette matrice est inversible si et seulement si le coefficient diagonal ( $a$ ) est non nul. Nous avons donc construit un opérateur matriciel inversible quel que soit le masque de convolution. Le vecteur image  $y = L^{-1} \cdot g$  est obtenu par produit de la matrice  $L$  inversée et du vecteur  $g$  dans le cas où l'opération de filtrage  $F$  est égale à l'identité. Étant donné ce produit et à cause de la dimension  $N^2 \times N^2$  de la matrice  $L$ , un problème de faisabilité se pose pour l'opération de déconvolution. En effet, avant toute opération de déconvolution, la matrice  $L$  doit être inversée grâce à un algorithme quelconque d'inversion de matrices. Ceci implique donc des temps de calculs très longs et de même un espace mémoire important pour stocker le résultat. C'est pourquoi nous appliquons une méthode de décomposition de matrice en produits de matrices, faisant directement apparaître l'aspect récurrent de la déconvolution.

## 2.3. DÉCONVOLUTION

### 2.3.1 Décomposition en produits de matrices

#### 2.3.1.a Définition des matrices unilignes (A. Diou [3])

Ce sont des matrices carrées telles que :

$$L_{ij}^{(k)} = \delta_{ij} \text{ pour } i \text{ différent de } k$$

$$L_{ij}^{(k)} \text{ quelconque pour } i \text{ égale à } k.$$

Exemple :

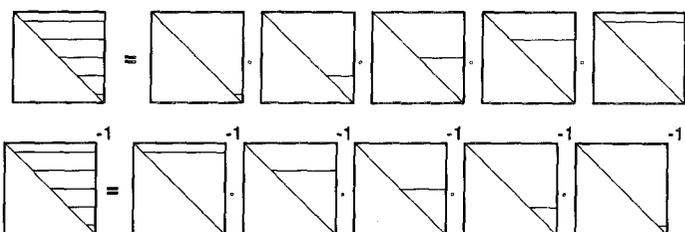
$$L^{(3)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} & L_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

et

$$L^{(3)^{-1}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{L_{31}}{L_{33}} & -\frac{L_{32}}{L_{33}} & \frac{1}{L_{33}} & x \frac{L_{34}}{L_{33}} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

### 2.3.1.b Décomposition

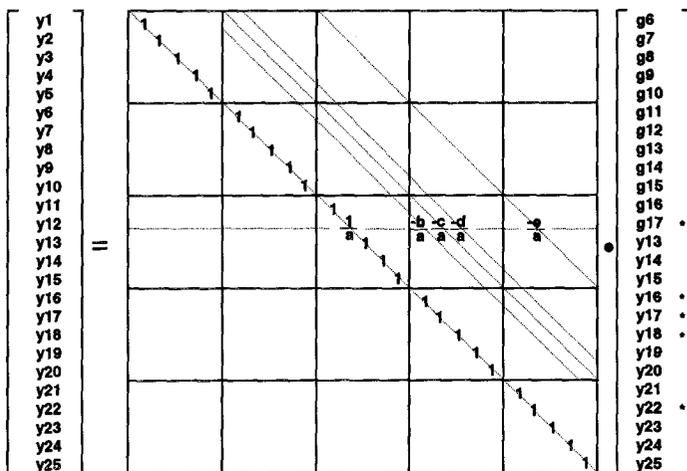
D'après les travaux de A. Diou [3], une matrice triangulaire peut se décomposer en produit de matrices unilignes. Une matrice triangulaire supérieure et son inverse se décomposent alors de la façon suivante :



### 2.3.2 Équation récurrente

La matrice  $L^{-1}$  est équivalente au produit de  $N^2 - 1$  matrices unilignes. On peut remarquer que les composantes du vecteur  $y$  ( $y = L^{-1} \cdot g$ ) sont calculées l'une après l'autre après chaque produit matrice uniligne-vecteur. De même chaque composante s'exprime en fonction des composantes déjà calculées.

Pour le calcul de la composante  $y_{12}$  de l'image  $5 \times 5$  on a :



Les multiples produits matrice vecteur conduisent à l'équation récurrente :

$$(E.2) \quad y(i, j) = \frac{1}{a} (g(i, j) - b \cdot y(i+1, j) - c \cdot y(i, j-1) - d \cdot y(i-1, j-1) - e \cdot y(i, j-2))$$

Pour  $j = 1$  on a  $y(i, 1) = g(i, N)$ .

## 2.4 CONCLUSION

L'équation récurrente E.2 peut évidemment s'écrire directement en changeant la variable  $j$  en  $j + 1$  dans l'équation E.1. Mais on ne peut écrire l'équation particulière pour  $j = 1$ . La méthode que nous proposons a l'avantage de formaliser le choix des conditions initiales puisqu'elles sont justifiées par la structure triangulaire de la matrice  $L$ .

Cette opération récurrente appliquée à toute l'image est évidemment équivalente en terme de résultat au produit matrice-vecteur  $L^{-1} \cdot g$ , ce qui élimine ainsi les problèmes de temps de calcul et d'espace mémoire. Le filtre C.F.R.D. est totalement caractérisé par les équations de convolution E.1 et la déconvolution E.2.

## 3. Stabilité du C.F.R.D.

### 3.1 INTRODUCTION

La déconvolution est une opération sensible aux erreurs puisque la reconstruction récursive de l'image peut avoir un comportement instable. Le filtre C.F.R.D. présente donc un caractère instable. Nous effectuons une description du filtre récursif équivalent à l'opération de déconvolution pour déduire la fonction de transfert de l'opération de déconvolution. Par l'application des théorèmes de stabilité de Huang, qui imposent des contraintes sur les pôles de la fonction de transfert, nous déduisons les conditions de stabilité d'une opération de déconvolution pour un masque de convolution de type I. Finalement, nous vérifions ces conditions en traçant des zones de stabilité théoriques et expérimentales.

### 3.2 RECHERCHE DES CONDITIONS DE STABILITÉ

#### 3.2.1 Description du filtre

Dans le cas général, un filtre à Réponse Impulsionnelle Infinie (R.I.I.) causal ou semicausal est régi par l'équation E.3 introduite par Chang [4].

$$(E.3) \quad y(i, j) = \sum_{(k_1, k_2) \in R_a} a(k_1, k_2) \cdot g(i - k_1, j - k_2) - \sum_{(\ell_1, \ell_2) \in R_b} b(\ell_1, \ell_2) \cdot y(i - \ell_1, j - \ell_2)$$

On montre aisément que l'équation récurrente E.2 est caractéristique d'un filtre à semi-causal. Généralement pour caractériser un système semi-causal, on représente la position des coefficients de la région  $R_b$  dans le plan  $(0, \ell_1, \ell_2)$  (fig. 1) et on remarque qu'ils occupent le demi-plan où  $\ell_2 > 0$ . Un tel filtre est appelé filtre semi-causal à demi-plan symétrique (S.H.P.).

Cette représentation peut d'ailleurs être opposée avec la représentation dans le plan  $(0, \ell_1, \ell_2)$  pour un filtre causal puisque les positions des coefficients occupent le quart de plan où  $\ell_2 > 0$  et  $\ell_1 > 0$ . Un tel filtre est appelé filtre quart de plan.

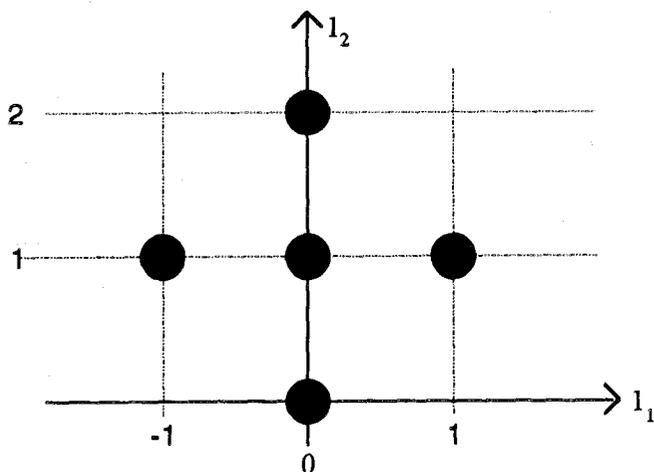


Figure 1.

### 3.2.2 Fonction de transfert du filtre récursif

La fonction de transfert de l'opération de déconvolution s'écrit à l'aide du formalisme de la transformée en Z bi-dimensionnelle appliquée sur  $g(i, j)$  et  $y(i, j)$ . Soit respectivement  $A(X, Y)$  et  $B(X, Y)$  les transformées de  $g(i, j)$  et  $y(i, j)$ :

$$A(X, Y) = \sum_{i, j = -\infty}^{+\infty} a(i, j) \cdot X^{-i} \cdot Y^{-j}$$

$$B(X, Y) = \sum_{i, j = -\infty}^{+\infty} b(i, j) \cdot X^{-i} \cdot Y^{-j}$$

Soit la fonction de transfert

$$H(X, Y) = \frac{\sum_{(k_1, k_2) \in \mathbb{R}_d} a(k_1, k_2) \cdot X^{-k_1} \cdot Y^{-k_2}}{\sum_{(\ell_1, \ell_2) \in \mathbb{R}_d} b(\ell_1, \ell_2) \cdot X^{-\ell_1} \cdot Y^{-\ell_2}}$$

Et en posant  $\alpha = \frac{c}{a}$ ,  $\beta = \frac{d}{a}$ ,  $\gamma = \frac{e}{a}$  et  $\delta = \frac{b}{a}$ , on obtient la fonction de transfert E.6 du filtre récursif caractérisé par l'équation E.2.

$$(E.4) \quad A(X, Y) = \frac{Y^{-1}}{a}$$

(E.5)

$$B(X, Y) = 1 + \delta XY^{-1} + \alpha Y^{-1} + \beta X^{-1} Y^{-1} + \gamma Y^{-2}$$

(E.6)

$$H(X, Y) = \frac{\frac{Y^{-1}}{a}}{1 + \delta XY^{-1} + \alpha Y^{-1} + \beta X^{-1} Y^{-1} + \gamma Y^{-2}}$$

L'écriture de la fonction de transfert  $H(X, Y)$  nous permet de nous intéresser à la stabilité de l'opération de déconvolution puisque celle-ci est directement liée aux zéros du dénominateur de la fonction de transfert.

### 3.2.3 Étude de la stabilité

Nous rappelons les conditions de stabilité pour les systèmes causaux et semi-causaux. Ces conditions portent sur les modules de  $X$  et  $Y$  solutions de l'équation  $B(X, Y) = 0$ .  $X$  et  $Y$  sont les zéros du polynôme  $B(X, Y)$  et les pôles de la fonction de transfert  $H(X, Y)$ .

**Théorème 1** (Shanks [5], [6]):  $|X| \leq 1$  et  $|Y| \leq 1$ .

**Théorème 2** (Huang [2]):

- Le contour défini par  $|X| = 1$  dans le plan complexe  $Y$  doit être en dehors de la zone où  $|Y| \leq 1$ .
- Pas de pôles de la fonction de transfert lorsque  $Y = 0$  et  $|X| \leq 1$ .

#### 3.2.3b Conditions de stabilité de l'opération de déconvolution

D'après les théorèmes de Huang, on admet des solutions sur le bi-cercle unité lorsque le module de  $X$  et le module de  $Y$  sont égaux à un. Pour notre problème de déconvolution, il n'est pas souhaitable d'avoir ces solutions puisque la réponse impulsionnelle dans un tel cas est à la limite de stabilité et elle est de forme oscillatoire pure. Nous écartons toutes ces solutions en appliquant les théorèmes de stabilité avec des inégalités strictes.

Les pôles de la fonction de transfert E.6, solutions de l'équation  $1 + \delta XY^{-1} + \alpha Y^{-1} + \beta X^{-1} Y^{-1} + \gamma Y^{-2} = 0$  doivent vérifier les conditions a et b du théorème 2. Pour la résolution de l'équation, nous effectuons les changements de variables suivants:

$$Y^{-1} = Y' = \theta + j \cdot \psi \quad \text{et} \quad X^{-1} = X' = \lambda + j \cdot \phi$$

L'équation de recherche des pôles se transforme de la façon suivante:

$$1 + \delta(\theta + j\psi) \left( \frac{\lambda - j\phi}{|X'|} \right) + \alpha(\theta + j\psi) + \beta(\theta + j\psi)(\lambda + j\phi) + \gamma(\theta^2 - \psi^2 + 2j\theta\psi) = 0$$

Cherchons à exprimer les parties réelle et imaginaire de  $X'$ . Nous obtenons par développement:

$$\lambda = \frac{\left( \theta + \frac{\alpha}{\gamma + \frac{1}{\theta^2 + \psi^2}} \right)}{\left( \frac{\beta + \frac{\delta}{\lambda^2 + \phi^2}}{\gamma + \frac{1}{\theta^2 + \psi^2}} \right)} \quad \text{et} \quad \phi = \frac{-\psi \left( \gamma - \frac{1}{\theta^2 + \psi^2} \right)}{\left( \beta - \frac{\delta}{\lambda^2 + \phi^2} \right)}$$

$$\text{Posons} \quad \begin{cases} \theta_0 = -\frac{\alpha}{\gamma + 1/(\theta^2 + \psi^2)} \\ A_1 = \frac{\beta + \delta/(\lambda^2 + \phi^2)}{\gamma + 1/(\theta^2 + \psi^2)} \\ A_2 = \frac{\beta - \delta/(\lambda^2 + \phi^2)}{\gamma - 1/(\theta^2 + \psi^2)} \end{cases}$$

**Application du théorème 2.a :** On doit trouver les solutions  $|X'| = 1$  en dehors de la zone où  $|Y'| \geq 1$ . On exprime le module de  $X'$  et en posant que son module est égal un, on obtient :

$$(E.7) \quad \frac{(\theta - \theta_0)^2}{A_1^2} + \frac{\psi^2}{A_2^2} = 1.$$

L'équation E.7 est l'équation d'une ellipse de centre  $C(\theta_0, 0)$  et d'axes  $A_1$  et  $A_2$ . Dans le plan complexe  $(0, \theta, \psi)$  les points  $Y'$  sont en dehors du cercle unité. Si l'égalité  $|X'| = 1$  est respectée les points de coordonnées  $(\theta, \psi)$  parcourent l'ellipse E.7. La condition de stabilité impose que le contour spécifiant que  $|X'| = 1$  n'ait pas de point commun avec la zone où  $|Y'| \geq 1$ . Ainsi l'ellipse doit se trouver à l'intérieur du cercle unité ayant pour équation  $\theta^2 + \psi^2 = 1$ . Nous avons maintenant  $\theta_0 = \frac{\alpha}{\gamma + 1}$ ,

$$A_1 = \frac{\beta + \delta}{\gamma + 1}, \quad A_2 = \frac{\beta - \delta}{\gamma - 1}.$$

Représentons le cercle unité et l'ellipse dans le plan complexe  $(0, \theta, \psi)$  sur la figure 2.

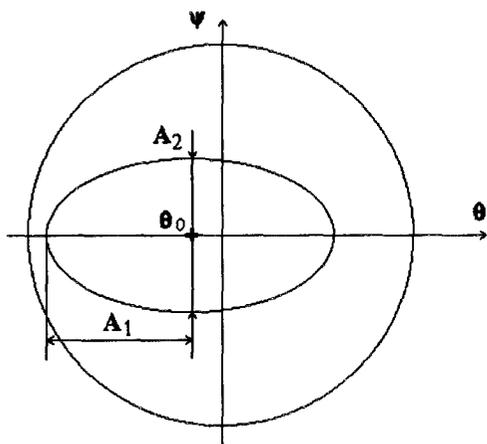


Figure 2.

Les conditions de stabilité imposent deux conditions principales sur les paramètres de l'ellipse E.7.

- Condition pour l'axe  $(0, \theta)$  :  $|\theta_0| + |A_1| < 1$ .
- Condition pour l'axe  $(0, \psi)$  :  $\theta_0^2 < 1 - A_2^2$ .

Ces conditions sont strictes du fait que l'on ne désire pas avoir les solutions  $|Y'| = |X'| = 1$ . Elles peuvent être respectées si on a  $|\delta| < 1$ ,  $|\beta| < 1$  et  $|\gamma| < 1$ .

**Application du théorème 2.b :** Lorsque  $T$  tend vers zéro le dénominateur de la fonction de transfert tend vers  $\gamma \cdot Y^{-2}$ , donc il n'existe aucun pôle dans ce cas précis. La condition 2.b du théorème est respectée et seul le cas 2.a impose des restrictions sur les coefficients du masque de

convolution. Les conditions de stabilité sont donc décrites par les inégalités E.8.

$$(E.8) \quad \begin{cases} |\alpha| < (\gamma + 1) \sqrt{1 - \left(\frac{\beta - \delta}{\gamma - 1}\right)^2} \\ |\alpha| < -|\beta + \delta| + \gamma + 1 \\ |\gamma| < 1, |\beta| < 1 \text{ et } |\delta| < 1. \end{cases}$$

On montre par ces inégalités, que l'instabilité de l'opération de déconvolution dépend directement des coefficients du masque de convolution. De plus, elles sont générales car elles permettent de déduire les conditions de stabilité pour d'autres masques de convolution en annulant certains coefficients du masque de type I. Par exemple, nous définissons deux nouveaux types de masque : Les types II et III.

$$a) \text{ Type II : } \begin{matrix} a \\ c \\ e \end{matrix}$$

Le masque de convolution implique une équation de déconvolution représentative d'un système causal mono-dimensionnel. Il est déduit du type I par annulation des coefficients  $b$  et  $d$ . On trouve alors pour ce masque de convolution les conditions de stabilité suivantes :

$$\begin{cases} |\alpha| < \gamma + 1 \\ |\gamma| < 1. \end{cases}$$

$$b) \text{ Tpe III : } \begin{matrix} a \\ c \ d. \end{matrix}$$

Ce masque implique une équation de déconvolution représentative d'un système causal bi-dimensionnel. Il est déduit du type I par annulation des coefficients  $b$  et  $e$ .

Les conditions de stabilité sont :  $\begin{cases} |\alpha| < -|\beta| + 1 \\ |\beta| < 1. \end{cases}$

Toutes ces inégalités sont intéressantes car il n'est pas nécessaire d'appliquer des algorithmes complexes pour statuer sur la stabilité ou non de l'opération de déconvolution, puisqu'une simple calculatrice suffit pour vérifier les inégalités proposées sur les coefficients du masque de convolution.

### 3.2.4. Zones de stabilité théoriques

Dans un plan défini par deux des paramètres  $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ , nous délimitons une zone à l'intérieure de laquelle les conditions E.8 sont vérifiées une à une pour chacun des types de masques I, II et III. Nous traçons ces zones de stabilité représentées respectivement sur les figures 3.a, 3.b et 3.c.

La méthode de recherche des conditions de stabilité nous a permis de déterminer la zone de stabilité pour le masque mono-dimensionnel de type II (fig. 3.b) qui est en fait un cas particulier du type I. On remarque que cette zone est équivalente à la zone de stabilité déterminée par Kunt [7] grâce à une autre méthode. En effet, Kunt impose directement que les pôles de la fonction de transfert ont des modules inférieurs à un.

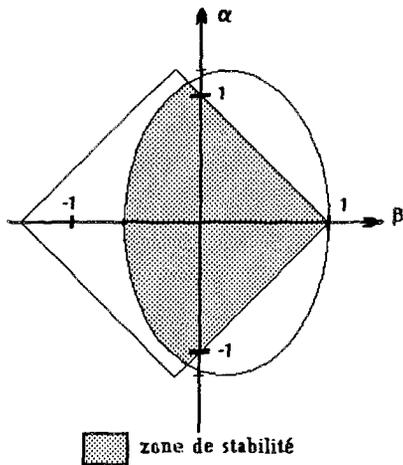


Figure 3.a. — Étude dans le plan  $(\alpha, \beta)$  avec  $\gamma = 0,2$  et  $\delta = 0,2$ .

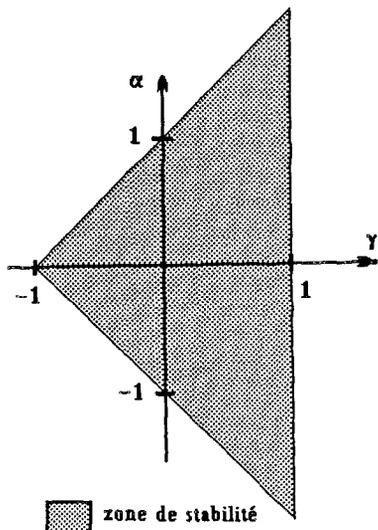


Figure 3.b. — Étude dans le plan  $(\alpha, \gamma)$ .

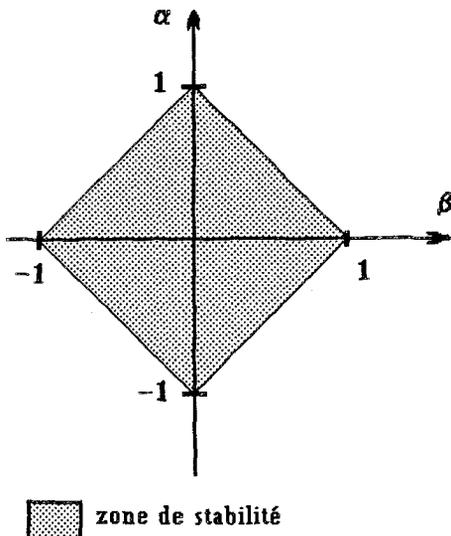


Figure 3.c. — Étude dans le plan  $(\alpha, \beta)$ .

### 3.2.5. Zones de stabilité expérimentales

Un filtre est stable lorsque sa réponse à un dirac converge. Pour tester cette convergence, nous créons une image noire avec un seul pixel ayant le niveau de gris maximal. Puis nous appliquons l'équation de déconvolution à l'image pour différents coefficients du masque de convolution. Nous présentons deux comportements typiques sur les figures 4.a et 4.b. La figure 4.a est caractéristique d'un comportement stable :  $\alpha = 0,46$ ,  $\beta = 0,5$ ,  $\gamma = 0,5$ ,  $\delta = 0,5$ . La figure 4.b est caractéristique d'un comportement instable :  $\alpha = 0,54$ ,  $\beta = 0,5$ ,  $\gamma = 0,5$ ,  $\delta = 0,5$ . Chaque pixel d'une image est normalisé pour transformer le minimum à un niveau de gris nul et le maximum à un niveau de gris égal à 255. Les images tests figures 4.a et 4.b ont une dimension de 80 pixels en largeur et 50 en hauteur.

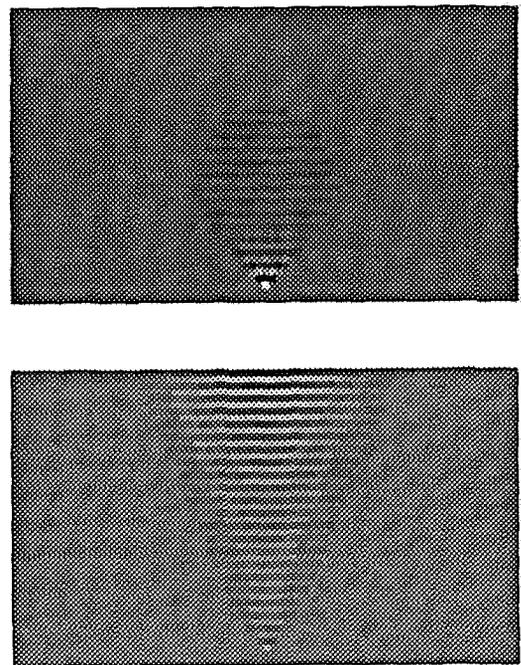


Figure 4.a-4.b.

Pour tracer les zones de stabilité expérimentales, nous fixons deux des paramètres  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\delta$ ,  $\epsilon$  et nous faisons varier les deux autres. Pour chaque masque de convolution ainsi formé nous testons sa stabilité à la déconvolution. Nous statuons qu'un masque est instable lorsque les variations relatives en niveau de gris sont plus importantes sur les bords de l'image que les variations relatives en niveau de gris pour les pixels qui entourent le dirac initial. Dans un plan défini par les deux paramètres qui varient, nous plaçons un point de couleur sombre si le filtre est instable. Nous obtenons alors les zones de stabilité expérimentales des masques de type I, II et III représentées respectivement sur les figures 5.a, 5.b et 5.c. Pour l'étude de stabilité du type I (fig. 5.a) on fixe les coefficients  $\gamma$  et  $\delta$

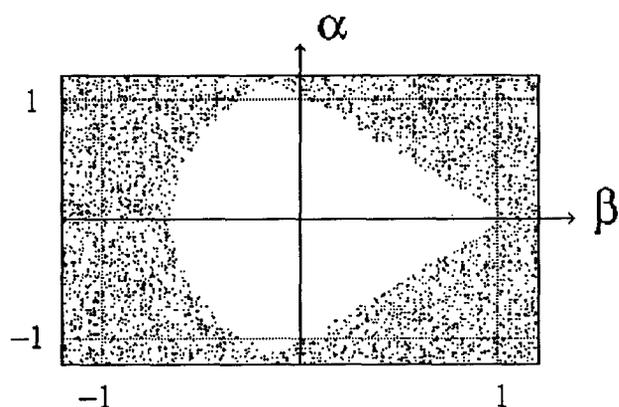


Figure 5.a. — Type I avec  $\gamma = 0,2$  et  $\delta = 0,2$ .

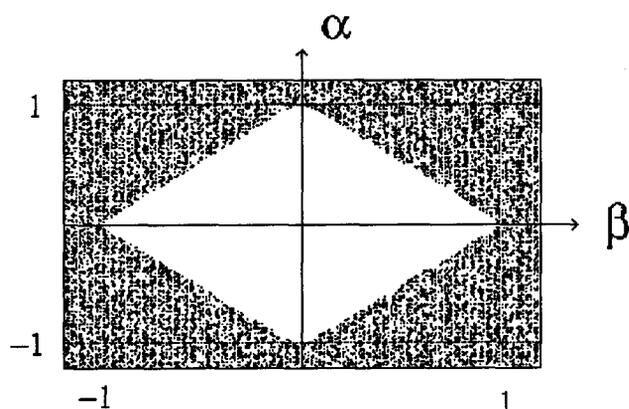


Figure 5.b. — Type II.

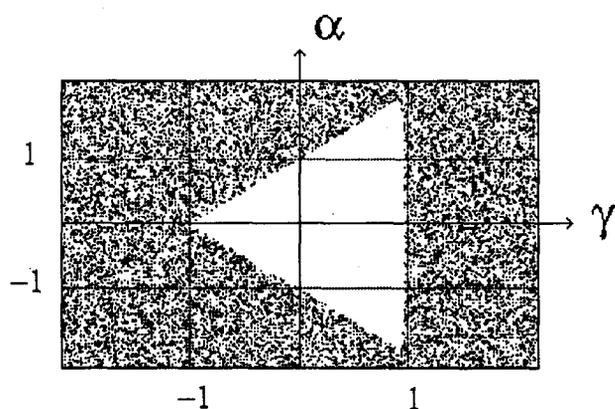


Figure 5.c. — Type III.

tels que  $\gamma = 0,2$  et  $\delta = 0,2$  et on trace la zone de stabilité dans le plan  $(0, \beta, \alpha)$ .

On vérifie que les zones expérimentales sont quasiment identiques aux zones de stabilité théoriques. Ceci valide alors les inégalités E.8 et on peut conclure que lorsque le point représentatif du masque de convolution se situe en

dehors de la zone de stabilité (si elle existe), le masque est considéré comme instable.

L'intérêt de connaître les conditions de stabilité est relatif puisque la plus grande part des masques de convolution sont instables. On se pose alors le problème de stabiliser l'opération de déconvolution, pour ensuite mettre en œuvre le filtre C.F.R.D. avec n'importe quel masque de convolution à l'origine instable.

## 4. Approche de stabilisation

La stabilisation de l'opération de déconvolution oblige à trouver de nouveaux coefficients de l'équation de déconvolution qui respectent les conditions de stabilité. En prenant l'exemple du masque M1, nous montrons dans un premier temps qu'il est instable puis nous construisons un nouveau masque M1' proche du masque M1 qui respecte les conditions de stabilité E.8.

M1 :  $\begin{matrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & -1 & & \\ & & & & \\ & & & & -1 \end{matrix}$  masque centré approchant l'opérateur :

$$2 \left( \frac{\partial f(i, j)}{\partial i} + \frac{\partial f(i, j)}{\partial j} \right)$$

Vérification de l'instabilité du masque M1 :

Nous appliquons à l'image figure 6.a, le filtre C.F.R.D. comprenant les trois traitements suivants pour obtenir l'image figures 6.b.

— Convolution : application du masque de convolution M1.

— « Filtrage » : Introduction d'une erreur systématique sur un seul pixel (ligne 20, colonne 128).

— Déconvolution : Déconvolution récursive avec le masque M1.

On constate effectivement que ce masque de convolution possède une opération de déconvolution instable en présence d'erreurs.

Stabilisation :

Nous construisons un masque proche du masque M1, soit le masque M1' :  $\alpha = 0, \beta = -0,9, \gamma = -0,9, \delta = 0,9$ . Ces coefficients respectent les conditions E.8. Nous appliquons à une image le filtre C.F.R.D. de la même façon que nous l'avons fait précédemment. On constate figure 7 que ce filtre est stable, puisque l'amplitude relative de l'erreur décroît au cours de la déconvolution.

On peut mieux observer cette décroissance en montrant les profils horizontaux et l'erreur pour les lignes de l'image n° 34 et n° 44 (figs. 8.a, 8.b).

On constate que l'erreur sur la figure 8.b a une amplitude crête à crête plus faible que l'amplitude crête à crête de l'erreur sur la figure 8.a. Ceci signifie bien que l'erreur converge au cours du filtrage récursif. Le masque M1,



Figure 6.a.



Colonne 128

Figure 6.b.



Ligne 44  
Ligne 34

### PROFIL Ligne 34

Figure 7.

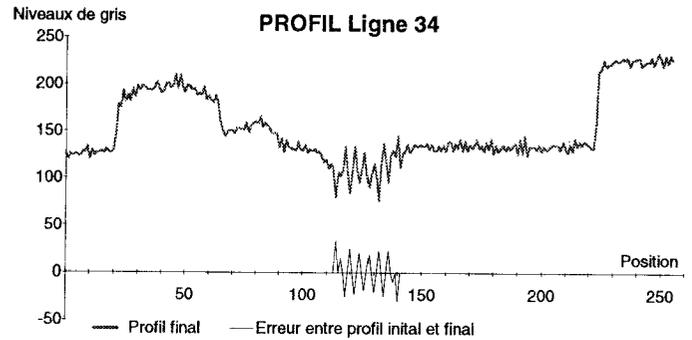


Figure 8.a.

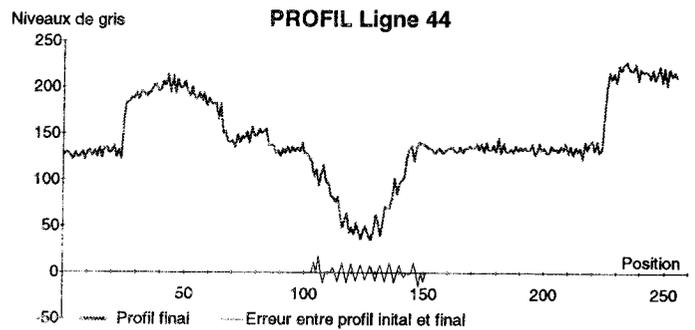


Figure 8.b.

étant à la limite de stabilité, il peut être aisément stabilisé par une faible variation d'un des coefficients du masque. Cette stabilisation n'est pas évidente pour la majeure partie des masques de convolution. De plus, elle n'est pas suffisante pour que l'effet d'une opération de filtrage  $F$  sur toute l'image, ne conduise pas à une image déconvoluée totalement noyée dans le bruit.

## 5. Conclusion

Une équation de déconvolution est simple à établir, connaissant le masque de convolution. Mais la déconvolution d'une image n'est pas toujours possible, car l'opérateur de convolution n'admet pas forcément un inverse. La formalisation de l'opération de déconvolution proposée a l'avantage de lier l'opération de convolution à une matrice. Nous avons alors proposé une structure matricielle inversible quel que soit le masque de convolution. Tout opérateur de convolution admet alors un inverse. L'intérêt majeur de cet article est d'avoir défini, en partant des conditions de stabilité bidimensionnelle proposées par Huang, les conditions de stabilité de l'opération de déconvolution représentative d'un système récursif semi-causal. De plus, ces conditions sont très simples à vérifier.

Les recherches s'orientent vers une stabilisation de l'opération de déconvolution pour tout masque instable. Le filtre C.F.R.D. pourra alors s'inscrire dans le cadre d'un pré-traitement d'image.

Article reçu le 2 juillet 1992.

### BIBLIOGRAPHIE

- [1] R. DAPOIGNY, *Une nouvelle technique de filtrage par transformée pour l'homogénéisation d'images*. Application à la détection de caractère en lecture optique, T.S. 1991, Vol. 8, n° 2.
- [2] T. S. HUANG, *Stability of two-dimensional recursive filters*, IEEE Trans. Audio. Electroacoust., Vol. Au-20, pp. 158-163, June 72.
- [3] A. DIOU, *Décomposition de matrices en produit de matrices unilignes*, 21<sup>e</sup> Congrès d'analyse numérique, Autrans 89, pp. 65-66.
- [4] H. CHANG, *Design of two-dimensional semicausal recursive filters*, IEEE Trans. Circuits and Systems, December 1978, Vol. Cas-25, n° 2.
- [5] J. L. SHANKS, *Two-dimensional recursive filter*, 69 SWIEECO Rec., pp. 19E1, 19E8.
- [6] J. L. SHANKS, *Stability and synthesis of two recursive filters*, IEEE Trans. Audio. Electroacoust., Vol. Au-20, pp. 115-128, June 72.
- [7] M. KUNT, *Techniques modernes de traitements numériques des signaux*, Collection Électricité, Traitement de l'information, Vol. 1, Presses Polytechniques.