

## Détection de défauts d'engrenages par analyse vibratoire

### *Fault detection in gears by vibratory analysis*



#### K. DROUCHE

Telecom-Paris, Dept. Signal,  
46, rue Barrault, 75634 Paris Cedex 13

Karim Drouiche, né le 29 juin 1964 à Béjaïa, Algérie. Diplômé Ingénieur en électronique, juin 1988, à l'Université des Sciences et de la Technologie d'Alger (USTA). Titulaire du D.E.A. d'Automatique et Traitement du Signal, septembre 1989, Université d'Orsay, Paris XI. Actuellement en préparation d'une Thèse de Doctorat dans le domaine du Traitement du Signal, au département Signal de l'ENST, Télécom-Paris, sous la Direction de Mr. Yves Grenier.  
Domaine d'intérêt : maintenance conditionnelle et prédictive pour le contrôle non destructif.



#### M. SIDAHMED

CETIM (Centre Technique des  
Industries Mécaniques)  
52 avenue Félix Louat - 60304 Senlis  
Cedex

Menad SIDAHMED, Ingénieur (Télécom - Paris), Docteur Ingénieur, est au sein du service Machines, Responsable de l'activité « Vibrations, Maintenance Conditionnelle ». Domaines d'intérêt : Traitement du signal en mécanique, Maintenance conditionnelle et prédictive, surveillance des machines, méthodes de diagnostic automatique.



#### Y. GRENIER

Telecom-Paris, Dept. Signal,  
46, rue Barrault, 75634 Paris Cedex 13

Yves Grenier est né à Ham, Somme, France, en 1950. Ingénieur de conférences.

Il a effectué des recherches sur la reconnaissance de la parole, l'identification du locuteur, et l'adaptation au locuteur des systèmes de reconnaissance de parole. Depuis 1977, il a travaillé sur la modélisation des signaux, l'analyse spectrale ainsi que sur l'estimation de modèles non stationnaires, et de représentations temps-fréquence, appliqués à la parole, et aux signaux sismiques et sonar. Depuis 1985, il étudie la modélisation des signaux vectoriels, et le filtrage d'antennes à large bande, avec des applications à l'acoustique, la prise de sons multi-microphones, et la localisation de sources. Il a été co-organisateur d'un séminaire SFA (ex GALF) sur l'analyse de signaux de parole, en décembre 1983, et a organisé un séminaire CNRS sur la modélisation non stationnaire, à Nice, en juin 1984. Il a été l'éditeur d'un numéro spécial de la revue « Signal Processing » consacré à l'analyse spectrale, janvier 1986. Il est membre du SFA et de IEEE et participe au GRECO-TSI.

Yves Grenier est né à Ham, Somme, France, en 1950. Ingénieur de l'École Centrale de Paris, en 1972, et Docteur-Ingénieur de l'École Nationale Supérieure des Télécommunications, Paris, en 1977, il est aussi titulaire du Doctorat d'État ès Sciences Physiques, depuis 1984. Il est professeur à l'École Nationale Supérieure des Télécommunica-

### RÉSUMÉ

Dans cet article, nous présentons des applications de techniques de traitement du signal pour le diagnostic précoce de l'écaillage dans les dentures d'engrenages. Nous présentons tout d'abord des méthodes d'analyse spectrale haute résolution, ensuite une méthode de détection de non-stationnarités utilisant la modélisation AR adaptative est exposée, enfin le test de sphéricité est introduit. Des essais sont effectués sur des signaux vibratoires recueillis sur des machines tournantes du CETIM. Les performances du détecteur basé sur le test de sphéricité sont analysées.

### MOTS CLÉS

Signaux vibratoires, engrenages, analyse spectrale, modélisation autorégressive, test de sphéricité.

## ABSTRACT

*This paper deals with signal processing techniques for non-destructive fault detection on gears. First we describe high resolution spectral analysis techniques, then an adaptive AR method is proposed for fault detection, in the end the sphericity test is presented. Their performance is evaluated on vibratory signals provided by CETIM (on industrial rotating machineries). The results indicated that the sphericity test outperformed the other methods, by scoring a high detection rate, 90 % to 100 % of cases.*

### KEY WORDS

*Vibratory signals, gears, spectral analysis, autoregressive modelisation, sphericity test.*

## 1. Introduction <sup>(1)</sup>

Les réducteurs (ou multiplicateurs) à engrenages sont très répandus en mécanique ; on les trouve dans tous types d'industries, de procédés par exemple ; automobile (boîtes de vitesse), aéronautique (hélicoptères), cimenteries, raffineries. Ce sont des éléments mécaniques très sollicités, complexes à dimensionner et à réaliser (calcul, choix et traitement des matériaux, taillage des dents, ...), qui peuvent présenter des défaillances limitant leur durée de vie.

Vu leur importance, il n'est donc pas étonnant de voir qu'ils aient été (et qu'ils soient) l'objet de nombreuses études portant sur le calcul, le dimensionnement, l'étude des matériaux, la lubrification, l'analyse des défauts ([1] à [3]), sur les techniques de surveillance et de diagnostic de défauts, pour éviter les ruptures soudaines (par exemple dans les hélicoptères) pour diminuer les coûts de maintenance en milieu industriel en pratiquant la maintenance dite conditionnelle ([4] à [9]) et enfin, des études consacrées au contrôle de qualité des engrenages en fabrication qui a une influence directe sur leur durée de vie, mais également le bruit émis [10], [11], [12].

Les techniques actuelles de surveillance des machines sont basées sur l'analyse de Fourier. Elles donnent de bons résultats pour des défauts que l'on pourrait qualifier de « simples » (mais qui sont parmi les plus répandus), tels le balourd, certains défauts de roulements. Elles sont souvent inefficaces lorsque les défauts sont caractérisés par des variations complexes du spectre, et plus particulièrement par des non-stationnarités dans le signal vibratoire. C'est le cas pour les engrenages qui engendrent des signatures vibratoires très riches, dont il est souvent difficile de suivre les évolutions et qui, dans le cas de certains défauts (conduisant rapidement à la rupture des dents) rendent difficile la détection précoce. Pour d'autres types d'éléments mécaniques, plusieurs études ont montré l'apport de méthodes paramétriques pour la surveillance et le diagnostic de défauts [13] à [19].

Dans cet article, nous présentons des applications de techniques récentes de traitement du signal pour le diagnostic précoce de l'écaillage dans les dentures d'engrenage cémentées trempées. Nous présentons tout d'abord

des techniques d'analyse spectrale haute résolution, qui à l'heure actuelle n'ont pas vu d'applications sur des signaux vibratoires de machines tournantes (en particulier les méthodes de Capon et de Lagunas). Sont ensuite développées, des méthodes de détection de non-stationnarités utilisant la modélisation AR adaptative d'une part, et le test de sphéricité d'autre part. Ces différentes techniques sont appliquées pour la détection précoce de l'écaillage à partir d'essais conduits sur des réducteurs du CETIM, de grandeur industrielle (300 kW) et sur lesquels on peut parfaitement corréler défaut et signature vibratoire. Enfin les performances du détecteur, basé sur le test de sphéricité sont analysées.

## 2. Méthodes d'analyse spectrale

### 2.1. INTRODUCTION

L'analyse spectrale est l'outil majeur pour l'étude des signaux vibratoires de machines tournantes dans le cadre de la maintenance dite conditionnelle (i.e. en fonction de l'état mécanique) des machines. Bon nombre de problèmes liés à la détection de défauts sur les organes de machines tournantes peuvent être résolus par l'analyse de Fourier. Néanmoins, il existe des cas où l'analyse simple de Fourier s'avère inefficace [20] ; nous faisons principalement allusion aux cas de signaux comportant des non-stationnarités locales. La transformée de Fourier n'est pas adaptée à de telles situations car il est difficile de mettre en évidence les non-stationnarités locales qui sont généralement très brèves sur ce type de signaux. Par ailleurs, il faut noter que les signaux vibratoires sont très riches en harmoniques ; d'où la difficulté d'appréciation des variations dues aux non-stationnarités. Il est légitime d'espérer que des méthodes plus précises apporteront un plus à l'analyse de Fourier.

Dans ce qui suit, nous nous intéressons en particulier aux méthodes d'analyse spectrale dites de haute résolution, la méthode de Capon et la méthode de Lagunas. Elles donnent une bonne approximation du spectre estimé avec un nombre d'échantillons relativement réduit. Ce sont des méthodes d'analyse par banc de filtres ; et leur précision tant au niveau de la résolution fréquentielle que de l'estimation de l'amplitude, nous laisse supposer qu'elles sont susceptibles de mettre en évidence des détails qui échappent aux méthodes classiques d'analyse de Fourier.

<sup>(1)</sup> Cette étude a bénéficié d'un financement du MRT.

Nous considérons également la méthode du maximum d'entropie dont la meilleure capacité de résolution fréquentielle est contrebalancée par un biais au niveau de l'estimation des amplitudes. Dans ce qui suit nous rappelons brièvement les principes de ces estimateurs spectraux.

## 2.2. MÉTHODE DE CAPON

Étant donnée une séquence d'échantillons  $x_n$ ,  $n = 0, \dots, N$ ,  $N$  étant le nombre d'échantillons à analyser, d'un signal vérifiant les conditions du théorème de Shannon, nous cherchons une estimation de la densité spectrale de puissance  $\Phi_X(f)$  de ce signal.

Dans la méthode de Capon [21], [22], la densité spectrale de puissance est estimée fréquence par fréquence. Pour obtenir la densité spectrale du signal à la fréquence  $f_i$ ,  $\Phi_X(f_i)$ , on applique sur le signal un filtre à réponse impulsionnelle finie. Les coefficients  $[a_0^i, \dots, a_p^i]$  où  $p$  est l'ordre du filtre, sont optimisés de manière à recueillir sans distorsion la contribution du signal à la fréquence  $f_i$  et minimiser la contribution des autres fréquences. Les coefficients du filtre vérifient ainsi une contrainte linéaire :

$$\mathbf{H}_i \mathbf{E}_i = 1 \quad \text{avec} \quad \mathbf{H}_i^T = [a_0^i, \dots, a_p^i]$$

et 
$$\mathbf{E}_i = [1, e^{-2\pi j f_i}, \dots, e^{-2\pi j p f_i}]$$

Ils permettent de minimiser sous cette contrainte l'énergie en sortie du filtre qui s'écrit  $\mathbf{H}_i^T \mathbf{R} \mathbf{H}_i$  où  $\mathbf{R}$  est la matrice d'autocorrélation du signal, définie positive et hermitienne avec  $\mathbf{R}_{ij} = E[x_n x_{n+i-j}]$ . On retient comme estimateur de la densité spectrale cette énergie minimale qui vaut :

$$P(f_i) = \frac{1}{\mathbf{E}_i^H \mathbf{R}^{-1} \mathbf{E}_i} \approx \Phi_X(f_i) \quad (2.2.1)$$

Il faut remarquer que cette méthode d'estimation spectrale approxime la densité spectrale de puissance par l'énergie en sortie d'un filtre qui contient la contribution à la fréquence étudiée (dont l'énergie est inchangée pour autant qu'il s'agisse d'une sinusoïde pure à cette fréquence). Mais cette sortie contient aussi une erreur résiduelle aux autres fréquences, dont l'énergie agit comme un biais sur l'estimateur. Le biais est d'autant plus faible que l'ordre  $p$  du filtre (c'est-à-dire la dimension de la matrice  $\mathbf{R}$ ) est élevé. La méthode de Capon approxime donc la densité spectrale  $\Phi_X(f_i)$  par  $P(f_i)$  qui est l'énergie du résidu du filtre  $\mathbf{H}_i$ .

## 2.3. MÉTHODE DE LAGUNAS

Dans la méthode de Lagunas [23], [24], [25], le banc de filtres réalisant l'analyse spectrale est exactement le même que celui de la méthode de Capon soit :

$$\mathbf{H}_i = \frac{\mathbf{R}^{-1} \mathbf{E}_i}{\mathbf{E}_i^H \mathbf{R}^{-1} \mathbf{E}_i} \quad (2.3.1)$$

La différence réside dans le fait que la densité spectrale du signal  $\Phi_X(f)$  à la fréquence  $f_i$  n'est plus approximée comme dans le cas de la méthode de Capon par le résidu

du filtre  $\mathbf{H}_i$  soit  $P(f_i)$  ; mais une hypothèse supplémentaire est introduite. On suppose que  $\Phi_X(f)$  est plate (varie peu) autour de la fréquence  $f_i$ . Dans ce cas, on peut approximer le résidu :

$$P(f_i) = \int_{-1/2}^{+1/2} \Phi_X(f) \|\mathbf{H}_i(f)\|^2 df,$$

du filtre  $\mathbf{H}_i$  (supposé très sélectif) par la quantité  $\Phi_X(f_i) \|\mathbf{H}_i(f_i)\| \mathbf{B}_i$ , où  $\mathbf{B}_i$  est une bande passante vérifiant l'égalité suivante :

$$\mathbf{B}_i \|\mathbf{H}_i(f_i)\|^2 = \int_{-1/2}^{+1/2} \|\mathbf{H}_i(f)\|^2 df = \mathbf{H}_i^T \mathbf{H}_i$$

(par la relation de Parseval) .

Sachant que  $\|\mathbf{H}_i(f_i)\| = 1$ , il vient que  $\Phi_X(f_i) = \frac{P(f_i)}{\mathbf{B}_i}$  .

On en déduit donc l'expression suivante de la densité spectrale de puissance du signal :

$$\Phi_X(f_i) = \frac{\mathbf{E}_i^H \mathbf{R}^{-1} \mathbf{E}_i}{\mathbf{E}_i^H \mathbf{R}^{-2} \mathbf{E}_i} \quad (2.3.2)$$

La méthode de Capon consiste donc en une mesure d'énergie, tandis que la méthode de Lagunas est une mesure de puissance. Pour autant que les hypothèses admises soient vérifiées, la méthode de Lagunas offre une excellente résolution en fréquence et en amplitude. Cette dernière étant garantie par la contrainte. La résolution est d'autant meilleure que l'ordre du filtre retenu est élevé. Reste à remarquer que le filtre estimé par la formule (2.3.1) est adapté au signal à chaque fréquence, contrairement à l'analyse de Fourier classique où le filtre est indépendant du signal.

## 2.4. SPECTRE AUTORÉGRESSIF

L'utilisation de modèles paramétriques [24], [25], pour l'estimation de densités spectrales de puissance de processus temporels, est motivée essentiellement par deux raisons. Le spectre paramétrique autorise une meilleure résolution fréquentielle, il s'agit d'une méthode haute résolution. En second lieu, l'estimation des paramètres du modèle est souvent liée à la résolution d'équations linéaires, donc relativement faciles à résoudre.

Une modélisation autorégressive consiste à associer à la séquence de signal  $x_n$ ,  $n = 0, \dots, N$ , un jeu de paramètres  $a_i$  tel que :

$$x_n + \sum_{i=1}^p a_i x_{n-i} = e_n \quad (2.4.1)$$

où  $e_n$  est l'erreur de prédiction linéaire, dont on minimise l'énergie.

La densité spectrale de puissance autorégressive est souvent dénommée densité spectrale au sens du maximum d'entropie, ceci étant vrai dans le cas de processus aléatoires gaussiens dont la séquence d'autocorrélation serait connue et non estimée.

Son expression est donnée par :

$$S_{AR}^X(f) = \frac{\sigma^2}{\left| 1 + \sum_{i=1}^p a_i e^{-2\pi k i f} \right|^2} \quad (2.4.2)$$

où  $a_i$ ,  $i = 1, \dots, p$ , sont les paramètres du modèle autorégressif et  $\sigma^2$  la variance du bruit. L'estimation des paramètres  $a_i$  et  $\sigma^2$  du modèle se fait en minimisant la variance de l'erreur  $e_n$ , ce qui conduit à la résolution des équations de Yule-Walker, par l'algorithme de Levinson.

La résolution en fréquence de cet estimateur est fonction du rapport signal à bruit, et elle se dégrade relativement vite au fur et à mesure que le rapport signal à bruit (SNR) décroît. Néanmoins cet estimateur est très performant en résolution fréquentielle dans le cas d'enregistrements courts, avec un rapport signal à bruit satisfaisant ( $> 5$  dB). Par contre l'estimation de l'amplitude est affectée d'un biais qui représente le principal inconvénient de la densité spectrale autorégressive. Elle est aussi efficace dans le cas de signaux riches en harmoniques, suffisamment espacées, celles-ci sont parfaitement mises en évidence par des pics aux fréquences correspondantes. La résolution de l'estimateur de densité spectrale autorégressive est fonction croissante de l'ordre  $p$  du modèle choisi. Il existe d'autres méthodes d'analyse spectrale haute résolution en traitement du signal comme MUSIC [29] ou la méthode de Minimum Norm de Kumaresan et Tufts [30]. Ces estimateurs sont moins biaisés que l'estimateur de Capon ou de Lagunas pour l'estimation de sinusoides purs dans du bruit, ce qui semble être le cas de signaux que nous traitons. Malheureusement la meilleure performance de ces estimateurs repose sur la connaissance de la matrice de covariance du bruit. Comme celle-ci est inconnue dans notre cas nous ne pouvons pas employer ces estimateurs.

### 3. Analyse de non-stationnarités locales

#### 3.1 INTRODUCTION

Certains défauts dans les machines tournantes sont caractérisés par des chocs se traduisant par des non-stationnarités locales sur les signaux vibratoires. C'est le cas dans les engrenages où l'écaillage et la fissuration de dents produisent des chocs localisés lors de l'engrènement des dents incriminé. Ces chocs peuvent être de faibles amplitudes lorsque le défaut est naissant. Ce type de défauts évoluant rapidement vers la rupture, il est nécessaire de les détecter de façon précoce, pour pouvoir planifier une maintenance efficace d'une part, et pour des raisons de sécurité d'autre part, d'où le recours aux techniques de détection de non-stationnarités qui ont montré de meilleures performances que des détecteurs basés sur les valeurs RMS, crête à crête..., classiquement utilisés en surveillance des machines tournantes.

Par ailleurs il faut noter que l'anomalie (l'instationnarité) est portée par un signal dont la durée n'excède pas le temps d'engrènement d'une dent qui est relativement bref. C'est la raison pour laquelle il faut utiliser des outils du traitement du signal capables de suivre dans le temps des changements rapides de caractéristiques. Plusieurs techniques existent pour la détection de non-stationnarités (voir [26], [27] pour une synthèse de ces techniques). Deux types de méthodes ont été testées. La première étant l'analyse de l'énergie de l'erreur de prédiction résultant d'un modèle autorégressif adaptatif. Nous savons qu'un tel modèle ajuste ses paramètres au fur et à mesure que le système évolue dans le temps. S'il se produit un changement dans le système (saut de modèle par exemple) l'algorithme tentera d'ajuster à nouveau les paramètres afin d'identifier au mieux (critère oblige) le nouveau modèle. Dans cette éventualité, le passage du premier modèle au second modèle ne saurait se faire sans une perturbation plus ou moins notable sur l'énergie de l'erreur, puisqu'il faut un certain temps (retard) pour que les nouveaux paramètres soient estimés.

La seconde technique utilisée est le test de sphéricité [28], plus connu en statistique. Il se prête parfaitement à la détection de changement de statistique (en l'occurrence changement de caractéristiques) d'un processus. Lors de l'engrènement de la dent défectueuse, les caractéristiques du signal vibratoire se trouvent affectées. Le test de sphéricité est une technique susceptible de mettre en évidence un tel changement et permettra donc de le détecter. Nous opérons à l'aide du test de sphéricité une comparaison entre deux matrices de covariance, l'une estimée sur un signal global correspondant à un tour de l'engrenage et la seconde estimée sur le signal limité à l'engrènement d'une dent. Nous pouvons ainsi mesurer l'ampleur des changements des caractéristiques du signal, survenus sur une dent quelconque par rapport aux caractéristiques de la référence qui est le tour de roue.

#### 3.2. DÉTECTION PAR MODÉLISATION AR

Les techniques de détection les plus répandues utilisent un modèle AR pour blanchir le signal. L'erreur de prédiction linéaire  $e_n$  est obtenue en filtrant le signal  $x_n$  au travers d'un filtre blanchissant, selon l'équation suivante :

$$e_n = x_n + \sum_{k=1}^p a_k x_{n-k} \quad (3.2.1)$$

Les paramètres du filtre peuvent être connus au préalable (modèle global du signal) ou identifiés de façon séquentielle à l'aide d'algorithmes adaptatifs. La détection du changement est alors réalisée sur l'erreur de prédiction en testant son éloignement de l'hypothèse bruit blanc ou, en étudiant les propriétés de franchissement d'un seuil par l'erreur de prédiction linéaire plus apte à détecter les non-stationnarités brèves. Selon la rapidité de convergence de l'algorithme, un saut plus ou moins brutal pourra être décelé sur l'énergie de l'erreur de prédiction linéaire, celui-ci sera révélateur de la présence d'une non-stationnarité locale, autrement dit d'un défaut sur l'engrenage.

Dans le cas de signaux non stationnaires [26], il est impératif de tenir compte de l'évolution des caractéristiques, du système étudié dans le temps. En général cette adaptation consiste à mettre l'accent sur les données les plus récentes. Un moyen de réaliser cela est l'introduction d'une fenêtre glissante délimitant ainsi les données à analyser, ou un facteur d'oubli permettant d'estomper les données lointaines au profit des données récentes. Il existe une grande variété de critères et algorithmes possibles ; ceux-ci dépendent des applications et des hypothèses retenues.

La structure en treillis est souvent utilisée car plus facile à mettre en œuvre mais aussi et surtout parce qu'elle facilite le test de stabilité du modèle (les coefficients de réflexion  $k_i$  doivent être inférieurs à 1 en module), particulièrement lorsque celui-ci est variable dans le temps. L'adaptation s'effectue par l'introduction d'un facteur d'oubli exponentiel  $\lambda$  ( $0 < \lambda < 1$ ), ceci est préférable à la fenêtre glissante, avec laquelle le risque encouru est la réception et l'expulsion de la fenêtre d'informations équivalentes et cela au même instant ; il s'en traduirait évidemment un effet nul sur l'évolution des paramètres du modèle.

### 3.3. TEST DE SPHÉRICITÉ

Le test de sphéricité [28] constitue un test d'hypothèse d'égalité de deux matrices de covariance de deux processus aléatoires gaussiens indépendants. Plus précisément étant donné  $N$  vecteurs d'observations  $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_N$  de dimension  $p$  d'un processus aléatoire gaussien  $\mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ , il s'agit de tester l'hypothèse,  $H: \boldsymbol{\Sigma} = \sigma^2 \mathbf{I}$ , où  $\mathbf{I}$  est la matrice identité de dimension  $p$ ,  $\sigma^2$  un facteur de proportionnalité. L'hypothèse  $H$  est vérifiée si et seulement si les racines  $\phi_i$  de l'équation :  $|\boldsymbol{\Sigma} - \phi \mathbf{I}| = 0$  sont identiques [28]. Cette condition est équivalente à dire que la moyenne arithmétique des racines  $\phi_i$  est égale à leur moyenne géométrique, soit :

$$\frac{\prod \phi_i^{1/p}}{\frac{\sum \phi_i}{p}} = \frac{|\boldsymbol{\Sigma}|^{1/p}}{\text{Tr } \boldsymbol{\Sigma}} = 1. \quad (3.3.1)$$

D'une manière générale l'hypothèse  $H$  est plus souvent énoncée sous la forme :  $\boldsymbol{\Sigma} = \sigma^2 \boldsymbol{\Sigma}_0$ , où nous disposons des observations  $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_N$  de  $\mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$  et  $\boldsymbol{\Sigma}_0$  une matrice de covariance spécifiée. Il est aisé de revenir à la première formulation. En effet, soit  $\mathbf{T}$  une matrice telle que :  $\mathbf{T} \boldsymbol{\Sigma}_0 \mathbf{T}^T = \mathbf{I}$ , opérons les changements de variables suivants :

$$\boldsymbol{\mu}^* = \mathbf{T} \boldsymbol{\mu}, \quad \boldsymbol{\Sigma}^* = \mathbf{T} \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{T}^T, \quad \mathbf{X}_i^* = \mathbf{T} \mathbf{X}_i$$

une telle matrice existe car  $\boldsymbol{\Sigma}_0$  est une matrice de covariance, donc positive. Alors  $\mathbf{X}_1^*, \dots, \mathbf{X}_N^*$  sont des observations de  $\mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}^*, \boldsymbol{\Sigma}^*)$ , et l'hypothèse de sphéricité  $H$  se reformule donc comme suit :  $\boldsymbol{\Sigma}^* = \sigma^2 \mathbf{I}$ . Sous cette forme le test de sphéricité apparaît comme la combinaison de deux hypothèses, la première étant l'indépendance des composantes des vecteurs aléatoires  $\mathbf{X}_i$  ( $\boldsymbol{\Sigma}$  matrice diagonale). La seconde concerne les éléments diagonaux de  $\boldsymbol{\Sigma}$  qui doivent être égaux, autrement dit les variances des composantes aléatoires de  $\mathbf{X}_i$  sont égales.

Le critère testant l'hypothèse de sphéricité  $H$  est dans ce cas [28] :

$$\lambda = \frac{|\boldsymbol{\Sigma}^*|^{1/2N}}{\left(\frac{\text{Tr } \boldsymbol{\Sigma}^*}{p}\right)^{1/2pN}}. \quad (3.3.2)$$

Dans le cas pratique une estimation  $\boldsymbol{\Sigma}_e$  de  $\boldsymbol{\Sigma}$  peut être obtenue comme suit :  $\boldsymbol{\Sigma}_e = \sum_{i=1}^N (\mathbf{X}_i - \boldsymbol{\mu})(\mathbf{X}_i - \boldsymbol{\mu})^T$ , il vient donc que  $|\boldsymbol{\Sigma}^*| = |\boldsymbol{\Sigma}_e \boldsymbol{\Sigma}_0^{-1}|$ .

Il existe plusieurs manières de calculer le critère du test de sphéricité. Toutefois il en existe une qui mérite d'être exposée ici. Il s'agit de l'exploitation de la décomposition d'une matrice de covariance d'ordre  $p$ , soit la relation :

$$\mathbf{R}^{-1} = [\mathbf{A}_p \ \mathbf{A}_{p-1} \ \dots \ \mathbf{A}_0] \begin{bmatrix} \sigma_p^{-2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_{p-1}^{-2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_0^{-2} \end{bmatrix} [\mathbf{A}_p \ \mathbf{A}_{p-1} \ \dots \ \mathbf{A}_0]^T \quad (3.3.3)$$

où  $\mathbf{R}$  est la matrice de covariance définie comme suit :

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \rho_0 & \rho_1 & \dots & \rho_p \\ \rho_1 & \rho_0 & \dots & \rho_{p-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \rho_p & \rho_{p-1} & \dots & \rho_0 \end{bmatrix},$$

où  $\rho_i = E[\mathbf{X}_j^T \mathbf{X}_{j+i}]$  et  $\mathbf{A}_i$  représente le régresseur d'ordre  $i$  :

$$[\mathbf{A}_p \ \mathbf{A}_{p-1} \ \dots \ \mathbf{A}_0] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_p^1 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_p^p & a_{p-1}^{p-1} & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

et  $\sigma_i^2$  la variance correspondant au modèle autorégressif d'ordre  $i$ . Il vient donc que le déterminant de  $\mathbf{R}$  se calcule comme suit :  $|\mathbf{R}| = \prod_{i=0}^{i=p} \sigma_i^2$ . Le critère de sphéricité (3.3.2)

s'exprime alors aisément en exploitant cette dernière formule, en effet soient  $\mathbf{R}_1$  et  $\mathbf{R}_2$  deux matrices de covariance d'un processus aléatoire, alors le critère de sphéricité testant l'hypothèse  $H$  entre ces deux matrices s'écrit en décomposant  $\mathbf{R}_1$  selon (3.3.3) et en prenant dans (3.3.2) pour matrice de passage :

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \sigma_{p,1}^{-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_{p-1,1}^{-1} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_{0,1}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & a_p^1 & \dots & a_p^p \\ 0 & 1 & \dots & a_{p-1}^{p-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix},$$

on obtient la formule suivante pour l'estimation du critère (3.3.3) :

$$\lambda = \frac{|\mathbf{R}^*|^{1/2}}{\left[\frac{\text{Tr } \mathbf{R}^*}{p}\right]^{p/2}} = \frac{\left[\prod_{i=0}^{i=p} \frac{\sigma_{i,1}^2}{\sigma_{i,2}^2}\right]^{1/2}}{\left[\frac{\text{Tr } \mathbf{R}^*}{p}\right]^{p/2}} \quad (3.3.4)$$

où  $\mathbf{R}^* = \mathbf{TR}_2 \mathbf{T}^T$  et  $\sigma_{i,j}^2$  est la variance du modèle d'ordre  $i$ , appliqué à la matrice de covariance  $j$ . La formule (3.3.3) est particulièrement intéressante, car elle suggère une structure en banc de filtres, réalisée à partir de modèles autorégressifs d'ordres croissants (1 à  $p$ ). C'est tout naturellement qu'une structure en treillis s'impose pour le calcul de la formule (3.3.4), l'estimation des différents paramètres du modèle se faisant dans un ordre croissant selon l'algorithme de Levinson. Le test de sphéricité a été utilisé pour comparer une matrice de covariance « référence » estimée sur un tour complet d'arbre à une seconde « test » estimée sur une durée équivalente au temps d'engrènement d'une dent de l'engrenage. Ainsi pour chaque dent nous pouvons calculer le test de sphéricité (3.3.4), et cela à chaque tour de roue d'engrenage. Nous sommes donc en mesure d'établir une statistique du critère en fonction des différentes dents de l'engrenage et de tracer des courbes COR (caractéristiques opérationnelles du récepteur) qui donneront une idée de l'efficacité de ce détecteur.

## 4. Application à la surveillance et à la détection de défauts dans les engrenages

### 4.1. CONDITIONS D'ESSAIS

Les tests ont été effectués sur des bancs d'essai d'engrenages de grandeur industrielle du CETIM, fonctionnant 24 h/24 h (fig. 16). Le dimensionnement des roues de l'engrenage cémenté trempé, ainsi que les conditions de fonctionnement (vitesse, couple) sont fixés de façon à obtenir un écaillage sur toute la largeur d'une dent (qui fixe la fin de l'essai, la rupture étant imminente) en environ 15 jours. Tous les jours après l'acquisition des signaux vibratoires, le banc est arrêté pour observer l'état des dents de roues. Un rapport d'expertise est ainsi rédigé.

Les méthodes de traitements retenues ont été testées sur trois séries d'essais A, B, C. Les séries A, B correspondent à des essais sur un réducteur (engrenages cylindriques) de rapport 20/21. Les essais s'évalent respectivement pour la série A et B sur 12 et 10 jours, avec l'enregistrement d'un signal vibratoire par jour. Quant à la série C, elle s'étale sur cinq jours, et correspond à un réducteur 16/16. Le tableau I, résume les observations des experts. La gravité du défaut, ici de l'écaillage, est proportionnelle à la surface de couche superficielle arrachée. En effet, dans ce type d'engrenages, la couche superficielle des dents est

Tableau 1. — Résumé du rapport d'expertise.

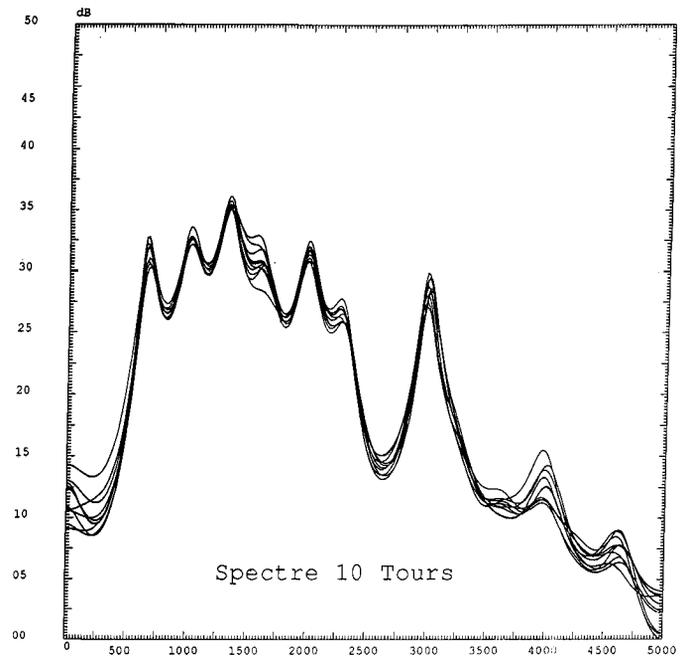
Série A			
Dent	Type de Défaut	Jour d'apparition du défaut	Observations
2	écaillage	2	sans évolution notable
16	écaillage	8	a sensiblement évolué, imposa l'arrêt de la machine le 12 <sup>e</sup> jour
Série B			
Dent	Type de Défaut	Jour d'apparition du défaut	Observations
3	écaillage	3	sans évolution notable
16	écaillage	7	évolution sensible
14	rupture soudaine	10	arrêt d'urgence
18	écaillage	8	sans évolution notable
Série C			
Dent	Type de Défaut	Jour d'apparition du défaut	Observations
5	écaillage	3	évolution légère

durcie. La destruction de cette couche conduit à la rupture des dents. Chaque enregistrement est accompagné d'un second signal, top-tour, enregistré simultanément avec le signal vibratoire, pour pouvoir repérer le début de chaque tour de roue et numéroter les dents. La dent N° 1 est celle qui engrène au déclenchement du top-tour.

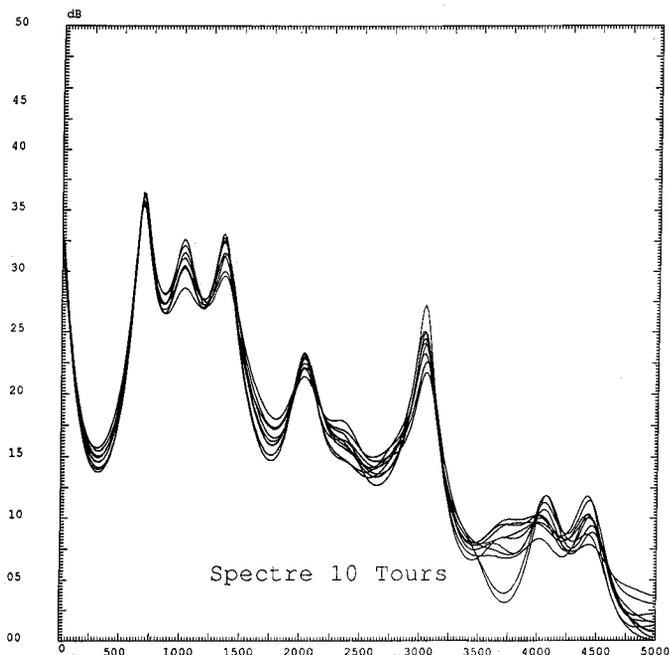
## 4.2. ANALYSE SPECTRALE

Toutes les estimations spectrales ont été effectuées sur un tour d'arbre, soit environ 600 échantillons. Les figures 1 à 9 représentent des superpositions de 10 spectres, calculés sur 10 tours consécutifs, avec respectivement les méthodes de Capon (fig. 1, 2, 3), Lagunas (fig. 4, 5, 6), AR (fig. 7, 8, 9).

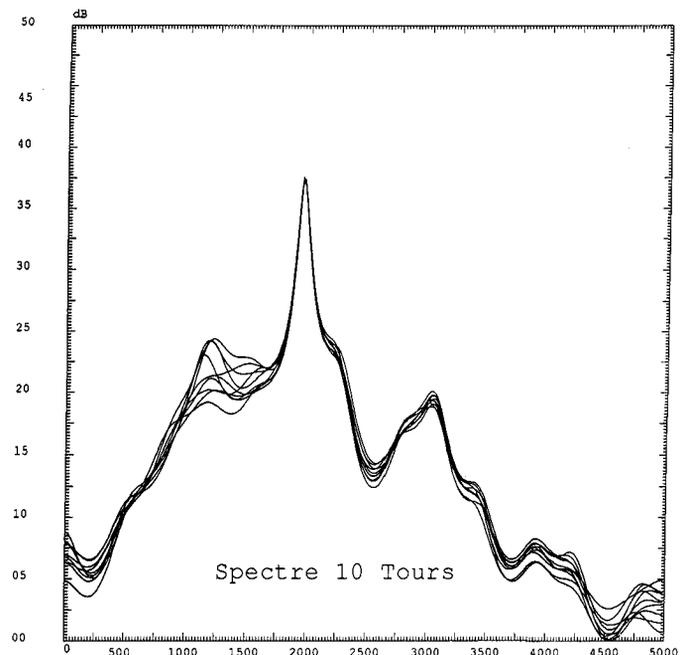
Les défauts étant caractérisés par des non-stationnarités locales sur le signal vibratoire, les spectres estimés par les différentes méthodes n'ont pas pu mettre en évidence des variations caractérisant le défaut, hormis les cas de dégradations avancées, où les fluctuations du spectre d'un tour à l'autre sont appréciables. Ceci était prévisible, du fait que la non-stationnarité se situe à l'échelle de la dent et non du tour. Cette analyse a permis cependant de constater le caractère très harmonique du signal vibratoire analysé ainsi que sa stationnarité globale (d'un tour à l'autre) ; ceci est d'autant plus remarquable sur les spectres estimés par les méthodes de Lagunas et Capon.



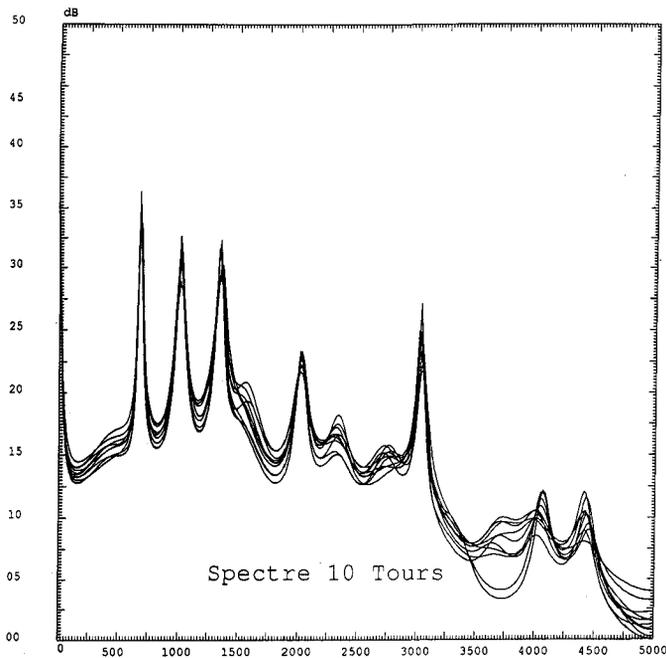
**Figure 2. — Analyse Spectrale,**  
Série B Méthode de CAPON  
Superposition de 10 Spectres  
Ordre du filtre : 30,  
Jour : 5 Fenêtre Analyse  $\approx$  600 éch.



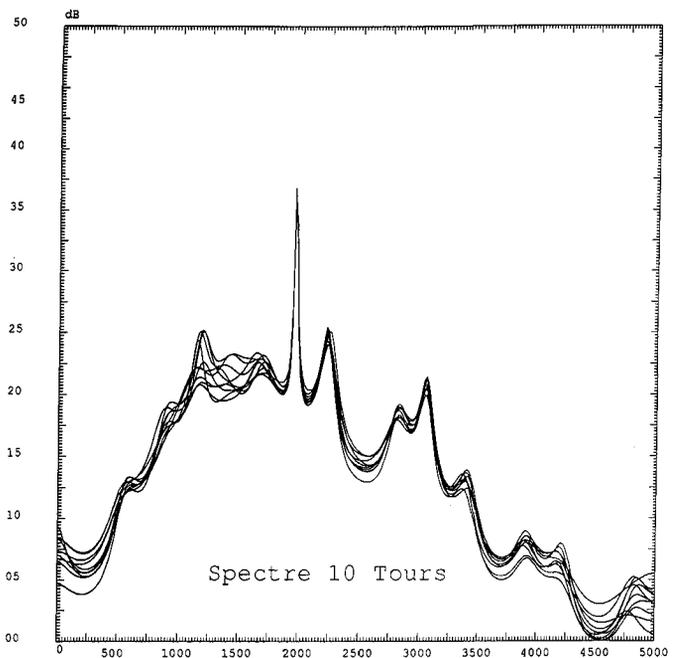
**Figure 1. — Analyse Spectrale,**  
Série A Méthode de CAPON  
Superposition de 10 Spectres  
Ordre du filtre : 30,  
Jour : 6 Fenêtre Analyse  $\approx$  600 éch.



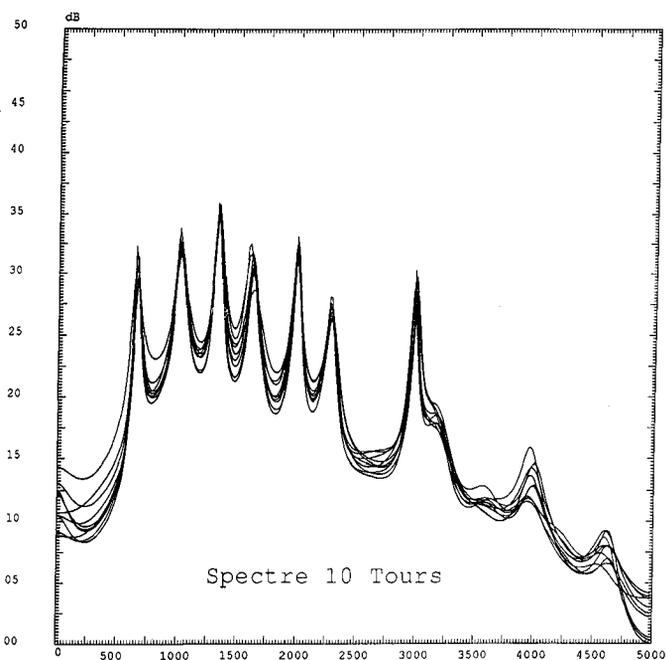
**Figure 3. — Analyse Spectrale,**  
Série C Méthode de CAPON  
Superposition de 10 Spectres  
Ordre du filtre : 30,  
Jour : 2 Fenêtre Analyse  $\approx$  600 éch.



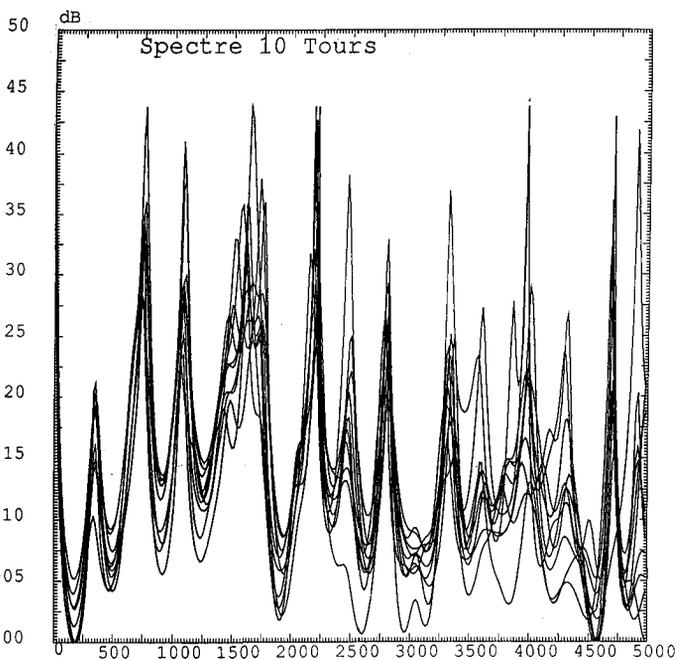
**Figure 4. — Analyse Spectrale,**  
 Série A Méthode de LAGUNAS  
 Superposition de 10 Spectres  
 Ordre du filtre : 30,  
 Jour : 6 Fenêtre Analyse  $\approx$  600 éch.



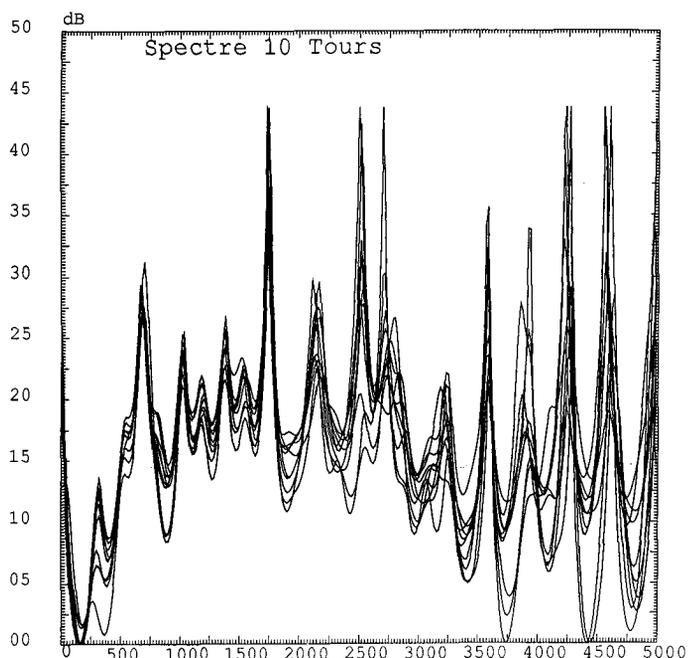
**Figure 6. — Analyse Spectrale,**  
 Série C Méthode de LAGUNAS  
 Superposition de 10 Spectres  
 Ordre du filtre : 30,  
 Jour : 2 Fenêtre Analyse  $\approx$  600 éch.



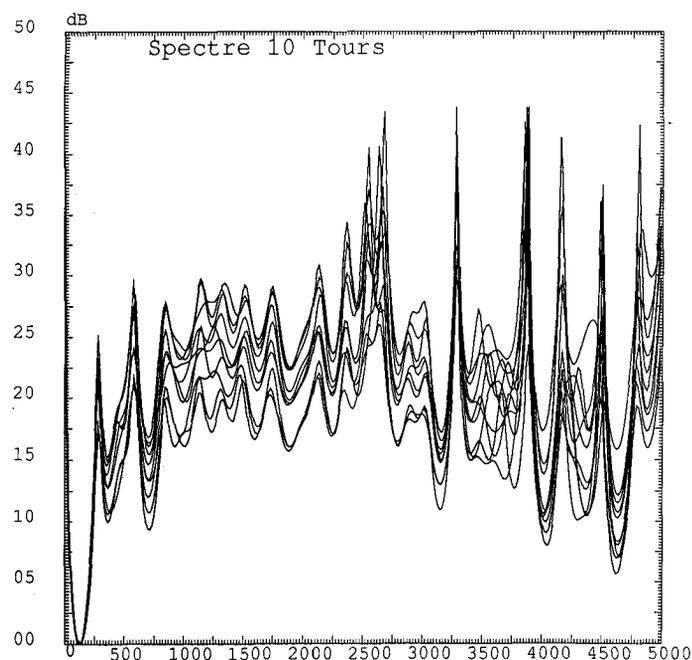
**Figure 5. — Analyse Spectrale,**  
 Série B Méthode de LAGUNAS  
 Superposition de 10 Spectres  
 Ordre du filtre : 30,  
 Jour : 5 Fenêtre Analyse  $\approx$  600 éch.



**Figure 7. — Analyse Spectrale,**  
 Série A Méthode AUTORÉGRESSIVE  
 Superposition de 10 Spectres  
 Ordre du filtre : 60,  
 Jour : 6 Fenêtre Analyse  $\approx$  600 éch.



**Figure 8. — Analyse Spectrale,**  
Série B Méthode AUTORÉGRESSIVE  
Superposition de 10 Spectres  
Ordre du filtre : 60,  
Jour : 5 Fenêtre Analyse  $\approx$  600 éch.



**Figure 9. — Analyse Spectrale,**  
Série C Méthode AUTORÉGRESSIVE  
Superposition de 10 Spectres  
Ordre du filtre : 60,  
Jour : 2 Fenêtre Analyse  $\approx$  600 éch.

Toutefois cette étude spectrale semble montrer que la méthode de Lagunas peut être intéressante dans le cadre de la surveillance de machines tournantes (les signaux exhibent un caractère très harmonique), où il s'agit souvent de suivre de façon précise l'évolution de raies particulières, en amplitude et en fréquence, car elle permet d'obtenir des spectres lissés et de bonnes résolutions en amplitude et en fréquence. Quant à l'analyse spectrale autorégressive elle exhibe des spectres trop chahutés en amplitude pour qu'ils puissent faire l'objet d'une analyse précise ; par contre la résolution fréquentielle, comme attendu, est nettement meilleure avec cet estimateur.

#### 4.3. DÉTECTION DE NON-STATIONNARITÉS LOCALES

Les figures 10, 11, 12 représentent sur deux tours d'arbre les signaux vibratoires des trois séries A, B, C et les énergies de l'erreur de prédiction linéaire correspondantes estimées par un modèle AR d'ordre 30, avec facteur d'oubli  $\lambda = 0.995$ , sous une version treillis ; respectivement avant l'apparition d'un défaut, juste lors de son apparition et lorsque celui-ci a évolué.

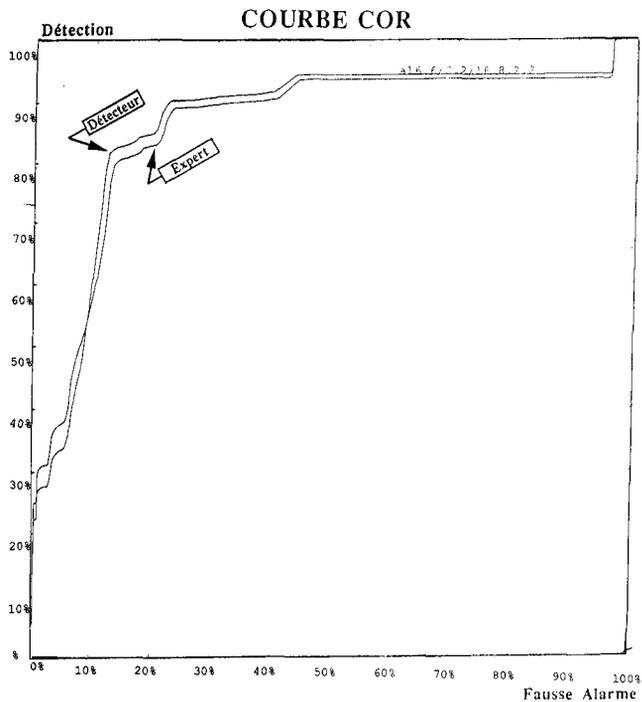
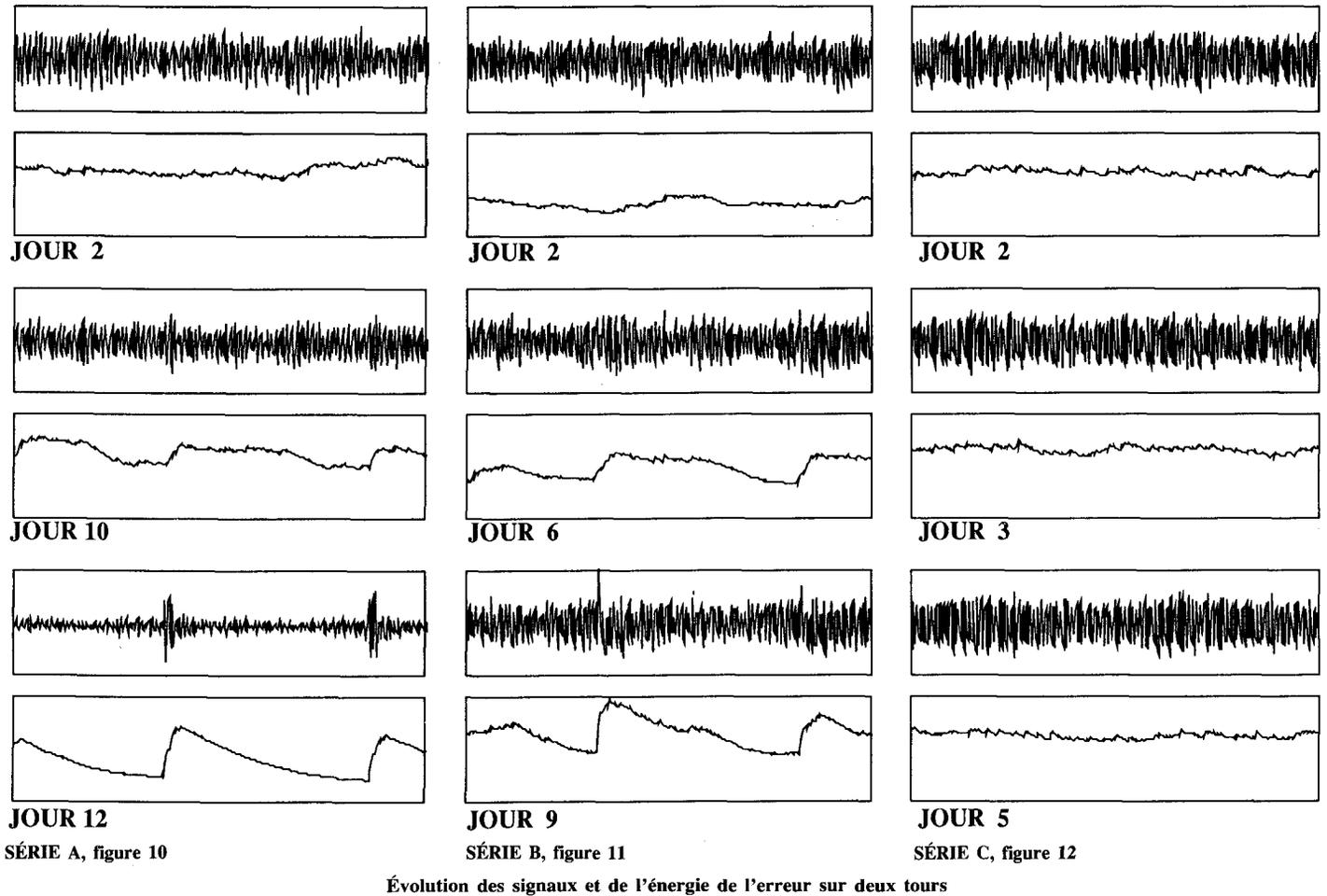
Pour la série A, qui s'étale sur 12 jours, le défaut sur la dent 16 est très net le dernier jour (12<sup>e</sup>), le 10<sup>e</sup> jour on note un saut de l'énergie de l'erreur de prédiction linéaire au voisinage de la dent 16, mais celui-ci est peu marqué. La série B qui compte 10 jours, a été caractérisée par l'apparition de défauts sur plusieurs dents. Le 6<sup>e</sup> jour, nous notons un saut de l'énergie de l'erreur de prédiction ; au niveau de l'engrènement des dents 14-16, mettant en évidence un défaut au voisinage de ces dents pour la série C, le léger défaut qui n'a pas évolué de façon significative n'a pu être mis en évidence ; nous n'avons constaté aucun saut notable au niveau de l'énergie de l'erreur de prédiction linéaire, il apparaît donc que les défauts légers sont difficiles à mettre en évidence par cette méthode.

#### 4.4. TEST DE SPHÉRICITÉ

Les matrices de covariance « référence » et « test » ont été respectivement estimées sur un tour complet d'arbre (environ 600 échantillons) et 1/20 de tour d'arbre (1/16 dans le cas de la série C prélevée sur un réducteur 16/16) correspondant à l'engrènement d'une dent. Sur chaque tour sont donc effectués 20 tests de sphéricité (16 dans le cas de la série C). Pour les trois séries, les courbes COR ont été tracées en calculant le test de sphéricité sur 500 tours consécutifs, et ce pour chaque enregistrement journalier.

Nous présentons ici des courbes COR (fig. 13, 14, 15), attestant des performances de notre détecteur basé sur le test de sphéricité. Les courbes COR déduites de l'analyse des signaux vibratoires, offrent des performances remarquables puisque nous avons été capable de détecter les dents défaillantes, au plus tard le jour d'apparition du défaut indiqué par les experts. Mis à part la série C, avec laquelle nous avons obtenu les meilleures performances, la détection de la dent défectueuse se faisant dès le premier

**SIGNAUX VIBRATOIRES  
 MODELISATION AR(30) ADAPTATIVE**



◀ **Figure 13. — Test de Sphéricité**  
 Série A Courbe COR,  
 Dimension de la Matrice  
 de Covariance = 2

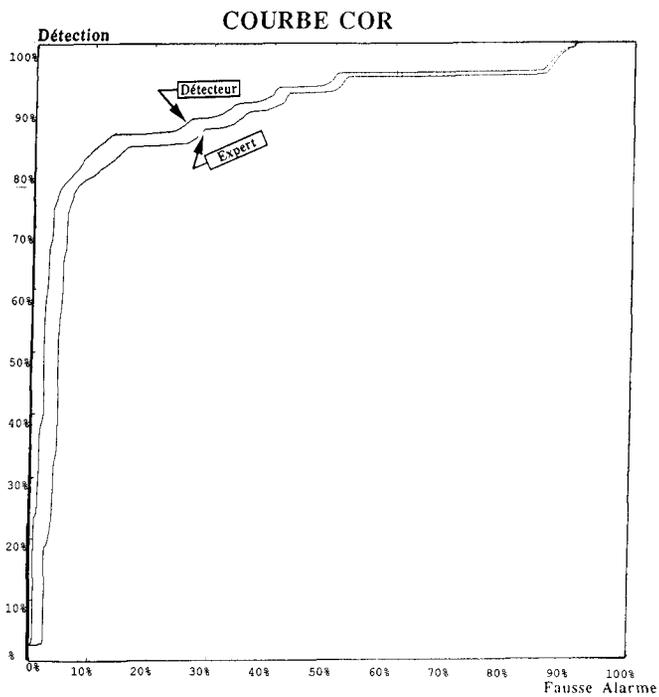


Figure 14. — Test de Sphéricité  
Série B Courbe COR,  
Dimension de la Matrice  
de Covariance = 2

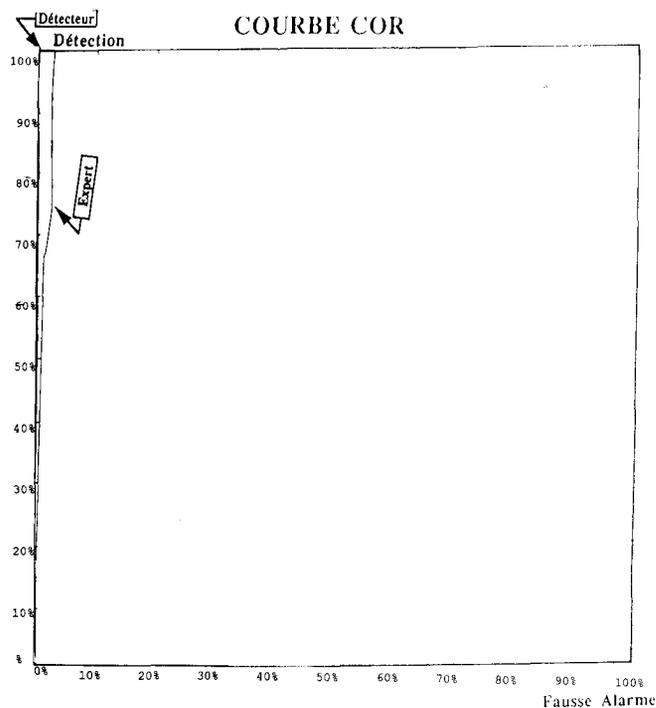


Figure 15. — Test de Sphéricité  
Série C Courbe COR,  
Dimension de la Matrice  
de Covariance = 2

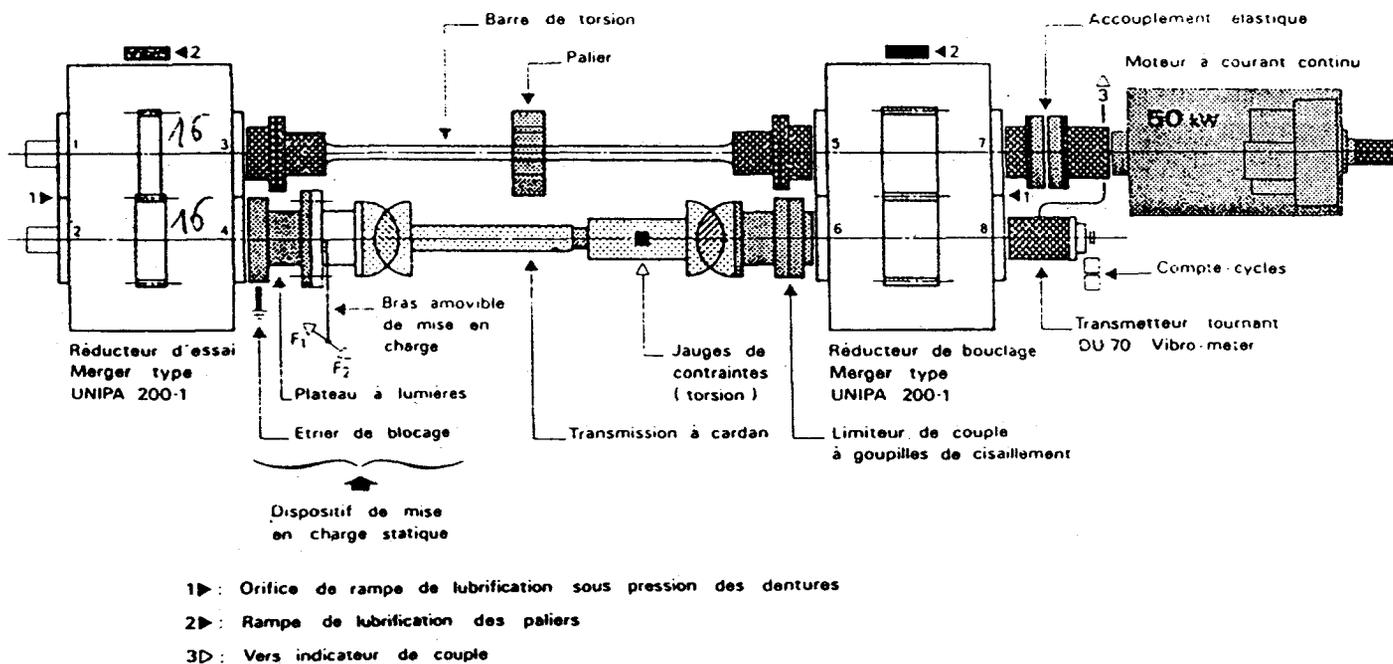


Figure 16. — Banc d'essai du CETIM.

jour (3<sup>e</sup> jour pour les experts), les séries A et B offrent des courbes COR légèrement moins performantes. Cependant il est utile d'en mentionner la cause essentielle. Il est apparu en effet qu'une dent sujette à un défaut pouvait voir son état s'améliorer au cours du temps, et se comporter donc comme une dent saine à nouveau. Ce phénomène amoindrit l'efficacité des courbes COR, puisque pour leur estimation nous ne tenons pas compte de cette éventualité, car elle est difficile à apprécier et à quantifier. Ceci explique donc la moins bonne performance des courbes COR sur les séries A et B où nous avons été confronté à ce problème (dent 2 pour la série A, 3 pour la série B).

Deux courbes COR sont disponibles pour chaque série de signaux. La première est déduite de l'analyse des résultats du détecteur ainsi que des observations des experts ; la seconde tient compte uniquement des appréciations de ces derniers. Il est à noter que pour les trois séries A, B, C ; la première courbe se situe au-dessus de la seconde montrant ainsi l'aptitude de notre détecteur à opérer des détections précoces, autrement dit la capacité de détecter des anomalies non visibles à l'œil nu. Cela est particulièrement le cas pour la série B, où la dent 14 subit une rupture au 10<sup>e</sup> jour, suite à une fissure interne en sous-couche, donc non visible à l'œil nu ; notre détecteur incrimina la dent en question dès le 8<sup>e</sup> jour. La même performance est à noter sur la série C, où la dent 5 est apparue défaillante au 1<sup>er</sup> jour pour notre détecteur et seulement au 3<sup>e</sup> jour pour les experts.

Les courbes COR présentées sur les figures 13, 14, 15 donnent une idée de l'efficacité de ce détecteur qu'est le test de sphéricité. Par la même, elles indiquent qu'il est parfaitement possible de choisir un seuil optimal (qui maximise la détection et minimise la fausse alarme). Il faut noter aussi qu'il est tout à fait possible de fixer le seuil en fonction de la gravité du défaut que l'on veut détecter. Reste à souligner l'extrême simplicité de mise en œuvre de ce détecteur, ainsi que son efficacité, prouvée par les courbes COR estimées. Les calculs sont simples et un ordre  $p = 2$  donne déjà d'excellents résultats (résultats produits ici).

## Conclusion

Cette étude a été consacrée, à la détection précoce de défauts dans des machines tournantes par analyse de signaux vibratoires. En particulier, nous nous sommes intéressés à la détection de l'écaillage dans des réducteurs à engrenages. L'importance de ce type d'éléments mécaniques dans l'industrie, et la gravité de ce défaut, qui conduit rapidement à la rupture de l'engrenage entraînant ainsi des conséquences fâcheuses (coût de maintenance, sécurité, ...), justifie le besoin d'une détection précoce. Les techniques utilisées actuellement, basées sur l'analyse de Fourier et l'emploi de descripteurs de signaux tels les valeurs RMS, Kurtosis, ... ne sont pas efficaces. Nous avons donc testé des méthodes de traitement du signal réputées plus performantes pour détecter ce type de

défauts, caractérisés à l'état précoce, par des non-stationnarités locales lors de l'engrènement des dents.

Tout d'abord, des techniques d'analyse spectrale haute résolution (Capon, Lagunas, AR) ont été appliquées pour analyser en détail d'éventuelles évolutions spectrales. Aucune variation significative, corrélée aux défauts n'a été observée. Toutefois, il semblerait que la méthode de Lagunas soit bien adaptée à la surveillance d'harmoniques sur des machines tournantes, où il est requis une bonne résolution en amplitude et en fréquence ; la méthode de Lagunas satisfait pleinement ces deux conditions.

Deux types de méthodes de détection de non-stationnarités ont été appliquées. Les méthodes basées sur l'analyse de l'erreur de prédiction linéaire d'un modèle autorégressif d'ordre 30 (cet ordre a été retenu car le spectre des signaux vibratoires exhibe une quinzaine d'harmoniques). La mise en évidence des défauts, matérialisée par des sauts de l'énergie de l'erreur de prédiction a été possible sur certains signaux, mais hélas cette détection n'est pas systématique. Par ailleurs la conception d'un détecteur basé sur le saut de l'énergie de l'erreur de prédiction n'est pas *a priori* une tâche aisée.

Le test de sphéricité a par contre donné des résultats remarquables. Dans tous les cas, nous avons été capables de faire une détection précoce des défauts. Les courbes COR attestent de l'efficacité de ce détecteur. Ces résultats suggèrent aussi l'étude d'un détecteur basé sur la comparaison de modèles autorégressifs à l'aide de distances appropriées, l'un estimé sur un tour, le second estimé sur le signal équivalent à la durée de l'engrènement d'une dent. Cette étude est actuellement en cours et les premiers résultats sont fort satisfaisants.

Manuscrit reçu le 26.6.91.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] T. DANG, « Les différents aspects des dentures d'engrenages après fonctionnement », *CETIM Information*, n° 104, pp. 36-43, février 1980.
- [2] L. FAURE, « Engrenages cémentés trempés : détermination de la pression limite de fonctionnement », *CETIM Information*, n° 104, pp. 53-63, 1988.
- [3] L. FAURE, « Micro Surface Damages on Tooth Flanks of Carburized Gears », Conference AGMA, New Orleans, USA, FTM4, October 88.
- [4] R. B. RANDAL, « Machine Health Monitoring by Analysis of Accelerometer Derived Signals », Fase 84, invited paper, pp. 13-29, 1984.
- [5] J. F. GAILLOCHET, « Méthodes de surveillance de l'état mécanique des machines au moyen de l'analyse des vibrations », *Revue d'Acoustique*, n° 57, pp. 82-91, 1979.
- [6] P. PAPIN, « Vibrations de réducteurs et multiplicateurs : méthodes modernes de diagnostic, remèdes possibles », Journées d'Études sur l'Engrenage, mai 1979.
- [7] R. M. STEWART, « Some Useful Data Analysis Techniques for Gearboxes Diagnosis », Time Series Symposium, Southampton, pp. 18.1-18.19, 1977.
- [8] R. M. STEWART, « The Specification and Development of Standard for Gearboxes Monitoring », *Proc. Instr. Mech. Eng.*, pp. 353-358, 1980.

- [9] P. D. MC FADDEN, « Detecting Fatigue Cracks in Gears by Amplitude and Phase Modulations of the Meshing Vibrations », *Journal Vib. Acc. Stress*, vol. 108, pp. 165-170, 1986.
- [10] D. B. PAPE, D. R. HOUSE, « Signal Processing for Detection of Gear Manufacturing Discrepancies », NOISE-CON Conf., Columbus Ohio, pp. 305-312, June 1985.
- [11] E. BARON, B. FAVRE, « Analysis of Relation Between Gear Noise and Transmission Error », INTERNOISE, Avignon, pp. 611-614, September 1988.
- [12] G. GARCIN, « Diagnostic d'organes mécaniques d'automobiles par l'analyse acoustique et vibratoire », Journées CETIM-GRECO TdSI, Senlis, pp. 167-177, 7-8 mars 1990.
- [13] L. F. PAU, « Failure Diagnosis and Performance Monitoring », Dekker, Inc., New York, 1981.
- [14] S. M. PANDIT and ALL, « Application of Data Dependant Systems to Diagnosis Vibration Problems », *Journal of Mechanical Design*, vol. 102, pp. 233-241, April 1980.
- [15] S. M. PANDIT and ALL, « A Data Dependant Systems Strategy of On-line Tool Wear Sensing », *Journal of Engineering for Industry*, vol. 104, pp. 217-223, August 1982.
- [16] S. Y. LIANG and D. A. DORNFIELD, « Toll Wear Detection Using Time Series Analysis of Acoustic Emission », *Journal of Engineering for Industry*, vol. 111, pp. 199-205, August 1989.
- [17] W. GERSH, « Two Applications of Parametric Time-Series Modelling Methods in Mechanical Signature Analysis », Edited by S. Braun, Academic Press, pp. 288-217, 1986.
- [18] G. LEVEY, « Analyse modale et surveillance vibratoire de machines tournantes », Thèse de Doctorat, Université de Rennes, septembre 1988.
- [19] M. BASSEVILLE, A. BENVENISTE, « Surveillance et Diagnostic à l'Aide de Modèles : Étude en Mécanique des Vibrations », Journées CETIM-GRECO TdSI, Senlis, pp. 97-1147, 8 mars 1990.
- [20] D. GARREAU et P. FLANDRIN, « Le non-stationnaire en mécanique. Position du problème. Point sur les différentes méthodes existantes », CETIM-GRECO TdSI SENLIS, pp. 75-96 7-8, mars 1990.
- [21] J. CAPON, « High Resolution Frequency Wavenumber Spectrum Analysis », *Proc. IEEE*, Vol. 57, pp. 1408-1418, August 1969.
- [22] R. T. LACOSS, « Data Adaptive Spectral Analysis Methods », *Geophysics*, 36, pp. 661-675, 1971.
- [23] M. A. LAGUNAS, M. E. SANTAMARIA, A. GASULL, A. MORENO, « Maximum Likelihood Filters in Spectral Estimation Problems », *Signal Processing*, Vol. 10, n° 1, pp. 19-34, 1986.
- [24] S. M. KAY, S. L. MARPLE, « Spectrum Analysis : a Modern Perspective », *Proc. IEEE*, Vol. 69, pp. 81-87, November 1981.
- [25] S. M. KAY, « Modern Spectral Analysis : Theory and Applications », Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1988.
- [26] Y. GRENIER, « Modèles ARMA à coefficients dépendant du temps : estimateurs et applications », *Traitement de Signal*, Vol. 3, n° 4-5, pp. 219-233, 1986.
- [27] M. BASSEVILLE, « Detecting Changes in Signals and Systems : a Survey », Rapport IRISA, n° 351, Rennes, 1987.
- [28] T. W. ANDERSON, « An Introduction to Multivariate Statistical Analysis », Wiley Publication in Statistics, pp. 259-262, 1958.
- [29] R. SCHMIDT, « Multiple Emitter Location and Signal Parameter Estimation », *Proc. RADCSpectrum Estimation Workshop*, pp. 243-258, 1979.
- [30] R. KUMARESAN, D. W. TUFTS, « Estimating the Angles of Arrival of Multiple Plane Waves », *IEEE Trans. on Aerospace & Elec. Syst.*, Vol. 19, n° 1, pp. 134-139, 1983.