

Algorithme itératif séquentiel pour l'inversion d'un opérateur Application à la restauration des images fournies par un multicateur à courants de Foucault

*Iterative sequential algorithm for inversion of an operator
Application to the restoration of the images given
by a multi-element eddy current sensor*



Dominique PLACKO

École Normale Supérieure de Cachan,
Laboratoire d'Électricité, Signaux et
Robotique (L.E.S.I.R.), Unité associée
C.N.R.S. n° D 1375, 61 avenue du Pdt
Wilson, 94230 CACHAN

Dominique Placko est agrégé de Génie Électrique (1981), Docteur troisième cycle (1984), et titulaire du Diplôme National d'Habilitation à Diriger des Recherches en Sciences (1990). A partir de 1981, il enseigne l'électronique et les asservissements à l'Université Paris Val de Mame, et depuis 1987 il occupe un poste de Maître de Conférence à l'E.N.S. de Cachan.

Ses activités de recherche, qui ont débuté au L.E.S.I.R. en 1981, sont orientées vers la conception de capteurs pour la robotique industrielle et le contrôle non destructif.



Patrice AKNIN

Institut National de Recherches sur les
Transports et leur Sécurité, Laboratoire
Technologie Nouvelles (LTN). INRETS, 2
avenue du Général Malleret-Joinville,
94114 ARCUEIL CEDEX

Patrice Akin est Agrégé de Physique, optique Physique Appliquée (1984) et Docteur en Sciences (Orsay 1990). Enseignements de l'Université d'Orléans (Dép. EEA), à l'ENSEA de Cergy-Pontoise et à l'ENS Cachan (Dép. Génie Élect.). Recherches en Déconvolution Temps Réel et Modélisation Non Linéaire au LESIR (Équipe Capteurs). En parallèle, depuis 1989, études de Systèmes de Perception avec applications en Dynamique Ferroviaire au LTN.



Henri CLERGEOT

École Normale Supérieure de Cachan,
Laboratoire d'Électricité, Signaux et
Robotique (LESIR) - ENS, 61 avenue du
Président Wilson, 94230 CACHAN

Henri Clergeot est né à Lapalisse, dans le centre de la France, en 1942. Après des études à l'ENS de Cachan, il a été reçu à l'agrégation de Physique, option physique appliquée, en 1968. Jusqu'en 1988, il a enseigné à l'ENS de Cachan, en électronique et traitement du signal. Depuis il est Professeur des Universités à l'IUT de génie électrique de Cachan, sur un enseignement de systèmes asservis.

Pour l'aspect recherche, il a travaillé en analyse spectrale au Laboratoire des Signaux et Systèmes (LSS) à Gif sur Yvette jusqu'en 1982, date de soutenance de sa Thèse d'État. Il travaille maintenant au Laboratoire d'Électricité, Signaux et Robotique (LESIR) à l'ENS de Cachan, en tant qu responsable d'un groupe d'étude de capteurs pour la perception de l'environnement en Robotique.

RÉSUMÉ

Les techniques d'estimation utilisées en traitement du signal nécessitent fréquemment l'emploi de méthodes itératives, qui permettent de restituer au mieux le signal d'entrée d'un système à partir de l'observation. Dans cet article, nous effectuons une brève synthèse des méthodes d'inversion, et présentons un algorithme original mettant en jeu l'opérateur H à inverser et une séquence de gains de correction k_n , choisie pour obtenir la meilleure approximation du filtre optimal de Wiener inverse correspondant à des hypothèses assez simples sur les propriétés statistiques du signal d'entrée. L'analyse détaillée des performances de ce schéma

itératif est menée dans le cas d'un opérateur H linéaire en présence de bruit, mais nous montrons qu'elle s'étend sous certaines conditions à des systèmes non linéaires. Les développements théoriques sont ensuite illustrés par une application en restauration de profil pour un multicapteurs à courants de Foucault.

MOTS CLÉS

Filtrage optimal, méthodes itératives, séquence de coefficients, restauration d'images capteurs.

SUMMARY

Iterative methods are commonly used in signal processing, to restore a signal smoothed by a linear operator H , in presence of noise. In this paper, we present an original sequential method which relies on a recursive feed back control loop including the operator H . It is based on the use of only a small fixed number of iterations, with a predetermined sequence of gain factors k_n . We demonstrate that the sequence k_n can be chosen in order to approximate the optimal Wiener inverse filter corresponding to a particular crude assumption on the input signal statistics. This is of particular interest if H is a non stationary filter, or a non linear filter with a varying local linear approximation.

It is this kind of non linear filtering that we encountered in a practical situation in the design of a multi-element eddy current sensor. The performance of our algorithm is illustrated in this application, in order to improve the depth image of a metallic body given by the sensor.

KEY WORDS

Optimal filtering, iterative methods, sequence of gains, restoration of sensor images.

1. Introduction

1.1. BUT DE L'ÉTUDE. PLAN DE L'EXPOSÉ

Cet article présente une méthode originale pour l'inversion itérative d'une relation matricielle entre l'entrée et la sortie d'un système. L'avantage de la solution itérative est qu'elle n'utilise que la matrice H de cette relation et non son inverse ou une inverse généralisée. Plus particulièrement, l'algorithme proposé permet de fournir une solution proche de l'estimée linéaire à variance minimale et dépend peu de la matrice H elle-même. Ainsi, il se prête bien au traitement de problèmes non stationnaires, en présence de bruit, ou à des problèmes non linéaires.

Dans un premier temps, nous allons préciser la correspondance entre le signal et l'observation et examiner les solutions directes d'inversion. Ensuite, nous analyserons les propriétés du schéma itératif d'inversion, et présenterons une méthode séquentielle originale approchant au mieux l'estimateur à variance minimale.

Ces développements seront illustrés par une application en traitement des images mono-dimensionnelles (1D) fournies par un dispositif multicapteur à courants de Foucault destiné au domaine de la robotique, ce qui permettra d'apprécier l'intérêt de l'algorithme proposé, tant sur le plan expérimental que théorique.

1.2. FORMULATION DANS LE CAS LINÉAIRE

La formulation est établie dans le cas des systèmes linéaires discrets pour lesquels le vecteur observation

\underline{Y} est relié au signal original \underline{X} par la relation :

$$(1.1) \quad \underline{Y} = H\underline{X} + \underline{B}$$

où H représente l'opérateur linéaire et \underline{B} un bruit additif. L'analyse de ce cas permettra d'interpréter le comportement pour un opérateur non stationnaire ou non linéaire (voir § 1.3). Pour la restitution de \underline{X} à partir de l'observation \underline{Y} nous nous limiterons à la classe des estimateurs linéaires de la forme :

$$(1.2) \quad \hat{\underline{X}} = W\underline{Y}$$

pour lesquels nous présentons maintenant l'éventail des solutions.

* Solution directe par inversion

La solution la plus naïve pour retrouver \underline{X} consisterait à prendre pour W l'inverse de H . En fait, cet inverse peut ne pas exister, ou donner une amplification du bruit due à l'inversion des plus faibles valeurs propres de H . Quand H n'est pas inversible, une solution possible consiste à calculer la pseudo-inverse, notée H^* , calculée à partir de la décomposition en valeurs singulières de H . Cette solution pseudo-inverse, ou inverse généralisée, conduit elle aussi à une amplification du bruit due à l'inversion des plus faibles valeurs singulières de H [1].

* Algorithmes d'inversion itératifs

Plusieurs algorithmes, incluant l'opérateur H dans un schéma itératif de contre réaction ont été proposés [9], [14] pour calculer asymptotiquement $\hat{\underline{X}} = H^* \underline{Y}$ sans inver-

sion de matrice : Van Cittert, Gauss, Jacobi, etc. (voir fig. 1).

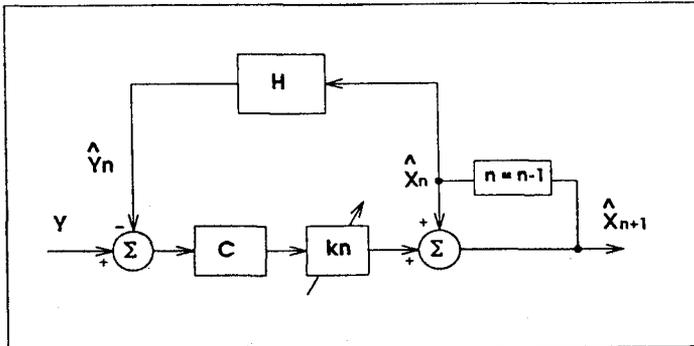


Figure 1. — Schéma itératif d'inversion.

Dans ce type d'algorithme, le vecteur d'entrée \underline{Y} du schéma est constant, alors que la suite des vecteurs de sortie $\hat{\underline{X}}_n$ correspond à un transitoire.

De tels algorithmes ont été utilisés en déconvolution en limitant volontairement le nombre d'itérations afin de réduire l'amplification du bruit. Mais la méthode reste empirique et ne permet pas un bon contrôle de l'opérateur d'inversion équivalent \underline{W}_N .

** Solution directe pour l'estimateur linéaire à variance minimale*

Dans cette approche, on considère le vecteur \underline{X} lui-même comme aléatoire. Si les covariances de \underline{B} et \underline{X} sont connues, une solution possible au problème précédent consiste à déterminer l'opérateur \underline{W}_0 donnant entre \underline{X} et l'estimée $\hat{\underline{X}}$ la covariance d'erreur minimale.

Il est en général assez arbitraire de se fixer une valeur précise de la covariance a priori sur le signal d'entrée. Mais en pratique on obtient des résultats satisfaisants même à partir d'une évaluation grossière et assez qualitative portant sur les propriétés statistiques d'une classe déterminée de signaux.

L'inconvénient de la solution directe est que le filtre optimal est entièrement spécifique de l'opérateur \underline{H} et doit être recalculé pour chaque cas.

** Solution originale proposée : séquence à nombre de pas N fixés*

La méthode exposée dans cet article met en jeu l'opérateur \underline{H} et un schéma itératif analogue à celui de la figure 1 mais avec gain de correction variable k_n fonction du rang de l'itération. Elle est fondée sur l'utilisation d'un nombre fini d'itérations, avec une séquence prédéterminée de valeurs de k_n .

Nous démontrons que la séquence k_n peut être choisie de façon à approcher au mieux un filtre donné et en particulier le filtre à variance d'erreur minimale correspondant à des hypothèses assez simples sur les propriétés du signal d'entrée. Le point important est que la séquence k_n optimale est largement indépendante de l'opérateur \underline{H} .

1.3. GÉNÉRALISATION A UN OPÉRATEUR NON STATIONNAIRE OU NON LINÉAIRE

En présence d'un opérateur \underline{H} non linéaire ou non stationnaire, l'analyse précédente reste valable pour le modèle linéaire local. Nous constaterons que la méthode proposée possède des propriétés intéressantes du fait que la séquence $\{k_n\}$ ne dépend respectivement de l'observation \underline{X} que par le biais d'un paramètre rapport signal-à-bruit, et de l'opérateur \underline{H} que par sa valeur propre maximale notée λ_{\max} . Ceci est particulièrement intéressant dans le cas où \underline{H} est un filtre non stationnaire à bande passante variable : si λ_{\max} ne varie pas, on peut garder la même séquence $\{k_n\}$. Ceci sera également valable si cet opérateur est non linéaire, avec une approximation linéaire locale variable. Ce sera le cas du système multicapteur qui sert d'illustration à cet algorithme.

1.4. REMARQUE SUR LE FORMALISME MATRICIEL. LIEN AVEC LE FILTRAGE

Il existe un cas particulier intéressant pour lequel la relation est établie par une matrice de Toeplitz carrée $N \times N$, avec N tendant vers l'infini. Cette formulation reflète le cas d'un filtrage linéaire, causal ou non. L'opérateur \underline{H} est alors diagonalisé par transformation de Fourier discrète.

Le calcul direct avec une matrice infinie est évidemment impossible, mais on obtient une bonne approximation de ces relations si N est suffisamment grand. Si on travaille à horizon fini, notons de plus que les propriétés associées à la transformation de Fourier sont exactes si \underline{B} et \underline{X} sont soit périodiques soit à support limité ; \underline{H} est alors une matrice circulante.

Au cours de cet exposé, nous éviterons cependant de restreindre l'étude à des cas particuliers tels que celui du filtrage linéaire. Nous développerons le cas plus général des matrices $M \times N$ quelconques en introduisant leur décomposition en valeurs singulières qui permet de bénéficier, en raisonnant sur des matrices diagonales, des mêmes simplifications qu'apporte la transformation de Fourier pour le filtrage.

2. Solutions directes

2.1. ANALYSE DE LA CORRESPONDANCE ENTRE OBSERVATION ET SIGNAL

Les problèmes dans l'inversion de la relation (1.1) viennent d'une part de la présence du bruit \underline{B} , d'autre part du fait que la relation linéaire établie par \underline{H} n'est en général pas bijective. Considérons ce dernier problème, en l'absence de bruit.

2.1.1. Étude en l'absence de bruit

Sauf dans le cas où \underline{H} est une matrice carrée régulière, la relation entre le signal \underline{X} et son image \underline{Y} n'est pas bijective et le problème qui consiste à retrouver \underline{X} connaissant \underline{Y} entre dans la catégorie des problèmes dits « mal posés » [16]. Pour rétablir l'unicité de la solution on doit introduire

des contraintes supplémentaires, que l'on a intérêt à choisir en fonction de connaissances a priori sur le signal d'entrée.

Remarquons que la matrice H réalise en fait une bijection entre son espace ligne \mathcal{E}_x et son espace colonne \mathcal{E}_y , bijection caractérisée par la décomposition en valeurs singulières de H [17], sous la forme :

$$(2.1) \quad H = \sum_{i=1}^r \lambda_i \underline{U}_i \underline{V}_i^+ \quad \lambda_i \neq 0.$$

Dans cette expression, r est le rang de la matrice et \underline{V}^+ le vecteur transposé conjugué de \underline{V} . Les vecteurs $\underline{V}_1, \dots, \underline{V}_r$ forment une base orthonormée de l'espace ligne, sous-espace de l'espace signal \underline{X} , et $\underline{U}_1, \dots, \underline{U}_r$ forment une base orthonormée de l'espace colonne de H , sous-espace de l'espace vectoriel de l'observation \underline{Y} .

Le produit par H peut donc se décomposer en une projection sur l'espace ligne \mathcal{E}_x suivie de cette bijection entre \mathcal{E}_x et \mathcal{E}_y : c'est au niveau de cette projection que s'introduit l'ambiguïté du problème inverse.

Soit Π_x le projecteur sur \mathcal{E}_x . Tout vecteur signal peut se décomposer en ses deux projections sur \mathcal{E}_x et sur l'espace complémentaire :

$$(2.2) \quad \begin{cases} \underline{X} = \underline{X}_1 + \underline{X}_2 \\ \underline{X}_1 = \Pi_x \underline{X}, \quad \underline{X}_2 = (\underline{I}_N - \Pi_x) \underline{X} \end{cases}$$

où \underline{I}_N est l'opérateur identité dans l'espace observation et où :

$$(2.3) \quad \Pi_x = \sum_{i=1}^r \underline{V}_i \underline{V}_i^+.$$

Le vecteur \underline{X}_2 étant orthogonal à tous les vecteurs \underline{V}_i , on vérifie, en l'absence de bruit, que :

$$(2.4) \quad \underline{Y} = H\underline{X} = H\underline{X}_1.$$

Cette relation où $\underline{X}_1 \in \mathcal{E}_x$ et $\underline{Y} \in \mathcal{E}_y$ est bijective et s'inverse sous la forme :

$$(2.5) \quad \begin{cases} \underline{X}_1 = H^* \underline{Y} \\ H^* = \sum_{i=1}^r \frac{1}{\lambda_i} \underline{V}_i \underline{U}_i^+ \end{cases}$$

où H^* est par définition la pseudo-inverse de H .

On peut restituer ainsi exactement \underline{X}_1 à partir de \underline{Y} mais \underline{X}_2 reste totalement inconnu. L'estimation de \underline{X}_2 à partir de \underline{X}_1 ne peut se faire qu'à partir d'hypothèses a priori sur l'observation \underline{X} . Ces hypothèses peuvent être formulées notamment sous forme d'une covariance R_X :

$$(2.6) \quad R_X = E[\underline{X}\underline{X}^+].$$

Les hypothèses pourraient aussi être introduites sous forme de contraintes plus ou moins sévères sur la solution [16]. Un cas extrême est celui du « modèle paramétrique », où \underline{X} est contraint à appartenir à une famille de fonctions

$\underline{X}(\underline{\theta})$, dépendant d'un petit nombre de paramètres, qui sont les coordonnées de $\underline{\theta}$. Nous ne considérerons pas ce cas ici.

Dans ces conditions, si \underline{X}_2 est estimée de façon linéaire à partir de \underline{X}_1 , sous la forme :

$$(2.7) \quad \hat{\underline{X}}_2 = Q\underline{X}_1$$

on trouve [2], [3] que l'erreur quadratique minimale pour $\|\underline{X}_2 - \hat{\underline{X}}_2\|^2$ est obtenue si :

$$(2.8) \quad Q = R_{21} R_1^{\#}$$

où, compte tenu de la définition de \underline{X}_1 et \underline{X}_2 (2.2) :

$$(2.9) \quad \begin{cases} R_1 = E[\underline{X}_1 \underline{X}_1^+] = \Pi_x R_X \Pi_x \\ R_{21} = E[\underline{X}_2 \underline{X}_1^+] = (\underline{I} - \Pi_x) R_X \Pi_x \end{cases}$$

$R_1^{\#}$ désignant la pseudo-inverse de R_1 .

Notons que si les vecteurs $\underline{V}_1, \dots, \underline{V}_r$ sont vecteurs propres de R_X , R_{21} est la matrice nulle : les composantes \underline{X}_1 et \underline{X}_2 sont décorréées et la connaissance de \underline{X}_1 ne donne aucune information sur \underline{X}_2 . Les relations (2.7) et (2.8) conduisent alors à $\hat{\underline{X}}_2 = 0$, d'où $\hat{\underline{X}} = \underline{X}_1$.

2.1.2. Effet du bruit

Sachant que l'observation non bruitée appartient nécessairement à l'espace colonne \mathcal{E}_y de la matrice H , on peut toujours éliminer une partie du bruit en projetant l'observation sur \mathcal{E}_y . Plus précisément, si Π_y désigne le projecteur sur \mathcal{E}_y , le bruit peut être décomposé sous la forme :

$$(2.10) \quad \begin{cases} \underline{B} = \underline{B}_1 + \underline{B}_2 \\ \underline{B}_1 = \Pi_y \underline{B}, \quad \underline{B}_2 = (\underline{I}_M - \Pi_y) \underline{B}. \end{cases}$$

Par projection de \underline{Y} sur \mathcal{E}_y , on obtient la transposition de (1.1) avec un bruit réduit \underline{B}_1 :

$$(2.11) \quad \underline{Y}_1 \triangleq \Pi_y \underline{Y} = H\underline{X} + \underline{B}_1$$

et, compte tenu de (2.4) :

$$(2.12) \quad \underline{Y}_1 = H\underline{X}_1 + \underline{B}_1.$$

Si on essaye d'inverser cette relation en utilisant la pseudo-inverse (2.5), on obtient :

$$(2.13) \quad \hat{\underline{X}}_1 = H^* \underline{Y}_1 = \underline{X}_1 + \underline{B}_x$$

où :

$$(2.14) \quad \underline{B}_x = H^* \underline{B}_1 = H^* \underline{B}.$$

L'inconvénient de cette solution utilisant la pseudo-inverse est d'entraîner une forte amplification des composantes de bruit associées aux petites valeurs propres de H^* . Ceci est bien mis en évidence dans le cas où \underline{B} serait un bruit blanc, tel que :

$$(2.15) \quad R_B = E[\underline{B}\underline{B}^+] = \sigma_B^2 \underline{I}_M,$$

on calcule alors facilement, compte tenu de (2.14) et (2.15) :

$$(2.16) \quad E [\|B_X\|^2] = \text{Tr} [H^* R_B H^{*+}] = \sigma_B^2 \left\{ \sum_{i=1}^r |1/\lambda_i|^2 \right\}.$$

Cette relation illustre bien l'inconvénient de la solution utilisant la pseudo-inverse : en présence de valeurs propres faibles, le bruit se trouve fortement amplifié du fait des termes en λ_i^{-2} .

Diverses approches ont été proposées pour « régulariser » l'opérateur H^* et limiter le bruit [1], [4]. Celle que nous adopterons consiste à rechercher l'estimée linéaire à erreur quadratique minimale, connaissant la covariance (2.15) du bruit et une covariance a priori (2.16) pour l'observation.

2.2. SOLUTION LINÉAIRE A VARIANCE MINIMALE DE L'ERREUR

2.2.1. Formulation générale

Le signal \underline{X} est considéré comme aléatoire dans un ensemble donné $\{\underline{X}\}$ avec une loi de covariance connue R_X . Parmi les estimateurs linéaires de \underline{X} sous la forme (1.2), la solution donnant la plus faible erreur quadratique pondérée :

$$(2.17) \quad S_Q = (\underline{X} - \hat{\underline{X}})^+ Q (\underline{X} - \hat{\underline{X}}) = \|\underline{X} - \hat{\underline{X}}\|_Q^2 \quad (Q > 0)$$

est fournie par l'opérateur de Wiener [2], [15] :

$$(2.18) \quad W = R_X H^+ [H R_X H^+ + R_B]^{-1}$$

indépendant de la matrice de pondération Q , définie positive.

On démontre que la relation (2.18), appelée « forme covariance », qui fait apparaître la matrice de covariance des mesures, est équivalente à la relation suivante, appelée « forme information », qui fait apparaître la matrice de covariance du signal [1] :

$$(2.19) \quad W = [H^+ R_B^{-1} H + R_X^{-1}]^{-1} H^+ R_B^{-1}.$$

Ces deux relations donnent une solution optimale même si H est une matrice rectangulaire.

2.2.2. Hypothèses de travail

En général il est assez arbitraire de se fixer une valeur précise de R_X ; nous raisonnerons sur une forme approximative rendant compte d'une évaluation grossière de la puissance du signal, sous la forme :

$$(2.20) \quad R_X \approx \sigma_X^2 I_N, \quad \sigma_X^2 = \frac{1}{N} \langle |X|^2 \rangle.$$

Pour le bruit, nous reprenons l'hypothèse (2.15) de « bruit blanc ». Dans ce cas, (2.19) conduit à :

$$(2.21) \quad W = [H^+ H + (\sigma_B/\sigma_X)^2 I_N]^{-1} H^+.$$

On retrouve la forme des solutions régularisées au sens de Phillips-Twomey-Tikhonov [1], le paramètre de régularisation étant lié à l'inverse du rapport signal-à-bruit σ_X^2/σ_B^2 .

Les hypothèses de travail simplificatrices concernant les covariances R_X et R_B sont assez radicales mais pourraient facilement être affinées. Par exemple, en présence d'un bruit non blanc de covariance connue R_B on peut opérer un blanchissement en utilisant une factorisation de R_B , sous la forme :

$$(2.22) \quad R_B = R^{1/2} (R^{1/2})^+.$$

En effet, par le changement de variables :

$$(2.23) \quad \begin{aligned} \underline{Y}' &= R^{-1/2} \underline{Y} \\ H' &= R^{-1/2} H \\ W' &= W R^{-1/2} \end{aligned}$$

on vérifierait aisément que l'on retrouve pour le cas général des relations identiques à (2.20) et (2.21).

Comme nous l'avons souligné pour R_X , le choix d'une forme bien précise serait assez arbitraire, et l'hypothèse choisie correspond à faire jouer le même rôle à toutes les composantes fréquentielles du signal à restaurer.

2.2.3. Interprétation

L'interprétation de l'opérateur (2.21) est simple si on utilise la décomposition en valeurs singulières (2.1) de la matrice H . On constate que W définie par la relation 2.21 se décompose sur les mêmes bases sous la forme :

$$(2.24) \quad W = \sum_{i=1}^r \left\{ \frac{\lambda_i^*}{|\lambda_i|^2 + (\sigma_B/\sigma_X)^2} \right\} \underline{V}_i \underline{U}_i^+.$$

Cette relation est de la forme :

$$(2.25) \quad W = \sum_{i=1}^r w_i \underline{V}_i \underline{U}_i^+$$

avec :

$$(2.26) \quad w_i = \left\{ \frac{|\lambda_i|^2}{|\lambda_i|^2 + (\sigma_B/\sigma_X)^2} \right\} \frac{1}{\lambda_i}.$$

Elle est analogue à la relation (2.5b) qui définit un filtre inverse, mais les coefficients w_i ne sont plus directement les inverses des valeurs singulières λ_i : ils peuvent s'interpréter comme le produit des $1/\lambda_i$ intervenant dans la relation inverse (2.5) par une fonction de régularisation :

$$(2.27) \quad g_i = \frac{1}{1 + |\sigma_B/\lambda_i \sigma_X|^2} = \frac{1}{1 + |\sigma_B/\sigma_{Y_i}|^2}$$

en notant que la variance sur la i -ième composante de \underline{Y} est bien :

$$\sigma_{Y_i} = \lambda_i \sigma_X.$$

Remarquons que g_i est égal à 1 à fort RSB ($\sigma_{Y_i} \gg \sigma_B$). Par contre à faible RSB ($\sigma_{Y_i} \ll \sigma_B$) g_i devient très petit,

évitant l'amplification des composantes fortement bruitées de l'observation. On constate le même comportement que dans le problème de filtrage de Wiener [15].

2.2.4. Facteur de régularisation normalisé

Dans la formulation précédente, même en supposant les $|\lambda_i|$ classées par ordre décroissant, la suite g_i est entièrement dépendante de la matrice H étudiée. Une fonction de régularisation normalisée $g(t)$ peut être introduite en raisonnant sur la variable $t = |\lambda_i/\lambda_{\max}|$:

$$(2.28) \quad g(t) = \frac{t^2}{t^2 + \alpha^2}, \quad t = |\lambda_i/\lambda_{\max}|$$

avec : $\alpha^2 = (\sigma_B/\sigma_X \lambda_{\max})^2$, $g_i = g(\lambda_i/\lambda_{\max})$.

Le point capital est que la fonction normalisée $g(t)$ ne dépend de la matrice H et du type de signal que par l'intermédiaire du paramètre α , qui s'interprète comme l'inverse du rapport signal-à-bruit (RSB) pour l'observation.

La figure 2 présente, à titre d'exemple, la fonction $g(t)$ pour trois valeurs de RSB α^{-1} et montre que plus le signal est bruité, plus la fonction g doit s'annuler rapidement au voisinage des faibles valeurs propres de H . D'autre part, on remarque que la tangente à l'origine est horizontale.

Nous allons voir au paragraphe suivant comment on peut tenter d'approcher cette fonction $g(t)$ à l'aide d'algorithmes itératifs simples.

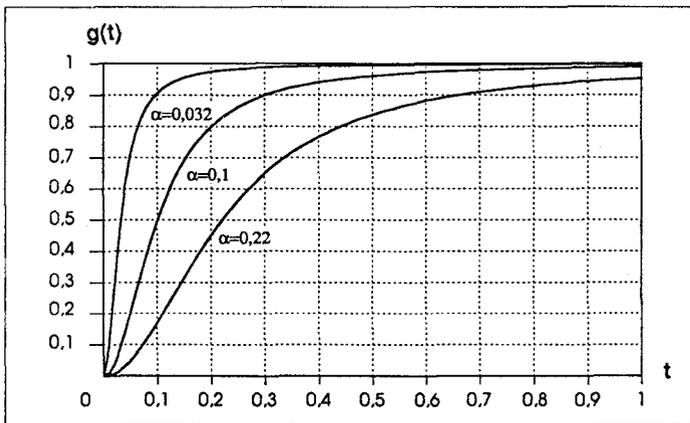


Figure 2. — Fonctions de régularisation optimales selon le RSB.

3. Solutions itératives

3.1. STRUCTURE DES ALGORITHMES

L'utilisation d'algorithmes itératifs pour inverser la relation (1.1) sans calculer H^* a déjà été proposée, sous une forme paramétrique [5], ou non paramétrique [6]. Nous nous intéressons particulièrement ici à la forme non paramétrique qui ne nécessite pas de modèle trop rigide pour le signal \underline{X} .

Le type d'algorithme le plus simple dans ce cas est celui de la figure 1 :

$$(3.1) \quad \underline{X}_{n+1} = \underline{X}_n + k_n C (\underline{Y} - H \underline{X}_n).$$

Le rôle de la matrice C est de refaire passer de l'espace observation $\{\underline{Y}\}$ à l'espace signal $\{\underline{X}\}$. Elle est indispensable si les dimensions de \underline{X} et de \underline{Y} sont différentes. Plus précisément, dans la mesure où la partie utile de \underline{Y} est dans l'espace \mathcal{E}_y et l'estimée \underline{X} est dans l'espace \mathcal{E}_x , pour les deux cas d'inversion envisagés précédemment, il paraît judicieux de choisir pour C une matrice appliquant \mathcal{E}_y sur \mathcal{E}_x . Dès lors, la solution la plus simple consiste à choisir $C = H^+$. Pour plus de généralité, nous considérons le cas d'une matrice de la forme :

$$(3.2) \quad C = \sum_{i=1}^P c_i \underline{V}_i \underline{U}_i^+$$

où $P = \min(M, N)$ est le rang maximum d'une matrice rectangulaire $M \times N$. Les \underline{U}_i et les \underline{V}_i pour $i = 1$ à r sont ceux de la décomposition en valeurs singulières de H , les suites étant complétées de façon à former des bases orthonormées respectives de l'espace observation et de l'espace signal. Remarquons que le cas $C = H^+$ correspond à $c_i = \lambda_i^*$ et que C peut se réduire à la matrice identité si H est carrée et diagonalisable, auquel cas $c_i = 1$.

3.2. ALGORITHME A GAIN CONSTANT

Dans ce cas l'équation de récurrence (3.1) peut s'écrire sous la forme :

$$(3.3) \quad \underline{X}_{n+1} - (I - kCH) \underline{X}_n = kC\underline{Y}.$$

La solution d'une telle équation est la somme de la solution générale de l'équation sans second membre et d'une solution particulière avec second membre. Le second membre peut être décomposé en un terme dans \mathcal{E}_y et un terme dans l'espace complémentaire, auxquels vont correspondre deux solutions particulières. En fait pour le terme dans \mathcal{E}_y nous allons retrouver la solution pseudo-inverse, alors que le deuxième terme permettra de discuter l'influence du bruit complémentaire \underline{B}_2 (bruit « hors bande »). Posons :

$$(3.4) \quad C\underline{Y} = C\underline{Y}_1 + C\underline{B}_2.$$

Pour le premier terme, il existe une solution particulière constante $\underline{X}_n = \underline{x}$ appartenant à \mathcal{E}_x qui satisfait alors, par réduction de (3.3) :

$$(3.5) \quad \begin{cases} kCH\underline{x} = kC\underline{Y}_1 \in \mathcal{E}_x \\ \underline{x} = [CH]^* C\underline{Y}_1 = H^* \underline{Y}_1 = H^* \underline{Y}. \end{cases}$$

Pour le deuxième terme de (3.4) qui est orthogonal à \mathcal{E}_y , il existe une solution orthogonale à \mathcal{E}_x telle que $H\underline{x} = 0$. L'équation (3.3) se réduit alors à :

$$(3.6) \quad \begin{cases} \underline{x}_{n+1} - \underline{x}_n = kC\underline{B}_2 \\ \underline{x}_n = nkC\underline{B}_2. \end{cases}$$

En rajoutant aux deux solutions particulières (3.5) et (3.6) la solution générale de l'équation sans second membre, on obtient, tous calculs faits et pour la condition initiale $\underline{X}_0 = \underline{0}$:

$$(3.7) \quad \underline{X}_n = \{I - (I - kCH)^n\} H^* \underline{Y} + nkC\underline{B}_2 \\ = W_n \underline{Y} + nkC\underline{B}_2$$

compte tenu de la forme de W_n :

$$(3.8) \quad W_n = \{I - (I - kCH)^n\} H^* .$$

Le deuxième terme de l'équation (3.7) traduit l'effet de l'algorithme sur le bruit « hors bande » \underline{B}_2 , correspondant aux valeurs propres nulles de H. Il est nul si les valeurs propres de C sont nulles pour $i > r$. Sinon le terme correspondant croît linéairement avec n et conduit à la divergence de l'algorithme.

En général, l'analyse de ce type d'algorithme se borne à la recherche de conditions de convergence asymptotique de W_n vers H^* en l'absence de bruit.

Cette convergence se discute aisément à partir des valeurs singulières de la matrice CH. Nous distinguerons deux cas pratiques importants. D'une part, si l'opérateur H est représenté par une matrice carrée, il est possible de se placer dans le cas le plus simple, et de choisir $C = I$, ce qui présente un certain intérêt, comme nous le verrons au paragraphe suivant. D'autre part, si l'opérateur H est quelconque, nous avons évoqué précédemment la possibilité de choisir $C = H^+$.

3.2.1. Cas où $C = I$

La relation (3.8) s'apparente à l'algorithme de Van Cittert si $k = 1$ [7], [8], et à l'algorithme des déplacements simultanés ou méthode du point de Jacobi si $k \neq 1$ [9], [10].

La condition de convergence est alors la suivante :

$$(3.9) \quad |1 - k\lambda_i| < 1 \quad i = 1, \dots, r$$

de telle sorte que $(I - kH)^n$ tende vers zéro lorsque n croît. Remarquons que cette relation peut ne pas avoir de solution en k par exemple s'il existe des valeurs propres de signe opposé. Ce type d'algorithme convient en fait essentiellement aux cas où l'opérateur H est une matrice hermitienne non négative, dont les valeurs propres sont réelles. La condition (3.9) se réécrit alors : $0 < k < 1/\lambda_{\max}$.

Nous développons ici plus particulièrement l'utilisation de ces algorithmes pour la déconvolution en présence de bruit, en choisissant comme estimée le résultat $\hat{\underline{X}} = \underline{X}_N$, obtenu après N itérations, le but étant d'approcher l'opérateur W à variance minimale et non la matrice pseudo inverse H^* , qui provoque une forte amplification du bruit.

Par projection des relations (3.7) on obtient entre les composantes sur les bases $\{U_i\}$ et $\{V_i\}$ les relations :

$$(3.10) \quad i \leq r : \hat{x}_i = \{1 - (1 - k\lambda_i)^N\} \frac{1}{\lambda_i} y_i$$

$$\text{soit :} \quad i \leq r : \hat{x}_i = w_i(1/\lambda_i) y_i \\ (3.11) \quad i > r : \hat{x}_i = Nkb_i$$

les valeurs singulières étant supposées classées par ordre non croissant, et nulles pour $i > r$.

On remarque, d'après (3.11), que le bruit « hors bande » n'est pas éliminé et se trouve multiplié par le nombre N d'itérations.

La quantité entre accolades, qui tend vers 1 lorsque N tend vers l'infini si la condition de convergence est satisfaite, joue à N fini le rôle de la fonction de régularisation $g(t)$ dans (2.27) et justifie une limitation volontaire du nombre d'itérations. En effet la relation (3.10) peut s'écrire :

$$(3.12) \quad \hat{x}_i = g_N[\lambda_i/\lambda_{\max}] \frac{1}{\lambda_i} y_i$$

$$\text{soit :} \quad g_N(t) = 1 - (1 - k't)^N$$

$$\text{avec :} \quad t = \lambda_i/\lambda_{\max} \quad \text{et} \quad k' = k\lambda_{\max} .$$

La figure 3 présente la fonction $g_N(t)$ pour différentes valeurs de N, k' ayant été fixé à 1.

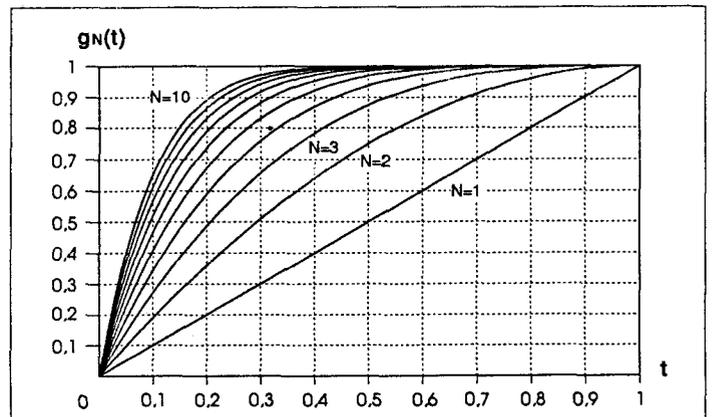


Figure 3. — Fonction de régularisation $g_N(t)$, pour $C = I$; N varie de 1 à 10.

Par comparaison à la figure 2, on voit que pour chaque valeur du RSB, il existe un nombre d'itérations N' pour lequel la fonction $g_N(t)$ est la plus voisine de la courbe $g(t)$ optimale. Il est cependant utile d'insister sur le fait que cet algorithme conduit à des courbes dont la tangente à l'origine n'est pas horizontale, ce qui implique une atténuation insuffisante des faibles valeurs propres, premières responsables de l'amplification du bruit.

3.2.2. Cas où $C = H^+$

Ceci correspond à l'algorithme de Landweber avec « refiletage de l'information » [1], [13]. Dans ce cas, $c_i = \lambda_i^*$; on obtient :

$$(3.13) \quad x_i = \{1 - (1 - k|\lambda_i|^2)^N\} \frac{1}{\lambda_i} y_i \quad \forall i$$

soit :

$$(3.14) \quad x_i = g_N \left[\left| \lambda_i / \lambda_{\max} \right| \right] \frac{1}{\lambda_i} y_i$$

où : $g_N(t) = 1 - (1 - k' t^2)^N$

avec : $t = \left| \lambda_i / \lambda_{\max} \right|$ et $k' = k \left| \lambda_{\max} \right|^2$.

La condition de convergence est alors la suivante :

$$(3.15) \quad \left| 1 - k \left| \lambda_i \right|^2 \right| < 1 \quad i = 1, \dots, r.$$

Remarquons que cette inégalité en k peut toujours être satisfaite compte tenu de la valeur positive de $\left| \lambda_i \right|^2$. La figure 4 présente l'évolution de la fonction de régularisation $g_N(t)$ pour diverses valeurs de N , k ayant été choisi égal à 1.

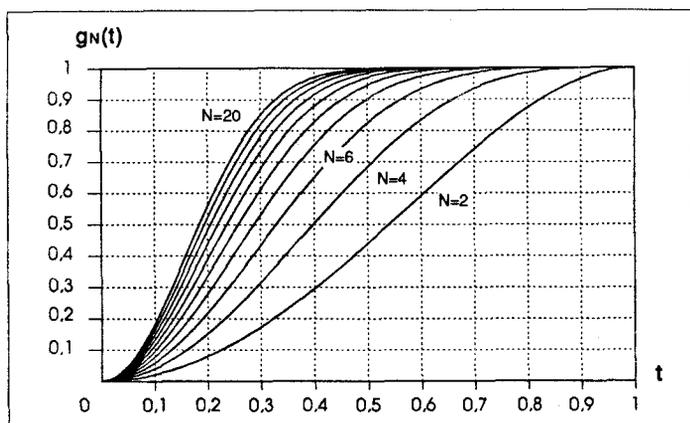


Figure 4. — Fonction de régularisation $g_N(t)$ pour $C = H^+$; N varie de 2 à 20.

On constate que la tangente à l'origine de ces courbes est horizontale, ce qui peut permettre de satisfaire la condition sur le bruit énoncée précédemment. Toutefois on voit par comparaison avec la figure 2 que les courbes $g_N(t)$ sont très « écrasées » et qu'il faut un nombre d'itérations important pour approcher la fonction de pondération optimale $g(t)$ correspondant à de faibles valeurs de α .

3.2.3. Généralisation éventuelle

Cette extension consisterait à prendre pour la matrice C une approximation plus ou moins grossière de la matrice W optimale elle-même sous la forme $C = f \left(\left| \lambda_{\max} \right|^{-2} H^+ H \right)$. Nous illustrerons simplement par un exemple cette possibilité, avec :

$$(3.16) \quad C = f \left[\frac{1}{\left| \lambda_{\max} \right|^2} H^+ H \right] H^+ = \left\{ 2I - \frac{1}{\left| \lambda_{\max} \right|^2} H^+ H \right\} H^+.$$

On obtient pour la pondération équivalente :

$$(3.17) \quad \tilde{g}_N(t) = 1 - [1 - k'(2t^2 - 4t^4)]^N$$

avec : $k' = k \left| \lambda_{\max} \right|^2$.

Sur cet exemple, on remarque que, comparé à (3.14) :

$$(3.18) \quad \tilde{g}_N(t) = g_{2N}(t).$$

La vitesse de convergence est donc exactement doublée par rapport au cas $C = H^+$, au prix du calcul préliminaire de C .

4. Algorithme séquentiel proposé

4.1. FORMULATION DE L'ALGORITHME

Notre approche, pour un nombre donné N d'itérations, consiste à choisir une séquence de gains k_1, \dots, k_N donnant la meilleure approche du filtre de Wiener (2.22) par un filtre équivalent sans tenir compte des critères classiques de convergence asymptotique. En fait, des valeurs de k_n très supérieures à $1/\lambda_{\max}$ pourront apparaître dans cette séquence.

Par un raisonnement identique à celui du paragraphe précédent, pour un algorithme à gain variable on trouve pour l'estimée au bout de N itérations l'expression équivalente à (3.7) :

$$(4.1) \quad \underline{X}_N = \left\{ I - \prod_{n=1}^N (I - k_n CH) \right\} H^* \underline{Y} + \sum_{n=1}^N k_n C \underline{B}_2 = W_N \underline{Y} + \left\{ \sum_{n=1}^N k_n \right\} C \underline{B}_2.$$

Pour annuler la contribution du bruit hors bande \underline{B}_2 on a comme précédemment la possibilité de choisir les c_i nuls pour $i > r$, mais une autre solution apparaît, consistant à choisir la somme des k_n nuls.

La souplesse de la méthode apparaît surtout lorsque l'on explicite l'opérateur W_N :

$$(4.2) \quad W_N = \left\{ I - \prod_{n=1}^N (I - k_n CH) \right\} H^*$$

qui est bien diagonalisable dans les bases $\{\underline{U}\}$ et $\{\underline{V}\}$ avec les valeurs singulières :

$$(4.3) \quad w_i = \left\{ 1 - \prod_{n=1}^N (1 - k_n c_i \lambda_i) \right\} \frac{1}{\lambda_i}.$$

Les k_n constituent N paramètres indépendants pour approcher une forme arbitraire des w_i , comme nous allons le voir dans les deux cas importants, $c_i = 1$ et $c_i = \lambda_i^*$.

4.2. CAS OÙ $C = I$

C'est un cas fréquent notamment dans les problèmes de restauration d'image où l'espace signal et l'espace d'observation sont identiques. Dans ce cas on se limite à une

matrice H carrée. Conformément à la remarque faite au paragraphe 3.2 nous la supposons de plus hermitienne, donc diagonalisable avec des valeurs propres λ_i réelles.

Pour $c_i = 1$, la relation (4.3) prend la forme suivante :

$$w_i = g_N(\lambda_i/\lambda_{\max}) \frac{1}{\lambda_i}$$

$$(4.4) \quad g_N(t) = 1 - \prod_{n=1}^N (1 - k_n \lambda_{\max} t).$$

On voit que $1 - g(t)$ est le polynôme normalisé de degré N le plus général. Il peut être choisi pour approcher au mieux la pondération optimale (2.38). Les racines de ce polynôme donnent directement les valeurs de $1/(k_n \lambda_{\max})$ et donc la séquence des coefficients k_n .

Dans ce cas, pour annuler dans (4.1) la contribution du bruit \underline{B}_2 , on doit réaliser la condition :

$$(4.5) \quad \sum_{n=1}^N k_n = 0.$$

Ceci impose que le terme de premier degré dans le polynôme soit nul.

On retrouve alors pour $g_N(t)$ la tangente horizontale de $g(t)$ en $t = 0$ assurant une bonne réjection du bruit.

La figure 5 a représente la fonction $g_N(t)$ obtenue avec $N = 8$ pour approximer le $g(t)$ optimal correspondant à $\alpha = 0,05$ (rappelé en traits pointillés). Un critère de moindres carrés a été utilisé sur l'intervalle $[0, 1]$ avec les contraintes $g_N(0) = [dg_N/dt]_0 = 0$.

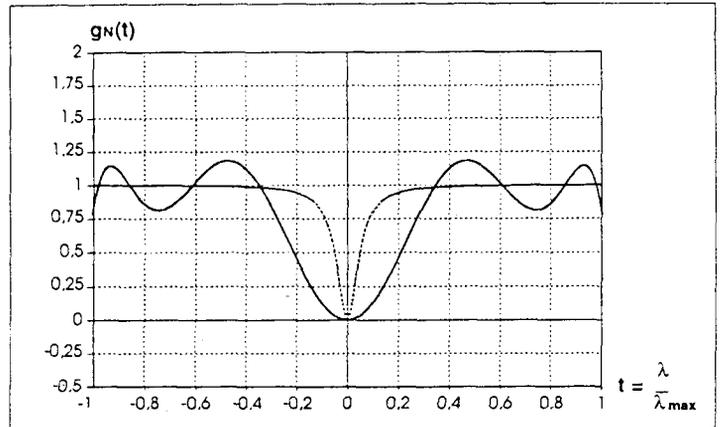


Figure 5 b. — Fonction $g_N(t)$ avec erreur min sur $[-1, 1]$ $\{k'_n = k_n \lambda_{\max}\} = -2,96, -1,62, -1,18, -1,02, 1,02, 1,18, 1,62, 2,96$.

4.3. CAS OÙ $C = H^+$ (ALGORITHME AVEC « REFILTRAGE »)

Dans ce cas, au lieu de (4.4), la relation (4.3) devient :

$$w_i = g_N(|\lambda_i/\lambda_{\max}|) \frac{1}{\lambda_i}$$

$$(4.6) \quad g_N(t) = 1 - \sum_{n=1}^N (1 - k_n |\lambda_{\max}|^2 t^2).$$

On est cette fois ramené à approcher la relation $g(t)$ optimale par le polynôme pair normalisé de degré $2N$ le plus général. Du fait de la parité on satisfait automatiquement la contrainte sur la tangente horizontale à l'origine.

Par rapport au cas où l'on devait imposer la parité de $g_N(t)$ dans le paragraphe précédent, on retrouve deux fois plus de paramètres libres pour N donné, d'où une bien meilleure approximation (fig. 6). Remarquons qu'un résultat identique à celui de la figure 5 b serait obtenu ici pour $N = 4$ itérations au lieu de 8.

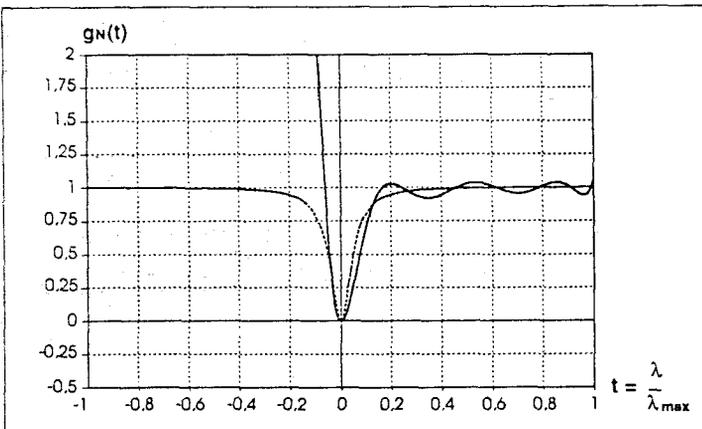


Figure 5 a. — Fonction $g_N(t)$ avec erreur min sur $[0, 1]$ $\{k'_n = k_n \lambda_{\max}\} = -17,35, 1,1, 1,10, 1,27, 1,63, 2,18, 4,14, 6,02$.

S'il peut y avoir des valeurs propres négatives, le critère de moindres carrés doit inclure un intervalle négatif. A la limite, si on prend l'intervalle $[-1, 1]$, ceci impose un polynôme pair ; le résultat correspondant est indiqué figure 5 b. Du fait des contraintes de parité, l'erreur moyenne se trouve augmentée.

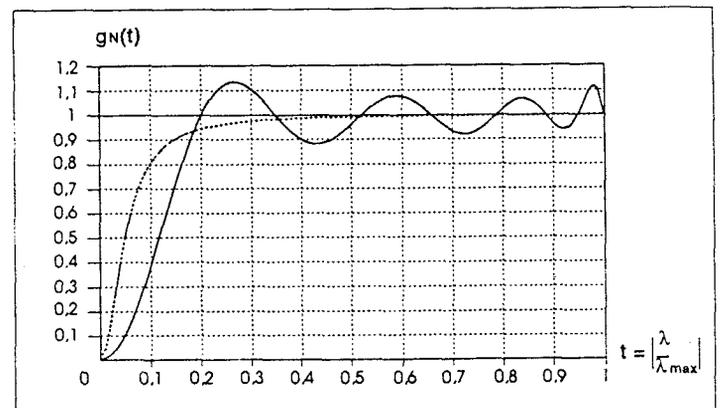


Figure 6. — Fonction $g_N(t)$ avec refiltrage $\{k'_n = k_n |\lambda_{\max}|^2\} = 1,00, 1,05, 1,13, 1,27, 1,52, 1,92, 2,87, 4,99$.

Par contre les résultats de la comparaison sont inversés si l'on sait que les λ_i sont positifs et que l'on compare à la figure 5 a où le critère de moindres carrés porte sur l'intervalle $[0, 1]$: on voit sur l'exemple considéré que l'approximation est meilleure à N donné avec l'algorithme sans refiltrage. Ceci va être confirmé dans la discussion qui suit.

4.4. DISCUSSION DU CHOIX DES COEFFICIENTS

Les figures 7 a et 7 b présentent respectivement les résultats obtenus pour l'approximation de la fonction de régularisation optimale par les versions sans refiltrage et avec refiltrage de l'algorithme, selon la valeur du paramètre α (rapport bruit-sur-signal), en fonction du nombre d'itérations choisi. L'erreur portée en abscisse :

$$(4.7) \quad \epsilon_N^2 = |g_N(t) - g(t)|^2$$

avec :
$$g(t) = \frac{t^2}{t^2 + \alpha^2}$$

peut être comparée à l'erreur relative moyenne, calculée dans l'hypothèse de valeurs propres régulièrement réparties entre 0 et λ_{\max} pour laquelle on obtient après calculs :

$$(4.8) \quad \delta^2(\alpha) = \frac{E \|X - \hat{X}\|^2}{\sigma_N^2} = \alpha \operatorname{Arctg} \frac{1}{\alpha}.$$

Remarquons qu'il serait absurde de chercher par exemple à approcher à $\epsilon^2 = 10^{-4}$ près le filtre optimal correspondant à une erreur d'estimation $\delta^2 = 10^{-2}$. Ceci va permettre de limiter le nombre d'itérations nécessaires, compte tenu du rapport signal-sur-bruit.

Considérant que l'on peut admettre une erreur $\epsilon^2 \leq \delta^2/5$ nous avons porté sur le réseau la courbe en traits pointillés représentant $\delta^2/5$, ce qui permet d'apprécier le nombre d'itérations nécessaire pour approximer le filtre optimal avec une précision égale à 20 % de l'erreur minimale.

4.5. CONCLUSION

L'avantage des solutions itératives est que seule la matrice H doit être connue. De plus dans notre méthode le fait d'utiliser un critère d'optimisation moyen pour $t \in [0, 1]$ rend la séquence des k_n indépendante des valeurs individuelles de λ_i/λ_{\max} , donc largement indépendante de l'opérateur H lui-même.

L'ensemble des résultats de simulation illustre de manière quantitative le fait déjà énoncé que pour les algorithmes itératifs, plus le signal est bruité, plus le nombre d'itérations nécessaires peut être réduit et les coefficients de réinjection proches ou inférieurs à l'unité. Comparée aux méthodes à gain constant, la méthode originale que nous avons présentée permet d'une part de minimiser le nombre d'itérations pour une même précision, d'autre part d'approcher arbitrairement près le filtre à variance minimale, dans les limites de validité des modèles utilisés.

5. Application

5.1. INTRODUCTION

L'exemple d'application que nous allons aborder maintenant concerne l'exploitation d'un ensemble de mesures de distance réalisées successivement par un seul capteur, ou bien simultanément par un ensemble de capteurs identiques, en des points différents d'un même objet. Les informations recueillies peuvent alors permettre l'élaboration d'une carte représentant le relief de l'objet à partir des différents points de mesure.

Il est nécessaire de prendre en considération la limite de résolution latérale de chaque capteur, qui donne en définitive une mesure non pas « ponctuelle », mais plutôt « intégrale », portant sur toute la portion de surface susceptible d'influencer le capteur.

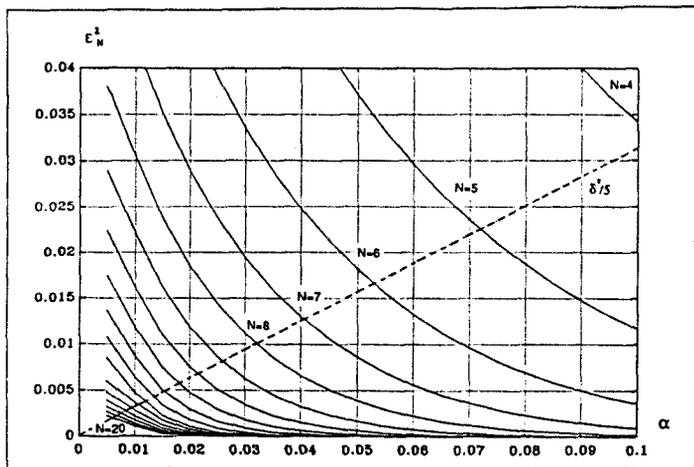


Figure 7 a. — Valeur de l'erreur ϵ_N^2 en fonction de α comparée à l'erreur minimale d'estimation $\delta^2(\alpha)$. Cas où $C = I$.

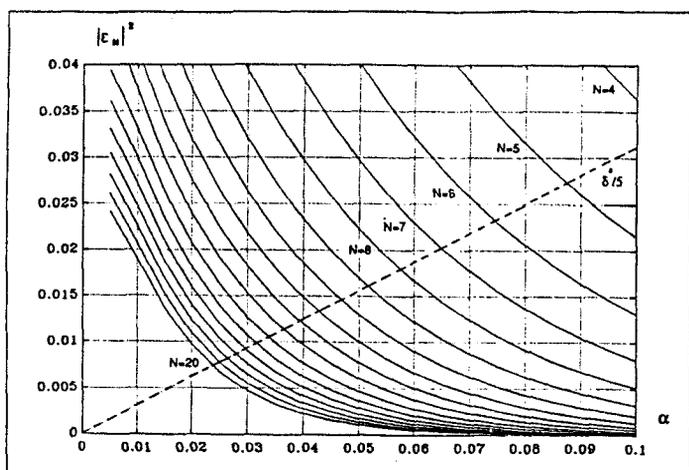


Figure 7 b. — Valeur de l'erreur ϵ_N^2 en fonction de α comparée à l'erreur minimale d'estimation $\delta^2(\alpha)$. Cas où $C = H^+$.

L'application que nous envisageons ici correspond au traitement des informations « distance » fournies par une ligne de N capteurs à courants de Foucault, placée en vis-à-vis d'un profil métallique [11]. La grandeur détectée par les bobinages est à l'image de la réductance vue par chacun des circuits magnétiques. La résolution latérale est limitée par l'épanouissement des lignes de champ magnétique dans l'espace, comme le montre la figure 8.

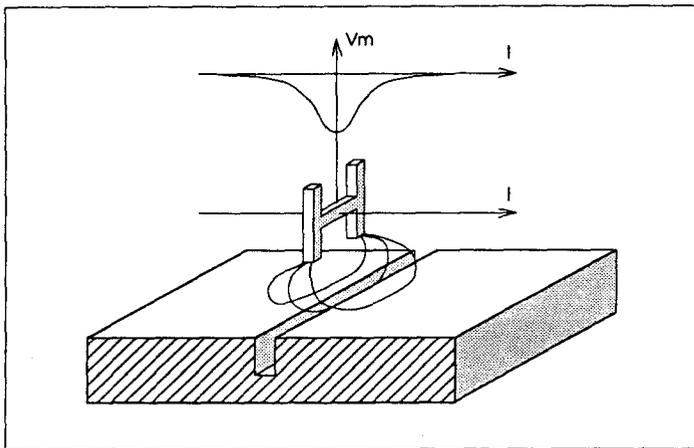


Figure 8. — Réponse transversale d'un capteur.

Notons que plus la distance moyenne au capteur augmente plus les lignes de champ s'étalent. Ceci confère à la relation profil/image un caractère non stationnaire (petites variations de relief autour d'une distance moyenne variable) ou non linéaire qui mettra bien en évidence les qualités de l'algorithme proposé.

La limite de résolution se traduit par une déformation de « l'image » observée : le problème consiste alors à identifier ou à modéliser la relation entre la géométrie réelle du profil métallique et les informations recueillies, puis d'exploiter cette relation au cours d'une phase d'inversion.

5.2. DESCRIPTION D'UNE RÉALISATION DU CAPTEUR

Le dispositif précédemment évoqué est schématisé figure 9.

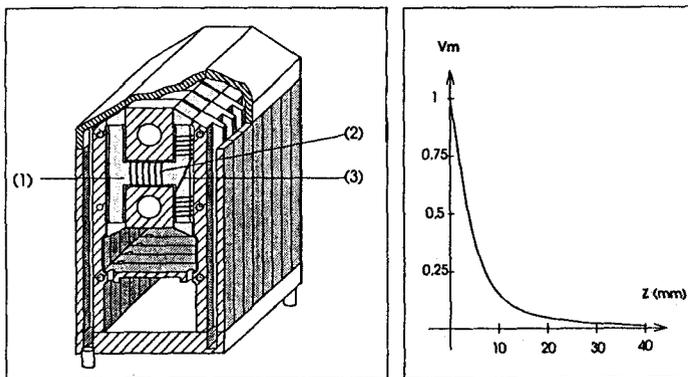


Figure 9 a

Figure 9 b

Chaque capteur élémentaire est constitué d'un berceau métallique de 4 mm d'épaisseur, assurant la rigidité mécanique de l'ensemble et faisant office de blindage électromagnétique. Dans ce berceau prend place un H en ferrite (1). Tous les capteurs sont alimentés à d.d.p. magnétique constante par un bobinage d'excitation (2) générant un flux alternatif de fréquence élevée ($f = 500$ kHz). L'approche d'une tôle conductrice modifie la répartition du champ à l'avant du H, et on accède à cette variation de réductance grâce au bobinage différentiel de mesure (3).

La figure 9 b donne l'allure de la variation du signal $s = \mathcal{R}(X_0)$ de mesure en fonction de la distance X_0 d'une tôle plane, qui permet de juger de la non linéarité du dispositif.

Une première étape, dite de *linéarisation*, exploite la courbe précédente, l'information linéarisée fournie par un capteur élémentaire étant prise égale à $Y = \mathcal{R}^{-1}(s)$. Dans ces conditions, pour une tôle plane, on retrouve au bruit de mesure près $Y = \mathcal{R}^{-1} \circ \mathcal{R}(X_0) = X_0$.

L'association en ligne de N capteurs élémentaires permet de mesurer simultanément plusieurs distances et de relever ainsi l'image discrétisée d'un profil. La figure 10 présente la sortie du multicapteur pour un profil d'entrée en forme de V, positionné à différentes hauteurs. Cette image linéarisée est notre vecteur d'observation \underline{Y} .

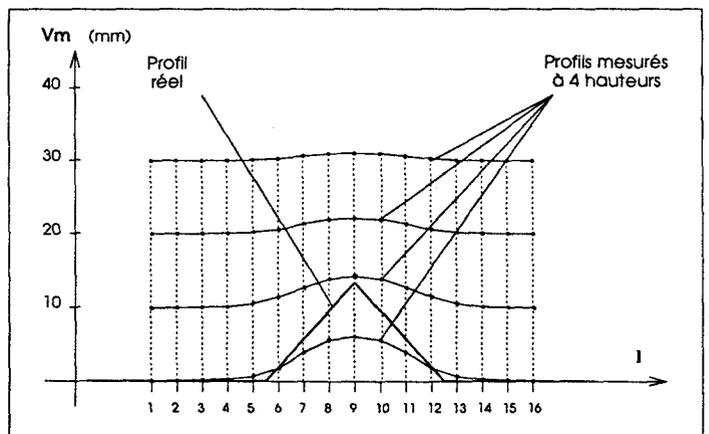


Figure 10. — Images d'un profil en V placé à différentes hauteurs.

Conformément à ce qui a été présenté à la figure 8, l'image formée par ces données est donc très déformée par rapport à la réalité, ceci d'autant plus que la distance d'observation est importante. Plus on s'éloigne du multicapteur, plus le dispositif se comporte comme un « filtre passe-bas » de fréquence de coupure spatiale de plus en plus faible.

5.3. IDENTIFICATION DE LA RÉPONSE DU SYSTÈME

Il s'agit, pour répondre à ce problème, de trouver une relation entre l'ensemble des signaux délivrés par les capteurs et la géométrie du profil en regard, quelle que soit l'amplitude des variations présentées par celui-ci.

Supposons le capteur infiniment long, placé en vis-à-vis d'un profil métallique noté $X(l)$. Il se crée une répartition de courants surfaciques $j(l)$, qui agit sur la d.d.p. magnétique du capteur situé à l'abscisse l_c (voir fig. 11).

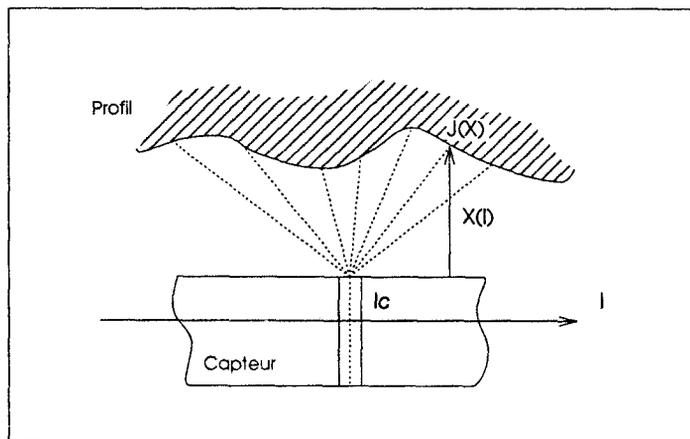


Figure 11. — Allure de la topologie des lignes de champ.

Chaque « tranche » élémentaire de courant située à une distance $l - l_c$ du capteur a un effet qui peut être représenté par une fonction φ , calculée en fonction de $X(l)$ et de $l - l_c$.

Cette analyse physique du problème suggère donc une forme approchée du signal perçu par un capteur situé à l'abscisse l_c :

$$(5.1) \quad s(l_c) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(X(l), l - l_c) dl$$

$$\varphi(X, l) \rightarrow 0 \quad \text{si} \quad X \rightarrow \infty$$

qui est une fonction de l_c , pour un profil $X(l)$ donné.

L'avantage de ce modèle phénoménologique est de pouvoir être identifié relativement simplement à partir du signal $s = \mathcal{R}(X_0)$ observé face à une tôle plane à distance X_0 et d'un modèle localement linéaire équivalent. Ce modèle relie les petites variations de géométrie du profil autour d'une distance moyenne donnée X_0 , aux variations des signaux linéarisés en provenance du capteur. Pour faire apparaître cette relation, développons au premier ordre la pseudo-équation de convolution (5.1) autour d'une distance fixe :

$$(5.2) \quad \begin{cases} X(l) = X_0 + \varepsilon(l) \\ s(l_c) = s_0 + \nu(l_c) \end{cases}$$

Pour une tôle plane ($\varepsilon = 0$), la relation (5.1) devient :

$$(5.3) \quad s_0 = \mathcal{R}(X_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(X_0, l) dl$$

Cette fonction n'est autre que la loi utilisée lors de la phase de linéarisation, représentée figure 9 b.

Dans le cas où $\varepsilon \neq 0$, alors (5.1) s'écrit :

$$(5.4) \quad s(l_c) = \mathcal{R}(X_0) + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \varphi}{\partial X}(X_0, l - l_c) \varepsilon(l) dl$$

On retrouve la forme d'une relation de convolution classique. La réponse impulsionnelle normalisée du système linéaire équivalent est alors :

$$(5.5) \quad \frac{1}{K(X_0)} \frac{\partial \varphi}{\partial X}(X_0, l - l_c) = h(X_0, l - l_c)$$

où :

$$(5.6) \quad K(X_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \varphi}{\partial X}(X_0, l) dl$$

La fonction h , réponse linéarisée petits signaux du système, pourra être déterminée expérimentalement.

Si $K(X)$ et $h(X, l)$ sont connues, l'intégration de $\frac{\partial \varphi}{\partial X}$ conduit à l'expression de $\varphi(X, l)$:

$$(5.7) \quad \varphi(X_0, l - l_c) = \int_{X_0}^{+\infty} \frac{\partial \varphi}{\partial X}(X, l - l_c) dX$$

$$\varphi(X_0, l - l_c) = \int_{X_0}^{+\infty} K(X) h(X, l - l_c) dX$$

Montrons que $K(X)$ se déduit de façon simple de la fonction de linéarisation $\mathcal{R}(X_0)$. En effet, compte tenu de (5.3) et (5.7), on obtient :

$$(5.8) \quad \mathcal{R}(X_0) = \int_{X_0}^{+\infty} K(X) \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} h(X, l - l_c) dl \right\} dX$$

L'intégrale entre accolades est égale à 1 par définition car la réponse petits signaux est normée d'après (5.5) et (5.6). On trouve finalement :

$$(5.9) \quad \mathcal{R}(X_0) = \int_{X_0}^{+\infty} K(X) dX$$

$$(5.10) \quad K(X) = - \frac{\partial \mathcal{R}(X)}{\partial X}$$

Une forme analytique approchée de la fonction h peut être obtenue à partir de considérations purement physiques sur le système ([6], [12]), les paramètres pouvant être ensuite identifiés lors d'une phase expérimentale.

Après mise à l'échelle convenable, le modèle obtenu expérimentalement pour h et \mathcal{R} se met sous la forme :

$$(5.11) \quad \begin{aligned} h(X, l) &= \frac{2 X^3}{\pi(X^2 + l^2)} \\ \mathcal{R}(X) &= \frac{1}{X} \end{aligned}$$

ce qui conduit à :

$$(5.12) \quad \varphi(X, l) = \frac{1}{\pi(X^2 + l^2)}$$

et pour l'expression du signal « linéarisé » :

$$(5.13) \quad Y(l_c) = \mathcal{R}^{-1}(l_c) = \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\pi(X(l)^2 + (l - l_c)^2)} dl \right\}^{-1}$$

La figure 12 illustre les relations précédentes, et présente pour un même profil $X(l)$ placé à trois hauteurs différentes (5, 15 et 25 mm), les sorties réelles ainsi que les résultats de la simulation. On peut constater la validité du modèle non linéaire développé.

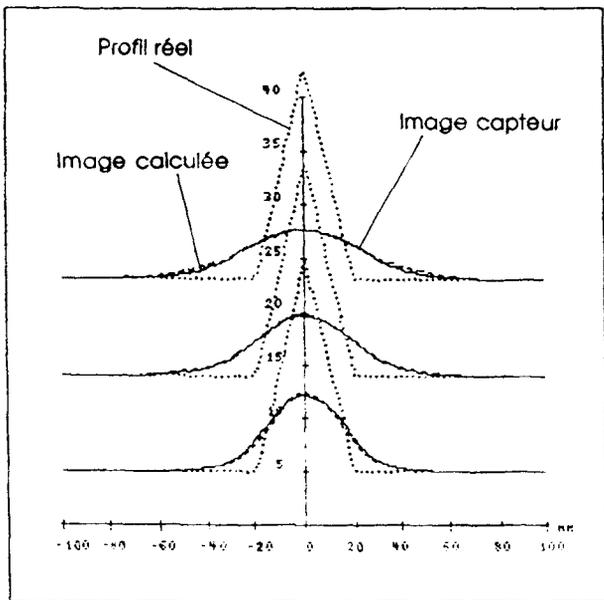


Figure 12. — Comparaison des sorties expérimentales linéarisées et des résultats obtenus avec le modèle.

5.4. APPLICATION DES MÉTHODES ITÉRATIVES DE RESTAURATION

5.4.1. Caractères spécifiques du problème expérimental traité

L'opérateur (5.13) est un opérateur de filtrage non linéaire $\underline{Y} = H(\underline{X})$. Grâce à l'opérateur linéarisation il admet comme vecteurs propres les vecteurs constants \underline{X}_0 avec la valeur propre 1. Pour de petites variations par rapport à \underline{X}_0 il admet un modèle linéaire local :

$$(5.14) \quad \begin{cases} H(\underline{X}_0 + \underline{x}) = \underline{X}_0 + \underline{y} \\ \underline{y} = H_{x_0}(\underline{x}) \end{cases}$$

où l'opérateur H est le filtre linéaire (5.11). Les vecteurs propres sont les exponentielles complexes, les valeurs propres correspondants sont données par la transformée

de Fourier de H , réelle, positive, maximale et égale à 1 pour la fréquence nulle ($\lambda_{\max} = 1$). Dans ces conditions $k_n = k'_n / \lambda_{\max} = k'_n$: les coefficients de réinjection k_n sont égaux aux coefficients normalisés k'_n .

Pour déconvoluer de petites variations autour d'une hauteur X_0 , pour une valeur donnée de $\alpha^2 = (\sigma_B / \sigma_X)^2$, la séquence des k_n est donc indépendante de X_0 , bien que le filtre H_{x_0} soit lui-même fortement modifié quand la hauteur varie.

Du fait que H est symétrique et définie positive la solution la mieux indiquée consiste à choisir l'opérateur identité pour C (algorithme sans refiltrage).

5.4.2. Résultats de simulation sur capteur infini

Sur le capteur réel décrit en (5.2), aux problèmes généraux posés par la déconvolution se rajoutent des problèmes spécifiques dus à la discrétisation du signal \underline{Y} (au pas défini par l'espacement des capteurs), et à la troncature du signal dû à la longueur finie du système. Pour la clarté de l'exposé nous n'avons pas abordé ces points et nous présentons simplement les résultats offerts par la simulation du modèle (5.13).

Par contre, pour illustrer tout l'intérêt du schéma itératif général de la figure 1 quant à l'inversion d'un opérateur non linéaire, nous sommes sortis largement du cadre du modèle non stationnaire petit signal.

Bien que l'analyse du cas non linéaire dépasse le cadre de notre exposé, le fait d'obtenir pour notre algorithme une séquence de k_n indépendante de la hauteur moyenne laisse préjuger qu'il se prête particulièrement bien à cette extension.

Les figures suivantes présentent les résultats de déconvolution pour un profil en « V » de forte amplitude dont la largeur et la hauteur sont égales à 40 mm. Le RSB équivaut sensiblement à $\alpha = 0,05$. La figure 13 présente le résultat obtenu selon la méthode de Van Cittert où

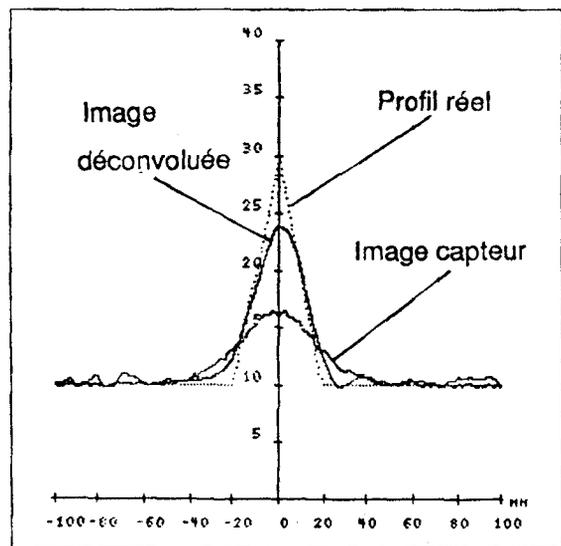


Figure 13. — Comparaison du profil réel, de l'image capteur et de l'image déconvoluée. Méthode de Van Cittert : $k_n = 1$.

$k_n = 1$, avec 8 itérations, pour un profil situé à une distance de 10 mm par rapport au capteur.

La figure 14 représente les résultats de déconvolution selon notre algorithme, pour des distances d'observation de 5, 10, et 25 mm, avec la même séquence de coefficients :

$$k_n = 1, 1,63, 4,41, 6,02, -17,35, 1,27, 2,19, 1,10.$$

A une distance de 10 mm, la comparaison avec l'algorithme de Van Cittert met en évidence la forte réduction du bruit obtenue avec notre méthode. D'autre part, la comparaison des figures 14 a, b, c, illustre le caractère adaptatif de l'algorithme : compte tenu du niveau de bruit, on obtient une bonne restitution à ces trois hauteurs correspondant à une forte variation des paramètres du filtre équivalent, avec la même séquence de coefficients.

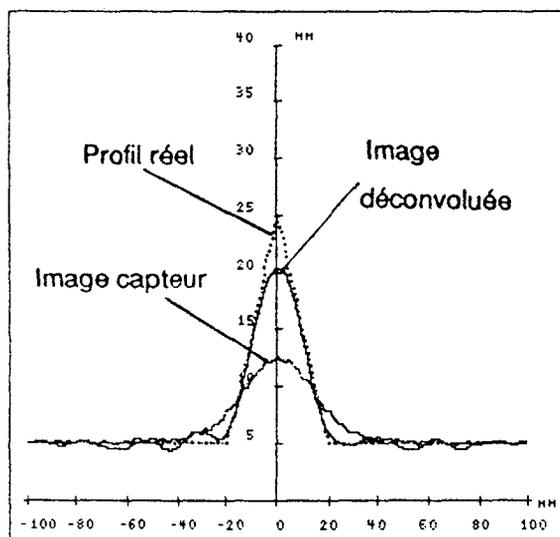


Figure 14 a. — Comparaison du profil réel, de l'image capteur et de l'image déconvoluée : méthode séquentielle.

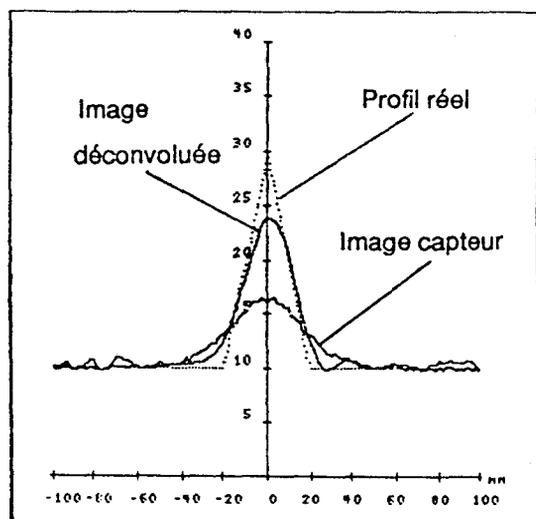


Figure 14 b. — Comparaison du profil réel, de l'image capteur et de l'image déconvoluée : méthode séquentielle.

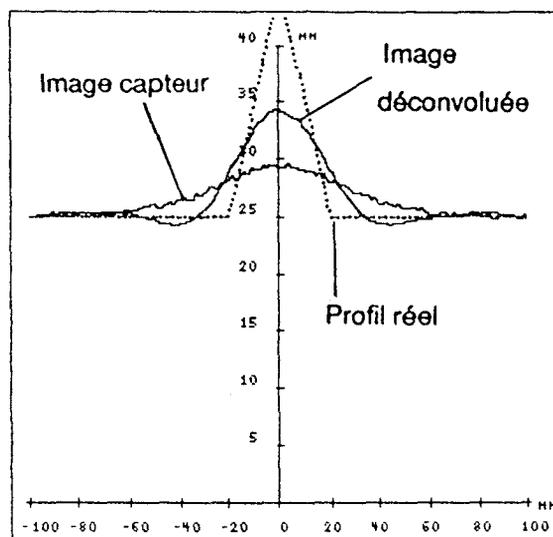


Figure 14 c. — Comparaison du profil réel, de l'image capteur et de l'image déconvoluée : méthode séquentielle.

6. Conclusion

L'algorithme présenté dans cet article se situe comme une amélioration des méthodes d'inversion itératives classiques, particulièrement en présence de bruit, grâce à un choix original de la séquence de coefficients de relaxation.

Il permet de fonctionner avec un nombre beaucoup plus faible d'itérations, ce qui le rend par conséquent plus adapté aux problèmes de contrôle et de mesure en temps réel, et son champ d'application englobe une classe de problèmes d'inversion assez vaste (capteurs, spectroscopie, imagerie 2 D...).

L'exemple présenté, pour lequel le modèle *localement linéaire* employé dépend fortement de la distance moyenne entre le capteur et la cible, montre que l'utilisation de cet algorithme peut être étendu à des systèmes non stationnaires ou non linéaires. Cette propriété renforce donc l'intérêt de notre filtre séquentiel qui révèle un caractère auto-adaptatif dans la mesure où la séquence optimale des gains k_n reste invariante vis-à-vis de la bande passante du filtre à inverser.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] G. DEMOMENT, *Déconvolution*. Cours de l'E.S.E. n° 2964 (1983).
- [2] B. PICINBONO, *Traitement statistique du signal*. Cours de l'E.S.E. n° 3227 (1988).
- [3] F. DE COULOMB, *Théorie et traitement des signaux*. Dunod (1987).
- [4] T. S. HUANG, D. A. BARKER et S. P. BERGER, Iterative Image Restoration. *Applied Optics*, vol. 15, n° 5, pp. 1165-1168 (1975).
- [5] D. PLACKO, H. CLERGEOT, F. MONTEIL, *Seam tracking using a linear array of eddy current sensors*. Proceedings RoViSec 5, pp. 557-568, Amsterdam (1985).

- [6] D. PLACKO, *Dispositif d'analyse de profil utilisant des capteurs à courants de Foucault*. Thèse 3^e cycle, Orsay (1984).
- [7] W. M. PATTERSON, *Iterative methods for the solution of a linear operator equation in Hilbert space. A survey*. Lecture Notes in Mathematics. Ed ; Springer-Verlag (1974).
- [8] N. R. HILL et IOUP G. E. Convergence of the Van Cittert iterative method of deconvolution. *J. Opt. Soc. Am.* vol. 66, pp. 487-489 (1976).
- [9] P. A. JANSSON, *Deconvolution : With applications in spectroscopy*. Ed. Academic Press (1984).
- [10] B. WENDROFF, *Theoretical numerical analysis*. Ed. Academic Press (1966).
- [11] P. AKNIN, D. PLACKO, F. MONTEIL, Modélisation d'une structure multicapteur à courants de Foucault destinée à l'analyse de profil. *Revue Phys. Appl.* 24 (1989), pp. 227-242.
- [12] F. MONTEIL, *Étude d'une structure multicapteur à courant de Foucault : utilisation en capteur proximétrique pour un système de suivi de profil*. Thèse de Docteur en Science, Orsay (1987).
- [13] S. KAWATA et Y. ICHIOKA, Iterative image restoration for linearly degraded images. *J. Opt. Soc. Am.* vol. 70, pp. 762-772 (1980).
- [14] J. L. C. SANZ et T. S. HUANG, Unified Hilbert space approach to iterative least-squares linear signal restoration. *J. Opt. Soc. Am.* vol. 73, pp. 1455-1465 (1983).
- [15] B. D. ANDERSON, J. B. MOORE, *Optimal filtering*. Ed. Prentice Hall (1979).
- [16] D. SAINT-FELIX, A. DJAFARI, G. DEMOMENT, *Quelques problèmes liés à l'amélioration de la résolution d'un système de tomographie à micro-ondes par déconvolution*. Proceedings du Neuvième Colloque sur le Traitement du Signal et ses applications, pp. 583-589, Nice, 1983.
- [17] GOLUB, *Matrix computations*. North Oxford Academic Publishing, Co John Hopkins University Press, 1983.

Manuscrit reçu le 13 février 1990.