Le filtrage de Volterra transverse réel et complexe en traitement du signal

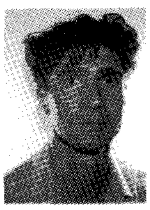
Real and complex transversal Volterra filtering in signal processing

P. CHEVALIER

Laboratoire des Signaux et Systèmes, ESE, Plateau de Moulon, 91192 Gif-sur-Yvette Cedex, France

THOMSON-CSF, Division RGS, 66 rue du Fossé Blanc, 92231 Gennevilliers, France

Pascal Chevalier est né à Valenciennes en 1962. Il est ingénieur de l'Ecole Nationale Supérieure de Techniques Avancées (ENSTA 85) et Diplômé d'Etudes Approfondies en Automatique et Traitement du Signal de l'université de Paris Sud (87). Entré dans le Service Traitement de Signal de RGS en 1986 dans le cadre d'une convention CIFRE avec le laboratoire des Signaux et Systèmes (ESE), il est actuellement en fin de Thèse de Doctorat. Ses recherches actuelles portent sur le traitement d'antenne, le filtrage adaptatif et le filtrage de Volterra.



P. DUVAUT

Laboratoire des Signaux et Systèmes, ESE, Plateau de Moulon, 91192 Gif-sur-Yvette Cedex, France

Laboratoire de Traitement des Images et du Signal, ENSEA, Les Chênes Pourpres, 95000 Cergy-Pontoise, France

Ancien Elève de l'ENS de Cachan, agrégé de Sciences Physiques en 1981, Docteur en Sciences de l'Université d'Orsay en 1987, il dirige le Département Mathématiques et Traitement du Signal de l'Ecole Nationale Supérieure de l'Electronique et de ses Applications, ENSEA, à Cergy-Pontoise. Il poursuit des activités de recherche au sein de l'équipe de traitement des Images et du Signal, ETIS, de l'ENSEA. Ses principaux thèmes de recherche concernent le traitement des signaux Radar (en relation avec le Département DEM de la Thomson à Malakoff), l'utilisation des moments d'ordre supérieur en Détection et en Estimation, les relations entre non stationnaire, non linéaire et non gaussien. Animateur du Conseil Scientifique de la société Kurtosis Ingénierie, il co-dirige la collection Traitement du Signal des Editions Hermès.

B. PICINBONO

Laboratoire des Signaux et Systèmes, ESE, Plateau de Moulon, 91192 Gif-sur-Yvette Cedex, France

Bernard Picinbono est Professeur à l'Université de Paris-Sud et Directeur Général de l'École Supérieure d'Électricité. Son domaine de recherche est le traitement statistique du signal et en particulier les questions concernant les processus aléatoires, la détection et l'estimation. Il est Président du GRETSI, association qui organise le colloque de ce nom se déroulant tous les deux ans et qui soutient la revue « Traitement du signal ».

RÉSUMÉ

Une synthèse des problèmes concernant l'utilisation des filtres de Volterra transverses (FVT) en détection, estimation et filtrage spatial d'antenne est présentée, que les données à traiter soient réelles ou complexes. Une représentation unique de tous ces filtres est introduite. Celle ci permet de couvrir simultanément des questions aussi variées que la maximisation du contraste à l'intérieur de l'espace de Hilbert des sorties des FVT, et l'estimation non linéaire en moyenne quadratique d'un processus aléatoire inconnu. Les FVT optimaux relatifs aux trois problèmes abordés sont obtenus comme solution d'un système unique d'équations normales généralisées. Quelques exemples d'application sont fournis où ces équations sont résolues explicitement. Des indications sont données à propos de l'identification adaptative, en temps réel, de ces FVT optimaux.

MOTS CLÉS

Filtrage de Volterra transverse, Détection, Estimation, Traitement d'Antenne, Moments d'ordre supérieur, Désadaptation, Equations normales généralisées, Filtrage adaptatif, Prédiction non linéaire, Produit de Kronecker.

ABSTRACT

A tutorial review of the use of discrete time transversal Volterra filters (TVF) in detection, estimation and narrow-band array processing is presented, when the data are either real or complex valued. A unique representation of such filters allows to cope simultaneously with a wide field of problems ranging from maximizing the contrast in Hilbert spaces spanned by the outputs of TVF, to the non linear least squared estimation of an unknown stochastic parameter. The general extended normal equations, giving the optimal TVF for all the above problems, are at first derived in a unique form and afterwards applied to each issue of concern. Finally, a few ideas are presented on adaptive TV filtering algorithms.

KEY WORDS

Transversal Volterra Filtering, Detection, Estimation, Array Processing, Higher order Moment, Mismatch, Generalized Normal Equations, Adaptive Filtering, Non linear Prediction, Kronecker Product.

1. Introduction

Le présent article contribue à dresser un bilan concernant la représentation, l'optimisation et l'identification adaptative d'une classe particulière de filtres non linéaires (FNL), les filtres de Volterra transverses (FVT) à temps discret, réels ou complexes, dans le contexte du traitement du signal, limité aux problèmes de détection et d'estimation mono et multidimensionnels. Le caractère multidimensionnel permettant, éventuellement, d'inclure le filtrage d'antenne en présence de signaux à bande étroite (BE).

Au cours des dernières années, les spécialistes de traitement du signal se sont de plus en plus intéressés à l'étude des systèmes non linéaires et à l'usage des statistiques d'ordre supérieur à deux. Il y a plusieurs raisons à cette situation.

L'intérêt pour les systèmes non linéaires part de l'idée que, dans bon nombre de problèmes de traitement du signal, l'usage des systèmes linéaires est insuffisant. Cette situation est d'ailleurs connue depuis longtemps et les systèmes quadratiques sont par exemple couramment utilisés en détection, qu'elle soit temporelle [1-2] ou spatiale [3-5]. On sait en effet que la détection d'un signal aléatoire gaussien centré dans un bruit lui aussi gaussien conduit à un système optimum de type quadratique. L'abandon de l'hypothèse gaussienne, nécessitée par de nombreuses situations physiques, conduit elle aussi à introduite des systèmes optimaux non linéaires. L'introduction des moments d'ordre supérieur à deux est liée à la conviction que la connaissance statistique d'un signal seulement jusqu'au second ordre est insuffisante, en particulier lorsque l'on utilise des systèmes non linéaires. Cette évidence peut ne jouer aucun rôle dès lors que l'on introduit l'hypothèse gaussienne puisqu'il est bien connu que dans cette situation l'ensemble des propriétés statistiques est complètement décrit à partir des moments du second ordre.

Toutefois il convient de noter que l'utilisation des statistiques d'ordre supérieur pour des signaux non gaussiens n'est pas intrinsèquement liée à l'usage de systèmes non linéaires. De nombreux travaux [6-8] ont été effectués sur l'usage de telles statistiques pour des filtres linéaires et stationnaires et en particulier pour surmonter la difficulté bien connue, lorsqu'on se limite à l'ordre deux, qui est l'impossibilité de déterminer la phase à partir des relations entrée-sortie. Plus récemment, certains auteurs ont également abordé la séparation aveugle de sources indépendantes en utilisant uniquement l'information contenue dans les moments, jusqu'à l'ordre quatre, de la sortie du mélange [9-15]. Ces deux derniers points de vue, sources d'une littérature très abondante ne seront pas du tout abordés dans la suite de cet article.

L'objectif poursuivi est, en effet, d'étudier une classe particulière de systèmes non linéaires appelés les filtres de Volterra transverses. Ces filtres jouent un rôle relativement important dans la théorie des systèmes non linéaires parce qu'ils apparaissent comme une extension naturelle des conceptions bien connues dans le cas des filtres linéaires. En effet, dans le cas réel, le filtrage de Volterra peut s'écrire sous la forme d'un développement dont le terme du premier ordre correspond exactement au filtrage linéaire connu, le terme du second ordre correspondant au système quadratique également connu. Le filtrage de Volterra transverse n'est pas totalement nouveau et il a même été déjà abondamment étudié dans le domaine du traitement du signal mais généralement sous l'hypothèse gaussienne. Nous nous proposons dans toute la suite d'abandonner cette hypothèse et de fournir des résultats valables dès lors que des statistiques d'ordre supérieur des signaux considérés sont connues.

Avant d'indiquer le contenu des pages qui suivent, il convient de faire une brève présentation de la situation actuelle du problème. Les travaux sur le filtrage non linéaire en traitement du signal peuvent être répartis en plusieurs catégories. Si l'on envisage un premier type de classement fondé sur la nature de la grandeur d'entrée, on est tout naturellement conduit à distinguer les FNL *temporels*, dont les premières utilisations remontent à N. Wiener [16] et P. Eykhoff [17], les FNL *fréquentiels* [18] utilisant en particulier le concept de *polyspectre* et finalement les FNL *spatiaux*, dont l'apparition est beaucoup plus récente [19-20]. En plus de la nature de la grandeur d'entrée, on est conduit, si l'on désire recenser des travaux relatifs au filtrage non linéaire, à tenir compte du *point de vue* adopté. On constate, effectivement, que quatre catégories d'articles se dégagent assez nettement. La *première* comprend des travaux très en amont et en général de nature *théorique*. La *seconde* regroupe des algorithmes de mise en œuvre, dans un contexte *adaptatif* ou non. La *troisième* contient des études de structures spécifiques de FNL que conditionne leur *implémentation.* Enfin la *quatrième* catégorie réunit le savoir faire et étudie l'efficacité des FNL dans des *applications* très spécialisées. Cette présentation vise seulement à sérier les activités en filtrage non linéaire, tant la littérature est abondante dans le domaine. Elle n'a rien de systématique, étant entendu que bon nombre d'articles appartiennent à plusieurs catégories.

Deux écoles contribuent à la *couche théorique* : celle des *automaticiens* qui privilégient la représentation interne ou d'état [21] à temps continu des FNL [22], étudient leur équivalence avec des représentations externes [23-24], telles que celles appelées ici *filtres de Volterra* (FV) [25], et élaborent des critères de stabilité adaptés [22], [26]. Apparue plus tard, l'école des *traiteurs de signaux* réunit quatre types de préoccupation : des questions d'estimation [27], limitées parfois au filtrage de Wiener [28], voire à la prédiction [29-32], des problèmes de modélisation et d'identification [30], [33-35], des problèmes d'annulation adaptative de bruit [36-38] et pour finir, des travaux relatifs à la détection temporelle [39-40] ou spatiale [20].

Comme dans le cas linéaire, le filtrage non linéaire *adaptatif* introduit en premier lieu des algorithmes stochastiques, fondés sur une récursivité temporelle, qui étendent, la plupart du temps dans le contexte linéaire-quadratique (LQ), les algorithmes LMS temporel [30], [35], [41] ou fréquentiel [42], les algorithmes du signe [43], RLS temporel [44] ou fréquentiel [45], RLS rapide [46-47], treillis [48], éventuellement sous des contraintes dans le cas spatial [49]. En second lieu, on trouve des algorithmes « exacts » utilisant une récursivité sur l'ordre, comme la généralisation de l'algorithme de Levinson [31-32], ou consistant à identifier de façon instantanée les paramètres d'un modèle quadratique [50]. Pour finir, les références [51] et [52] contiennent une approche globale du filtrage LQ adaptatif et précisent le rôle joué par les moments d'ordre trois dans le couplage d'algorithmes partiels.

La méthode d'*implémentation* de filtres quadratiques [34] la plus utilisée consiste à effectuer une décomposition LU [53] de la matrice constitutive avec, ensuite, la possibilité d'avoir recours aux structures systoliques [54-57], ou non [58]. Cette technique permet, de manière schématique, de ramener la réalisation d'un filtre quadratique à horizon fini à celle d'une série de filtres linéaires à RIF [59], de taille variable, suivie d'une quadration. Parmi les approches qui n'utilisent pas la décomposition LU, on différencie également celles intégrant les structures systoliques [60] des autres [61], éventuellement fondées sur l'arithmétique « distribuée » [62-63]. Les travaux précurseurs, dans cette catégorie, qui doivent être attribués à A. Peled et B. Liu [64], remontent déjà à 1974.

Faute de pratique, les travaux relatifs aux *applications* sont les moins nombreux. On trouve néanmoins quelques articles sur l'annulation adaptative d'échos à FNL [41] [65-66], l'égalisation de canal non linéaire [67-68], l'évaluation des performances de systèmes de transmission de données [69-71], la suppression adaptative d'interférence inter-symboles non linéaire [72], l'étude d'un système de mesures auto-adapté [73] et l'utilisation du filtrage non linéaire en traitement d'images [74].

Quel que soit le point de vue adopté, de nombreux auteurs [35], [44] supposent les données gaussiennes, ce qui leur permet, le cas échéant, d'écrire tous les moments d'ordre supérieur en fonction des moments d'ordre deux, une telle démarche enlevant un peu de son intérêt au FNL. Parmi les références rejetant cette hypothèse figurent [20] [27-31] [39-40] [49].

En dehors de la synthèse qu'il représente, le travail présenté dans cet article possède quelques originalités qu'il convient de souligner d'emblée.

Quelle que soit la nature du problème traité, temporel ou spatial à BE, données réelles ou complexes, une représentation universelle d'un FVT complexe, à temps discret, d'ordre p, est introduite dans le paragraphe 2. Cette représentation est développée dans l'annexe 1 à l'aide du produit de Kronecker [75], outil bien connu en algèbre de matrices [76]. Les propriétés statistiques de la sortie d'un tel filtre sont détaillées par l'intermédiaire d'un opérateur de covariance d'ordre $2p$ que l'on sait écrire explicitement.

Au début du paragraphe 3, une formulation unique des trois problèmes suivants est proposée : la détection non linéaire optimale au sens du contraste [77-78], l'estimation non linéaire en MQ [39] et le filtrage non linéaire d'antenne [20]. Cette formulation se résume à une projection orthogonale sur l'espace de Hilbert engendré par les sorties de FVT complexes, à temps discret, à différents instants. Le passage d'un problème à l'autre s'effectuant en changeant, non seulement la signification des noyaux du filtre, mais encore, celle du vecteur observation. Le FVT optimal relatif aux trois problèmes est solution d'un seul système d'équations qui étendent les « classiques » équations normales [79-80] et dont la structure est discutée.

Quelques solutions explicites, couvrant les trois champs d'applications précités, sont présentées dans le paragraphe 4.

Enfin, le cinquième et dernier paragraphe donne quelques indications à propos des algorithmes d'identification récursive du filtre optimal.

2. Le filtrage de Volterra transverse

2.1. FILTRAGE DE VOLTERRA TRANSVERSE RÉEL

2.1.1. Définition

Soit un signal réel à temps discret $x[k]$, k entier, et le système qui attaqué par $x[k]$ génère la sortie $y[k]$ définie par

$$(2.1)\quad y[k] = h_0 + \sum_{m=1}^{p} \sum_{i_1^m \leq i_2^m \cdots \leq i_m^m} h_m[\mathbf{i}_m]\, x[k-i_1^m]\, x[k-i_2^m] \ldots x[k-i_m^m]$$

où $\mathbf{i}_m$ est un vecteur de composantes

$$(2.2)\quad \mathbf{i}_m = [i_1^m, i_2^m, \ldots, i_m^m]$$

les i_j^m étant des entiers satisfaisants $i \leq i_j^m \leq \mathrm{N}$.

L'équation (2.1) est une relation entrée-sortie d'un système dénommé *filtre de Volterra transverse* (FVT) réel d'ordre p. Dans cette relation h_0 est un terme constant indépendant de l'entrée. Le terme $h_m[\mathbf{i}_m]$ est dénommé noyau d'ordre m du filtre. Il est évident sur (2.1) que le filtre considéré est causal puisqu'il ne fait intervenir que des valeurs antérieures à l'instant k. Par ailleurs N peut être considéré comme représentant la mémoire du filtre, c'est-à-dire l'amplitude du passé intervenant pour la construction de la sortie présente. On note d'autre-part que, pour chaque entier m tel que $1 \leqslant m \leqslant p$, toutes les observations « redondantes » de la forme

$$x[k - i_1^m]\, x[k - i_2^m] \cdots x\, [k - i_m^m]$$

où $\exists (j, k)/1 \leqslant j < k \leqslant m$ et $i_j^m > i_k^m$, n'ont pas été considérées dans la mesure où elles n'apportent pas d'information statistique supplémentaire. Si les statistiques du signal $x[k]$ sont connues jusqu'à l'ordre p, les propriétés du signal $y[k]$ dépendent de $G(N, p)$ paramètres ou $G(N, p)$ est défini par

$$G(N, p) = 1 + \sum_{m=1}^{p} g(N, m)\,. \tag{2.3}$$

La quantité $g(N, m)$, correspondant au nombre d'observations non redondantes d'ordre m pur, pour un FVT de mémoire N, est définie par les relations récurrentes suivantes :

$$g(N, m) = \sum_{k=1}^{N} g(k, m-1) \tag{2.4}$$

$$g(k, 1) = k \quad 1 \leqslant k \leqslant N\,. \tag{2.5}$$

Par exemple, pour un FVT d'ordre deux, encore appelé filtre linéaire-quadratique (LQ), $y[k]$ dépend de $G(N, 2) = 1 + N(N+3)/2$ paramètres : le coefficient h_0, les $g(N, 1) = N$ coefficients « linéaires » $h_1[i_1^1]$ et les $g(N, 2) = N(N+1)/2$ coefficients « quadratiques » $h_2[i_1^2, i_2^2]$.

Si $h_0 = 0$ et si $p = 1$, la relation (2.1) se réduit à la convolution classique définissant un filtre linéaire transverse, aussi dénommé à réponse impulsionnelle finie (RIF). On pourrait donc tout aussi bien remplacer l'expression FVT par FV à RIF.

Pour toute la suite il est beaucoup plus simple de raisonner en terme de vecteurs, un système étant défini par une relation entrée-sortie $y = S(\mathbf{x})$ où $\mathbf{x}$ est le vecteur d'entrée et y la sortie, scalaire dans cet article. Dans (2.1) le vecteur d'entrée $\mathbf{x}$ a manifestement pour composantes $x[k - i]$.

Soit donc un vecteur $\mathbf{x}$ de composantes $x[i]$ et le système calculant la sortie y définie par

$$y = h_0 + \sum_{m=1}^{p} \sum_{i_1^m \leqslant i_2^m \cdots \leqslant i_m^m} h_m[\mathbf{i}_m]\, x[i_1^m]\, x[i_2^m] \ldots x\,[i_m^m]\,. \tag{2.6}$$

Par extension du cas précédent nous dirons que (2.6) définit la relation entrée-sortie d'un FVT réel d'ordre p.

2.1.2. Représentation

Pour tous les calculs qui suivent il est nécessaire d'écrire (2.6) sous une forme beaucoup plus simple, même si le calcul réel de la sortie nécessite le retour à (2.6). L'idée de base est que la sortie y est globalement linéaire par rapport à l'ensemble des paramètres h, ce qui doit permettre d'écrire la relation entrée-sortie sous la forme d'un produit scalaire de vecteurs convenablement définis.

Notons tout d'abord que le noyau $h_1[\mathbf{i}_1]$ peut être associé à un vecteur $\mathbf{h}_1$ de $\mathbb{R}^N$ de composantes $h_1[i]$. De même le noyau $h_2[i_1^2, i_2^2]$ représente une matrice carrée $N \times N$ triangulaire supérieure droite qui peut être associée à un vecteur $\mathbf{h}_2$ de $\mathbb{R}^{g(N, 2)}$. Enfin le noyau $h_m[\mathbf{i}_m]$ peut être associé à un vecteur $\mathbf{h}_m$ de $\mathbb{R}^{g(N, m)}$, dont les composantes $h_m[i]$ sont les quantités $h_m[\mathbf{i}_m]$ rangées suivant l'ordre croissant des indices $\mathbf{i}_m$. La relation d'ordre considérée correspond à celle utilisée pour le classement des entiers en base $N + 1$. Par exemple, on dira que l'indice $\mathbf{i}_m$ défini par (2.2) est supérieur à l'indice $\mathbf{j}_m$ de composantes j_k^m $1 \leqslant k \leqslant m$ si et seulement si

$$\sum_{k=0}^{m-1} (N+1)^k j_{m-k}^m < \sum_{k=0}^{m-1} (N+1)^k i_{m-k}^m\,. \tag{2.7}$$

Tout ce qui vient d'être fait pour les noyaux peut être repris pour le signal d'entrée. En particulier au vecteur $\mathbf{x}$ d'entrée, on peut associer le vecteur $\mathbf{x}_m$ de $\mathbb{R}^{g(N, m)}$, dont les composantes $x_m[i]$ sont les quantités $x_m[\mathbf{i}_m] = x[i_1^m]\, x[i_2^m] \ldots x\,[i_m^m]$, non redondantes, rangées suivant l'ordre croissant des indices $\mathbf{i}_m$.

Considérons alors l'espace $\mathbb{R}^N[p]$, défini par

$$\mathbb{R}^N[p] \triangleq \mathbb{R}^{g(N, 1)} \times \mathbb{R}^{g(N, 2)} \times \cdots \times \mathbb{R}^{g(N, p)} \tag{2.8}$$

et définissons les vecteurs $\mathbf{H}_p$ et $\mathbf{X}_p$ de $\mathbb{R}^N[p]$, $\mathbb{R}$ espace vectoriel de dimension $G(N, p) - 1$, respectivement par

$$\mathbf{H}_p \triangleq [\mathbf{h}_1^T, \mathbf{h}_2^T, \ldots, \mathbf{h}_p^T]^T \tag{2.9}$$

$$\mathbf{X}_p \triangleq [\mathbf{x}_1^T, \mathbf{x}_2^T, \ldots, \mathbf{x}_p^T]^T\,. \tag{2.10}$$

On constate alors que la relation entrée-sortie (2.6) prend la forme

$$y = h_0 + \mathbf{X}_p^T \mathbf{H}_p \tag{2.11}$$

qui est considérablement plus simple à écrire, même si le calcul explicite de (2.11) nécessite le retour à (2.6). Notons enfin que si l'on fait une suite de calculs sur un FVT d'ordre p et que cet ordre est fixe, on peut omettre de le mentionner, le dernier terme de (2.11) devenant simplement $\mathbf{X}^T \mathbf{H}$.

Dans le problème que nous avons à considérer dans la suite, le vecteur d'entrée $\mathbf{x}$ est souvent *aléatoire*, ce qu'on spécifie parfois en le notant $\mathbf{x}(\omega)$. Tout ce qui vient d'être introduit peut être transposé sans difficulté dans le cas aléatoire, sous la seule réserve d'existence des quantités utilisées. En effet les variables aléatoires apparaissant dans (2.10) peuvent ne pas être du second ordre, ce que nous ne voulons pas admettre dans la suite. Il est alors évident que pour que la sortie y définie par (2.11) soit une variable aléatoire du second ordre il faut que les moments généralisés jusqu'à l'ordre $2p$ de $\mathbf{x}$ existent, ce qui sera supposé.

La moyenne du vecteur $\mathbf{X}_p$ apparaissant dans (2.11) s'écrit

$$(2.12) \qquad \mathbf{m}_p = \mathrm{E}[\mathbf{X}_p]$$

qui est un vecteur de $\mathbb{R}^{\mathrm{N}}[p]$ dont les composantes se déduisent de (2.10) en prenant les espérances mathématiques des composantes. On peut alors jouer sur le terme h_0 pour obtenir un FVT dont la sortie ait une moyenne nulle. Il suffit alors de prendre $h_0 = -\mathbf{m}_p^{\mathrm{T}} \mathbf{H}_p$, ce qui permet d'écrire (2.11) sous la forme

$$(2.13) \qquad y = \mathbf{X}_{p,c}^{\mathrm{T}} \mathbf{H}_p$$

où

$$(2.14) \qquad \mathbf{X}_{p,c} \triangleq \mathbf{X}_p - \mathbf{m}_p$$

ce qui signifie que ce vecteur est de moyenne nulle ou centré, ce qui est indiqué par la lettre c en indice.

Dans le cas particulier du filtre LQ, si on suppose $\mathbf{x}$ centré et si on définit le vecteur $\mathbf{h}$ de $\mathbb{R}^{\mathrm{N}}$ et la matrice carrée triangulaire supérieure droite M de dimension $(\mathrm{N} \times \mathrm{N})$ respectivement par

$$(2.15) \qquad h[i] \triangleq h_1[i] \quad 1 \leqslant i \leqslant \mathrm{N}$$

$$(2.16) \qquad \mathrm{M}[i,j] \triangleq h_2[(i-1)(\mathrm{N}-i/2)+j] \quad 1 \leqslant i \leqslant j \leqslant \mathrm{N}$$

$$(2.17) \qquad \mathrm{M}[i,j] \triangleq 0 \quad 1 \leqslant j < i \leqslant \mathrm{N}$$

alors, la sortie (2.13) peut s'écrire sous la forme

$$(2.18) \qquad y = \mathrm{S}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^{\mathrm{T}} \mathbf{h} + \mathbf{x}^{\mathrm{T}} \mathrm{M} \mathbf{x} - \mathrm{Tr}\,[\mathrm{RM}]$$

où Tr signifie trace et R est la matrice de covariance de l'entrée $\mathbf{x}$, définie par

$$(2.19) \qquad \mathrm{R} \triangleq \mathrm{E}[\mathbf{x}\mathbf{x}^{\mathrm{T}}].$$

L'expression (2.18), bien qu'équivalente à (2.13) pour $p=2$, est toutefois d'un grand intérêt pratique pour certaines applications, comme on le verra au paragraphe 4. De même, on vérifiera au paragraphe 4 que l'introduction d'une redondance dans l'expression (2.6), par sommation sur l'ensemble des indices $\mathbf{i}_m$ pour chaque entier m tel que $1 \leqslant m \leqslant p$, s'avère aussi très pratique pour le calcul explicite des FVT optimaux. Notons que pour le filtre LQ, une telle redondance s'introduit si on n'impose aucune structure particulière à la matrice M de l'expression (2.18).

L'écriture simplifiée (2.13), de la sortie d'un FVT réel d'ordre p non redondant, peut être étendue sans difficulté à la sortie d'un FVT réel d'ordre p redondant. Dans ce dernier cas, la relation de récurrence (2.4) n'est, bien sûr, plus valable et les vecteurs $\mathbf{x}_m$ et $\mathbf{h}_m$ de degré m pur, construits de la même façon que pour des FVT non redondants, deviennent de dimension $g(\mathrm{N}, m) = \mathrm{N}^m$. L'espace $\mathbb{R}^{\mathrm{N}}[p]$ est alors de dimension $\mathrm{N}(1-\mathrm{N}^p)(1-\mathrm{N})^{-1}$.

Notons à ce stade que, pour des FVT redondants, la construction de l'espace $\mathbb{R}^{\mathrm{N}}[p]$ a beaucoup d'analogie avec celle utilisant les produits de Kronecker, comme ceci est brièvement indiqué dans l'annexe 1.

Pour calculer les propriétés du second ordre de y, on est obligé d'introduire un *opérateur de covariance* défini par

$$(2.20) \qquad \mathrm{R}_p \triangleq \mathrm{E}[\mathbf{X}_{p,c} \mathbf{X}_{p,c}^{\mathrm{T}}].$$

La structure de cet opérateur ou de cette matrice dans $\mathbb{R}^{\mathrm{N}}[p]$ sera analysée plus en détail quand ceci sera nécessaire. Pour l'instant, contentons nous de noter que R_p est une matrice symétrique et définie (dans le cas non redondant) non négative.

Utilisant (2.13) et (2.20), on voit alors que la variance de la sortie s'écrit

$$(2.21) \qquad \mathrm{V}(y) = \mathbf{H}_p^{\mathrm{T}} \mathrm{R}_p \mathbf{H}_p$$

qui est une expression d'une très grande simplicité.

2.2. FILTRAGE DE VOLTERRA TRANSVERSE COMPLEXE

2.2.1. Définition

La transposition de tout ce qui précède dans le cas complexe est nécessaire pour traiter en particulier le problème des antennes à BE où l'on travaille avec des signaux complexes. Ceci pose toutefois toute une série de problèmes que nous allons brièvement analyser.

Rien n'empêche a priori d'accepter dans toutes les équations précédentes des vecteurs $\mathbf{x}$ et des noyaux h à valeurs complexes. On peut donc en suivant ce chemin aboutir à la forme concentrée (2.11) qui, à l'ordre un et pour $h_0 = 0$, s'écrit

$$(2.22) \qquad y = \mathbf{x}^{\mathrm{T}} \mathbf{h}_1.$$

Cependant, bien que l'expression (2.22) reste linéaire en $\mathbf{x}$ et en $\mathbf{h}_1$ sur $\mathbb{C}$, le produit scalaire qui y figure n'est plus un produit scalaire sur le corps des complexes, ce qui fait disparaître tous les avantages liés à cette structure et complique le formalisme.

Pour s'affranchir de ce problème, il est toujours possible de définir le vecteur $\mathbf{h}$ par $\mathbf{h} = \mathbf{h}_1^*$, et d'écrire (2.22) sous la forme

$$(2.23) \qquad y = \mathbf{h}^{\dagger} \mathbf{x}.$$

Ainsi, bien que non linéaire par rapport au noyau $\mathbf{h}$, (2.23) reste linéaire par rapport à $\mathbf{x}$ et le produit scalaire qui y figure est, cette fois, un produit scalaire sur $\mathbb{C}$.

Toutefois les expressions (2.22) et (2.23) ne permettent pas de représenter tous les filtres complexes d'ordre un. En particulier, dans le cas des antennes à BE, $\mathbf{x}$ est un vecteur de type signal analytique et l'expression (2.23) correspond au signal analytique obtenu en sortie de l'antenne définie par $\mathbf{h}$. La sortie réelle associée, définie par

$$(2.24) \qquad y_r = \mathrm{Re}\,(y) = (\mathbf{h}^{\dagger} \mathbf{x} + \mathbf{x}^{\dagger} \mathbf{h})/2$$

est toujours un signal complexe d'ordre un par rapport à $\mathbf{x}$ mais non représentable par (2.22) et (2.23). Cet exemple montre que, dans le cas complexe, il est nécessaire de conserver la possibilité d'agir à la fois sur $\mathbf{x}$ et $\mathbf{x}^*$ de manière indépendante.

Ainsi on appelle FVT complexe d'ordre un, tout système qui au vecteur d'entrée $\mathbf{x}$ complexe, associe la sortie y définie par

$$y = h_0 + \mathbf{x}^\dagger\, \mathbf{h}_a + \mathbf{x}^{\mathrm{T}}\, \mathbf{h}_b \tag{2.25}$$

où h_0 est une constante et où $\mathbf{h}_a$ et $\mathbf{h}_b$ sont des vecteurs de $\mathbb{C}^{\mathrm{N}}$.

Notons que, pour $h_0 = 0$, (2.25) n'est plus linéaire, ni en $\mathbf{x}$, ni par rapport aux noyaux $\mathbf{h}_a$ et $\mathbf{h}_b$. Cependant, en définissant les vecteurs $\mathbf{h}_1$ et $\mathscr{X}$ de $\mathbb{C}^{2\mathrm{N}}$ par

$$\mathbf{h}_1 \triangleq [\mathbf{h}_a^{\mathrm{T}}, \mathbf{h}_b^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}\,, \quad \mathscr{X} \triangleq [\mathbf{x}^{\mathrm{T}}, \mathbf{x}^\dagger\,]^{\mathrm{T}} \tag{2.26}$$

l'expression (2.25) s'écrit

$$y = h_0 + \mathscr{X}^\dagger\, \mathbf{h}_1 \tag{2.27}$$

ce qui correspond à la forme (2.11) du cas réel à l'ordre un, où l'observation $\mathbf{x}$ est remplacée par $\mathscr{X}$ et où le produit scalaire est hermitien, et ce qui devient, pour $h_0 = 0$, une sortie linéaire par rapport à $\mathbf{h}_1$.

Partant de ces remarques, il est maintenant possible d'étendre la notion de FVT complexe à un ordre p arbitraire.

Soit donc un vecteur $\mathbf{x}$ complexe de dimension N, de composantes $x[i]$, et soit $\mathscr{X}$ le vecteur de $\mathbb{C}^{2\mathrm{N}}$ et de composantes $\mathscr{X}[i]$, définies par

$$\mathscr{X}[i] \triangleq x[i] \tag{2.28}$$

$$\mathscr{X}[\mathrm{N}+i] \triangleq x[i]^* \quad 1 \leqslant i \leqslant \mathrm{N}\,. \tag{2.29}$$

On appelle FVT complexe d'ordre p, le système associant au vecteur $\mathbf{x}$ la sortie définie par

$$y = h_0 + \sum_{m=1}^{p} \sum_{i_1^m \leqslant i_2^m \cdots \leqslant i_m^m} h_m[\mathbf{i}_m]\, \mathscr{X}[i_1^m]^*\, \mathscr{X}[i_2^m]^*\, \mathscr{X}[i_3^m]^* \ldots \mathscr{X}\,[i_m^m]^* \tag{2.30}$$

où $1 \leqslant i_j^m \leqslant 2\,\mathrm{N}$. La quantité $h_m[\mathbf{i}_m]$ est le noyau d'ordre m du filtre.

On constate que pour chaque entier $m(1 \leqslant m \leqslant p\,)$, toutes les observations « redondantes » de la forme $\mathscr{X}[i_1^m]^*\, \mathscr{X}[i_2^m]^*\, \mathscr{X}[i_3^m]^* \ldots \mathscr{X}\,[i_m^m]^*$ où $\exists (j,k)/1 \leqslant j < k \leqslant m$ et $i_j^m > i_k^m$, n'ont pas été considérées dans la mesure où elles n'apportent pas d'information supplémentaire. Si les statistiques du signal $\mathbf{x}$ sont connues jusqu'à l'ordre p, la sortie y dépend de $\mathrm{G}(2\,\mathrm{N}, p\,)$ paramètres où $\mathrm{G}(2\,\mathrm{N}, p\,)$ est défini par les relations (2.3), (2.4) et (2.5). Par exemple, pour un FVT complexe d'ordre deux, y dépend de $\mathrm{G}(2\,\mathrm{N}, 2) = 1 + \mathrm{N}(2\,\mathrm{N}+3)$ paramètres : le coefficient h_0, les $g(2\,\mathrm{N}, 1) = 2\,\mathrm{N}$ coefficients « d'ordre un pur » $h_1[i_1^1]$ et les $g(2\,\mathrm{N}, 2) = \mathrm{N}(2\,\mathrm{N}+1)$ coefficients « d'ordre deux pur » $h_2[i_1^2, i_2^2]$.

Notons à ce stade que dans le cas particulier du traitement d'antenne à BE, la composante $x[i]$ du vecteur $\mathbf{x}$ est généralement l'enveloppe complexe ou le signal analytique du signal reçu sur le capteur i. La dimension N du vecteur $\mathbf{x}$ correspond alors au nombre de capteurs.

2.2.2. Représentation

Dans le but d'écrire (2.30) sous une forme beaucoup plus simple, on va reprendre les développements effectués pour le cas réel en les adaptant au cas complexe.

Tout d'abord associons au noyau $h_m[\mathbf{i}_m]$ le vecteur $\mathbf{h}_m$ de $\mathbb{C}^{g(2\mathrm{N},m)}$, dont les composantes $h_m[i]$ sont les quantités $h_m[\mathbf{i}_m]$ rangées suivant l'ordre croissant des indices $\mathbf{i}_m$. La relation d'ordre entre indices est définie par (2.7) en remplaçant N par 2 N.

De la même façon associons au vecteur $\mathbf{x}$ d'entrée le vecteur $\mathbf{x}_m$ de $\mathbb{C}^{g(2\mathrm{N},m)}$, dont les composantes $x_m[i]$ sont les quantités $\mathscr{X}_m[\mathbf{i}_m] = \mathscr{X}[i_1^m]\, \mathscr{X}[i_2^m]\, \mathscr{X}[i_3^m] \ldots \mathscr{X}\,[i_m^m]$ non redondantes, rangées suivant l'ordre croissant des indices $\mathbf{i}_m$.

Si on considère l'espace vectoriel sur $\mathbb{C}$, de dimension $\mathrm{G}(2\,\mathrm{N}, p\,) - 1$, $\mathbb{C}^{\mathrm{N}}[p]$, défini par

$$\mathbb{C}^{\mathrm{N}}[p] \triangleq \mathbb{C}^{g(2\mathrm{N},1)} \times \mathbb{C}^{g(2\mathrm{N},2)} \times \cdots \times \mathbb{C}^{g(2\mathrm{N},p)} \tag{2.31}$$

et les vecteurs $\mathbf{H}_p$ et $\mathbf{X}_p$ de $\mathbb{C}^{\mathrm{N}}[p]$ définis respectivement par (2.9) et (2.10), on constate que (2.30) s'écrit sous la forme simplifiée

$$y = h_0 + \mathbf{X}_p^\dagger\, \mathbf{H}_p = h_0 + \mathbf{X}^\dagger\, \mathbf{H} \tag{2.32}$$

la dernière expression ne mentionnant pas l'indice p quand il va de soi.

Dans le cas où $\mathbf{x}$ est aléatoire, les résultats précédents s'appliquent pourvu que $\mathbf{x}$ ait des moments finis jusqu'à l'ordre $2p$, ce que nous admettons dans la suite. En particulier pour obtenir un FVT complexe dont la sortie est centrée, il suffit de choisir $h_0 = -\,\mathbf{m}_p^\dagger\, \mathbf{H}_p$, où $\mathbf{m}_p$ est défini par (2.12). L'expression (2.32) s'écrit alors

$$y = \mathbf{X}_{p,c}^\dagger\, \mathbf{H}_p \tag{2.33}$$

où $\mathbf{X}_{p,c}$ est défini par (2.14).

Considérons à titre d'exemple le cas particulier du FVT complexe d'ordre deux. Si on suppose $\mathbf{x}$ centré et si on définit le vecteur $\mathbf{h}$ de $\mathbb{C}^{2\mathrm{N}}$ et la matrice carrée $\mathrm{M}(2\,\mathrm{N} \times 2\,\mathrm{N})$ respectivement par

$$h[i] \triangleq h_1[i] \quad 1 \leqslant i \leqslant 2\,\mathrm{N} \tag{2.34}$$

$$\mathrm{M}\,[i,j\,] \triangleq h_2[\mathrm{N}(2\,i-1) + i\,(i-1)/2 + j\,] \quad 1 \leqslant i, j \leqslant \mathrm{N} \tag{2.35}$$

$$\mathrm{M}\,[i, \mathrm{N}+j\,] \triangleq h_2[(i-1)\;(2\,\mathrm{N} - i/2) + j\,] \quad 1 \leqslant i \leqslant j \leqslant \mathrm{N} \tag{2.36}$$

$$\mathrm{M}[i, \mathrm{N}+j\,] \triangleq 0 \quad 1 \leqslant j < i \leqslant \mathrm{N} \tag{2.37}$$

$$\mathrm{M}\,[\mathrm{N}+i, j\,] \triangleq h_2[(3\,\mathrm{N}^2 + \mathrm{N}(2\,i-1) + i\,(1-i) + 2j)/2] \quad 1 \leqslant i \leqslant j \leqslant \mathrm{N} \tag{2.38}$$

(2.39) $\quad M[N+i, j] \triangleq 0 \quad 1 \leqslant j < i \leqslant N$

(2.40) $\quad M[N+i, N+j] \triangleq 0 \quad 1 \leqslant i, j \leqslant N$

alors l'expression (2.33) devient

(2.41) $\quad y = S(\mathbf{x}) = \mathscr{X}^{\dagger}\,\mathbf{h} + \mathscr{X}^{\dagger}\,M\mathscr{X} - \operatorname{Tr}[\bar{R}M]$

où $\bar{R}$ est la matrice de covariance $\mathscr{X}$ définie par

(2.42) $\quad \bar{R} \triangleq E[\mathscr{X}\ \ \mathscr{X}^{\dagger}]\,.$

En décomposant $\mathbf{h}$ et M de la façon suivante

(2.43) $\quad \mathbf{h} \triangleq [\mathbf{h}_a^T, \mathbf{h}_b^T]^T$

(2.44) $\quad M \triangleq \begin{bmatrix} M_a & M_2 \\ M_3 & M_d \end{bmatrix}$

où $\mathbf{h}_a$ et $\mathbf{h}_b$ sont des vecteurs de $\mathbb{C}^N$ et où M_a, M_2, M_3, M_d sont des matrices complexes $(N \times N)$ telles que M_2 et M_3 sont triangulaires supérieures droites, $M_1 = M_a + M_d^T$ et $M_d = 0$, l'expression (2.41) s'écrit aussi

(2.45) $\quad y = \mathbf{x}^{\dagger}\,\mathbf{h}_a + \mathbf{x}^T\,\mathbf{h}_b + \mathbf{x}^{\dagger}\,M_1\,\mathbf{x} + \mathbf{x}^{\dagger}\,M_2\,\mathbf{x}^* + {} + \mathbf{x}^T\,M_3\,\mathbf{x} - \operatorname{Tr}[\bar{R}M]$

expression faisant apparaître explicitement le vecteur d'entrée $\mathbf{x}$. Pour certaines applications, les expressions (2.41) et (2.45) sont plus pratiques que l'expression (2.33) dans le cas $p = 2$. D'autre-part, de la même façon que pour le cas réel, l'introduction d'une redondance dans l'expression (2.30), par sommation sur l'ensemble des indices $\mathbf{i}_m$ pour chaque entier m tel que $1 \leqslant m \leqslant p$, facilite le calcul explicite des FVT optimaux. Pour le FVT complexe d'ordre deux, une telle redondance s'introduit si on n'impose aucune structure particulière à la matrice M de l'expression (2.41) ou aux matrices M_1, M_2 et M_3 de l'expression (2.45). L'écriture simplifiée (2.33), de la sortie d'un FVT complexe d'ordre p non redondant, peut être étendue sans difficultés à la sortie d'un FVT complexe d'ordre p redondant. Dans ce dernier cas, l'outil privilégié pour la représentation du vecteur observation $\mathbf{x}_m$ de degré m pur est le produit de Kronecker (Annexe 1). Les vecteurs $\mathbf{x}_m$ et $\mathbf{h}_m$, de degré m pur, sont alors de dimension $g(2N, m) = (2N)^m$ et l'espace $\mathbb{C}^N[p]$ devient de dimension $2N(1-(2N)^p)(1-(2N))^{-1}$.

Pour calculer les propriétés du second ordre de y, on doit introduire l'opérateur de covariance défini par

(2.46) $\quad R_p \triangleq E[\mathbf{X}_{p,c}\,\mathbf{X}_{p,c}^{\dagger}]\,.$

Cet opérateur est évidemment hermitien et défini (dans le cas non redondant) non négatif.

Enfin, utilisant (2.33) et (2.46), la variance de la sortie s'écrit

(2.47) $\quad V(y) = \mathbf{H}_p^{\dagger}\,R_p\,\mathbf{H}_p\,.$

2.3. COMMENTAIRE

Notons que dans la mesure où un vecteur réel est un vecteur complexe particulier, le formalisme complexe introduit dans le paragraphe 2.2 peut être utilisé pour des vecteurs d'entrées $\mathbf{x}$ à valeurs réelles. Cependant, dans ce cas, comme $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*$, l'utilisation du vecteur $\mathscr{X}$ introduit une redondance inutile qui est supprimée dans la formulation du paragraphe 2.1.

3. Filtrage de Volterra optimal en détection, estimation et filtrage d'antenne à bande étroite

3.1. DÉTECTION ET ESTIMATION SOUS CONTRAINTE LINÉAIRE

Avant d'aborder directement l'usage du FVT en détection et estimation, nous allons commencer par montrer l'analogie de ces deux problèmes liés à un choix particulier des critères.

L'*estimation* est prise ici au sens de l'estimation en moyenne quadratique (EMQ) d'une grandeur aléatoire, ce qui correspond à un point de vue bayésien.

Soit donc un vecteur aléatoire $\mathbf{x}(\omega)$, a priori complexe, et du second ordre. Ce vecteur est souvent considéré comme l'entrée d'un système S calculant la sortie $y = S(\mathbf{x})$, qui est aussi une variable aléatoire. L'ensemble des statistiques $S(\mathbf{x})$ de $\mathbf{x}$ telles que y est du second ordre est évidemment un espace vectoriel sur le corps des complexes. Introduisant le produit scalaire

(3.1) $\quad (S(\mathbf{x}), S'(\mathbf{x})) \triangleq E[S(\mathbf{x})^*\,S'(\mathbf{x})] \triangleq (S, S')$

on transforme cet espace en un espace de Hilbert, appelé parfois espace des observations filtrées et noté

(3.2) $\quad H \triangleq \{S(\mathbf{x})/S(\mathbf{x}) \in L^2\}$

L^2 étant l'espace de Hilbert des variables aléatoires scalaires du second ordre.

Considérons maintenant une famille $\mathscr{F}$, fermée, de statistiques $S(\mathbf{x})$ telles que $E[S(\mathbf{x})] = 0$ et qui forme un espace vectoriel sur le corps des complexes. Il peut par exemple s'agir des statistiques linéaires de $\mathbf{x}$, c'est-à-dire du type $\mathbf{h}^{\dagger}\,\mathbf{x}$, où $\mathbf{x}$ est centré. La famille $\mathscr{F}$ génère un sous-espace de Hilbert de H dénoté

(3.3) $\quad H_F \triangleq \{S(\mathbf{x})/S(\mathbf{x}) \in \mathscr{F} \text{ et } S(\mathbf{x}) \in L^2\}\,.$

Soit maintenant une variable aléatoire z centrée n'appartenant pas a priori à H_F. Le problème de l'estimation sous contrainte consiste à déterminer la statistique $S(\mathbf{x})$ de H_F générant la meilleure EMQ de z. Il s'agit donc de trouver la statistique $S(\mathbf{x})$ de H_F minimisant le critère

(3.4) $\quad C_F(z) = E\{|z - S(\mathbf{x})|^2\}\,.$

Utilisant le produit scalaire (3.1), on voit que $C_F(z)$ représente le carré de la distance de z à $S(\mathbf{x})$. Il s'agit donc de trouver l'élément de H_F dont la distance à z est minimale. Il est bien connu que cet élément est la projection de z sur H_F et on a donc

$$\hat{z}_F = S_o(\mathbf{x}) = \text{Proj } [z/H_F] . \tag{3.5}$$

Cette quantité est évidemment le vecteur de H_F le plus proche de z.

D'autre part, il est bien connu [1] que la statistique $S(\mathbf{x})$ de H générant la meilleure EMQ de z est l'espérance conditionnelle ou la régression. Cette fonction, généralement non linéaire par rapport à $\mathbf{x}$ dans le cas où z et $\mathbf{x}$ ne sont pas conjointement gaussiens, est définie par

$$\hat{z}_H = \text{Proj } [z/H] = E[z/x] . \tag{3.6}$$

Appliquant alors le théorème de projection de z sur H et H_F puis de $\hat{z}_H$ sur H_F, on en déduit immédiatement que

$$\hat{z}_F = S_o(\mathbf{x}) = \text{Proj } [\hat{z}_H/H_F] \tag{3.7}$$

ce qui signifie que la statistique $\hat{z}_F$ de H_F générant la meilleure estimée en MQ de z est aussi la meilleure approximation en MQ de la régression par un élément de H_F.

Dans la *détection*, il s'agit de discriminer au mieux deux hypothèses simples H_0 et H_1 spécifiées par deux lois de probabilité P_0 et P_1. Ce problème peut-être abordé par de très nombreux critères et nous retiendrons ici plus particulièrement le critère de *déflexion* ou de *contraste*. La déflexion en sortie du système S est définie par

$$d(S(\mathbf{x})) \triangleq \frac{|E_1[S(\mathbf{x})] - E_0[S(\mathbf{x})]|^2}{V_0(S(\mathbf{x}))} \triangleq d(S) \tag{3.8}$$

où E_1 et E_0 désignent les espérances respectivement sous H_0 et sous H_1, tandis que V_0 représente la variance sous H_0.

Essayons alors de trouver la statistique de H_F qui maximise la déflexion. La famille $\mathscr{F}$ est ici un espace vectoriel fermé de statistiques de $\mathbf{x}$ centrées sous H_0. Comme les statistiques de H_F sont de moyenne nulle sous H_0, le numérateur de d ne fait intervenir que $E_1(S(\mathbf{x}))$. Pour calculer cette quantité introduisons le rapport de vraisemblance (RV) déplacé $R(\mathbf{x})$ défini par

$$R(\mathbf{x}) \triangleq L(\mathbf{x}) - 1 \tag{3.9}$$

qui possède évidemment la propriété d'être centré sous H_0. On rappelle que le RV $L(\mathbf{x})$, défini par le rapport des densités de probabilité de $\mathbf{x}$ sous H_1 et H_0, est une statistique suffisante pour la détection entre deux hypothèses H_1 et H_0. D'après la définition du rapport de vraisemblance, on déduit que

$$E_1[S(\mathbf{x})] = E_0[R(\mathbf{x})^* S(\mathbf{x})] \tag{3.10}$$

où le complexe conjugué n'a été ajouté que par convenance, $R(\mathbf{x})$ étant réelle. Utilisant le produit scalaire (3.1) où, cette fois, l'espérance est prise sous H_0, on voit alors que la déflexion s'écrit

$$d(S) = \frac{|(R, S)|^2}{(S, S)} . \tag{3.11}$$

Appliquant le théorème de projection, on peut décomposer de manière unique $R(\mathbf{x})$ sous la forme

$$R(\mathbf{x}) = R_F(\mathbf{x}) + R_{F,\perp}(\mathbf{x}) \tag{3.12}$$

où

$$R_F(\mathbf{x}) = \text{Proj } [R(\mathbf{x})/H_F] \tag{3.13}$$

et $R_{F,\perp}(\mathbf{x})$ est évidemment orthogonal à H_F dont fait partie $S(\mathbf{x})$. Il en résulte que $d(S)$ prend la forme

$$d(S) = \frac{|(R_F, S)|^2}{(S, S)} \tag{3.14}$$

et l'on déduit de l'inégalité de Schwarz que

$$d(S) \leq (R_F, R_F) \tag{3.15}$$

valeur maximum qui est atteinte pour toutes les statistiques

$$S(\mathbf{x}) = \lambda R_F(\mathbf{x}) . \tag{3.16}$$

Prenant $\lambda = 1$ et comparant (3.13) et (3.5), on voit que la statistique $S(\mathbf{x})$ optimale pour la détection à l'aide du critère de déflexion est celle qui réalise l'EMQ de $R(\mathbf{x})$ sous H_0, ce qui établit un nouveau lien très étroit entre détection et estimation.

3.2. ÉQUATIONS DU FVT OPTIMAL

Il est clair que l'ensemble des FVT introduits dans la section 2, tout autant réels que complexes, appartiennent à une famille de systèmes à moyenne nulle en sortie et constituant, avec le produit scalaire (3.1), un espace vectoriel normé de dimension finie donc fermé. En conséquence les résultats précédents s'appliquent intégralement. L'estimation comme la détection optimales s'obtiennent par projection.

Dans le cas réel, H_F est le sous-espace des FVT de la forme (2.13) tandis que dans le cas complexe on prendra la forme (2.33). Pour certains raisonnements l'approche géométrique est suffisante, mais la plupart du temps il est important de calculer explicitement la projection par application du principe d'orthogonalité.

3.2.1. Cas général

D'après le principe d'orthogonalité, l'estimée optimale $S_o(\mathbf{x})$ de la variable aléatoire centrée z, c'est-à-dire la projection de z sur H_F, vérifie

$$E[S(\mathbf{x})^* (z - S_o(\mathbf{x}))] = 0 \quad \forall S(\mathbf{x}) \in H_F . \tag{3.17}$$

Dans le cas réel il s'agit donc de trouver le FVT optimal $\mathbf{H}_p^o$ tel que

$$E[\mathbf{H}_p^T \mathbf{X}_{p,c}(z - \mathbf{X}_{p,c}^T \mathbf{H}_p^o)] = 0 \quad \forall \mathbf{H}_p \in \mathbb{R}^N[p] \tag{3.18}$$

et dans le cas complexe, le FVT optimal $\mathbf{H}_p^o$ vérifie

$$E[\mathbf{H}_p^\dagger \mathbf{X}_{p,c}(z - \mathbf{X}_{p,c}^\dagger \mathbf{H}_p^o)] = 0 \quad \forall \mathbf{H}_p \in \mathbb{C}^N[p] . \tag{3.19}$$

On déduit alors immédiatement de (3.18) et (3.19) que dans les deux cas, le FVT optimal $\mathbf{H}_p^o$ est solution du système

$$\text{(3.20)} \qquad R_p \mathbf{H}_p^o = \mathbf{r}_{z,p}$$

où R_p est défini par (2.20) pour le cas réel et par (2.46) pour le cas complexe et où $\mathbf{r}_{z,p}$ est donné, dans les deux cas, par

$$\text{(3.21)} \qquad \mathbf{r}_{z,p} = E[\mathbf{X}_{p,c}\, z]\,.$$

Pour des FVT, réels ou complexes, non redondants, tels que ceux définis par (2.6) et (2.30), l'opérateur R_p est généralement inversible et le système (3.20) admet une solution unique donnée par

$$\text{(3.22)} \qquad \mathbf{H}_p^o = R_p^{-1}\, \mathbf{r}_{z,p}\,.$$

Cependant, pour des FVT redondants, l'opérateur R_p est toujours singulier et le système (3.20) admet une infinité de solutions pour $\mathbf{H}_p^o$. Cette indétermination n'est pas surprenante puisqu'il existe bien une infinité d'écritures redondantes d'une même relation entrée-sortie non redondante. Toutefois, dans ce cas, chacune des solutions redondantes du système (3.20) décrit la même relation entrée-sortie non redondante, définie par (2.13) ou (2.33) et (3.22).

Utilisant (3.22) et reportant la statistique $S_o(\mathbf{x}) = \mathbf{X}_{p,c}^{\dagger}\, \mathbf{H}_p^o$ dans (3.4), on déduit la variance d'erreur d'estimation, donnée, pour un FVT optimal d'ordre p non redondant, par

$$\text{(3.23)} \qquad \sigma_{z,p}^2 = \sigma_z^2 - \mathbf{r}_{z,p}^{\dagger}\, R_p^{-1}\, \mathbf{r}_{z,p}$$

où σ_z^2 est la variance de z. En étendant les résultats de [28], on établit dans l'annexe 2, sans aucune hypothèse concernant R_p, en dehors de sa non singularité et de son existence, une formule de récurrence sur les performances d'estimation, quand on incrémente l'ordre du FVT. Cette formule de récurrence s'écrit

$$\text{(3.24)} \qquad \sigma_{z,p-1}^2 = \sigma_{z,p}^2 + \mathbf{h}_p^{o\dagger}\, C_p^{-1}\, \mathbf{h}_p^o$$

où $\mathbf{h}_p^o$ est le vecteur des noyaux de degré p du FVT optimal $\mathbf{H}_p^o$ (voir (2.9)) et où C_p est la matrice de « type p », c'est-à-dire la sous matrice $g(N,p) \times g(N,p)$ dans le cas réel, et $g(2N,p) \times g(2N,p)$ dans le cas complexe, se trouvant en bas et à droite, de la version partitionnée de R_p^{-1}.

L'expression (3.24) montre qu'à partir du moment où $\mathbf{h}_p^o$ n'est pas dans le noyau de C_p^{-1}, on améliore toujours les performances d'estimation en augmentant le degré de non linéarité du FVT optimal. On déduit ainsi de (3.24) que

$$\text{(3.25)} \qquad \sigma_{z,1}^2 \geqslant \sigma_{z,2}^2 \geqslant \cdots \geqslant \sigma_{z,p-1}^2 \geqslant \sigma_{z,p}^2 \geqslant \cdots \geqslant \sigma_{z,\min}^2$$

$\sigma_{z,\min}^2$ étant atteint par la régression.

3.2.2. Cas particulier de la détection

De même, on déduit des résultats du paragraphe 3.1 que le FVT optimal pour la détection au sens du contraste est, dans le cas réel comme dans le cas complexe, défini par (3.20) où z correspond au rapport de vraisemblance centré sous H_0, $R(\mathbf{x})$, défini par (3.9), et où les espérances mathématiques sont prises sous H_0. Il est alors aisé de montrer que le filtre non redondant optimal, $\mathbf{H}_p^o$, au sens du contraste, s'écrit

$$\text{(3.26)} \qquad \mathbf{H}_p^o = R_p^{-1}\, \mathbf{S}_p$$

où le vecteur $\mathbf{S}_p$ est défini par

$$\text{(3.27)} \qquad \mathbf{S}_p \triangleq E_0[\mathbf{X}_{p,c}\, R(\mathbf{x})] = E_1[\mathbf{X}_{p,c}]$$

et où $\mathbf{X}_{p,c}$ signifie que $\mathbf{X}_p$ est centré sous H_0. Il est entendu que les filtres $\lambda \mathbf{H}_p^o$, où λ est un scalaire arbitraire, maximisent aussi la déflexion.

La déflexion maximale associée est alors donnée par

$$\text{(3.28)} \qquad d_p^o = \mathbf{S}_p^{\dagger}\, R_p^{-1}\, \mathbf{S}_p\,.$$

La déflexion maximale d_{p-1}^o, obtenue en sortie du FVT optimal $\mathbf{H}_{p-1}^o$ d'ordre $p-1$, est aussi la déflexion obtenue en sortie du FVT $\tilde{\mathbf{H}}_p^o$ d'ordre p, où $\tilde{\mathbf{H}}_p^o$ est obtenu en concaténant le vecteur $\mathbf{H}_{p-1}^o$ et le vecteur nul de dimension $g(N,p)$, dans le cas réel, et $g(2N,p)$, dans le cas complexe. Le FVT $\tilde{\mathbf{H}}_p^o$ n'ayant a priori aucune raison d'être égal au FVT optimal d'ordre p, $\mathbf{H}_p^o$, on en déduit que $d_{p-1}^o \leqslant d_p^o$ et de proche en proche on obtient

$$\text{(3.29)} \qquad d_1^o \leqslant d_2^o \leqslant \cdots \leqslant d_{p-1}^o \leqslant d_p^o \leqslant \cdots \leqslant d_{\max}^o$$

$d_{\max}^o$ étant atteint pour le RV centré $R(\mathbf{x})$.

4. Exemples d'application

Dans ce paragraphe on présente quelques applications de la théorie développée dans les chapitres précédents. On s'intéresse en particulier au problème de la prédiction LQ d'un signal aléatoire réel, à celui de la détection, par filtrage LQ, d'un signal réel déterministe noyé dans un bruit blanc d'ordre quatre et enfin, à celui de la détection, par filtrage de Volterra spatial d'ordre deux, d'un signal aléatoire centré perturbé par la présence de brouilleurs non gaussiens.

4.1. PRÉDICTION LINÉAIRE-QUADRATIQUE

La théorie de la prédiction LQ est développée et commentée dans la référence [28]. L'idée de base est d'utiliser l'information contenue dans les quatre premiers moments d'un processus aléatoire discret pour prédire un échantillon extrait de ce même processus.

Comme nous l'avons expliqué précédemment, cette démarche se justifie dans la mesure où, lorsque le processus $x(k)$, réel, centré et stationnaire, n'est pas gaussien, le meilleur estimateur en MQ d'un échantillon à partir d'un nombre fini d'échantillons appartenant à son passé, n'a aucune raison d'être une fonction linéaire de ces observations.

Soit donc $\mathbf{X}_{2,c}(k)$ le vecteur réel, de dimension $G(N, 2) - 1$, contenant le passé LQ centré et non redondant de l'échantillon $x(k+1)$, jusqu'à l'instant $k+1-N$. Notons que l'entier N représente ici la mémoire du prédicteur, appelé communément ordre. Utilisant les notations des paragraphes précédents, le problème de la prédiction LQ, optimale en MQ, de l'échantillon $x(k+1)$ à partir de son passé LQ non redondant et de mémoire N, $\mathbf{X}_{2,c}(k)$, consiste à trouver le vecteur de prédiction LQ optimal $\mathbf{H}_2^o$ de $\mathbb{R}^N[2]$, minimisant le critère suivant

$$C_{F,2}(x) \triangleq E\left\{\left|x(k+1) - \mathbf{X}_{2,c}^T(k)\,\mathbf{H}_2\right|^2\right\}. \tag{4.1}$$

Le prédicteur LQ optimal $\mathbf{H}_2^o$ est défini par (3.22) où z est remplacé par $x(k+1)$ et où $p = 2$. Les équations (3.22) et (3.23) peuvent alors s'écrire sous la forme compacte

$$\begin{bmatrix} \sigma_x^2 & \mathbf{r}_{x,2}^T \\ \mathbf{r}_{x,2} & R_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -\mathbf{H}_2^o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{x,2}^2 \\ \mathbf{0}_2 \end{bmatrix} \tag{4.2}$$

où

$$\sigma_x^2 \triangleq E[x(k+1)\,x(k+1)],$$

$$\mathbf{r}_{x,2} \triangleq E[\mathbf{X}_{2,c}(k)\,x(k+1)], R_2 \triangleq E[\mathbf{X}_{2,c}(k)\,\mathbf{X}_{2,c}^T(k)],$$

$\mathbf{0}_2$ est le vecteur nul de $\mathbb{R}^N[2]$ et où $\sigma_{x,2}^2$, valeur du critère $C_{F,2}(x)$ lorsque $\mathbf{H}_2 = \mathbf{H}_2^o$, n'est autre que la variance de l'innovation LQ de prédiction. On constate que le système (4.2) est tout à fait semblable aux équations de Yule-Walker [79] du prédicteur linéaire. Cette similitude ne doit pas cacher pour autant la complexité inhérente à la prédiction LQ du fait de la définition de R_2. Du système (4.2), on déduit que la variance de l'innovation LQ de prédiction s'écrit, pour un vecteur observation $\mathbf{X}_{2,c}(k)$ non redondant,

$$\sigma_{x,2}^2 = \sigma_x^2 - \mathbf{r}_{x,2}^T\,R_2^{-1}\,\mathbf{r}_{x,2}. \tag{4.3}$$

Il serait intéressant de réécrire (4.3) comme la somme de deux termes correspondant d'un coté, à la contribution du filtrage linéaire et de l'autre, à la contribution du filtrage quadratique. Ceci n'est pas possible cependant, dans la mesure où les moments du troisième ordre sont responsables d'un couplage entre les deux types de filtrage. Afin de détailler davantage ce couplage, il convient de séparer les parties linéaires et quadratique des vecteurs $\mathbf{r}_{x,2}$, $\mathbf{H}_2^o$ et de la matrice R_2.

Utilisant les notations définies en (2.9) et (2.10), notant $\mathbf{r}_{x,2}^1$ et $\mathbf{r}_{x,2}^2$ respectivement les parties « linéaire » (de dimension $g(N, 1) = N$) et « quadratique » (de dimension $g(N, 2)$) du vecteur $\mathbf{r}_{x,2}$ et partitionnant R_2 en blocs de type « linéaire » $R_{1,1} \triangleq E[\mathbf{x}_{1,c}(k)\,\mathbf{x}_{1,c}^T(k)]$, « quadratique » $R_{2,2} \triangleq E[\mathbf{x}_{2,c}(k)\,\mathbf{x}_{2,c}^T(k)]$ et « linéaire-quadratique » $R_{1,2} \triangleq E[\mathbf{x}_{1,c}(k)\,\mathbf{x}_{2,c}^T(k)]$, l'expression (4.2) prend la forme

$$\begin{bmatrix} \sigma_x^2 & \mathbf{r}_{x,2}^{1\,T} & \mathbf{r}_{x,2}^{2\,T} \\ \mathbf{r}_{x,2}^1 & R_{1,1} & R_{1,2} \\ \mathbf{r}_{x,2}^2 & R_{1,2}^T & R_{1,2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -\mathbf{h}_1^o \\ -\mathbf{h}_2^o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{x,2}^2 \\ \mathbf{0}_2^1 \\ \mathbf{0}_2^2 \end{bmatrix} \tag{4.4}$$

où $\mathbf{0}_2^i (i = 1, 2)$ est le vecteur nul de dimension $g(N, i)$.

On déduit de ce système que le couplage de la solution optimale résulte de la matrice $R_{1,2}$ qui contient seulement des moments d'ordre trois. Si on suppose que les deux matrices $R_{1,1}$ et $R_{2,2}$ ne sont pas singulières, on obtient une forme intéressante de (4.3), donnée par (3.24) et s'écrivant ici

$$\sigma_{x,2}^2 = \sigma_{x,1}^2 - \mathbf{h}_2^{o\,\dagger}\,C_2^{-1}\,\mathbf{h}_2^o \tag{4.5}$$

où C_2 est la matrice de type « quadratique » de la version partitionnée de R_2^{-1} et où

$$\sigma_{x,1}^2 = \sigma_x^2 - \mathbf{r}_{x,1}^T\,R_1^{-1}\,\mathbf{r}_{x,1} \tag{4.6}$$

représente la variance de l'innovation de prédiction linéaire, qui interviendrait ici en l'absence de moments du troisième ordre. On constate que le deuxième terme de (4.5) apporte toujours une contribution négative au premier si les moments d'ordre trois du processus $x(k)$ ne sont pas nuls. Cela signifie que le filtrage quadratique améliore les performances de prédiction, dès que les moments d'ordre trois du processus sous-jacent sont non nuls. Cependant, dès que ces moments d'ordre trois sont nuls, ce qui est le cas si $x(k)$ est gaussien, le filtrage quadratique n'améliore pas les performances de prédiction obtenues dans le cas linéaire.

Notons finalement que la question cruciale d'une dérivation récursive, sur l'ordre, du meilleur prédicteur LQ est traitée dans [32] et conduit à une extension de l'algorithme de Levinson [79].

4.2. DÉTECTION OPTIMALE PAR FILTRAGE LINÉAIRE-QUADRATIQUE TEMPOREL

4.2.1. Position du problème

Le problème de la détection optimale, au sens du contraste, d'un signal réel déterministe par filtrage LQ, est développé et commenté dans la référence [39]. Ce problème, résolu depuis longtemps dans le cas gaussien [1], est traité ici et dans [39] sans l'hypothèse gaussienne, pour des distributions de probabilité à moment d'ordre quatre fini. On suppose, dans ce paragraphe, que l'observation $\mathbf{x}$, dont les composantes sont les échantillons d'un même processus à des instants différents, est réelle et que les statistiques de $\mathbf{x}$ sont connues, sous H_0 et H_1, jusqu'à l'ordre deux. Elles sont définies par

$$E_0[\mathbf{x}] = \mathbf{0} \qquad E_0[\mathbf{x}\mathbf{x}^T] = R \tag{4.7}$$

$$E_1[\mathbf{x}] = \mathbf{s} \qquad E_1[\mathbf{x}\mathbf{x}^T] = R + \mathbf{s}\mathbf{s}^T. \tag{4.8}$$

Utilisant les notations du paragraphe 2, le problème de la détection LQ optimale, au sens du contraste, est de trouver la statistique LQ

$$S(\mathbf{x}) = \mathbf{X}_{2,c}^T\,\mathbf{H}_2 \tag{4.9}$$

centrée sous H_0, maximisant le contraste (3.8), où $\mathbf{X}_{2,c}$, de dimension $G(N, 2) - 1$, est le vecteur des observations LQ non redondantes. D'après les résultats du paragraphe 2, l'expression (4.9) peut se mettre sous la forme (2.18) où on rappelle que $\mathbf{h}$ et M sont respectivement un vecteur de $\mathbb{R}^N$ et une matrice carrée réelle triangulaire supérieure droite de dimension $(N \times N)$.

Ainsi, trouver $\mathbf{H}_2$ rendant maximale la déflexion (3.8) est équivalent à trouver la paire $[\mathbf{h}, M]$ optimale pour le même problème.

4.2.2. Filtre linéaire-quadratique optimal

D'après (3.20), (3.21) et (3.27), le filtre LQ optimal $\mathbf{H}_2^o$, pour la détection au sens du contraste, est solution du système

$$(4.10) \qquad R_2 \mathbf{H}_2^o = \mathbf{S}_2$$

où $R_2 \triangleq E_0[\mathbf{X}_{2,c} \mathbf{X}_{2,c}^T]$ et où $\mathbf{S}_2$ est défini par (3.27) avec $p = 2$. La déflexion maximale associée est donnée par (3.28) avec $p = 2$, c'est-à-dire par

$$(4.11) \qquad d_2^o = \mathbf{S}_2^T R_2^{-1} \mathbf{S}_2 .$$

Pour obtenir plus de compacité dans les notations, il est préférable, dans toute la suite, d'utiliser la formulation redondante du FVT d'ordre deux, c'est-à-dire de ne pas imposer de structure particulière à la matrice M dans l'expression (2.18).

Le système (4.10) peut alors s'écrire en fonction de la paire optimale $[\mathbf{h}_o, M_o]$ sous la forme suivante

$$(4.12) \qquad \sum_{k=1}^{N} R(i,k)\, \mathbf{h}_o(k) + \sum_{k,l=1}^{N} B(i,k,l)\, M_o(k,l) = s_i$$

(4.13)

$$\sum_{k=1}^{N} B'(i,j,k)\, \mathbf{h}_o(k) + \sum_{k,l=1}^{N} A(i,j,k,l)\, M_o(k,l) = s_i\, s_j$$

où s_i est la composante i de $\mathbf{s}$ et où les quantités $R(i,k)$, $B(i,k,l)$, $B'(i,j,k)$ et $A(i,j,k,l)$ sont définies par

$$(4.14) \qquad R(i,k) \triangleq E_0[x_i\, x_k]$$

$$(4.15) \qquad B(i,k,l) \triangleq B'(k,l,i) \triangleq E_0(x_i\, x_k\, x_l)$$

$$(4.16) \qquad A(i,j,k,l) \triangleq E_0[x_i\, x_j\, x_k\, x_l] - R(i,j)\, R(k,l)$$

où x_i est la composante i de $\mathbf{x}$. La déflexion maximale associée d_2^o, définie par (4.11), s'écrit alors, dans le cas redondant, sous la forme suivante

$$(4.17) \qquad d_2^o = \mathbf{S}_2^T \mathbf{H}_2^o = \mathbf{h}_o^T \mathbf{s} + \mathrm{Tr}\,[\mathbf{s}\mathbf{s}^T M_o] .$$

4.2.3. Cas particulier

Étudions maintenant quelques cas particuliers intéressants.

4.2.3.1. *Filtres linéaires*

Si on restreint l'étude aux filtres linéaires $(M = 0)$, l'équation (4.12) admet pour solution le filtre adapté dont la sortie s'écrit

$$(4.18) \qquad y = \mathbf{x}^T R^{-1} \mathbf{s} .$$

On retrouve alors le résultat bien connu que le filtre adapté est le filtre linéaire optimal pour la détection au sens du contraste d'un signal déterministe noyé dans du bruit.

4.2.3.2. *Moments d'ordre trois nuls et cas gaussien*

Supposons maintenant que les moments d'ordre trois du bruit, définis par (4.15), sont nuls. Dans ce cas, les équations (4.12) et (4.13) sont découplées, ce qui veut dire que le filtre LQ optimal est obtenu à partir de deux filtres linéaire et quadratique optimaux calculés indépendamment.

Cette situation apparaît en particulier lorsque le bruit est gaussien où l'expression (4.16) s'écrit

$$(4.19) \qquad A(i,j,k,l) = R(i,k)\, R(j,l) + R(i,l)\, R(j,k) .$$

Utilisant cette relation dans (4.13) avec $B'(i,j,k) = 0$, on obtient directement la matrice M optimale, notée M_G, et définie par

$$(4.20) \qquad M_G = (1/2)\, R^{-1} \mathbf{s}\mathbf{s}^T R^{-1} .$$

Le système LQ optimal dans le cas gaussien est donc constitué du filtre adapté (4.18) et du système quadratique défini par (4.20). Il s'écrit

$$(4.21) \qquad y = \mathbf{x}^T R^{-1} \mathbf{s} + (1/2)[(\mathbf{x}^T R^{-1} \mathbf{s})^2 - \mathbf{s}^T R^{-1} \mathbf{s}]$$

ce qui montre qu'il peut être obtenu uniquement à partir de la sortie de la partie linéaire.

En outre, on peut montrer que, dans ce cas, (4.21) est le développement en série du RV, à l'ordre deux. La déflexion maximale associée, définie par (4.17) s'écrit alors

$$(4.22) \qquad d_2^G = \mathbf{s}^T R^{-1} \mathbf{s} + (1/2)(\mathbf{s}^T R^{-1} \mathbf{s})^2 .$$

Le premier terme est dû au filtre linéaire et le second au filtre quadratique. En termes de maximisation du contraste, il est donc préférable d'utiliser un filtre LQ plutôt qu'un filtre linéaire. Ceci peut paraître en contradiction avec le fait que le filtre adapté est le système optimal pour la détection d'un signal déterministe dans du bruit gaussien. En réalité, la contradiction n'existe pas pour les raisons suivantes : comme nous l'avons mentionné plus haut, le système maximisant la déflexion est le RV $L(\mathbf{x})$ qui, dans notre problème, s'écrit $\exp[\mathbf{s}^T R^{-1} \mathbf{x}]$. Toute fonction monotone de $L(\mathbf{x})$, comme le filtre adapté qui correspond au logarithme du RV, donne les mêmes performances, en termes de probabilité de détection et de fausse alarme, mais ne donne pas la même déflexion que $L(\mathbf{x})$. La déflexion de $L(\mathbf{x})$ est donnée dans [81], et sa valeur est $\exp[(\mathbf{s}^T R^{-1} \mathbf{s})]$. Ainsi (4.22) correspond exactement à la contribution des termes linéaire et quadratique de la déflexion maximale obtenue avec le RV.

4.2.4. Détection linéaire-quadratique en bruit blanc d'ordre quatre (BBO4)

4.2.4.1. *BBO4*

Considérons maintenant le cas particulier du BB04. Plus précisément, supposons que, sous H_0, les variables

x_i soient centrées, indépendantes, identiquement distribuées et de moment d'ordre k, $E[x_i^k]$, égal à m_k. Les expressions (4.14) à (4.16) s'écrivent alors

$$R(i,k) = m_2 \delta(i,k) \tag{4.23}$$

$$B(i,k,l) = m_3 \delta(i,k,l) \tag{4.24}$$

$$A(i,j,k,l) = (m_4 - 3m_2^2)\delta(i,j,k,l) + m_2^2[\delta(i,k)\delta(j,l) + \delta(i,l)\delta(j,k)] \tag{4.25}$$

où les symboles $\delta(.)$, extensions des delta de Kronecker, valent un si tous les indices sont égaux et zéro sinon.

On dira qu'un bruit est blanc d'ordre quatre si ses premiers moments sont donnés par (4.23), (4.24) et (4.25) et si aucune hypothèse particulière n'est exigée sur les moments d'ordres supérieurs à quatre.

4.2.4.2. *Filtre LQ optimal*

Le système LQ optimal pour la détection d'un signal déterministe **s** dans du BB04, est défini par (4.12), (4.13), (4.23), (4.24) et (4.25). Après quelques manipulations algébriques élémentaires des expressions précédemment citées et en choisissant M_o symétrique, on trouve que le système $[h_o, M_o]$ optimal est défini par

$$h_o(i) = (1/\Delta)[(m_4 - m_2^2)s_i - m_3\gamma_i] \tag{4.26}$$

$$M_o(i,i) = (1/\Delta)[(m_2\gamma_i - m_3 s_i)] \tag{4.27}$$

$$M_o(i,j) = (1/2m_2^2)s_i s_j \quad i \neq j \tag{4.28}$$

où

$$\gamma_i \triangleq s_i^2 \tag{4.29}$$

$$\Delta \triangleq (m_4 - m_2^2)m_2 - m_3^2. \tag{4.30}$$

La déflexion maximale associée, donnée par (4.17), s'écrit alors

$$d_2^o = (1/2m_2^2)\sum_{i\neq j}(s_i s_j)^2 + (1/m_2)\mathbf{s}^T\mathbf{s} + (1/m_2\Delta)[m_2\boldsymbol{\gamma} - m_3\mathbf{s}]^T[m_2\boldsymbol{\gamma} - m_3\mathbf{s}] \tag{4.31}$$

où $\boldsymbol{\gamma}$, est le vecteur de composantes γ_i. Appelons T_1, T_2 et T_3, les trois termes apparaissant successivement dans le deuxième membre de (4.31). Les termes T_1 et T_2 ne dépendent que des moments d'ordre deux du bruit alors que le terme T_3, plus intéressant, est le seul terme où m_3 et m_4 apparaissent. En outre, T_3 peut devenir infini si $\Delta = 0$, situation discutée plus loin.

4.2.4.3. *Cas gaussien*

Considérons tout d'abord le cas du BBO4 gaussien. Dans ce cas, $m_1 = m_3 = 0$, $m_4 = 3m_2^2$ et les équations (4.26) à (4.28) deviennent

$$h_o(i) = (1/m_2)s_i \tag{4.32}$$

$$M_o(i,j) = (1/2m_2^2)s_i s_j \tag{4.33}$$

et correspondent à des cas particuliers de (4.18) et (4.20).

La déflexion maximale (4.22) s'écrit alors

$$d_2^G = (1/2m_2^2)\sum_{i,j}(s_i s_j)^2 + (1/m_2)\mathbf{s}^T\mathbf{s} \tag{4.34}$$

4.2.4.4. *Moments d'ordre trois nuls*

Supposons maintenant que $m_3 = 0$, ce qui est le cas lorsque les variables x_i ont une distribution symétrique. Dans ce cas, les équations (4.12) et (4.13) sont découplées et la valeur maximale de la déflexion s'écrit

$$d_2^o = T_1 + T_2 + [1/(m_4 - m_2^2)]\,\gamma^T\gamma \tag{4.35}$$

où T_1 et T_2 sont définis dans (4.31). D'après l'inégalité de Schwarz, on a $m_4 \geqslant m_2^2$. Si $m_4 \to m_2^2$, d_2^o devient infinie, situation discutée ci-dessous. On peut, en outre, vérifier que $d_2^o > d_2^G$ si $m_4 < 3m_2^2$ et $d_2^o < d_2^G$ si $m_4 > 3m_2^2$.

4.2.4.5. *Détection singulière*

Discutons maintenant brièvement la possibilité de détection singulière en BBO4. Comme nous l'avons déjà mentionné plus haut, la situation de détection singulière apparaît lorsque d_2^o devient infinie, et nous constatons, d'après (4.31) que ceci ne peut se produire que si $\Delta = 0$, dans la mesure où T_1 et T_2 sont toujours finis. Ainsi, une condition nécessaire de détection singulière s'écrit

$$m_3^2 = (m_4 - m_2^2)m_2. \tag{4.36}$$

Il est intéressant de discuter la signification de cette condition. Dans ce but, considérons la matrice de corrélation du vecteur aléatoire de composantes 1, x, x^2. Supposant $m_1 = 0$, cette matrice est définie par

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & m_2 \\ 0 & m_2 & m_3 \\ m_2 & m_3 & m_4 \end{bmatrix} \tag{4.37}$$

et nous constatons que son déterminant est donné par

$$\mathrm{Det}(A) = (m_4 - m_2^2)m_2 - m_3^2. \tag{4.38}$$

Ce déterminant vaut donc zéro si (4.36) est satisfaite, ce qui signifie dans ce cas qu'il existe une combinaison linéaire déterministe entre les composantes 1, x et x^2, ce qui peut s'écrire

$$x^2 - \sigma x + \pi = 0 \quad \text{presque sûrement (p.s.)} \tag{4.39}$$

Utilisant les racines de cette équation, celle-ci peut s'écrire

$$(x - r_1)(x - r_2) = 0 \quad \text{(p.s.)} \tag{4.40}$$

ce qui signifie que la variable aléatoire x ne peut prendre que deux valeurs p.s. En calculant la variance de (4.39) et en l'identifiant à zéro, on trouve que σ et π peuvent s'écrire à partir des moments m_2 et m_3, ce qui donne finalement la condition suivante, valable pour toute composante x_i de x

$$x^2 - (m_3/m_2)x - m_2 = 0 \quad (p.s.) \tag{4.41}$$

Notons que cette équation possède deux racines réelles, de signes opposés. Ainsi, on en déduit que la variable x ne peut prendre que deux valeurs p.s. En particulier si $m_3 = 0$, les deux racines sont $\pm (m_2)^{1/2}$ et (4.36) est satisfaite. Pour obtenir $m_1 = m_3 = 0$, les probabilités des deux valeurs possibles doivent être égales à 1/2. Réciproquement, on peut montrer que toute variable aléatoire ne prenant que deux valeurs arbitraires de signes opposés et telles que $m_1 = 0$, satisfait (4.36) qui donc correspond à une propriété caractéristique de ce type de distribution.

4.3. DÉTECTION OPTIMALE PAR FILTRAGE DE VOLTERRA SPATIAL D'ORDRE DEUX

4.3.1. Position du problème

Considérons une antenne à BE et à N capteurs et appelons $\mathbf{x}$ le vecteur des enveloppes complexes des signaux, supposés stationnaires, reçus sur les capteurs. Certaines propriétés statistiques de $\mathbf{x}$ sont connues sous H_0 et H_1. En particulier, si on appelle π_s et $\mathbf{s}$, respectivement la puissance et le vecteur source (steering vector) du signal aléatoire centré à détecter, les deux premiers moments de $\mathbf{x}$ sous H_0 et H_1 sont donnés par

$$\text{(4.42)} \qquad E_0[\mathbf{x}] = \mathbf{0} \quad E_0[\mathbf{x}\mathbf{x}^\dagger] = R$$

$$\text{(4.43)} \qquad E_1[\mathbf{x}] = \mathbf{0} \quad E_1[\mathbf{x}\mathbf{x}^\dagger] = R + \pi_s \mathbf{s}\mathbf{s}^\dagger .$$

Il est bien connu [3] que le processeur spatial optimal pour la détection d'un signal aléatoire centré gaussien complexe circulaire dans du bruit de même nature, est purement quadratique et défini par

$$\text{(4.44)} \qquad y(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^\dagger \, \mathbf{w}_s \mathbf{w}_s^\dagger \, \mathbf{x}$$

où $\mathbf{w}_s$ correspond au filtre adapté spatial (FAS) défini par

$$\text{(4.45)} \qquad \mathbf{w}_s = (\pi_s / 1 + \pi_s \mathbf{s}^\dagger R^{-1} \mathbf{s})^{1/2} R^{-1} \mathbf{s} .$$

Ce résultat peut aussi être obtenu en utilisant le critère de déflexion [3-5].

Cependant, lorsque le bruit n'est pas gaussien, le filtre spatial BE optimal pour la détection est généralement non linéaire par rapport à $\mathbf{x}$ mais n'a plus aucune raison d'être directement déduit du FAS.

Dans ce paragraphe, on se limite aux structures non linéaires d'ordre deux et on présente le FVT complexe d'ordre deux, optimal pour la détection d'un signal aléatoire centré, à BE, stationnaire, noyé dans du bruit de même nature et indépendant du signal, sans l'hypothèse gaussienne. Ce problème est commenté dans les références [20] [49] et [82].

Utilisant les notations du paragraphe 2, on va ainsi chercher la statistique

$$\text{(4.46)} \qquad y(\mathbf{x}) = \mathbf{X}_{2,c}^\dagger \mathbf{H}_2$$

centrée sous H_0 et maximisant le contraste (3.8), où $\mathbf{X}_{2,c}$, de dimension $G(2N, 2) - 1$, contient les observations non redondantes d'ordre un et deux pur, reçues sur les capteurs.

D'après les résultats du paragraphe 2, l'expression (4.46) peut aussi s'écrire sous la forme (2.41) où $\mathbf{h} \in \mathbb{C}^{2N}$, M est une matrice carrée complexe $2N \times 2N$ et $\bar{R} \triangleq E_0[\mathcal{X}\mathcal{X}^\dagger]$. Le problème est alors de trouver la paire $[\mathbf{h}_o, M_o]$ telle que la statistique (2.41) associée maximise le contraste dans la famille des statistiques (2.41).

4.3.2. FVT complexe d'ordre deux optimal

D'après les résultats du paragraphe 3, le FVT spatial d'ordre deux optimal pour la détection au sens du contraste, est solution de l'équation (4.10) où $R_2 \triangleq E_0[\mathbf{X}_{2,c} \mathbf{X}_{2,c}^\dagger]$ et où S_2 est défini par (3.27) pour $p = 2$. La déflexion maximale associée est donnée par (4.11) où le transposé est remplacé par le transposé conjugué.

En utilisant, cette fois-ci, la formulation redondante du FVT complexe d'ordre deux, c'est-à-dire en n'imposant aucune structure particulière à la matrice M_o, le système (4.10) est équivalent au système suivant

$$\text{(4.47)} \qquad \sum_{k=1}^{2N} \bar{R}(i,k)\,\mathbf{h}_o(k) + \sum_{k,l=1}^{2N} \bar{B}(i,k,l)\, M_o(k,l) = 0$$

$$\text{(4.48)} \qquad \sum_{k=l}^{2N} \bar{B}'(i,j,k)\,\mathbf{h}_o(k) + \sum_{k,l=1}^{2N} \bar{A}(i,j,k,l)\, M_o(k,l) = \bar{R}_s(i,j)$$

où

$$\text{(4.49)} \qquad \bar{R}(i,k) \triangleq E_0[\mathcal{X}_i \mathcal{X}_k^*]$$

$$\text{(4.50)} \qquad \bar{B}(i,k,l) = \bar{B}'(k,l,i)^* \triangleq E_0[\mathcal{X}_i \mathcal{X}_k^* \mathcal{X}_l]$$

$$\text{(4.51)} \qquad \bar{A}(i,j,k,l) \triangleq E_0[\mathcal{X}_i \mathcal{X}_j^* \mathcal{X}_k^* \mathcal{X}_l] - \bar{R}(i,j) \,.\, \bar{R}^*(k,l)$$

$$\text{(4.52)} \qquad \bar{R}_s \triangleq E_1[\mathcal{X}\mathcal{X}^\dagger] - E_0[\mathcal{X}\mathcal{X}^\dagger] = \begin{bmatrix} \pi_s \mathbf{s}\mathbf{s}^\dagger & \gamma_s \mathbf{s}\mathbf{s}^T \\ \gamma_s^* \mathbf{s}^* \mathbf{s}^\dagger & \pi_s \mathbf{s}^* \mathbf{s}^T \end{bmatrix}$$

$$\text{(4.53)} \qquad \gamma_s \triangleq E[a_s^2]$$

et où a_s est l'enveloppe complexe du signal à détecter.

Utilisant (3.27) avec $p = 2$, (4.42) et (4.43), la déflexion maximale associée, définie dans le cas non redondant par (4.11), s'écrit, dans le cas redondant, sous la forme

$$\text{(4.54)} \qquad d_2^o = \mathbf{S}_2^\dagger \mathbf{H}_2^o = \mathrm{Tr}\,[\bar{R}_s M_o] .$$

D'autre part, il est montré dans l'annexe 3 que l'hypothèse de stationnarité des signaux capteurs engendre la propriété suivante, vraie sous H_0 et H_1 (cas aléatoire),

$$\text{(4.55)} \qquad E[x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_m}] = 0 \quad \forall m > 0$$

où les i_j sont des entiers satisfaisant $1 \leq i_j \leq N$. En particulier, on déduit de (4.55) que $\gamma_s = 0$. D'autre part, on montre également dans l'annexe 3 que l'ajout de l'hypothèse BE à l'hypothèse de stationnarité des signaux capteurs, entraîne que

$$E[x_{i_1}^* x_{i_2} \dots x_{i_n}] = 0 \quad \forall n > 2 \tag{4.56}$$

où $1 \leqslant i_j \leqslant N$. On déduit immédiatement de ces résultats que tous les moments d'ordre trois de l'enveloppe complexe d'un signal stationnaire BE sont nuls, ce qui entraîne que

$$\bar{B}(i,k,l) = \bar{B}'(k,l,i)^* = E_0[\mathcal{X}_i \mathcal{X}_k^* \mathcal{X}_l] = 0 \qquad 1 \leqslant i,k,l \leqslant 2N . \tag{4.57}$$

Utilisant (4.57) dans les équations (4.47) et (4.48), on constate que celles-ci sont découplées, ce qui signifie que l'antenne d'ordre deux optimale est obtenue à partir de deux antennes optimales respectivement d'ordre un et d'ordre deux pur (c'est-à-dire ne contenant que des termes d'ordre deux) calculées indépendamment et solutions des équations

$$\sum_{k=1}^{2N} \bar{R}(i,k)\,\mathbf{h}_o(k) = 0 \tag{4.58}$$

$$\sum_{k,l=1}^{2N} \bar{A}(i,j,k,l)\,M_o(k,l) = \bar{R}_s(i,j) . \tag{4.59}$$

L'équation (4.58) admet comme solution particulière $\mathbf{h}_o = 0$, ce qui montre que l'antenne d'ordre deux optimale pour la détection d'un signal aléatoire, centré, BE, stationnaire dans du bruit de même nature, est d'ordre deux pur, même dans le cas non gaussien.

Afin de faciliter le calcul de M_o, il est utile de décomposer celle-ci en sous matrices de dimension $(N \times N)$, comme cela est fait en (2.44). Dans ces conditions, en utilisant (4.49), (4.51), (4.52), (4.55) et (4.56), le système (4.59) prend la forme suivante

$$\sum_{k,l=1}^{N} [E_0[x_i x_j^* x_k^* x_l] - R(i,j)\,R(k,l)^*]\; M_1^o(k,l) = \pi_s s_i s_j^* \tag{4.60}$$

$$\sum_{k,l=1}^{N} E_0[x_i x_j x_k^* x_l^*]\,M_2^o(k,l) = \sum_{k,l=1}^{N} E_0[x_i^* x_j^* x_k x_l]\,M_3^o(k,l) = 0 . \tag{4.61}$$

Si on choisit M_2^o et M_3^o symétriques, l'équation (4.61) donne $M_2^o = M_3^o = 0$ et la statistique optimale (4.46) devient purement quadratique et s'écrit

$$y_o = \mathbf{x}^\dagger M_1^o \mathbf{x} - \mathrm{Tr}\,[RM_1^o] . \tag{4.62}$$

La déflexion maximale associée (4.54) prend alors la forme

$$d_2^o = \pi_s \mathbf{s}^\dagger M_1^o \mathbf{s} \tag{4.63}$$

où M_1^o est la solution du système (4.60).

4.3.3. Cas du bruit gaussien

Dans le cas particulier où le bruit est gaussien complexe, l'expression (4.55) montre qu'il est nécessairement circulaire. Appliquant alors à (4.60) la propriété bien connue des variables aléatoires gaussiennes complexes circulaires [83]

$$E[x_i x_j^* x_k^* x_l] = E[x_i x_j^*]\,E[x_k^* x_l] + E[x_i x_k^*]\,E[x_j^* x_l] \tag{4.64}$$

on déduit, après quelques manipulations de (4.60), que la matrice optimale M_1^o s'écrit ici

$$M_1^o \triangleq M_1^G = \pi_s R^{-1} \mathbf{s}\mathbf{s}^\dagger R^{-1} \tag{4.65}$$

ce qui correspond, à une constante près, au processeur quadratique (4.44)-(4.45) et ce qui permet de retrouver que, dans le cas gaussien, l'antenne optimale d'ordre deux est directement déduite du FAS $\mathbf{h}_s = R^{-1}\mathbf{s}$.

La déflexion maximale correspondante, définie par (4.63), s'écrit alors

$$d_2^G = (\pi_s \mathbf{s}^\dagger R^{-1} \mathbf{s})^2 \tag{4.66}$$

4.3.4. Détection optimale d'ordre deux en présence de brouilleurs

Étudions maintenant le cas particulier où le bruit environnant est composé de P (P < N) brouilleurs BE, stationnaires, indépendants et de bruit gaussien blanc spatialement, cas courant en pratique. Sous H_0, l'enveloppe complexe $\mathbf{x}$ des signaux capteurs peut alors s'écrire

$$\mathbf{x} = \mathbf{b} + \sum_{i=1}^{P} a_i \mathbf{J}_i \tag{4.67}$$

où $\mathbf{b}$ est le vecteur bruit, dont les composantes $b_i (1 \leqslant i \leqslant N)$ sont des variables i.i.d., centrées, gaussiennes et de puissance η_2. La quantité a_i, qui est l'enveloppe complexe du brouilleur i, est un processus aléatoire centré, de puissance π_i, indépendant des b_j $(1 \leqslant j \leqslant N)$ et des $a_k (k \neq i)$. Le vecteur $\mathbf{J}_i$ est le « vecteur source » ou « steering vector » associé au brouilleur i. Pour simplifier les calculs, on suppose que les capteurs sont omnidirectionnels, que la propagation est parfaite et que les brouilleurs sont orthogonaux deux à deux, ce qui entraîne que

$$\mathbf{J}_p^\dagger \mathbf{J}_p = N \tag{4.68}$$

$$\alpha_{pq} = \delta_{pq} \quad p,q = 1,2,\dots,P \tag{4.69}$$

où α_{pq} est le coefficient de corrélation complexe entre les brouilleurs p et q, défini par

$$\alpha_{pq} = (\mathbf{J}_p^\dagger \mathbf{J}_q)/[(\mathbf{J}_p^\dagger \mathbf{J}_p)]\,(\mathbf{J}_q^\dagger \mathbf{J}_q)^{1/2} . \tag{4.70}$$

Sous les hypothèses précédentes, on peut montrer [82] [87], après de longues et nombreuses manipulations de (4.60), que la matrice optimale M_1^o s'écrit

(4.71) $$M_1^o = M_1^G + \sum_{\gamma=1}^{P} \frac{\varepsilon_s \varepsilon_\gamma^2 |\alpha_{\gamma s}|^2 (2-\beta_\gamma)}{N\eta_2(\varepsilon_\gamma+1)^2 [(\varepsilon_\gamma+1)^2 + \varepsilon_\gamma^2(\beta_\gamma - 2)]} J_\gamma J_\gamma^\dagger$$

où la matrice M_1^G, optimale dans le cas gaussien et définie par (4.65), s'écrit [87]

(4.72) $$M_1^G = \pi_s \mathbf{h}_s \mathbf{h}_s^\dagger$$

avec

(4.73) $$\mathbf{h}_s \triangleq R^{-1}\mathbf{s} = \frac{1}{\eta_2}\left[\mathbf{s} - \sum_{\gamma=1}^{P} \frac{\varepsilon_\gamma}{\varepsilon_\gamma+1} \alpha_{\gamma s} \mathbf{J}_\gamma\right].$$

La quantité $\alpha_{\gamma s}$ représente le coefficient de corrélation complexe entre le brouilleur γ et le signal. Ce coefficient est défini par (4.70) où les vecteurs $\mathbf{J}_p$ et $\mathbf{J}_q$ sont remplacés respectivement par $\mathbf{J}_\gamma$ et $\mathbf{s}$. Les scalaires ε_s, ε_γ et β_γ sont définis respectivement par $\varepsilon_s \triangleq (N\pi_s/\eta_2)$, $\varepsilon_\gamma \triangleq (N\pi_\gamma/\eta_2)$ et $\beta_\gamma \triangleq (m_4^\gamma/\pi_\gamma^2)$ où $m_4^\gamma \triangleq E[|a_\gamma|^4]$.

L'expression (4.71) montre que lorsqu'il existe au moins un brouilleur non gaussien ($\exists\gamma/\beta_\gamma \neq 2$), la matrice optimale M_1^o n'est généralement pas directement déduite du FAS (4.73), sauf si les brouilleurs non gaussiens sont orthogonaux au signal ($\alpha_{\gamma s} = 0$ si $\beta_\gamma \neq 2$). Dans ce dernier cas, on peut montrer [84] que les brouilleurs non gaussiens sont annulés par le FAS qui, dès lors, devient optimal. D'autre part, pour des brouilleurs orthogonaux, on constate que les contributions non gaussiennes de chaque brouilleur s'additionnent dans la matrice optimale M_1^o. En reportant l'expression (4.71) dans (4.63), on trouve que la déflexion maximale associée s'écrit

(4.74) $$d_2^o = d_2^G + \sum_{\gamma=1}^{P} \frac{\varepsilon_s^2 \varepsilon_\gamma^2 |\alpha_{\gamma s}|^4 (2-\beta_\gamma)}{(\varepsilon_\gamma+1)^2 [(\varepsilon_\gamma+1)^2 + \varepsilon_\gamma^2(\beta_\gamma - 2)]} \triangleq \triangleq d_2^G + \Delta \triangleq d_2^o(\beta)$$

où d_2^G, correspondant à la déflexion maximale dans le cas gaussien, définie par (4.66), s'écrit

(4.75) $$d_2^G = \varepsilon_s^2\left[1 - \sum_{\gamma=1}^{P} \frac{\varepsilon_\gamma}{\varepsilon_\gamma+1} |\alpha_{\gamma s}|^2\right]^2.$$

Le premier terme du deuxième membre de l'expression (4.74) ne dépend que de la position relative et des statistiques d'ordre deux des sources. Le second terme de ce même membre est le plus intéressant car c'est le seul qui dépend des moments d'ordre quatre des brouilleurs. Ce terme s'annule lorsque les brouilleurs sont gaussiens ou orthogonaux au signal. Dans les autres cas, on a d'après l'inégalité de Schwarz, $\beta_\gamma \geq 1\ \forall\gamma$, et on peut montrer [82] [87] que d_2^o est une fonction décroissante de chaque coefficient β_γ. On obtient ainsi

(4.76) $$d_2^o > d_2^G \quad \text{si} \quad \Delta < 0$$

(4.77) $$d_2^o < d_2^G \quad \text{si} \quad \Delta > 0$$

et, en particulier, en ne prenant en compte que les brouilleurs non orthogonaux au signal, on en déduit que

(4.78) $$d_2^o > d_2^G \quad \text{si} \quad \beta_\gamma < 2, \quad 1 \leq \gamma \leq P$$

(4.79) $$d_2^o < d_2^G \quad \text{si} \quad \beta_\gamma > 2, \quad 1 \leq \gamma \leq P.$$

La valeur maximale de la déflexion d_2^o, pour des valeurs données de ε_s, ε_γ et $|\alpha_{\gamma s}|$, $1 \leq \gamma \leq P$, est alors obtenue lorsque $\beta_\gamma = 1\ \forall\gamma$ et s'écrit

(4.80) $$d_{2,\max/\beta}^o = d_2^G + \sum_{\gamma=1}^{P} \frac{\varepsilon_s^2 \varepsilon_\gamma^2 |\alpha_{\gamma s}|^4}{(\varepsilon_\gamma+1)^2 (2\varepsilon_\gamma+1)}.$$

L'expression (4.80) est toujours finie, ce qui signifie qu'en présence de brouilleurs orthogonaux et de bruit blanc spatial gaussien, il n'existe aucune possibilité de détection singulière. Notons enfin [82] [87] que, pour un scénario de brouilleurs et de signal donné et pour un nombre de capteurs fixé, la déflexion maximale d_2^o est une fonction décroissante de chaque ε_γ pourvu que $|\alpha_{\gamma s}|^2 \neq 0$. La valeur maximale de d_2^o est donc obtenue en absence de brouilleurs et vaut

(4.81) $$d_{2,\max}^o = \varepsilon_s^2$$

alors que la valeur minimale de d_2^o, en présence de P brouilleurs orthogonaux, est obtenue lorsque la puissance des brouilleurs est infinie, et s'écrit

(4.82) $$d_{2,\min/\varepsilon}^o = \varepsilon_s^2[1 - |\alpha_{Is}|^2]^2$$

où le coefficient α_{Is}, défini dans [85], est le coefficient de corrélation spatial entre le signal et les brouilleurs. Le carré de son module, défini pour des brouilleurs orthogonaux par

(4.83) $$|\alpha_{Is}|^2 = \sum_{\gamma=1}^{P} |\alpha_{\gamma s}|^2$$

correspond au carré du cosinus de l'angle formé par le vecteur s et l'espace engendré par les vecteurs J_γ, $1 \leq \gamma \leq P$. On constate ainsi que lorsque les P brouilleurs orthogonaux sont forts, la déflexion optimale d_2^o devient indépendante des statistiques de ceux-ci et est contrôlée par le coefficient de corrélation spatial α_{Is}.

4.3.5. Antenne d'ordre deux non adaptée aux moments d'ordre quatre des brouilleurs

4.3.5.1. *Position du problème*

Il a été montré précédemment que le calcul de l'antenne d'ordre deux optimale pour la détection au sens du contraste, nécessite la connaissance des statistiques d'ordre quatre du bruit. Malheureusement, dans la plupart des cas d'intérêt pratique, cette information n'est pas disponible a priori et une mauvaise adaptation de l'antenne d'ordre deux par rapport aux moments d'ordre quatre du bruit peu en résulter. C'est en particulier le cas lorsque l'on utilise une structure d'ordre deux déduite du FAS et optimale dans le cas gaussien, pour détecter un signal dans du bruit non gaussien, cas courant en pratique. Dans ce paragraphe, on étudie sur un exemple, l'effet sur les performances de l'antenne d'ordre deux, d'une mauvaise adaptation de l'antenne aux statistiques d'ordre quatre du bruit.

4.3.5.2. *Performances en sortie*

Considérons ainsi l'antenne purement quadratique optimale M_1^o, définie par (4.71), et notons la $M_{1,\beta}$. Cette antenne d'ordre deux est optimale pour la détection d'un signal aléatoire centré, stationnaire, BE, défini par (π_s, s), noyé dans du bruit composé de P brouilleurs orthogonaux, indépendants, définis par $(\pi_\gamma, \beta_\gamma, \mathbf{J}_\gamma)$, $1 \leq \gamma \leq P$, et de bruit gaussien blanc spatialement défini par η_2. Supposons maintenant que, sous H_0 et H_1, le bruit reçu sur les capteurs de l'antenne soit de même nature que le bruit défini précédemment mais où les brouilleurs sont cette fois définis par $(\pi_\gamma, \beta'_\gamma, \mathbf{J}_\gamma)$, $1 \leq \gamma \leq P$. L'antenne d'ordre deux définie par $M_{1,\beta}$ est dite non adaptée aux moments d'ordre quatre du bruit reçu sur les capteurs si et seulement si il existe au moins un scalaire γ tel que $\beta_\gamma \neq \beta'_\gamma$. Par exemple l'antenne quadratique M_1^G définie par (4.72)-(4.73) et optimale dans le cas gaussien $(\beta_\gamma = 2\ \forall\gamma)$, n'est pas adaptée aux moments d'ordre quatre des brouilleurs non gaussiens $(\beta_\gamma \neq 2)$ reçus par l'antenne.

Si on appelle $d_2(\beta, \beta')$ la déflexion obtenue en sortie de l'antenne quadratique $M_{1,\beta}$, recevant le bruit défini par $(\pi_\gamma, \beta'_\gamma, \mathbf{J}_\gamma)$, $1 \leq \gamma \leq P$, on obtient, après quelques calculs [86] [87], l'expression suivante

$$(4.84) \quad d_2(\beta, \beta') = d_2^o(\beta)\left[1 + (d_2^o(\beta))^{-1} \times \sum_{\gamma=1}^{P} \frac{\varepsilon_s^2\, \varepsilon_\gamma^2\, |\alpha_{\gamma s}|^4\, (\beta'_\gamma - \beta_\gamma)}{[(\varepsilon_\gamma + 1)^2 + \varepsilon_\gamma^2(\beta_\gamma - 2)]^2}\right]^{-1}$$

où $d_2^o(\beta)$ est définie par (4.74). En particulier, si on utilise l'antenne M_1^G, définie par (4.72) et (4.73), pour la détection d'un signal aléatoire en présence de brouilleurs non gaussiens, l'expression (4.84) s'écrit

$$(4.85) \quad d_2(2, \beta') = d_2^G\left[1 + (d_2^G)^{-1} \sum_{\gamma=1}^{P} \frac{\varepsilon_s^2\, \varepsilon_\gamma^2\, |\alpha_{\gamma s}|^4\, (\beta'_\gamma - 2)}{(\varepsilon_\gamma + 1)^4}\right]^{-1}$$

ce qui devient, pour des brouilleurs forts $(\varepsilon_\gamma \gg 1, \forall\gamma)$,

$$\boxed{\begin{aligned} &(4.86a) \quad d_2(2, \beta') \simeq d_2^G\left[1 + \sum_{\gamma=1}^{P} \frac{|\alpha_{\gamma s}|^4\, (\beta'_\gamma - 2)}{(1 - |\alpha_{1s}|^2)^2\, \varepsilon_\gamma^2}\right]^{-1} \\ &(4.86b) \quad \simeq d_2^G\left[1 + \sum_{\gamma=1}^{P} ([\mathrm{INR}]_{\gamma s})^2\, (\beta'_\gamma - 2)\right]^{-1} \end{aligned}}$$

où la quantité $[\mathrm{INR}]_{\gamma s}$, signifiant « interference to noise ratio », correspond au rapport des puissances de brouilleur γ et de bruit blanc en sortie du FAS $\mathbf{h}_s = R^{-1}\mathbf{s}$ [84], [87].

L'expression (4.84) montre que la déflexion $d_2(\beta, \beta')$ est une fonction décroissante des quantités $(\beta'_\gamma - \beta_\gamma)$ lorsque les scalaires $|\alpha_{\gamma s}|$ sont non nuls. Dans ce cas, si $(\beta'_\gamma - \beta_\gamma) < 0\ \forall\gamma$, on obtient $d_2(\beta, \beta') > d_2^o(\beta)$, et la déflexion en sortie de l'antenne $M_{1,\beta}$, désadaptée, est supérieure à la déflexion maximale à la sortie d'une antenne d'ordre deux, pour le bruit défini par $(\eta_2, \pi_\gamma, \beta_\gamma, \mathbf{J}_\gamma)$, $1 \leq \gamma \leq P$. Ce résultat montre qu'une désadaptation de l'antenne d'ordre deux par rapport aux moments d'ordre quatre du bruit n'engendre pas nécessairement des conséquences désastreuses sur les performances en sortie. En particulier on constate qu'il est possible d'utiliser l'antenne définie par (4.72) et (4.73), pour la détection d'un signal aléatoire centré en présence de brouilleurs sous-gaussiens $(\beta_\gamma < 2\ \forall\gamma)$, sans risquer la catastrophe.

Cependant lorsqu'il existe au moins un brouilleur γ non orthogonal au signal, tel que $\beta'_\gamma \gg \beta_\gamma$, alors la déflexion $d_2(\beta, \beta')$ devient inférieure à $d_2^o(\beta)$ et tend vers 0 lorsque β'_γ tend vers l'infini. Dans ce dernier cas, la désadaptation de l'antenne $M_{1,\beta}$ a des conséquences catastrophiques sur les performances en détection. En particulier, il peut être dangereux d'utiliser l'antenne M_1^G définie par (4.72) et (4.73), pour la détection d'un signal aléatoire centré, en présence de brouilleurs γ sur-gaussiens $(\beta_\gamma > 2)$, forts, non orthogonaux au signal et tels que $(\beta'_\gamma - 2) \gg ([\mathrm{INR}]_{\gamma s})^{-2}$.

Pour cette raison, et dans la mesure où les statistiques d'ordres supérieurs des brouilleurs sont généralement inconnues a priori, il est préférable d'estimer celles-ci au fur et à mesure du traitement par des procédures adaptatives telles que celles développées dans la référence [49] et discutées au § 5.

Notons cependant, d'après (4.84), que lorsqu'un brouilleur est orthogonal au signal, la désadaptation de l'antenne $M_{1,\beta}$ par rapport au moment d'ordre quatre de ce brouilleur, n'a aucune conséquence sur les performances en sortie. En particulier lorsque tous les brouilleurs sont orthogonaux au signal, toute antenne d'ordre deux désadaptée aux moments d'ordre quatre de ces brouilleurs, donne les performances de l'antenne d'ordre deux optimale et la déflexion maximale associée est donnée par (4.81).

4.3.5.3. *Perte de performances par rapport à l'optimalité*

Discutons enfin de la perte de performance obtenue lorsque l'on utilise l'antenne désadaptée $M_{1,\beta}$ au lieu de l'antenne d'ordre deux optimale $M_{1,\beta'}$, pour détecter un signal aléatoire centré dans le bruit défini par $(\eta_2, \pi_\gamma, \beta'_\gamma, \mathbf{J}_\gamma)$, $1 \leq \gamma \leq P$. Cette perte de performance, notée $p_2(\beta, \beta')$, est définie comme le rapport, en dB, des déflexions optimale $d_2^o(\beta')$ et sous-optimale $d_2(\beta, \beta')$, et s'écrit

$$(4.87) \quad p_2(\beta, \beta') \triangleq \frac{d_2^o(\beta')}{d_2(\beta, \beta')}.$$

Cette quantité, est bien sûr, supérieure ou égale à l'unité, l'égalité se produisant en particulier lorsque $\beta'_\gamma = \beta_\gamma$, $1 \leq \gamma \leq P$, c'est-à-dire lorsque l'antenne d'ordre deux est parfaitement adaptée aux statistiques d'ordre quatre du bruit.

Le calcul de $p_2(\beta, \beta')$ est généralement compliqué. Cependant, dans le cas d'un seul brouilleur, en faisant une hypothèse a priori gaussienne ($\beta_1 = 2$), on peut montrer [87] que la perte $p_2(2, \beta')$ s'écrit

(4.88) $$p_2(2, \beta') = 1 + \frac{(\beta_1' - 2)^2 \varepsilon_1^4 |\alpha_{1s}|^4 (1 - |\alpha_{1s}|^2) \times \times [1 + |\alpha_{1s}|^2 + \varepsilon_1(1 - |\alpha_{1s}|^2)]}{[1 + \varepsilon_1(1 - |\alpha_{1s}|^2)]^4 [(\varepsilon_1 + 1)^2 + \varepsilon_1^2(\beta_1' - 2)](\varepsilon_1 + 1)}$$

ce qui devient, dans le cas d'un brouilleur fort tel que $\varepsilon_1(1 - |\alpha_{1s}|^2) \gg 1$,

(4.89a) $$\boxed{p_2(2, \beta') \cong 1 + \frac{(\beta_1' - 2)^2}{(\beta_1' - 1)} \frac{|\alpha_{1s}|^4}{(1 - |\alpha_{1s}|^2)^2 \varepsilon_1^2}}$$

(4.89b) $$\boxed{\cong 1 + \frac{(\beta_1' - 2)^2}{(\beta_1' - 1)} ([\mathrm{INR}]_{1s})^2}$$

si $\beta_1' \neq 1$ et $|\alpha_{1s}| \neq 1$

et

(4.90) $$p_2(2, \beta') \cong 1 + \frac{(\beta_1' - 2)^2}{(\beta_1' - 1)} \frac{|\alpha_{1s}|^4}{(1 - |\alpha_{1s}|^2)^2 \, 2\, \varepsilon_1}$$

si $\beta_1' = 1$ et $|\alpha_{1s}| \neq 1$.

L'expression (4.88) montre que la perte de performance par rapport à l'optimalité est minimale, ou que l'antenne quadratique dyadique est optimale, si le brouilleur reçu est gaussien, orthogonal au signal ou si il se trouve dans la même direction que le signal. Dans ce dernier cas, l'antenne quadratique dyadique donne des performances aussi mauvaises que l'antenne d'ordre deux optimale. Dans tous les autres cas, la perte de performance est strictement supérieure à l'unité et l'antenne quadratique dyadique $\mathrm{M}_1^{\mathrm{G}}$ n'est plus optimale.

D'autre part, l'expression (4.89) montre que pour un brouilleur fort, la perte de performances $p_2(2, \beta')$ croît avec le INR du brouilleur en sortie du FAS et lorsque le caractère « sur-gaussien » ($\beta_1' - 2$) du brouilleur augmente. On déduit de ce résultat que l'intérêt d'utiliser une antenne optimale d'ordre deux, pour détecter un signal aléatoire en présence d'un brouilleur non gaussien, augmente lorsque le caractère sur-gaussien du brouilleur devient prononcé et lorsque la rejection de celui-ci par le FAS décroît. En outre, l'expression (4.89) montre que la perte des performances $p_2(2, \beta')$ devient importante dès que la quantité ($\beta_1' - 2$) devient très grande devant $([\mathrm{INR}]_{1s})^{-2}$. Ce résultat, déjà aperçu au paragraphe précédent, signifie que meilleure est la rejection du brouilleur par le FAS, c'est-à-dire plus le brouilleur fort est fort et près d'un zéro du diagramme de rayonnement de l'antenne, et plus le caractère sur-gaussien de ce brouilleur doit être prononcé pour que celui-ci rende l'antenne quadratique dyadique $\mathrm{M}_1^{\mathrm{G}}$ complètement sous-optimale et inefficace. Une conséquence immédiate de ces résultats est que l'intérêt d'utiliser une antenne optimale d'ordre deux, en présence de brouilleurs non gaussiens, est plus grand pour un brouillage de lobe principal que pour un brouillage de lobe secondaire.

D'autre part, d'autres calculs de perte de performance par rapport à l'optimalité ont été effectués dans les références [86] et [87] pour d'autres environnements de bruit et en particulier pour un BBO4. Ces calculs montrent, dans la plupart des cas, l'intérêt d'optimiser une antenne d'ordre deux par rapport aux moments d'ordre supérieur des données.

Ainsi, bien que la perte de performance par rapport à l'optimalité puisse être plus ou moins importante selon la nature et les statistiques de l'environnement de bruit, il est toujours préférable, dans le but d'éviter la catastrophe et dans la mesure où les statistiques du bruit sont généralement inconnues a priori, d'utiliser l'antenne d'ordre deux optimale en estimant les statistiques d'ordre quatre du bruit, par des procédures adaptatives décrites dans le paragraphe 5.

5. Le Filtrage de Volterra transverse adaptatif

Le filtrage de Volterra optimal, temporel ou spatial, pour la détection et l'estimation, a été présenté dans les paragraphes 3 et 4 sans l'hypothèse gaussienne. Dans tous les cas, il a été montré que le calcul du FVT optimal d'ordre p, $\mathbf{H}_p^o$, nécessite la connaissance a priori des statistiques des processus invoqués jusqu'au degré $2p$. Cependant, dans des situations pratiques, cette information a priori n'est pas connue et les statistiques des processus jusqu'au degré $2p$ doivent être estimées par des procédures adaptatives.

Très récemment, de telles procédures ont été développées pour des FVT d'ordre deux, aussi bien pour des problèmes d'estimation [51] que de détection [49]. Les algorithmes présentés dans [51] sont des extensions, au cas LQ, des algorithmes bien connus du gradient stochastique (LMS) et des moindres carrés récursifs (RLS) alors que dans [49], ont été développés des algorithmes sous contraintes pour le traitement spatial. Ces derniers sont des extensions à l'ordre deux des algorithmes des moindres carrés sous contrainte (Sample Matrix Inversion), des moindres carrés récursifs sous contrainte (Recursive Matrix Inversion) et du gradient stochastique sous contrainte (Frost), utilisés en filtrage linéaire d'antenne [3].

Notre propos n'est pas, ici, de présenter et de discuter dans le détail chacun de ces algorithmes adaptatifs, mais plutôt de décrire, à titre d'exemples, un algorithme pour chacun des deux problèmes évoqués, en insistant particulièrement sur l'optimalité ou la sous-optimalité, selon le cas, d'une stratégie d'adaptation couplée ou découplée.

5.1. ALGORITHME DU GRADIENT STOCHASTIQUE D'ORDRE P : LE P-LMS

5.1.1. Algorithme du gradient déterministe d'ordre p

5.1.1.1. *Cas général*

Dans ce paragraphe, on présente une procédure itérative déterministe, basée sur la connaissance des statistiques des différents processus invoqués, pour trouver le FVT optimal de degré p, $\mathbf{H}_p^o$, minimisant le critère $C_F(z)$ donné par (3.4) où $S(\mathbf{x}) = \mathbf{X}_{p,c}^{\dagger}\,\mathbf{H}_p$. Bien que d'intérêt purement théorique, cette étape est nécessaire pour bien comprendre la version implémentable, basée sur des estimées des moments des processus, dans la mesure où cette version n'est qu'une approximation stochastique de la version déterministe.

Avec notre formalisme, la variance de l'erreur d'estimation d'un processus centré z à partir de la statistique (2.33), est encore une fonction quadratique du paramètre inconnu $\mathbf{H}_p$, comme dans le cas linéaire. Ainsi, qu'il soit redondant ou non, le vecteur optimal $\mathbf{H}_p^o$ correspond au vecteur qui annule le gradient du coût $C_F(z)$.

On définit alors l'algorithme du gradient déterministe de degré p, par l'équation récursive suivante

$$(5.1)\qquad \mathbf{H}_p(k) = \mathbf{H}_p(k-1) - \frac{1}{2}\,\mu\nabla_P\, C_F(z)\Big|_{k-1}$$

où le gradient du coût $C_F(z)$ par rapport au vecteur $\mathrm{H}_p(k-1)$ s'écrit

$$(5.2)\qquad \nabla_P\, C_F(z)\big|_{k-1} = -2(\mathbf{r}_{z,p} - \mathrm{R}_p\,\mathbf{H}_p(k-1))$$

et où le vecteur $\mathbf{r}_{z,p}$ et la matrice $\mathbf{R}_p$ sont définis respectivement par (3.21) et (2.46). Le pas μ est le pas d'adaptation de l'algorithme.

5.1.1.2. *Cas particulier de l'ordre deux*

Dans le cas particulier du FVT optimal de degré deux ($p = 2$), si les moments d'ordre trois de l'observation sont nuls, la procédure (5.1) peut être décomposée en deux sous-procédures, l'une purement d'ordre un et l'autre purement d'ordre deux, et on obtient, en utilisant les notations du § 2,

$$(5.3)\qquad \begin{bmatrix}\mathbf{h}_1(k)\\ \mathbf{h}_2(k)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathbf{h}_1(k-1)\\ \mathbf{h}_2(k-1)\end{bmatrix} - \frac{1}{2}\,\mu\begin{bmatrix}\nabla_1\, c_1(z)\\ \nabla_2\, c_2(z)\end{bmatrix}\Bigg|_{k-1}$$

où $\nabla_i\, c_i(z)$ $(i = 1, 2)$ correspond au gradient du coût $c_i(z) \triangleq \mathrm{E}[|z - \mathbf{x}_{i,c}^{\dagger}\,\mathbf{h}_i|^2]$ par rapport à $\mathbf{h}_i$. Ce gradient s'écrit

$$(5.4)\qquad \nabla_i\, c_i(z)\big|_{k-1} = -2(\mathbf{r}_{z,2}^i - \mathbf{R}_{i,i}\,\mathbf{h}_i(k-1))$$

où $\mathbf{R}_{i,i} \triangleq \mathrm{E}[\mathbf{x}_{i,c}\,\mathbf{x}_{i,c}^{\dagger}]$ et $\mathbf{r}_{z,2}^i \triangleq \mathrm{E}[z\mathbf{x}_{i,c}]$.

Ce résultat, très important, montre que la valeur des moments d'ordre trois peut engendrer différents schémas d'adaptation. Si les moments d'ordre trois sont non nuls, il est nécessaire d'optimiser tout le vecteur d'ordre deux à cause du couplage entre les termes d'ordre un purs et d'ordre deux purs. Par contre, si ce n'est pas le cas, il est possible d'optimiser séparément les termes d'ordre un purs et d'ordre deux purs de $\mathbf{H}_2$ et d'utiliser deux pas d'adaptation séparés μ_1 et μ_2. En outre, on déduit de (5.3) que ces deux dernières optimisations sont basées sur le coût, respectivement d'un filtre d'ordre un pur et d'un filtre d'ordre deux pur.

5.1.2. Algorithme du gradient stochastique d'ordre *p*

5.1.2.1. *Cas général*

L'idée de ce paragraphe est d'introduire une procédure itérative, basée sur les estimées des propriétés statistiques du processus observé, pour le calcul du FVT optimal. La première idée qui vient à l'esprit est d'introduire une estimée de la procédure déterministe (5.1) valable quel que soit p ou des procédures décrites par (5.3), valables pour $p = 2$, selon, dans ce dernier cas, la valeur des moments d'ordre trois de l'observation. Le vrai gradient du coût $C_F(z)$ par rapport à $\mathbf{H}_p(k-1)$ défini par (5.2), peut s'écrire

$$(5.5)\qquad \nabla_P\, C_F(z)\big|_{k-1} = -2\,\mathrm{E}[\mathbf{X}_{p,c}(k)(z(k) - \mathbf{X}_{p,c}^{\dagger}(k)\,\mathbf{H}_p(k-1))]$$

et en référence avec le cas linéaire, l'estimée instantanée de ce gradient s'écrit

$$(5.6)\qquad \hat{\nabla}_P\, C_F(z)\big|_{k-1} = -2\,\mathbf{X}_{p,c}(k)\,(z(k) - \mathbf{X}_{p,c}^{\dagger}(k)\,\mathbf{H}_p(k-1))\,.$$

Utilisant l'expression (5.6), on définit l'algorithme du gradient stochastique d'ordre p par la procédure itérative suivante :

$$(5.7)\qquad \hat{\mathbf{H}}_P(k) = \hat{\mathbf{H}}_p(k-1) + \mu\,\mathbf{X}_{p,c}(k)\,e_p(k|k-1)$$

où $e_p(k|k-1)$ correspond à l'erreur d'estimation suivante

$$(5.8)\qquad e_p(k|k-1) = z(k) - \mathbf{X}_{p,c}^{\dagger}(k)\,\mathbf{H}_p(k-1)\,.$$

5.1.2.2. *Cas particulier de l'ordre deux*

Dans le cas de l'ordre deux ($p = 2$), on sait que lorsque les moments d'ordre trois de l'observation sont nuls, il devient non justifié d'utiliser un algorithme couplé et il est préférable d'utiliser en parallèle, deux algorithmes différents, l'un avec $\mathbf{h}_1$ et $\mathbf{x}_{1,c}$ et l'autre avec $\mathbf{h}_2$ et $\mathbf{x}_{2,c}$ à la place de $\mathbf{H}_2$ et $\mathbf{X}_{2,c}$ respectivement, et deux pas d'adaptation différents. La procédure découplée permet, dans ce cas, une convergence plus rapide avec une complexité plus faible. Cependant, lorsque les moments d'ordre trois de l'observation sont non nuls, la procédure découplée ne permet pas la convergence vers le filtre optimal et il devient impératif, dans ce cas, d'utiliser un algorithme couplé.

5.2. ALGORITHME DES MOINDRES CARRÉS RÉCURSIFS D'ORDRE p SOUS CONTRAINTE

Dans ce paragraphe, on présente une procédure itérative basée sur les estimées des statistiques de l'observation sous H_0, pour le calcul du FVT non redondant, optimal pour la détection, défini par (3.26). Le vecteur $\mathbf{S}_p$ est supposé connu. Le problème se ramène ainsi à l'estimation de l'opérateur R_p^{-1} dont l'inverse est défini par (2.46).

En référence avec le cas linéaire, lorsque l'adaptation se fait sous H_0, un estimateur non biaisé de R_p, à partir de k observations, est donné par

$$(5.9) \quad \widehat{R}_p(k) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} (X_p(i) - \widehat{m}_p(k))(X_p(i) - \widehat{m}_p(k))^\dagger$$

où $X_p(i)$ est la valeur d'une réalisation de X_p à l'instant i et où $\widehat{m}_p(k)$ est une estimation de la moyenne m_p à l'instant k. Cette estimation de moyenne est donnée ici, pour des processus ergodiques, par

$$(5.10) \qquad \widehat{m}_p(k) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} X_p(i) .$$

En combinant (5.9) et (5.10), on peut montrer que l'on obtient la relation récursive suivante

$$(5.11) \quad \widehat{R}_p(k) = \frac{k-1}{k} \widehat{R}_p(k-1) + \\ + \frac{1}{k-1} (X_p(k) - \widehat{m}_p(k))(X_p(k) - \widehat{m}_p(k))^\dagger .$$

Dans le but d'éviter l'inversion de $\widehat{R}_p(k)$, on peut chercher à estimer l'inverse de $\widehat{R}_p(k)$ récursivement. L'algorithme associé, appelé des moindres carrés récursifs d'ordre p sous contrainte, est obtenu en appliquant l'identité de Woodbury à (5.11). Il peut se résumer comme suit

(5.12) Initialisation de l'algorithme :

$$\widehat{R}_p^{-1}(0) = \mu_0 I, \ \mu_0 \gg 1$$

(5.13) Estimation de m_p par (5.10)

(5.14) Centrage de $X_p(k) : X_{p,c}(k) = X_p(k) - \widehat{m}_p(k)$

(5.15) Propagation de l'inverse de (5.11)

$$\widehat{R}_p^{-1}(k) = \frac{k-1}{k} \left\{ \widehat{R}_p^{-1}(k-1) - \\ - \frac{\widehat{R}_p^{-1}(k-1)\, X_{p,c}(k)\, X_{p,c}^\dagger(k)\, \widehat{R}_p^{-1}(k-1)}{(k-1)^2/k + X_{p,c}^\dagger(k)\, \widehat{R}_p^{-1}(k-1)\, X_{p,c}(k)} \right\}$$

(5.16) Estimation de $H_p^o : \widehat{H}_p^o(k) = \widehat{R}_p^{-1}(k)\, S_p$.

Dans le cas particulier du traitement spatial BE d'ordre deux, les moments d'ordre trois de l'observation sous H_0 sont nuls et il est préférable d'utiliser deux algorithmes découplés, l'un d'ordre un pur et l'autre d'ordre deux pur, pour l'estimation du filtre d'ordre deux optimal.

6. Conclusion

Comme il a été constaté tout au long de l'article, l'intérêt essentiel d'utiliser des filtres non linéaires de Volterra, FV, dans des problèmes d'estimation et de détection, spatiale ou temporelle, fondés sur des statistiques d'ordre supérieur, vient de la linéarité par rapport aux paramètres que conserve ce type particulier de filtrage.

Cette caractéristique a été exploitée en représentant les sorties instantanées de tels filtres comme un produit scalaire spécifique de vecteurs dont la taille croît exponentiellement avec l'ordre. Pour les mêmes raisons, la variance de ces sorties dépend d'une « matrice de covariance » fonction des moments de l'entrée jusqu'à l'ordre $2p$, et que l'on sait écrire explicitement.

Le formalisme ainsi introduit présente toutefois quelques nuances selon que les données sont réelles ou complexes. L'extension immédiate du formalisme réel, déboucherait, en effet, sur l'impossibilité de représenter certains filtres non linéaires connus du filtrage d'antenne.

Une formulation unique, fondée sur ce cadre particulier, de la maximisation du contraste et de l'estimation en moyenne quadratique d'un processus inconnu, à l'aide de statistiques de Volterra, a été proposée. Cette formulation est possible dans la mesure où il a été prouvé, même pour des données complexes, que la valeur maximale du contraste à l'intérieur d'un espace vectoriel de statistiques quelconques est atteint par la projection statistique du rapport de vraisemblance centré sur cet espace. L'apparente simplicité de formulation, inhérente à la linéarité en paramètre, ne doit pas, pour autant, occulter les difficultés liées à la résolution des équations normales généralisées dont le FV optimal est solution.

Ce point crucial a été mis en avant clairement lors de la détermination explicite de quelques solutions dans des situations empruntées à la prédiction linéaire quadratique ou bien au filtrage d'antenne BF d'ordre deux.

L'intérêt d'optimiser, en dehors de l'hypothèse gaussienne, une antenne par rapport aux moments d'ordre supérieur a été illustré par des calculs complets de pertes, exprimées en termes de diminution de la déflexion, en sortie d'une antenne non adaptée aux moments d'ordre quatre des données.

La plupart des algorithmes adaptatifs « classiques » dans le cas linéaire, avec ou sans contrainte, ont été étendus au FVT d'ordre p, pour des données réelles et complexes. Quelques précautions doivent être prises notamment, à l'ordre deux, concernant le couplage éventuel de sous algorithmes dû à l'existence de moments d'ordre trois.

ANNEXE 1

REPRÉSENTATION DU NOYAU D'ORDRE *m* D'UN FILTRE DE VOLTERRA REDONDANT, A L'AIDE DU PRODUIT DE KRONECKER

Le premier paragraphe de cette annexe contient une présentation élémentaire du produit de Kronecker. Le lecteur intéressé par des approfondissements est invité à consulter la référence [75]. On montre ensuite, dans le second paragraphe, comment tout noyau observation d'un filtre de Volterra redondant s'écrit explicitement sous forme de produits de Kronecker multiples. A ce titre, la représentation qui en découle ne se substitue pas à celle du paragraphe 2 de l'article, mais vient plutôt la compléter.

A1.1. Le produit de Kronecker

A1.1.1. DÉFINITION

Soit A une matrice à m lignes et n colonnes et B une matrice à r lignes et q colonnes, on définit la matrice *produit de Kronecker* de A et B par la matrice

(A1.1) $$\mathrm{K} = \mathrm{A} \otimes \mathrm{B}$$

où K est la matrice bloc à mr lignes et nq colonnes, caractérisée donc par quatre indices, telle que le bloc (i, j), où $1 \leqslant i \leqslant m$, $1 \leqslant j \leqslant n$, s'écrive

(A1.2) $$[\mathrm{K}](i, j) = a_{ij}\, \mathrm{B}$$

où a_{ij} est le terme courant de la matrice A. En d'autres termes, on multiplie tous les termes de la matrice A par la matrice B elle-même. Au vu de (A1.2), on constate que le produit de Kronecker n'est pas commutatif, à une matrice de permutation près néanmoins [75].

A1.1.2. PROPRIÉTÉS FONDAMENTALES DU PRODUIT DE KRONECKER

Bon nombre des propriétés du produit de Kronecker ont trait aux différents types de dérivation d'expression scalaires ou matricielles par rapport à une matrice ou un vecteur, qui peuvent s'appliquer, par exemple, à la recherche d'estimateurs au sens du maximum de vraisemblance [75]. On se contente de citer, ici, quelques propriétés susceptibles de simplifier beaucoup de calculs, et qui se justifient directement à partir de la définition (A1.2)

(A1.3) $$\mathrm{A} \otimes (\mathrm{B} \otimes \mathrm{C}) = (\mathrm{A} \otimes \mathrm{B}) \otimes \mathrm{C}$$

(A1.4) $$(\mathrm{A} + \mathrm{B}) \otimes (\mathrm{C} + \mathrm{D}) = (\mathrm{A} \otimes \mathrm{C}) + (\mathrm{B} \otimes \mathrm{C}) + (\mathrm{A} \otimes \mathrm{D}) + (\mathrm{B} \otimes \mathrm{D})$$

(A1.5) $$(\mathrm{A} \otimes \mathrm{B})(\mathrm{C} \otimes \mathrm{D}) = (\mathrm{AC} \otimes \mathrm{BD})$$

(A1.6) $$(\mathrm{A} \otimes \mathrm{B}) = 0 \quad \text{ssi} \quad (\mathrm{A} = 0 \quad \text{ou} \quad \mathrm{B} = 0)\,.$$

A1.2. Représentation du noyau observation d'ordre *m* d'un FVT redondant, à l'aide du produit de Kronecker

Le produit de Kronecker permet de donner la forme explicite d'un noyau observation de degré m pur d'un FVT redondant, voir § 2. On trouve en effet, au regard des définitions du § 2 de l'article et d'après (A1.2), que, pour un FVT réel redondant, le noyau observation de degré m pur s'écrit

(A1.7) $$\mathbf{x}_m = [\mathbf{x} \otimes \mathbf{x} \otimes \mathbf{x} \otimes \dots \otimes \mathbf{x}]$$

où $\mathbf{x}$ est le vecteur observation et où le nombre de produits de Kronecker est égal à $m - 1$.

Dans le cas complexe, on sait alors qu'il faut utiliser le vecteur $\mathscr{X}$, voir (2.30). On définit, dans ces conditions, le vecteur observation complexe relatif au noyau complexe d'ordre m du FVT redondant par

(A1.8) $$\mathbf{x}_m = [\mathscr{X} \otimes \mathscr{X} \otimes \mathscr{X} \otimes \dots \otimes \mathscr{X}]\,.$$

ANNEXE 2

RELATION DE RÉCURRENCE LIANT LES VARIANCES D'ERREUR D'ESTIMATION AUX ORDRES P – 1 ET P

On se propose, dans cette annexe, d'élaborer une relation de récurrence reliant les variances d'erreur d'estimation, aux ordres $p - 1$ et p, d'une variable aléatoire centrée z, par FVT optimal, réel ou complexe.

Cette relation permet de quantifier le gain en performance obtenu en incrémentant d'une unité l'ordre ou le degré de non-linéarité du FVT optimal.

La démonstration ci-dessous est une extension de celle présentée dans [28].

On rappelle que $\mathrm{H_F}$ est défini, pour des FVT complexes d'ordre p, par

(A2.1) $$\mathrm{H_F} = \{\mathrm{S}(\mathbf{x}) = \mathbf{X}_{p,c}^{\dagger}\, \mathbf{H}_p / \mathrm{S}(\mathbf{x}) \in \mathrm{L}^2 \quad \text{et} \quad \mathbf{H}_p \in \mathbb{C}^{\mathrm{N}}[p]\} \triangleq \mathrm{H_F}(p)\,.$$

Soit $\tilde{\mathrm{H}}_{\mathrm{F}}(p)$, le sous-espace de Hilbert de $\mathrm{H}_{\mathrm{F}}(p)$, défini par

(A2.2) $$\tilde{\mathrm{H}}_{\mathrm{F}}(p) = \\ = \left\{\mathrm{S}(\mathbf{x}) = \mathbf{X}_{p,c}^{\dagger}\, \tilde{\mathbf{H}}_p / \mathrm{S}(\mathbf{x}) \in \mathrm{L}^2 \quad \text{et} \quad \tilde{\mathbf{H}}_p \in \tilde{\mathbb{C}}^{\mathrm{N}}[p]\right\}$$

où $\tilde{\mathbb{C}}^{\mathrm{N}}[p]$, correspondant à l'espace vectoriel des filtres de $\mathbb{C}^{\mathrm{N}}[p]$ dont les $g(2\,\mathrm{N}, p)$ dernières composantes sont nulles, est défini par

(A2.3) $$\tilde{\mathbb{C}}^{\mathrm{N}}[p] = \left\{\tilde{\mathbf{H}}_p = [\mathbf{H}_{p-1}^{\mathrm{T}}, \mathbf{0}_p^{p\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}} / \tilde{\mathbf{H}}_p \in \\ \in \mathbb{C}^{\mathrm{N}}[p] \quad \text{et} \quad \mathbf{H}_{p-1} \in \mathbb{C}^{\mathrm{N}}[p-1]\right\}$$

où 0_p^p représente le vecteur nul de dimension $g(2\,\mathrm{N}, p)$. On vérifie très aisément que $\tilde{\mathrm{H}}_{\mathrm{F}}(p)$ n'est pas autre chose qu'une écriture alternative de $\mathrm{H}_{\mathrm{F}}(p-1)$, dont on constatera qu'elle est à la base de la démonstration, dans la mesure où elle établit un lien très étroit entre les filtrages de Volterra transverses complexes d'ordre $p-1$ et p.

Si $\mathrm{S}_o^{p-1}(\mathbf{x}) \triangleq \mathbf{X}_{p-1,c}^{\dagger}\, \mathbf{H}_{p-1}^o$ représente la statistique de $\mathrm{H}_{\mathrm{F}}(p-1)$ optimale pour le problème de l'EMQ de z, alors la statistique définie par $\tilde{\mathrm{S}}_o^p(\mathbf{x}) \triangleq \mathbf{X}_{p,c}^{\dagger}\, \tilde{\mathbf{H}}_p^o$ où

(A2.4) $$\tilde{\mathbf{H}}_p^o \triangleq [\mathbf{H}_{p-1}^{o\mathrm{T}}, \mathbf{0}_p^{p\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$$

est la statistique de $\tilde{\mathrm{H}}_{\mathrm{F}}(p)$ optimale pour le même problème. Dans ces conditions, le principe d'orthogonalité permet d'écrire

(A2.5) $$\tilde{\mathbf{H}}_p^{\dagger}\, \mathrm{E}[\mathbf{X}_{p,c}(z - \mathbf{X}_{p,c}^{\dagger}\, \tilde{\mathbf{H}}_p^o)] = 0 \quad \forall\, \tilde{\mathbf{H}}_p \in \tilde{\mathbb{C}}^{\mathrm{N}}[p]$$

ce qui conduit à l'identité

(A2.6) $$\tilde{\mathbf{H}}_p^{\dagger}\, [\mathbf{r}_{z,p} - \mathrm{R}_p\, \tilde{\mathbf{H}}_p^o] = 0 \quad \forall\, \tilde{\mathbf{H}}_p \in \tilde{\mathbb{C}}^{\mathrm{N}}[p]\,.$$

Cette identité montre que le vecteur $[\mathbf{r}_{z,p} - \mathrm{R}_p\, \tilde{\mathbf{H}}_p^o]$, orthogonal à l'espace $\tilde{\mathbb{C}}^{\mathrm{N}}[p]$, est nécessairement de la forme

(A2.7) $$\mathbf{r}_{z,p} - \mathrm{R}_p\, \tilde{\mathbf{H}}_p^o = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{p-1} \\ \mathbf{f}_p^p \end{bmatrix}$$

où $\mathbf{0}_{p-1}$ est le vecteur nul de $\mathbb{C}^{\mathrm{N}}[p-1]$ et où $\mathbf{f}_p^p$ est un vecteur non nul de dimension $g(2\,\mathrm{N}, p)$. De (A2.7), on déduit immédiatement que

(A2.8) $$\tilde{\mathbf{H}}_p^o = \mathbf{H}_p^o - \mathrm{R}_p^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{p-1} \\ \mathbf{f}_p^p \end{bmatrix}$$

et on obtient

(A2.9) $$\mathbf{f}_p^p = \mathrm{C}_p^{-1}\, \mathbf{h}_p^o$$

où $\mathbf{h}_p^o$ est le vecteur, de dimension $g(2\,\mathrm{N}, p)$, des noyaux de degré p du FVT optimal $\mathbf{H}_p^o$ (2.9) et où C_p est la sous matrice, de dimension $g(2\,\mathrm{N}, p) \times g(2\,\mathrm{N}, p)$, « de type p » de la version partitionnée de R_p^{-1}.

D'autre part, d'après (3.23), on peut écrire

(A2.10) $$\sigma_{z,p-1}^2 = \sigma_z^2 - \mathbf{r}_{z,p-1}^{\dagger}\, \mathbf{H}_{p-1}^o$$

et utilisant (A2.4), cette expression prend la forme suivante

(A2.11) $$\sigma_{z,p-1}^2 = \sigma_z^2 - \mathbf{r}_{z,p}^{\dagger}\, \tilde{\mathbf{H}}_p^o\,.$$

Dès lors, introduisant (A2.8) dans (A2.12), on obtient

(A2.12) $$\sigma_{z,p-1}^2 = \sigma_{z,p}^2 - \mathbf{H}_p^{o\dagger} \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{p-1} \\ \mathbf{f}_p^p \end{bmatrix}$$

ce qui s'écrit encore, d'après (A2.9),

(A2.13) $$\sigma_{z,p-1}^2 = \sigma_{z,p}^2 + \mathbf{h}_p^{o\dagger}\, \mathrm{C}_p^{-1}\, \mathbf{h}_p^o\,.$$

ANNEXE 3

On montre, dans cette annexe, que si le processus vectoriel $\mathbf{x}(t)$, de composantes $x_i(t)$, $1 \leqslant i \leqslant \mathrm{N}$, est l'enveloppe complexe d'un processus vectoriel réel, stationnaire, bande étroite $s(t)$, alors les propriétés (4.55) et (4.56) sont vérifiées.

Dans ce but, considérons le processus $\mathbf{s}(t)$ dont les composantes $s_i(t)$ ont $z_i(t)$ comme signal analytique et $x_i(t)$ comme enveloppe complexe. On peut ainsi écrire

(A3.1) $$s_i(t) = \mathrm{Re}\,[z_i(t)] = \mathrm{Re}\,[x_i(t)\exp(j\,2\,\pi\nu_0\,t)] \quad 1 \leqslant i \leqslant \mathrm{N}$$

où ν_0 est la fréquence porteuse. Si on note $\mathrm{S}_i(\nu)$ et $\mathrm{Z}_i(\nu)$ les représentations spectrales [88] respectivement des processus $s_i(t)$ et $z_i(t)$, on peut écrire

(A3.2) $$s_i(t) = \int \exp(j\,2\,\pi\nu t)\, d\mathrm{S}_i(\nu) \qquad 1 \leqslant i \leqslant \mathrm{N}$$

(A3.3) $$z_i(t) = \int \exp(j\,2\,\pi\nu t)\, d\mathrm{Z}_i(\nu) \qquad 1 \leqslant i \leqslant \mathrm{N}$$

D'autre part, comme $z_i(t)$ est la sortie du filtre analytique $g(t)$ dont l'entrée est $s_i(t)$, on obtient

(A3.4) $$dZ_i(\nu) = G(\nu)\, dS_i(\nu) \qquad 1 \leq i \leq N$$

où $G(\nu)$, transformée de Fourier de $g(t)$, est définie par

(A3.5) $$G(\nu) = 2\, U(\nu)$$

où $U(\nu)$, la fonction de Heaviside, vaut 1 si $\nu \geq 0$ et zéro sinon.
Associons à chaque composante h_i d'un vecteur arbitraire $\mathbf{h}$ de $\mathbb{C}^N$, la quantité $h_i^{[i]}$ à valeurs dans $\{h_i, h_i^*\}$. On déduit alors de (A3.3) que

(A3.6) $$E\left[z_{i_1}^{[i_1]}(t_1)\, z_{i_2}^{[i_2]}(t_2) \cdots z_{i_m}^{[i_m]}(t_m)\right] = \iint \cdots \int \exp\left(j\, 2\pi \left(\sum_{j=1}^{m} \varepsilon_{i_j}\, \nu_j\, t_j\right)\right) E\left[dZ_{i_1}^{[i_1]}(\nu_1)\, dZ_{i_2}^{[i_2]}(\nu_2) \ldots dZ_{i_m}^{[i_m]}(\nu_m)\right]$$

où ε_{i_j} vaut 1 si $z_{i_j}^{[i_j]}(t_j) = z_{i_j}(t_j)$ et -1 si $z_{i_j}^{[i_j]}(t_j) = z_{i_j}^*(t_j)$, pour $1 \leq i_j \leq N$.
Utilisant (A3.4) dans (A3.6), l'équation précédente devient

(A3.7) $$E\left[z_{i_1}^{[i_1]}(t_1)\, z_{i_2}^{[i_2]}(t_2) \ldots z_{i_m}^{[i_m]}(t_m)\right] =$$
$$= \iint \cdots \int \exp\left(j\, 2\pi \left(\sum_{j=1}^{m} \varepsilon_{i_j} \nu_j\, t_j\right)\right) G(\nu_1) \ldots G(\nu_m)\, E\left[dS_{i_1}^{[i_1]}(\nu_1)\, dS_{i_2}^{[i_2]}(\nu_2) \ldots dS_{i_m}^{[i_m]}(\nu_m)\right].$$

Calculons maintenant la quantité $E[dS_{i_1}^{[i_1]}(\nu_1)\, dS_{i_2}^{[i_2]}(\nu_2) \ldots dS_{i_m}^{[i_m]}(\nu_m)]$. Dans ce but, notons que comme $s_i(t)$ est réel, l'expression (A3.2) peut aussi s'écrire

(A3.8) $$s_i(t) = \int \exp(j\, 2\pi\varepsilon_i\, \nu t)\, dS_i^{[i]}(\nu) \qquad 1 \leq i \leq N$$

On en déduit immédiatement que

(A3.9) $$E\left[s_{i_1}(t_1)\, s_{i_2}(t_2) \ldots s_{i_m}(t_m)\right] = \iint \cdots \int \exp\left(j\, 2\pi \left(\sum_{j=1}^{m} \varepsilon_{i_j}\, \nu_j\, t_j\right)\right) E\left[dS_{i_1}^{[i_1]}(\nu_1)\, dS_{i_2}^{[i_2]}(\nu_2) \ldots dS_{m}^{[i_m]}(\nu_m)\right].$$

La quantité $E[dS_{i_1}^{[i_1]}[\nu_1]\, dS_{i_2}^{[i_2]}(\nu_2) \ldots dS_{m}^{[i_m]}(\nu_m)]$ peut donc s'écrire

(A3.10) $$E\left[dS_{i_1}^{[i_1]}(\nu_1)\, dS_{i_2}^{[i_2]}(\nu_2) \ldots dS_{i_m}^{[i_m]}(\nu_m)\right] = f(\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_m)\, d\nu_1\, d\nu_2 \ldots d\nu_m$$

où $f(\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_m)$ est défini par

(A3.11) $$f(\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_m) = \iint \cdots \int \exp\left(-j\, 2\pi \left(\sum_{j=1}^{m} \varepsilon_{i_j}\, \nu_j\, t_j\right)\right) E\left[s_{i_1}(t_1)\, s_{i_2}(t_2) \ldots s_{i_m}(t_m)\right] dt_1\, dt_2 \ldots dt_m.$$

Cependant, comme $\mathbf{s}(t)$ est un processus stationnaire, la quantité $E[s_{i_1}(t_1)\, s_{i_2}(t_2) \ldots s_{i_m}(t_m)]$ est invariante par toute translation temporelle $t_i \to t_i + \tau$, et en particulier par la translation temporelle $t_i \to t_i - t_m$. Utilisant cette propriété dans (A3.11), on obtient

(A3.12) $$f(\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_m) =$$
$$= \iint \cdots \int \exp\left(-j\, 2\pi \left(\sum_{j=1}^{m} \varepsilon_{i_j}\, \nu_j\, t_j\right)\right) E\left[s_{i_1}(t_1 - t_m) \ldots s_{i_{m-1}}(t_{m-1} - t_m)\, s_{i_m}(0)\right] dt_1\, dt_2 \ldots dt_m$$

En effectuant le changement de variable $t_i - t_m = \tau_i$, pour $1 \leq i \leq m-1$, l'expression (A3.12) devient

(A3.13) $$f(\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_m) = \iint \cdots \int \exp\left(-j\, 2\pi \left(\sum_{j=1}^{m-1} \varepsilon_{i_j}\, \nu_j\, \tau_j\right)\right) E\left[s_{i_1}(\tau_1) \ldots s_{i_{m-1}}(\tau_{m-1})\, s_{i_m}(0)\right]$$
$$\left[\int \exp\left(-j\, 2\pi \left(\sum_{j=1}^{m} \varepsilon_{i_j}\, \nu_j\right) t_m\right) dt_m\right] d\tau_1 \ldots d\tau_{m-1}$$

ce qui peut encore s'écrire

(A3.14) $f(\nu_1, \nu_2, \dots \nu_m) =$

$$= \delta\left(\sum_{j=1}^{m} \varepsilon_{i_j} \nu_j\right) \iint \dots \int \exp\left(-j\,2\,\pi\left(\sum_{j=1}^{m-1} \varepsilon_{i_j} \nu_j \tau_j\right)\right) \mathrm{E}\,[s_{i_1}(\tau_1) \dots s_{i_{m-1}}(\tau_{m-1})\, s_{i_m}(0)]\, d\tau_1 \dots d\tau_{m-1}\,.$$

Dès lors, utilisant (A3.14) dans (A3.10), on en déduit que $\mathrm{E}[d\mathrm{S}_{i_1}^{[i_1]}(\nu_1)\, d\mathrm{S}_{i_2}^{[i_2]}(\nu_2) \dots d\mathrm{S}_{i_m}^{[i_m]}(\nu_m)]$ a la forme suivante

(A3.15) $$\mathrm{E}\,[d\mathrm{S}_{i_1}^{[i_1]}(\nu_1)\, d\mathrm{S}_{i_2}^{[i_2]}(\nu_2) \dots d\mathrm{S}_{i_m}^{[i_m]}(\nu_m))] = \delta\left(\sum_{j=1}^{m} \varepsilon_{i_j} \nu_j\right) q(\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_{m-1})\, d\nu_1\, d\nu_2 \dots d\nu_m$$

et utilisant (A3.15) dans (A3.7) pour $t_1 = t_1 = \dots = t_m = t$, on obtient

(A3.16) $$\mathrm{E}\,[z_{i_1}^{[i_1]}(t)\, z_{i_2}^{[i_2]}(t) \dots z_{i_m}^{[i_m]}(t)] = \iint \dots \int \mathrm{G}(\nu_1) \dots \mathrm{G}(\nu_m)\, \delta\left(\sum_{j=1}^{m} \varepsilon_{i_j} \nu_j\right) q(\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_{m-1})\, d\nu_1\, d\nu_2 \dots d\nu_m\,.$$

$$= \iint \cdots \int \mathrm{G}(\nu_1) \cdots \mathrm{G}(\nu_m)\, \delta\left(\sum_{j=1}^{m} \varepsilon_{i_j} \nu_j\right) q(\nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_{m-1})\, d\nu_1\, d\nu_2 \cdots d\nu_m\,.$$

L'intégrale du second membre de (A3.16) n'est non nulle que sur l'hyperplan défini par

(A3.17) $$\sum_{j=1}^{m} \varepsilon_{i_j} \nu_j = 0 \quad \text{avec} \quad \nu_j \geqslant 0 \quad \text{pour} \quad 1 \leqslant j \leqslant m$$

puisque les quantités $\mathrm{G}(\nu_j)$ sont nulles pour $\nu_j < 0$. En particulier, si tous les ε_{i_j} valent 1, ce qui est le cas si

$$\mathrm{E}[z_{i_1}^{[i_1]}(t)\, z_{i_2}^{[i_2]}(t) \dots z_{i_m}^{[i_m]}(t)] = \mathrm{E}\,[z_{i_1}(t)\, z_{i_2}(t) \dots z_{i_m}(t)]\,,$$

l'expression (A3.16) n'est non nulle qu'au point $(\nu_1 = 0, \nu_2 = 0, \dots, \nu_m = 0)$, ensemble de mesure nulle, ce qui veut dire que

(A3.18) $$\mathrm{E}[z_{i_1}(t)\, z_{i_2}(t) \dots z_{i_m}(t)] = 0 \quad \forall m \geqslant 1\,.$$

D'autre part, comme $\mathbf{s}(t)$ est un processus à BE autour de ν_0, l'expression (A3.4) peut aussi s'écrire

(A3.19) $$d\mathrm{Z}_i(\nu) = \mathrm{F}(\nu - \nu_0)\, \mathrm{G}(\nu)\, d\mathrm{S}_i(\nu) \triangleq \mathrm{G}_\mathrm{F}(\nu)\, d\mathrm{S}_i(\nu) \quad 1 \leqslant i \leqslant \mathrm{N}$$

où $\mathrm{F}(\nu)$, réponse en fréquence du filtre passe-bas idéal, est définie par

(A3.20) $$\mathrm{F}(\nu) = 1 \quad -\Delta\nu \leqslant \nu \leqslant \Delta\nu \quad \text{avec} \quad \Delta\nu \ll \nu_0$$

(A3.21) $$\mathrm{F}(\nu) = 0 \quad \text{ailleurs}$$

En conséquence, l'expression (A3.16) peut aussi s'écrire

(A3.22) $$\mathrm{E}\,[z_{i_1}^{[i_1]}(t)\, z_{i_2}^{[i_2]}(t) \dots z_{m}^{[i_m]}(t)] = \iint \dots \int \mathrm{G}_\mathrm{F}(\nu_1) \dots \mathrm{G}_\mathrm{F}(\nu_m)\, \delta\left(\sum_{j=1}^{m} \varepsilon_{i_j} \nu_j\right) q(\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_{m-1})\, d\nu_1\, d\nu_2 \dots d\nu_m\,.$$

Cette expression n'est non nulle que sur l'hyperplan défini par (A3.17) avec la condition supplémentaire $\nu_0 - \Delta\nu \leqslant \nu_j \leqslant \nu_0 + \Delta\nu$ pour $1 \leqslant j \leqslant m$. Si on appelle q le nombre de ε_{i_j} égaux à $+1$, la condition supplémentaire précédente implique que

(A3.23) $$\nu_0(2\,q - m) - m\,\Delta\nu \leqslant \sum_{j=1}^{m} \varepsilon_{i_j} \nu_j \leqslant \nu_0(2\,q - m) + m\,\Delta\nu\,.$$

En particulier, pour $q = m - 1$, ce qui est le cas si

$$\mathrm{E}[z_{i_1}^{[i_1]}(t)\, z_{i_2}^{[i_2]}(t) \dots z_{i_m}^{[i_m]}(t)] = \mathrm{E}\,[z_{i_1}^{*}(t)\, z_{i_2}(t) \dots z_{i_m}(t)]\,,$$

l'expression (A3.23) devient

(A3.24)
$$\nu_0(m-2) - m\,\Delta\nu \leqslant \sum_{j=1}^{m} \varepsilon_{i_j}\,\nu_j \leqslant \nu_0(m-2) + m\,\Delta\nu\,.$$

Comme l'expression (A3.22) n'est non nulle que sur l'hyperplan défini par (A3.17), elle restera non nulle avec la condition (A3.24) si et seulement si

(A3.25)
$$\nu_0(m-2) - m\,\Delta\nu \leqslant 0 \leqslant \nu_0(m-2) + m\,\Delta\nu$$

ce qui nécessite que $\nu_0/\Delta\nu \leqslant (m/m-2)$. Or la quantité $(m/m-2)$ est majorée par 3 pour $m \geqslant 3$ alors que l'hypothèse BE suppose que $\nu_0/\Delta\nu \gg 1$, c'est-à-dire $\nu_0/\Delta\nu > 10$. La condition (A3.25) ne peut donc pas être respectée pour $m \geqslant 3$, ce qui signifie que

(A3.26)
$$\mathrm{E}[z_{i_1}^*(t)\, z_{i_2}(t) \ldots z_{i_m}(t)] = 0 \qquad \forall m > 2\,.$$

Finalement, utilisant (A3.1) dans (A3.18) et (A3.26), on obtient les propriétés (4.55) et (4.56).

BIBLIOGRAPHIE

[1] H. L. Van Trees, *Detection Estimation and Modulation Theory*, part 1, Wiley, New York, 1968.

[2] C. W. Helstrom, *Statistical Theory of Signal Detection*, Pergamon Press, Oxford, 1968.

[3] R. A. Monzingo, T. W. Miller, *Introduction to adaptive arrays*, John Wiley and Sons, New York, 1980.

[4] H. Cox, « Optimum arrays and the schwarz inequality », *Journ. Acou. Soc. Am.*, Vol. 45, pp. 228-232, January 1969.

[5] D. R. Morgan, T. M. Smith, « Coherence effects on the detection performance of quadratic array processors with applications to large-array matched-field beamforming », *Journ. Acou. Soc. Am.*, Vol. 87, pp. 737-747, February 1990.

[6] J. K. Tugnait, « Identification of linear stochastic systems via second and fourth order cumulant matching », *IEEE Trans. Info. Theory*, Vol. IT-33, No. 3, pp. 393-407, May 1987.

[7] B. Friedlander, B. Porat, « Adaptive IIR algorithms based on high-order statistics », *IEEE Trans. Acou. Speech Signal Proc.*, Vol. ASSP-37, No. 4, pp. 485-495, April 1989.

[8] G. B. Giannakis, J. M. Mendel, « Identification of non-minimum phase systems using higher order statistics », submitted for publication.

[9] C. Jutten, J. Hérault, « Une solution neuromimétique au problème de séparation de sources », *Traitement du signal*, Vol. 5, No. 6, pp. 389-403, 1988.

[10] L. Féty, « Méthodes de traitement d'antenne adaptées aux radiocommunications », *Thèse de doctorat*, ENST (Paris), juin 1988.

[11] J. F. Cardoso, « Blind identification of independent components with higher order statistics », *IEEE Workshop* on higher-order spectral analysis, Vail, Colorado, pp. 157-162, June 1989.

[12] J. L. Lacoume, P. Ruiz, « Source Identification : A solution based on the cumulants », *Proc 4th ASSP Workshop* on Spectral Estimation and Modeling, pp. 199-203, August 1988.

[13] P. Comon, « Separation of stochastic processes », *ONR-NSF-IEEE Workshop* on higher-order spectral analysis, Vail, Colorado, pp. 174-179, June 1989.

[14] D. Lafaye de Michaux, M. Masmoudi, « Séparation de sources indépendantes », *Colloque GRETSI*, Juan-les-Pins, juin 1989.

[15] V. C. Soon, L. Tong, Y. F. Huang, R. Liu, « An extended fourth order blind identification algorithm in spatially correlated noise », *Proc. ICASSP 90*, pp. 1365-1368, Albuquerque.

[16] N. Wiener, *Non linear problems in random theory*, Technology press, MIT and Wiley, New York, 1958.

[17] P. Eykhoff, « Some fundamental aspects of process-parameter estimation », *IEEE Trans. Autom. Contr.*, Vol. AC-8, pp. 347-357, October 1963.

[18] D. R. Brillinger, « An introduction to polyspectra », *Ann. Math. Statist.*, Vol. 36, pp. 1351-1374, October 1965.

[19] B. Picinbono, « Linear quadratic array processing for coherent sources », *Proc. ICASSP 88*, pp. 2781-2784, New York.

[20] P. Chevalier, B. Picinbono, « Optimal linear-quadratic array for detection », *Proc. ICASSP 89*, pp. 2826-2829, Glasgow.

[21] T. Kailath, Linear Systems, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N. J. London, 1980.

[22] M. Vidvasagar, « New direction of research in non linear system theory », *Proc. IEEE*, Vol. 74, No. 8, pp. 1060-1091, August 1986.

[23] H. Diaz, A. A. Desrochers, « Modeling of non linear discrete time systems from input-output data », *Automatica*, Vol. 24, No. 5, pp. 629-641, 1988.

[24] M. Schetzen, « Non linear system modeling based on the Wiener theory », *Proc. IEEE*, Vol. 69, No. 12, pp. 1557-1573, December 1981.

[25] M. Schetzen, The Volterra and Wiener theory of non linear systems, Wiley, New York, 1980.

[26] N. Ahmed, « On the Lp ($p \geqslant 1$) stability of a class of non linear systems », *Proc. IEEE*, Letter, pp. 1795-1796, October 1969.

[27] B. Picinbono, « Estimation non linéaire de l'amplitude d'un signal », *Colloque GRETSI 89*, pp. 129-132, Juan-les-Pins.

[28] P. Duvaut, « Le filtrage de Wiener linéaire quadratique, application à la prédiction », *Traitement du Signal*, pp. 151-162, novembre 1989.

[29] T. E. Mc Cannon, N. Gallagher, D. Minoo Hamedani, G. L. Wise, « On the design of non linear discrete time predictors », *IEEE Trans. Info. Theory*, Vol. IT-28, pp. 366-371, March 1982.

[30] E. Biglieri, « Theory of Volterra processors and some applications », *Proc. ICASSP 82*, pp. 294-297, Paris.

[31] J. Zarzycki, « Orthogonal ladder-form representations of non linear prediction filters of the Volterra Wiener class », *IEEE Workshop* on Theory and Applications of non linear control systems, pp. 421-435, Hollande, 1986.

[32] P. Duvaut, « Etude théorique d'une récursivité sur l'ordre d'un prédicteur linéaire-quadratique, extension de l'algorithme de Levinson », à paraître, *dans Traitement du Signal*, numéro spécial « Non linéaire et Non gaussien », dernier trimestre 90.

[33] S. Benedetto, E. Biglieri, R. Daffara, « Modeling and performance evaluation of non linear satellite links, A Volterra series approach », *IEEE Trans. Aerosp. Elect. Syst.*, Vol. AES-15, pp. 494-507, July 1979.

[34] B. Picinbono, « Quadratic filters », *Proc. ICASSP 82*, pp. 298-301, Paris.

[35] T. Koh, E. J. Powers, « Second order Volterra filtering and its application to non linear system identification », *IEEE Trans. Acou. Speech Signal Proc.*, Vol. ASSP-33, No. 6, pp. 1445-1455, December 1985.

[36] J. Coker, N. Simkins, « A non linear adaptive noise canceller », *Proc. ICASSP 80*, pp. 470-473.

[37] J. C. Stapleton, S. C. Bass, « Adaptative noise cancellation for a class of non linear, dynamic reference channels », *IEEE Trans. on Circuit and Systems*, Vol. CAS-32, No. 2, pp. 143-150, February 1985.

[38] G. B. Giannakis, A. Dandawate, « Linear and non linear adaptive noise cancellers », *Proc. ICASSP 90*, pp. 1373-1376, Albuquerque.

[39] B. Picinbono, P. Duvaut, « Optimal linear quadratic systems for Detection and Estimation », *IEEE Trans. Info. Theory*, Vol. IT-34, pp. 304-311, March 1988.

[40] B. Picinbono, P. Duvaut, « Geometrical properties of optimal Volterra filters for signal processing », *IEEE Trans. Info. Theory*, Vol. IT-36, N° 5, pp. 1061-1068, September 1990.

[41] G. L. Sicuranza, A. Bucconi, P. Mitri, « Adaptive echo cancellation with non linear digital filters », *Proc. ICASSP 84*, pp. 3.10.1-3.10.4.

[42] D. Mansour, A. H. Gray, « Frequency domain non-linear adaptive filter », *Proc. ICASSP 81*, pp. 550-553.

[43] G. L. Sicuranza, G. Ramponi, « A variable-step adaptation algorithm for memory oriented Volterra Filters », *IEEE Trans. Acou. Speech Signal Proc.*, Vol. ASSP-35, No. 10, pp. 1492-1494, October 1987.

[44] C. E. Davila, A. J. Welch, H. G. Rylander III, « A second order adaptative Volterra filter with rapid convergence », *IEEE Trans. Acou. Speech Signal Proc.*, Vol. ASSP-35, No. 9, pp. 1259-1263, September 1987.

[45] S. W. Nam, S. B. Kim, E. J. Powers, « On the identification of a third-order Volterra non linear system using a frequency-domain block RLS adaptative algorithm », *Proc. ICASSP 90*, 10.E1.10, Albuquerque.

[46] V. J. Mathews, J. Lee, « A fast recursive least-squares second order Volterra filter », *Proc. ICASSP 88*, pp. 1383-1386, New York.

[47] P. Duvaut, « Une approche géométrique du filtrage de Volterra transverse rapide », rapport DRET, 1988.

[48] T. Koh, E. J. Powers, « An adaptive non linear digital filter with lattice orthogonalization », *Proc. ICASSP 83*, pp. 37-40, Boston.

[49] P. Chevalier, B. Picinbono, « Adaptive linear-quadratic array for detection », *Proc. ICASSP 90*, 32.U3.3, Albuquerque.

[50] K. I. Kim, E. J. Powers, « A digital method of modeling quadratically non linear systems with a general random input », *IEEE Trans. Acou. Speech Signal Proc.*, Vol. ASSP-36, No. 11, pp. 1758-1769, November 1988.

[51] P. Duvaut, « A general and unifying approach to adaptive linear quadratic discrete-time Volterra filtering », *Proc. ICASSP 89*, pp. 1166-1170, Glasgow.

[52] P. Duvaut, « Rôle des moments d'ordre 3 dans la structure d'un algorithme adaptatif linéaire-quadratique », à paraître, *dans Traitement du Signal*, numéro spécial « Non linéaire et Non gaussien », dernier trimestre 90.

[53] C. L. Nikias, A. P. Chrysafis, A. N. Venetsanopoulos, « The LU decomposition theorem and its applications to the realization of the two dimensional digital filters », *IEEE Trans. Acou. Speech Signal Proc.*, Vol. ASSP-33, No. 3, pp. 694-711, June 1985.

[54] Y. Lou, C. L. Nikias, A. N. Venetsanopoulos, « VLSI array processing structures of quadratic digital filters with LMS algorithms », *Proc. ICASSP 87*, pp. 1394-1397.

[55] H. H. Chiang, C. L. Nikias, A. N. Venetsanopoulos, « Efficient implementations of quadratic digital filters », *IEEE Trans. Acou. Speech Signal Proc.*, Vol. ASSP-34, No. 6, pp. 1511-1528, December 1986.

[56] H. H. Chiang, C. L. Nikias, A. N. Venetsanopoulos, « Reconfigurable systolic array implementation of quadratic digital filters », *IEEE Trans. on Circuit and Systems*, Vol. CAS-33, No. 8, pp. 845-848, August 1986.

[57] Y. Lou, C. L. Nikias, A. N. Venetsanopoulos, « Efficient array processing structures for adaptive quadratic digital filters », *IEEE Int. Symp. on Circuits and Systems*, Vol. 2, 1987.

[58] B. G. Mertzios, G. L. Sicuranza, A. N. Venetsanopoulos, « Efficient realizations of two-dimensional quadratic digital filters », *IEEE Trans. Acou. Speech Signal Proc.*, Vol. ASSP-37, No. 5, pp 765-769, May 1989.

[59] M. Bellanger, Traitement numérique du signal, Collection CNES-CNET, Masson, 1984, Paris.

[60] D. Kocur, « Semi-systolic implementation of second-order Volterra digital filters based on recurrence algorithm of Volterra filtering », *Electronics Letters*, 5th January 1989, Vol. 25, No 1.

[61] C. F. N. Cowan, S. G. Smith, « A digital adaptive filter using a memory-accumulator architecture : theory and realization », *IEEE Trans. Acou. Speech Signal Proc.*, Vol. ASSP-31, No. 3, pp. 541-549, June 1983.

[62] G. L. Sicuranza, G. Ramponi, « Adaptive non linear digital filters using distributed arithmetic », *IEEE Trans. Acou. Speech Signal Proc.*, Vol. ASSP-34, No. 3, pp. 518-526, June 1986.

[63] G. L. Sicuranza, « Non linear digital filter realization by distributed arithmetic », *IEEE Trans. Acou. Speech Signal Proc.*, Vol. ASSP-33, No. 4, pp. 939-945, August 1985.

[64] A. Peled, B. Liu, « A new hardware realization of digital filters », *IEEE Trans. Acou. Speech Signal Proc.*, Vol. ASSP-22, No. 6, December 1974.

[65] O. Agazzi, D. G. Messerschmitt, D. A. Hodges, « Non linear echo cancellation of data signals », *IEEE Trans. on Communication*, Vol. COM-30, No. 11, pp. 2421-2433, November 1982.

[66] C. F. N. Cowan, P. F. Adams, « Non linear system modeling : Concept and Application », *Proc. ICASSP 84*, pp. 456.1-4, San Diego.

[67] D. D. Falconer, « Adaptive equalization of channel non linearities in QAM data transmission systems », *Bell Syst. Tech. Journal.*, Vol. 57, No. 7, pp. 2589-2611, September 1978.

[68] S. Benedetto, E. Biglieri, « Non linear equalization of digital satellite channels », *9th AIAA Conference* on communication satellite systems, 1982.

[69] S. Benedetto, E. Biglieri, R. Daffara, « Performance of multilevel baseband digital systems in a non linear environment », *IEEE Trans. on Communication*, Vol. COM-24, No. 10, pp. 1166-1175, October 1976.

[70] T. L. Lim, J. K. Omura, « Error rate estimates in digital communications over a non linear channel with memory », *IEEE Trans. on Communication*, Vol. COM-31, pp. 407-412, March 1989.

[71] M. Maqusi, « Performance of baseband digital data transmission in non linear channels with memory », *IEEE Trans. on Communication*, Vol. COM-33, No. 7, pp. 715-719, July 1985.

[72] E. Biglieri, A. Gersho, R. D. Gitlin, T. L. Lim, « Adaptive cancellation of non linear intersymbol interference for voice-

band data transmission », *IEEE Select. areas Communications,* Vol. SAC-2, pp. 765-777, September 1984.

[73] E. Linzenkirchner, « Self-adaptative non linear filter for noisy measuring signals », *Process Automation,* pp. 49-52, 1981.

[74] G. Ramponi, G. L. Sicuranza, « Decision directed non linear filter for image processing », *Electronics letters,* 5th November 1987, Vol. 23, pp. 1218-1219.

[75] A. Graham, Kronecker products and Matrix calculus Applications, J. Wiley and Sons, New York, 1981.

[76] R. Bellman, Introduction to matrix Analysis, Mc. Graw Hill, New York, 1960.

[77] B. Picinbono, P. Duvaut, « Detection and contrast in stochastic Processes in underwaters acoustics », C. Baker, Springer verlag, pp. 181-203, New York, 1986.

[78] P. Duvaut, « Contraste et détection, Application à la quantification et aux filtres de Volterra optimaux pour la détection », thèse de doctorat, Université de Paris XI, January 1987.

[79] J. Makhoul, « Linear prediction, a Tutorial review », *Proc. IEEE,* Vol. 63, No. 4, pp. 561-580, April 1975.

[80] T. Kailath, « A view of three decades of linear filtering theory », *IEEE Trans. Info. Theory,* Vol. IT-20, No. 2, pp. 146-181, March 1974.

[81] B. Picinbono, P. Duvaut, « Nouvelle approche de la détection par seuil », *9e colloque GRETSI, pp. 87-91, Nice, 1983.*

[82] P. Chevalier, P. Picinbono, « Detection with optimal second order Volterra array processor », soumis pour publication.

[83] I. S. Reed, « On a moment theorem for complex Gaussian processes », *IRE Trans. Info. Theory,* pp. 194-195, April 1962.

[84] P. Chevalier, G. Goudezeune, B. Picinbono, « On the constraint problem in adaptive beam forming », *Proc. of EUSIPCO 88,* pp. 275-278, Grenoble.

[85] H. C. Lin, « Spatial Correlations in adaptive arrays », *IEEE Trans. Ant. Prop.,* Vol. AP-30, No. 2, Mars 1982.

[86] P. Chevalier, B. Picinbono, « Detection with a second-order Volterra array processor missmatched to the fourth order statistics of the noise », *Proc. EUSIPCO 90,* Barcelone.

[87] P. Chevalier, « Antenne adapative à évasion de fréquence, Antenne non linéaire adaptative », *Thèse de doctorat,* Université de Paris 11, 1990.

[88] A. Blanc-Lapierre, B. Picinbono, *Fonctions aléatoires,* Masson, 1981.

Manuscrit reçu le 6 février 1990