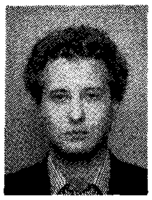
De la blancheur et de ses transformations

Whiteness and its transformations



P. BONDON

Laboratoire des Signaux et Systèmes,
ESE, Plateau de Moulon,
91192 Gif-sur-Yvette Cedex, France

Agrégé de Physique de l'École Normale Supérieure de Cachan (1987), il est actuellement Enseignant-Chercheur à l'Université de Paris-Sud. Il poursuit ses études doctorales au Laboratoire des Signaux et Systèmes sous la responsabilité du Pr. B. Picinbono. Ses centres d'intérêts sont la modélisation en traitement de signal, les statistiques d'ordre supérieur ainsi que les problèmes d'estimation et de détection.

B. PICINBONO

Laboratoire des Signaux et Systèmes,
ESE, Plateau de Moulon,
91192 Gif-sur-Yvette Cedex, France

Bernard Picinbono est Professeur à l'Université de Paris-Sud et Directeur Général de l'École Supérieure d'Électricité. Son domaine de recherche est le traitement statistique du signal et en particulier les questions concernant les processus aléatoires, la détection et l'estimation. Il est Président du GRETSI, association qui organise le colloque de ce nom se déroulant tous les deux ans et qui soutient la revue « Traitement du signal ».

RÉSUMÉ

L'usage récent des statistiques d'ordre supérieur en traitement du signal permet d'étendre le concept de blancheur, jusqu'alors limité à l'ordre deux. Cette extension conduit à définir de nouveaux types de bruits blancs dont les liens sont examinés en détail. On peut alors se demander si, au moyen d'opérations linéaires ou non linéaires, il est possible de blanchir à un ordre supérieur à deux un signal aléatoire ou tout au moins d'en conserver la blancheur. En particulier, on montre qu'il est impossible par filtrage linéaire de blanchir à un ordre supérieur à deux et que la conservation de la blancheur est liée au caractère gaussien.

MOTS CLÉS

Bruits blancs, polyspectres, filtrage linéaire, filtrage de Volterra, transformations non linéaires instantanées.

ABSTRACT

The recent use of higher order statistics in signal processing allows us to extend the concept of whiteness so far limited to the second order. This extension leads to define new kinds of white noises whose relationships are investigated. So, we might ask whether it is possible, using linear or non linear operations, to whiten a random process to an order higher than the second or at least to preserve its whiteness. Particularly we show that it is impossible to whiten with a linear filter, to an order higher than the second and that the preservation of whiteness depends on the gaussian property.

KEY WORDS

White noises, polyspectra, linear filtering, Volterra filtering, instantaneous non linear transformations.

Sigles utilisés

BB	Bruit blanc
BB2	Bruit blanc d'ordre 2
BBP	Bruit blanc pur
BBF	Bruit blanc fort
BBFC	Bruit blanc fort causal
BB^d	Bruit blanc de degré d
BB^dC	Bruit blanc de degré d causal
BBq	Bruit blanc d'ordre q
$BB(p, q)$	Bruit blanc (p, q)
SFC	Seconde fonction caractéristique
VA	Variable aléatoire
VAI	Variables aléatoires indépendantes

1. Introduction

Le concept de bruit blanc (BB) est très couramment utilisé en traitement du signal, en particulier pour les signaux à temps discret qui sont les seuls considérés dans la suite. Par exemple, l'idée de base des méthodes paramétriques d'analyse spectrale est que le signal observé peut être représenté par un modèle ARMA, c'est-à-dire par la sortie d'un filtre dynamique [1] attaqué par un BB. De même, dans la prédiction linéaire d'un signal x_n on est souvent conduit à transformer x_n en un BB $\wedge$ $\tilde{x}_n$ appelé innovation, qui constitue la partie non prédictible de x_n. Lorsque les méthodes utilisées sont linéaires et que l'analyse est faite au second ordre, le concept de blancheur utilisé est relié à celui de variables aléatoires (VA) décorrélées. Le BB correspondant sera dénommé BB à l'ordre 2 (BB2).

Au cours de ces dernières années, un intérêt croissant s'est porté sur l'usage des statistiques d'ordre supérieur et celui des systèmes non linéaires en traitement du signal ([2] à [8]). Le présent numéro de Traitement du Signal en est une nouvelle manifestation. On conçoit aisément que dans cette perspective le concept de BB2 devienne insuffisant et qu'il soit alors nécessaire de définir d'autres sortes de BB. Ainsi dans la prédiction linéaire d'un signal x_n, l'innovation $\tilde{x}_n$ est un BB2, mais $\tilde{x}_n$ peut très bien être prédictible, voire même avec une erreur nulle si l'on s'autorise à utiliser des filtres non linéaires [9]. Aussi est-il dangereux d'associer sans plus de précision la notion de BB à celle de résidu non prédictible.

D'autre part, pour les signaux non gaussiens, il existe des propriétés intermédiaires entre l'indépendance et la décorrélation que nous pouvons caractériser par l'étude des statistiques d'ordre supérieur. Cette idée que l'on trouve déjà dans [10], se renforce quand on s'intéresse à une classification des processus aléatoires plus générale que celle basée sur la décomposition de Wold. On est alors conduit à étudier des caractéristiques non linéaires des processus [11]-[12]. Il apparaît donc intéressant dans cet esprit de définir de nouveaux BB et d'étudier leurs comportements lors d'une opération de filtrage linéaire ou non linéaire ainsi que lors d'une transformation non linéaire instantanée.

2. Différentes formes de blancheur

Une des caractérisations possibles des différentes formes de blancheur peut se faire au moyen des statistiques d'ordre supérieur. Pour ceci nous pouvons a priori utiliser soit les moments soit les cumulants. L'utilisation d'un formalisme plutôt que l'autre ne change rien aux propriétés des différentes formes de blancheur. Cependant, certaines notions peuvent s'expliciter plus simplement à l'aide des cumulants et nous commençons donc par rappeler quelques unes de leurs propriétés. Le lecteur intéressé pourra consulter les références plus spécialisées [13]-[14].

2.1. DÉFINITION ET PRINCIPALES PROPRIÉTÉS DES CUMULANTS

Soit $\{x_n\}_1^p$ une suite de VA réelles, considérées comme les composantes d'un vecteur aléatoire $\mathbf{x}$. Soit $\phi^{\mathbf{x}}(\mathbf{u})$ la fonction caractéristique associée à $\mathbf{x}$. Cette fonction est continue et $\phi^{\mathbf{x}}(\mathbf{0}) = 1$. Il existe donc un voisinage Δ de $\mathbf{0}$ dans lequel $\phi^{\mathbf{x}}(\mathbf{u}) \neq 0$. Pour $\mathbf{u} \in \Delta$, on définit la seconde fonction caratéristique (SFC) de $\mathbf{x}$ par

$$(2.1) \qquad \Psi^{\mathbf{x}}(\mathbf{u}) \triangleq \operatorname{Log} \phi^{\mathbf{x}}(\mathbf{u}).$$

Comme $\phi^{\mathbf{x}}(\mathbf{u})$ est complexe, on choisit la détermination de la fonction logarithme qui s'annule pour la valeur 1 et telle que l'argument varie entre $-\pi$ et π. Sous réserve d'existence des dérivées partielles, $\Psi^{\mathbf{x}}(\mathbf{u})$ est développable en série de Mac-Laurin dont les coefficients font apparaître les cumulants de $\mathbf{x}$. Ceux-ci sont définis par la relation

$$(2.2) \quad \mathrm{C}(x_1^{\alpha_1}, \ldots, x_p^{\alpha_p}) \triangleq (-i)^{\alpha_1 + \cdots + \alpha_p} \left(\frac{\partial}{\partial u_1}\right)^{\alpha_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial u_p}\right)^{\alpha_p} \Psi^{\mathbf{x}}(\mathbf{u})\big|_{\mathbf{u}=0}$$

où les α_i sont des entiers positifs ou nuls. Il convient de noter que si l'on remplace dans (2.2) Ψ par ϕ, on obtient la définition du moment $\mathrm{E}(x_1^{\alpha_1} \ldots x_p^{\alpha_p})$.

Les cumulants possèdent des propriétés dont nous rappelons les plus importantes.

P_1. Comme les moments, les cumulants sont des fonctions symétriques.

P_2. Comme les moments, ils sont multilinéaires ce qui se traduit par les deux relations suivantes

$$(2.3) \quad \text{Si } \forall i \;\; a_i \neq 0, \mathrm{C}(a_1 x_1, \ldots, a_p x_p) = a_1 \ldots a_p \, \mathrm{C}(x_1, \ldots, x_p)$$

$$(2.4) \quad \mathrm{C}(x_{11} + x_{12}, x_2, \ldots, x_p) = \mathrm{C}(x_{11}, x_2, \ldots, x_p) + \mathrm{C}(x_{12}, x_2, \ldots, x_p).$$

Ceci se démontre directement à partir de la SFC.

P_3. Comme la SFC d'une suite de VA indépendantes (VAI) est la somme des SFC, on déduit que si la suite $\{x_n\}_1^p$ peut être décomposée en deux suites disjointes indépendantes alors $\mathrm{C}(x_1, \ldots, x_p) = 0$.

P_4. Pour la même raison, si les deux suites $\{x_n\}_1^p$ et $\{y_n\}_1^p$ sont indépendantes alors

$$\mathrm{C}(x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n) = \mathrm{C}(x_1, \ldots, x_n) + \mathrm{C}(y_1, \ldots, y_n).$$

P_5. Les cumulants d'ordre $n > 1$ sont invariants par translation. En effet, si l'on pose $\mathbf{y} = \mathbf{x} + \mathbf{a}$ où $\mathbf{a}$ est déterministe alors $\Psi^{\mathbf{y}}(\mathbf{u}) = i\mathbf{u}^{\mathrm{T}} \mathbf{a} + \Psi^{\mathbf{x}}(\mathbf{u})$.

P_6. *Cumulants et caractère gaussien.* Pour une suite de VA gaussiennes dans leur ensemble, les cumulants d'ordre $n > 2$ sont nuls car la SFC se limite à des termes quadratiques en **u**. Il existe d'autres combinaisons de moments s'annulant dans le cas gaussien pour $n > 2$. Considérons par exemple une VA scalaire centrée x et la VA gaussienne centrée x_g qui a la même variance que x. Pour $2 < p < 5$ on vérifie aisément en utilisant les formules données dans [13], que $C(x^p) = E(x^p) - E(x_g^p)$. Mais pour $p = 5$ cette relation n'a aucune raison d'être vérifiée. En effet $C(x^5) = E(x^5) - 10\,E(x^3)\,E(x^2)$ et $E(x_g^5) = 0$. Donc si $E(x^3) \neq 0$, la relation est fausse.

P_7. Sous réserve d'ergocité, l'estimation des moments d'un signal aléatoire stationnaire est simple et peut se faire par moyenne temporelle. Par contre, il semble que l'estimation la plus simple des cumulants consiste à repasser par celle des moments et à appliquer ensuite les formules les reliant.

P_8. Les cumulants et les moments sont en effet reliés, mais par des formules générales assez lourdes à manipuler [13-[14]. Toutefois si l'on se limite à des ordres peu élevés, on obtient des résultats relativement simples qu'il convient d'indiquer. Ainsi les quatre premiers cumulants s'expriment en fonction des quatre premiers moments par

$$C(x_i) = E(x_i) \tag{2.5}$$

$$C(x_i, x_j) = E(x_i\, x_j) - E(x_i)\, E(x_j) = \mathrm{Cov}\,(x_i, x_j)\,. \tag{2.6}$$

Si de plus les VA sont centrées on a

$$C(x_i, x_j, x_k) = E(x_i\, x_j\, x_k)\,, \tag{2.7}$$

$$\begin{aligned} C(x_i, x_j, x_k, x_l) = E(x_i\, x_j\, x_k\, x_l) - \\ - E(x_i\, x_j)\, E(x_k\, x_l) - E(x_i\, x_k)\, E(x_j\, x_l) \\ - E(x_i\, x_l)\, E(x_j\, x_k)\,. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Ces formules sont tout à fait générales, et valables même si certaines des VA x_i sont égales. En particulier on retrouve la célèbre formule

$$C(x^4) = E(x^4) - 3\,\{E(x^2)\}^2\,, \tag{2.9}$$

qui est évidemment nulle dans le cas gaussien.

Ces formules prennent un grand intérêt dans le cas de VAI. En particulier l'application de la propriété P_3 à (2.8) donne

$$C(x_i, x_j, x_k, x_l) = C(x_i^4)\, \delta[i, j, k, l\,]\,, \tag{2.10}$$

où $\delta[\ ]$ est l'extension du symbole de Kronecker qui ne prend que les valeurs 0 ou 1 et vaut 0 sauf si $i = j = k = l$. De plus $C(x_i^4)$ est donné par (2.9). L'application de (2.8) et de (2.10) montre que l'expression de $E(x_i\, x_j\, x_k\, x_l)$ pour des VAI est beaucoup plus complexe, ce qui montre l'intérêt de l'usage des cumulants. D'une manière plus générale on déduit de P_3 que si des VA sont indépendantes on a

$$C(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}) = C(x_i^k)\, \delta[i_1, i_2, \ldots, i_k, i\,]\,, \tag{2.11}$$

qui est une propriété très commode. La formule correspondante pour les moments serait beaucoup plus compliquée.

2.2. DÉFINITION DES BRUITS BLANCS

Soit $\{x_n\}$, $n \in S$, une suite de VA réelles et centrées, S étant un ensemble d'entiers relatifs. Pour les applications pratiques x_n représente en général un signal aléatoire à temps discret et S un ensemble d'instants ou un intervalle d'observation. On peut caractériser la blancheur d'un signal en prenant en compte soit les propriétés liées à l'indépendance statistique, soit celles attachées au concept de régression statistique, soit enfin celles utilisant des moments ou des cumulants.

2.2.1. Indépendance : bruit blanc pur (BBP)

La suite $\{x_n\}$ est un BBP si et seulement si c'est une suite de VAI. Si de plus, elles sont identiquement distribuées, alors le signal x_n est stationnaire sur S.

2.2.2. Régression : bruit blanc fort (BBF)

Le BBF est caractérisé par des propriétés de constance de la régression. Pour $n \in S$, on note $D(n)$ l'ensemble des VA d'indices différents de n et $P(n)$ l'ensemble des VA d'indices strictement inférieurs à n, qui dans le cas temporel représente le passé par rapport à n.

La suite $\{x_n\}$ est un BBF si et seulement si $\forall n \in S$, l'espérance mathématique conditionnelle $E[x_n \mid D_n]$ est nulle. On en déduit par un calcul simple que $E(x_n \mid x_m) = 0$ et donc que $E(x_n\, x_m) = 0$, $\forall n \neq m$, ce qui signifie que la suite $\{x_n\}$ est un BB2.

La suite $\{x_n\}$ est un BBF causal (BBFC) si et seulement si $\forall n \in S$, $E[x_n \mid P(n)] = 0$. Il en résulte que $E(x_n \mid x_m) = 0$, $\forall m < n$ et $E(x_n\, x_m) = 0$, $\forall n \neq m$. La suite $\{x_n\}$ est donc encore un BB2. D'autre part, $E[x_n \mid P(n)] \triangleq \hat{x}_n$ étant la prédiction en moyenne quadratique de x_n, on voit qu'un BBFC est identique à son innovation de prédiction en moyenne quadratique et on dit qu'il est non prédictible au sens fort. Comme un BBFC est aussi un BB2, on voit que sa prédiction linéaire en moyenne quadratique $\hat{x}_n^L$ est également nulle. La réciproque est inexacte et on peut très bien avoir $\hat{x}_n^L = 0$ sans que $\hat{x}_n$ soit nul, comme on le constatera en 3.2. Enfin, le BBFC possède la propriété de Martingale [15].

2.2.3. Caractérisation par les cumulants ou les moments

On a vu dans l'introduction qu'un BB2 est caractérisé par le fait que les VA de la suite $\{x_n\}$ sont décorrélées, ce qui d'après (2.6) se traduit en termes de cumulants par

$$C(x_i, x_j) = C(x_i^2)\, \delta[i, j\,]\,, \tag{2.12}$$

qui est un cas particulier de la formule (2.11). Dans le cas stationnaire $C(x_i^2) = C_2$, cumulant d'ordre deux communs à toutes les VA x_i.

Par contre, sous réserve d'existence des cumulants et de convergence de la série de Mac-Laurin associée, un BBP est caractérisé par (2.11) valable quel que soit k. On est ainsi conduit naturellement au concept de *bruit blanc d'ordre q* (BBq). Un tel signal est caractérisé par le fait que (2.11) est valable pour $2 \leqslant k \leqslant q$. Le concept de BB4 a déjà été utilisé dans l'étude des systèmes linéaires quadratiques [6] où la relation (2.11) a été écrite à l'aide des moments en utilisant (2.8). Par ailleurs il est clair qu'un BBP est un BB∞, puisque (2.11) est valable quel que soit k. Enfin on peut retrouver au moyen des cumulants un résultat bien connu : tout BB2 gaussien est un BBP, c'est-à-dire que dans le cas gaussien, la non corrélation entraîne l'indépendance. En effet, tous les cumulants d'ordre supérieur à deux d'un signal aléatoire gaussien étant nuls, la condition de BB2 entraîne celle de BB∞, soit ici celle de BBP.

L'usage des cumulants permet d'introduire bien d'autres types de blancheur et leur analyse peut être présentée au moyen de *l'équation de blancheur* qui s'écrit

$$(2.13) \qquad C(x_{i_1}^{\alpha_1}, ..., x_{i_k}^{\alpha_k}) = C(x_i^{\alpha})\,\delta[i_1, ..., i_k, i]\,,$$

où les α_i sont des entiers non nuls satisfaisant

$$(2.14) \qquad \alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_k \geqslant k\,.$$

Dans cette équation les i_j sont en général des entiers quelconque de S qui peuvent d'ailleurs être égaux. Si de plus les VA x_n sont identiquement distribuées alors $C(x_i^{\alpha}) = C_{\alpha}$. La contrainte de causalité peut introduire une relation d'ordre entre ces entiers.

Par exemple on peut introduite le concept de *bruit blanc de degré d* (BB^d) par le fait que (2.13) est valable pour $k = 2$ et $\alpha_1 = 1$ et toute valeur de α_2 telle que $1 \leqslant \alpha_2 \leqslant d$. Si l'on restreint ceci aux valeurs satisfaisant $i_1 \geqslant i_2$, sauf pour $\alpha_2 = 1$, on introduit le concept de causalité et on parlera de *bruit blanc de degré d causal* (BB^{d}C).

D'une manière plus générale un signal x_n est un *bruit blanc* p, q [BB(p, q)] si (2.13) est satisfaite pour tous les i_j tels que $2 \leqslant k \leqslant p$ et tous les α_j tels que $2 \leqslant \alpha \leqslant q$. En raison de l'inégalité (2.14) on doit nécessairement avoir $p \leqslant q$. Il résulte de cette définition qu'un BBp est un BB(p, p) et inversement. D'autre part un BB$(2, 3)$ est équivalent à un BB^2 mais n'est pas équivalent à un BB^{2}C.

Remarques

(i) La notion de BB(p, q) généralise, dans une certaine mesure, à un signal aléatoire x_n celle de décorrélation d'ordre (r, s) de deux VA x et y, définie dans [16] p. 72, par

$$(2.15) \quad \forall\,(i, j) \in \{1, ..., r\} \times \{1, ..., s\}, \ \mathrm{Cov}\,(x^i, y^j) = 0$$

(ii) Le lecteur peut se demander s'il existe bien des signaux correspondant aux définitions précédentes. On peut immédiatement noter qu'un bruit blanc au sens fort l'est en tous les autres sens. Mais c'est la question inverse qui est digne d'intérêt et elle est examinée ci-dessous dans le cadre d'une comparaison entre les différents types de blancheur.

2.2.4. Toutes les définitions précédentes peuvent être également appliquées au signal y_n^c défini par

$$(2.16) \qquad y_n^c \triangleq x_n^k - E(x_n^k)\,,$$

où k est un entier et l'exposant indique que le signal est centré. Ceci introduit encore un degré de généralité supplémentaire montrant la très grande diversité du concept de bruit blanc.

3. Comparaison entre les blancheurs

Vu la multitude de BB que nous avons présentés, il est important d'étudier leurs liens et leurs différences.

3.1. IMPLICATIONS DIRECTES

On déduit directement des définitions les implications suivantes

$$\begin{array}{ccccc}
 & \mathrm{BBP} & \Rightarrow \mathrm{BB}q \Rightarrow & \mathrm{BB}\,(p, q) \Rightarrow \mathrm{BB}\,(p', q') \\
 & \Downarrow & & \text{où } p' \leqslant p \text{ et } q' \leqslant q \\
\mathrm{BB3} \Leftarrow & \mathrm{BBF} & \Rightarrow \mathrm{BB}^d & \\
 & \Downarrow & \Downarrow & \\
 & \mathrm{BBFC} & \Rightarrow \mathrm{BB}^d\mathrm{C} \Rightarrow & \mathrm{BB2}
\end{array}$$

Il résulte du tableau ci-dessus qu'il existe une certaine hiérarchie entre les différentes formes de blancheur, la blancheur la plus forte correspondant au BBP et la plus faible au BB2. Il convient toutefois de noter que même dans le cas de la blancheur la plus forte, les propriétés statistiques ne sont pas entièrement déterminées. Pour le vérifier considérons le cas d'un signal $x[k]$ à temps discret stationnaire. L'hypothèse BBP revient à dire qu'il s'agit d'une suite de VAI identiquement distribuées, mais elle n'impose aucune condition sur la distribution commune à toutes ces VA. Il reste donc un degré de liberté qui sera examiné au paragraphe 5.

Réciproquement, une hypothèse supplémentaire sur la distribution statistique peut transformer les propriétés de blancheur. L'exemple le plus frappant est celui du cas gaussien : l'adjonction de l'hypothèse gaussienne au caractère de BB2 rend le signal BBP, comme on l'a noté ci-dessus.

Par ailleurs, il est évident que si les VA x_n sont indépendantes, c'est-à-dire si x_n est un BBP, les puissances de x_n le sont aussi et donc y_n^c défini en (2.16) est un BBP. Ceci suppose évidemment que y_n^c soit toujours une VA car ce caractère aléatoire peut disparaître. Par exemple, si x_n prend seulement deux valeurs ± 1, x_n^2 n'est plus une VA. D'autre part, la relation BBF $\Rightarrow$ BB3 découle du fait que si x_n est un BBF alors

$$(3.1) \qquad E(x_n \mid x_m, x_p) = 0 \quad \text{si } n \neq m \text{ et } n \neq p\,.$$

On constatera dans la suite que c'est la seule relation existant entre un BBF et un BBq. Enfin on vérifie aussi à partir des définitions que si x_n est un BB$(2, d+1)$ alors il est un BB^d.

3.2. RELATIONS ENTRE LES BBq ET LES BB(p, q)

Le signal x_n peut être un BB2 et pas un BB(2, 3). Considérons $x_n = \cos(n\phi)$, $n > 0$ où ϕ est uniforme sur $[0, 2\pi]$.

Nous avons alors

$$C(x_n, x_p) = (1/2)\,\delta[n, p] \tag{3.2}$$

et

$$C(x_1^2, x_2) = 1/4\,. \tag{3.3}$$

On peut noter que x_n étant un BB2, il est non prédictible linéairement. Par contre x_n peut s'exprimer en fonction de x_m, $m < n$ par des formules trigonométriques et il est donc prédictible sans erreur de façon non linéaire.

Le signal x_n peut être un BB$(p-1, \infty)$, $\forall p > 2$, et pas un BBp. Soient $x_1, ..., x_p$ des VA uniformément distribuées sur l'intervalle $[-c/2, c/2]$. Considérons le vecteur $\mathbf{x}$ de composantes $x_1, ..., x_p$ et de densité de probabilté

$$p(\mathbf{x}) = \begin{cases} c^{-p}[1 + c^{-p} x_1 \ldots x_p] \\ \text{si} \quad -c/2 \leq x_i \leq c/2,\ i = 1, ..., p \\ 0 \quad \text{sinon} \end{cases} \tag{3.4}$$

Un vecteur constitué de k, $2 \leq k < p$, VA quelconques de $\mathbf{x}$ est uniformément distribué sur l'hypercube $[-c/2, c/2]^k$ de $\mathbb{R}^k$ est donc ces k VA sont mutuellement indépendantes et x_n est un BB$(p-1, \infty)$. Mais on a alors ici

$$C(x_1, ..., x_p) = E(x_1 \ldots x_p) = (c/12)^p \tag{3.5}$$

et donc x_n n'est pas un BBp. On peut consulter [17] pour avoir d'autres exemples.

Si x_n est un BB(p, kp) alors y_n^c est un BBp. Cette propriété se démontre en utilisant les formules de [14] et la notion de partition indécomposable. La réciproque est fausse. En effet, considérons l'exemple $x_n = \cos(n\phi)$ précédent et prenons $k = 2$ dans (2.16). On a $y_n^c = 1/2\, x_{2n}$ et d'après (3.2) y_n^c est donc un BB2. Pourtant x_n n'est pas un BB(2, 3) et donc a fortiori n'est pas BB(2, 4).

3.3. RELATIONS ENTRE LES BBF, BBFC ET LES BBq

Le signal x_n peut être un BBFC et pas un BB(2, 3). Considérons par exemple le signal x_n, $n \geq 0$, défini par la récurrence $x_n = x_{n-1} u_n$, $x_0 = 1$ où u_n est un BBP stationnaire. On a $E[x_n | P(n)] = 0$ car u_n est centré mais $C(x_n, x_{n+1}^2) = c_3^n c_2$ où c_2 et c_3 sont les cumulants d'ordres 2 et 3 de u_n. Cette expression est non nulle si $c_3 \neq 0$ et dès lors x_n n'est pas un BB(2, 3). On en déduit aussi qu'il n'est ni un BB3 ni un BBF.

Le signal x_n peut être un BBF et y_n^c ne pas être un BB2. Soit u_n un BBP stationnaire et le signal $x_n = u_n u_{n-1}$. Si l'on considère une fonction h quelconque telle que $h(x_n)$ soit toujours une VA du second ordre, on vérifie aisément que

$$\forall (m, n) \quad m \neq n,\ E[x_m h(x_n)] = 0\,. \tag{3.6}$$

Ceci signifie que x_n est un BBF. Posons $k = 2$ dans (2.16), on a alors

$$C(y_n, y_{n+1}) = \mathrm{Cov}(y_n, y_{n+1}) = m_2^2(m_4 - m_2^2) \tag{3.7}$$

où m_2 et m_4 sont les moments d'ordres 2 et 4 de u_n. Si $m_4 \neq m_2^2$ alors y_n^c n'est pas un BB2. On en déduit aussi que x_n n'est ni un BB(2, 4), ni un BB4 alors qu'il est un BBF et donc un BB3.

3.4. RELATIONS ENTRE LES BB^d, BB^{d}C ET LES BBq

Le signal x_n peut être un BB^d et pas un BB3. D'après 3.2, x_n peut être un BB$(2, d+1)$ et pas un BB3. Or étant un BB$(2, d+1)$ c'est un BB^d, donc il peut être un BB^d sans être un BB3 et on en déduit aussi qu'il peut être un BB^d sans être un BBF.

Le signal x_n peut être un BB3 et pas un BB^{3}C. Soit u_n un BBP stationnaire, dont on note m_i le moment d'ordre i, et le signal $x_n = u_n^2 u_{n-1}$. On peut vérifier que x_n est un BB3 si et seulement si $m_5 = 0$ et dans ce cas

$$C(x_2, x_1^3) = E(x_2 x_1^3) = m_2 m_3 m_7\,. \tag{3.8}$$

Mais cette expression peut être non nulle est alors x_n n'est pas un BB^{3}C et donc a fortiori n'est pas un BBF.

4. Bruits blancs et polyspectres

Considérons un signal aléatoire à temps discret $x[k]$ réel et centré. Son cumulant d'ordre p est défini par

$$C_p[\mathbf{k}] = C_p[k_1, ..., k_p] = C\{x[k_1], ..., x[k_p]\} \tag{4.1}$$

Supposons que cette fonction de $\mathbf{k}$ possède une transformée de Fourier multidimensionnelle définie par

$$S_p(\boldsymbol{\nu}) = \sum_{\mathbf{k}} C_p[\mathbf{k}] \exp(-j\, 2\pi\, \mathbf{k}^T \boldsymbol{\nu}) \tag{4.2}$$

où $\boldsymbol{\nu}$ est le vecteur de composantes $\nu_1, \nu_2, ..., \nu_p$. Par transformation inverse on a évidemment

$$C_p[\mathbf{k}] = \int_D S_p(\boldsymbol{\nu}) \exp(j\, 2\pi\, \mathbf{k}^T \boldsymbol{\nu})\, d\boldsymbol{\nu} \tag{4.3}$$

où D est l'hypercube de $\mathbb{R}^p$ défini par $-1/2 \leq \nu_i \leq 1/2$.

Pour la discussion qui suit il importe de connaître le mode de transformation de la fonction $S_p(\nu)$ lorsque $x[k]$ est soumis à un filtrage linéaire invariant dans le temps de réponse impulsionnelle $h[l]$. Partant de la relation entrée-sortie

$$y[k] = \sum_l h[l]\, x[k-l] \tag{4.4}$$

et utilisant la propriété P_2 on obtient

$$C_p^y[\mathbf{k}] = \sum_{\mathbf{l}} h[l_1] \ldots h[l_p]\, C_p^x[\mathbf{k} - \mathbf{l}] \tag{4.5}$$

qui par transformation de Fourier donne

$$S_p^y(\boldsymbol{\nu}) = G(\nu_1)\, G(\nu_2) \ldots G(\nu_p)\, S_p^x(\boldsymbol{\nu}) \tag{4.6}$$

où $G(\nu)$ est le gain complexe du filtre considéré.

Pour définir le concept de polyspectre on est conduit à introduire celui de stationnarité jusqu'à l'ordre q. Ceci signifie que pour $p \leq q$ la fonction $C_p[\mathbf{k}]$ est invariante par translation temporelle. Il en résule que C_p est une fonction de $p-1$ variables dénommée $\bar{C}_p$, soit

$$(4.7) \quad C_p[\mathbf{k}] = \bar{C}_p[k_1 - k_p, k_2 - k_p, \ldots, k_{p-1} - k_p] = \bar{C}_p[l_1, l_2, \ldots, l_{p-1}] .$$

En insérant cette formule dans (4.2) on trouve alors que

$$(4.8) \qquad S_p(\boldsymbol{\nu}) = \bar{S}_p(\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_{p-1})\ \delta_1(\Sigma \nu_i)$$

où $\delta_1(\ )$ est la distribution peigne de Dirac de période 1,

$$(4.9) \qquad \delta_1(x) = \sum_l \delta(x - l)$$

et $\delta(\ )$ est la distribution de Dirac. Ceci signifie que $S_p(\boldsymbol{\nu})$ n'est non nulle que sur les multiplicités de $\mathbb{R}^p$ dites multiplicités stationnaires [18] et définies par $\nu_1 + \nu_2 + \cdots + \nu_p = l$ où $l \in \mathbb{Z}$. La fonction $\bar{S}_p(\nu_1, \ldots, \nu_{p-1})$ est dénommée *polyspectre* d'ordre p de $x[k]$. Le polyspectre d'ordre deux est évidemment la densité spectrale de $x[k]$ et celui d'ordre trois est dénommé *bispectre*. utilisant (4.6) et le fait que $G(\nu)$ est périodique de période 1, on obtient le mode de transformation des polyspectres par

$$(4.10) \quad \bar{S}_p^y(\boldsymbol{\nu}) = G(\nu_1)\, G(\nu_2) \ldots G(\nu_{p-1})\ G(-\nu_1 - \nu_2 - \cdots - \nu_{p-1})\ \bar{S}_p^x(\boldsymbol{\nu})$$

où $\boldsymbol{\nu}$ est maintenant le vecteur de composantes $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_{p-1}$. Dans le cas d'un filtre réel on peut remplacer le dernier terme de cette formule par $G^*(\nu_1 + \nu_2 + \cdots + \nu_{p-1})$, où l'étoile signifie la conjugaison complexe.

Il nous reste maintenant à étudier les conséquences de la blancheur. Si $x[k]$ est un BBq, on a d'après (2.11), appliqué à (4.7)

$$(4.11) \qquad \bar{C}_p[\mathbf{k}] = C_p\, \delta[\mathbf{k}] , \quad 2 \leq p \leq q ,$$

où $\delta[\ ]$ est le symbole de Kronecker non nul et égal à un uniquement pour $\mathbf{k} = \mathbf{0}$. Il en résulte immédiatement que

$$(4.12) \qquad \bar{S}_p(\boldsymbol{\nu}) = C_p , \quad 2 \leq p \leq q .$$

On voit donc qu'un BBq stationnaire est caractérisé par le fait que ses $(q-1)$ premiers polyspectres sont constants, ce qui est une extension très naturelle de la situation connue pour le BB2 et justifie dans une certaine mesure le terme de blancheur. Par contre, un BB(p, q) stationnaire n'a aucune raison d'avoir cette propriété et seuls ses $(p-1)$ premiers polyspectres sont constants.

Enfin, combinant le tout, la sortie d'un filtre linéaire attaqué par un BBq donne des polyspectres satisfaisant

$$(4.13) \quad \bar{S}_p(\boldsymbol{\nu}) = G(\nu_1) \ldots G(\nu_{p-1})\ G^*(\nu_1 + \cdots + \nu_{p-1})\, C_p , \quad 2 \leq p \leq q ,$$

qui est une formule de factorisation des polyspectres étendant celle connue pour $p = 2$ et dénommée factorisation spectrale.

Il est par contre clair que la transformation des polyspectres par filtrage non linéaire conduit à des expressions beaucoup plus complexes ([19]-[20]).

5. Blancheur et filtrage linéaire

Le blanchissage d'un signal aléatoire par filtrage linéaire est une opération très courante en traitement du signal, par exemple en estimation, prédiction ou identification. Plus précisément si $x[k]$ est un signal aléatoire réel, centré et stationnaire jusqu'à un ordre q, considéré comme l'entrée d'un filtre linéaire à coefficients réels de gain complexe $G(\nu)$ inconnu, on se limite en général à chercher $G(\nu)$ tel que la sortie $y[k]$ soit blanche à l'ordre deux. Puisque l'on a introduit le concept de blancheur d'ordre supérieur on peut se demander s'il est possible de trouver $G(\nu)$ tel que $y[k]$ soit un bruit blanc d'ordre p, $2 \leq p \leq q$.

5.1. BLANCHISSAGE D'ORDRE SUPÉRIEUR

Nous sommes ainsi conduits à étudier $p-1$ relations déduites de (4.10) et (4.12) et l'équation de blanchissage d'ordre j, $2 \leq j \leq p$, s'écrit

$$(5.1)\ G(\nu_1) \ldots G(\nu_{j-1})\, G^*(\nu_1 + \cdots + \nu_{j-1})\, \bar{S}_j^x(\boldsymbol{\nu}) = C_j^y$$

où C_j^y est une constante. Pour $j = 2$ on obtient l'équation classique de blanchissage d'ordre deux,

$$(5.2) \qquad |G(\nu)|^2\, \bar{S}_2^x(\nu) = C_2^y$$

dont on déduit $|G(\nu)|$. On obtient donc une famille de filtres de module déterminé et dont les phases sont arbitaires. Notons toutefois que si le filtre est réel, ce qu'on a déjà admis, les phases doivent être impaires.

Si l'on veut augmenter la blancheur de la sortie, on voit qu'une condition nécessaire pour que $y[k]$ soit un BB3 est que

$$(5.3) \qquad \left|\bar{S}_3^x(\nu_1, \nu_2)\right|^2 = k_3\, \bar{S}_2^x(\nu_1)\, \bar{S}_2^x(\nu_2)\, \bar{S}_2^x(\nu_1 + \nu_2)$$

où k_3 est une constante et on conçoit alors qu'il n'est pas toujours possible d'atteindre ce but. Ainsi si l'on reprend l'exemple étudié au paragraphe 3.4, $x_n = u_n^2 u_{n-1}$ où u_n est un BBP stationnaire, on vérifie aisément que x_n est stationnaire et est un BB2. On va montrer que x_n n'est pas blanchissable à l'ordre 3. Pour cela on est amené à calculer les cumulants d'ordre 3 de x_n. Comme x_n est centré et stationnaire, on a d'après (2.7) et (4.7)

$$(5.4) \qquad \bar{C}_3[i, j] = E(x_i\, x_j\, x_0) .$$

On s'aperçoit rapidement que les seuls couples (i, j) donnant un cumulant non nul sont $(0, 0)$, $(0, 1)$ et $(-1, -1)$ de sorte que

(5.5) $\bar{S}_3^x(\nu_1, \nu_2) = m_3 m_6 + m_2^2 m_5 \{\exp(j\, 2\pi(\nu_1 + \nu_2)) + \exp(-j\, 2\pi \nu_1) + \exp(-j\, 2\pi \nu_2)\}$.

On retrouve que x_n est un BB3 si et seulement si $m_5 = 0$. Si $m_5 \neq 0$, on constate sur (5.5) que le module du bispectre n'est pas constant et donc d'après (5.3), x_n n'est pas blanchissable à l'ordre 3.

On peut maintenant donner des conditions suffisantes de blanchissage d'ordre supérieur. L'exemple le plus simple est celui du gas gaussien puisque tous les polyspectres d'ordre $j > 2$ sont nuls. D'autre part tout signal obtenu par filtrage d'un BBp par un filtre possédant un inverse bien défini est blanchissable à l'ordre p : il suffit en effet d'appliquer le filtre inverse.

En conclusion on voit qu'il n'est pas possible, sauf dans des cas très particuliers, de blanchir à un ordre supérieur à deux un signal aléatoire $x[k]$ par filtrage linéaire. On peut alors se poser la question moins ambitieuse qui concerne la conservation de la blancheur par filtrage linéaire et on constatera dans la suite qu'elle est étroitement liée au caractère gaussien.

5.2. CONSERVATION DE LA BLANCHEUR ET CARACTÈRE GAUSSIEN

Le signal $x[k]$ étant maintenant supposé de plus BBq, on a d'après (4.13)

$$\bar{S}_p^y(\boldsymbol{\nu}) = G(\nu_1) \ldots G(\nu_{p-1})\, G^*(\nu_1 + \cdots + \nu_{p-1})\, C_p^x , \quad 2 \leq p \leq q . \tag{5.6}$$

Commençant par $p = 2$, on voit que la conservation de la blancheur d'ordre 2 conduit à la relation bien connue

$$|G(\nu)|^2 = M^2 \tag{5.7}$$

où M est une constante, ce qui caractérise un filtre de phase dont le gain complexe s'écrit

$$G(\nu) = M \exp[j\phi(\nu)] . \tag{5.8}$$

Examinons maintenant la question de la conservation de la blancheur d'ordre 3 pour un filtre satisfaisant déjà (5.8). Le polyspectre d'ordre 3, ou bispectre, devant être constant nous devons avoir si $C_3^x \neq 0$,

$$G(\nu_1)\, G(\nu_2)\, G^*(\nu_1 + \nu_2) = \lambda \tag{5.9}$$

où λ est une constante réelle indépendante de la fréquence.

Remplaçant $G(\nu)$ par la valeur tirée de (5.8) et tenant compte du fait que la phase est toujours définie à 2π près nous obtenons

$$\phi(\nu_1 + \nu_2) = \phi(\nu_1) + \phi(\nu_2) \bmod (2\pi) . \tag{5.10}$$

Comme cette relation doit être vraie quels que soient ν_1 et ν_2, nous déduisons que $\phi(\nu)$ doit être une phase linéaire, ou linéaire par morceaux, soit

$$\phi(\nu) = 2\pi\nu\tau . \tag{5.11}$$

Comme le filtre est à temps discret et de réponse impulsionnelle $h[k]$, k entier, son gain complexe est périodique et de période un. Il en résule que dans (5.11) la quantité τ doit être entière, et le filtre n'effectue qu'une translation dans le temps de τ. Il est évident qu'un tel filtre remplaçant $x[k]$ par $x[k+\tau]$ conserve toutes les formes de blancheur. Éliminant ce cas trivial on voit d'après (5.6) que $\bar{S}_3(\nu)$ ne peut être constant que si $C_3^x = 0$. On peut évidemment faire le même raisonnement pour toutes les valeurs de p.

En conclusion pour que la blancheur à l'ordre q soit conservée par un filtre de phase ne se réduisant pas à une translation temporelle, il faut et il suffit que les cumulants C_p^x apparaissant dans (5.6) soient nuls pour $2 < p \leq q$.

On dit alors que le BBq $x[k]$ est *gaussien jusqu'à l'ordre* q puisque tous les cumulants d'ordre supérieur à deux d'un BB gaussien sont nuls.

On vient donc d'établir une relation entre la conservation de la blancheur d'un signal $x[k]$ stationnaire et le caractère gaussien. On donne en annexe une autre relation du même type en se basant sur des hypothèses de blancheur du signal $y[k]$ différentes, ce qui permet de retrouver des résultats de même nature, obtenus dans un contexte entièrement différent ([16], [21]-[25]).

6. Blancheur et filtrage de Volterra d'ordre 2

Le filtrage linéaire étudié au paragraphe précédent est maintenant remplacé par le filtrage de Volterra d'ordre deux réel et stationnaire. La sortie $y[k]$ est stationnaire et on étudie les transformations de la blancheur. Le signal $y^c[k]$ est déduit de $y[k]$ par centrage. Pour simplifier les notations nous commençons par étudier le cas du filtre quadratique.

6.1. FILTRE QUADRATIQUE

La relation entrée-sortie s'écrit

$$y[k] = \sum_{i,j} h[i,j]\, x[k-i]\, x[k-j] \tag{6.1}$$

et sans restreindre la généralité on peut supposer que ce filtre est symétrique de sorte que $h[i,j] = h[j,i]$.

On s'intéresse dans un premier temps aux conditions sur le filtre quadratique telles que $y^c[k]$ soit un BB2 lorsque $x[k]$ est un BB4. On est donc amené à exprimer la covariance du signal $y[k]$ en fonction des cumulants de $x[k]$. Pour ceci on peut utiliser les relations (2.5), (2.6) et (2.8) ou bien appliquer dans ce cas particulier les formules développées dans [14]. On trouve alors en tenant compte de la symétrie du filtre et de la stationnarité,

$$\bar{C}_2^y[\tau] = \sum_{i,j,k,l} h[i,j]\, h[k,l] \times \{\bar{C}_4^x[\tau+i-k, \tau+i-l, i-j] + 2\, \bar{C}_2^x[\tau+i-k]\, \bar{C}_2^x[\tau+j-l]\} . \tag{6.2}$$

Comme $x[k]$ est un BB4, l'expression précédente se simplifie et devient,

$$(6.3)\quad \bar{C}_2^y[\tau] = C_4^x \sum_i h[i,i]\, h[\tau+i, \tau+i] + \\ + 2\{C_2^x\}^2 \sum_{i,j} h[i,j]\, h[\tau+i, \tau+j],$$

que l'on peut écrire sous la forme

$$(6.4)\quad \bar{C}_2^y[\tau] = C_4^x\, R_1[\tau] + 2\{C_2^x\}^2\, R_2[\tau],$$

où $R_1[\tau]$ et $R_2[\tau]$ sont obtenus en comparant (6.3) et (6.4). Il apparaît alors que $R_1[\tau]$ est la fonction de corrélation de la suite numérique $h[i,i]$. D'autre part, en regroupant dans la somme double les termes situés sur une même parallèle à la première diagonale, $R_2[\tau]$ s'écrit,

$$(6.5)\quad R_2[\tau] = R_1[\tau] + 2 \sum_{k>0} R_{1,k}[\tau]$$

avec

$$(6.6)\quad R_{1,k}[\tau] \triangleq \sum_i h_k[i]\, h_k[\tau+i]$$

et

$$(6.7)\quad h_k[i] \triangleq h[i+k, i].$$

Il ressort de ces notations que $R_1[\tau] = R_{1,0}[\tau]$ et que $\forall k \geqslant 0$, $R_{1,k}[\tau]$ est la fonction de corrélation de la suite $h_k[i]$ qui peut être interprétée comme la réponse impulsionnelle d'un filtre linéaire H_k. Comme la transformée de Fourier de $R_{1,k}[\tau]$ est égale au carré du module du gain complexe $H_k(\nu)$ de H_k, on déduit de (6.4) et (6.5) l'expression de la densité spectrale de $y[k]$,

$$(6.8)\quad \bar{S}_2^y(\nu) = (C_4^x + 2\{C_2^x\}^2)\, |H_0(\nu)|^2 + \\ + 4\{C_2^x\}^2 \sum_{k>0} |H_k(\nu)|^2.$$

On aurait pu aussi obtenir cette expression à partir de (6.3), en faisant intervenir la transformée de Fourier bidimensionnelle de $h[i,j]$ et en effectuant le même type de regroupements que dans $R_2[\tau]$.
Le signal $y^c[k]$ est un BB2 si et seulement si

$$(6.9)\quad \bar{S}_2^y(\nu) = C_2^y.$$

D'après (6.8), si tous les H_k, $k \geqslant 0$, sont des filtres de phase, (6.9) est réalisée. Mais cette condition suffisante n'est pas nécessaire. Par exemple si l'on considère un signal d'entrée $x[k]$ tel que $C_4^x = 0$ et le signal $y[k]$ défini par

$$(6.10)\quad y[k] = x^2[k] + 2\,x[k]\,x[k-1] - 2\,x^2[k-1] + \\ + 2\,x[k-1]\,x[k-2],$$

on vérifie aisément que

$$(6.11)\quad |H_0(\nu)|^2 = 9 - 8\cos^2(\pi\nu),$$

$$(6.12)\quad |H_1(\nu)|^2 = 4\cos^2(\pi\nu)$$

et

$$(6.13)\quad \forall k > 1,\quad H_k(\nu) = 0.$$

On en déduit donc que $y[k]$ est un BB2 et pourtant H_0 et H_1 ne sont pas des filtres de phase.
On peut interpréter le rôle des filtres H_k dans le calcul de la sortie $y[k]$ en regroupant dans (6.1) les termes d'une même parallèle à la première diagonale de sorte que

$$(6.14)\quad y[k] = y_0[k] + 2 \sum_{j>0} y_j[k] \quad \text{avec} \quad \forall j \geqslant 0,$$

$$(6.15)\quad y_j[k] = \sum_i h_j[i]\, v_j[k-i]$$

où

$$(6.16)\quad v_j[k] \triangleq x[k-j]\, x[k].$$

Le signal $x[k]$ étant un BB4, on peut vérifier en utilisant (6.16) que les VA $v_j[k]$ et $v_p[n]$ sont décorrélées, sauf si $k = n$ et $j = p$. D'après (6.15), ceci a pour conséquence que si $j \neq p$, alors $\forall (k,n)$, $y_j[k]$ et $y_p[n]$ sont des VA décorrélées. La sortie $y[k]$ s'interprète donc comme la somme des sorties des filtres linéaires H_k dont les entrées sont des signaux aléatoires $v_j[k]$ totalement décorrélés. Si de plus les H_k sont des filtres de phase, on constate au moyen de (6.15) que les $y_j[k]$ sont des BB2.
On peut maintenant s'intéresser à la conservation de l'indépendance statistique par filtrage quadratique et on se contente de donner une condition suffisante. Pour cela on suppose que $x[k]$ est un BB2 gaussien (donc un BBP) et on utilise le résultat suivant, valable sous cette hypothèse et qui a été démontré dans un contexte différent ([16] p. 71) : le signal $y^c[k]$ est un BBP si et seulement si, $\forall \tau \in \mathbb{Z}$, les matrices M_τ d'éléments $h[i+\tau, j+\tau]$ vérifient

$$(6.17)\quad M_0\, M_\tau = M_0^2\, \delta[\tau].$$

On peut développer le produit matriciel intervenant dans la relation précédente et si l'on pose

$$(6.18)\quad R_1[\tau; i, j] \triangleq \sum_k h[i,k]\, h[k+\tau, j+\tau],$$

on constate que (6.17) est équivalente à

$$(6.19)\quad \forall (i,j) \quad R_1[\tau; i, j] = R[i,j]\, \delta[\tau].$$

On peut vérifier que

$$(6.20)\quad R_2[\tau] = \sum_i R_1[\tau; i, i] = \mathrm{Tr}\,(M_0\, M_\tau),$$

où Tr (M) désigne la trace de la matrice M. On voit alors que si (6.17) est satisfaite alors la condition (6.9) l'est aussi puisque $C_4^x = 0$ et on retrouve que le signal $y^c[k]$ est un BB2. Un exemple de filtre qui satisfait (6.19) est

$$(6.21)\quad h[i,k] = h[i]\, h[k],$$

où $h[k]$ est la réponse impulsionnelle d'un filtre de phase.

Dans ce cas $y[k]$ s'écrit

(6.22) $$y[k] = \left\{\sum_i h[k-i]\, x[i]\right\}^2,$$

il s'agit d'un BB2 gaussien passé dans un filtre de phase puis élevé au carré et c'est donc bien un BBP.

En conclusion nous avons donné des conditions suffisantes de conservation de la blancheur d'ordre deux et de l'indépendance statistique d'un signal aléatoire dans une opération de filtrage quadratique. On examine maintenant les mêmes questions quand on considère la structure générale d'un filtre de Volterra d'ordre 2.

6.2. FILTRE DE VOLTERRA D'ORDRE 2

La relation entrée-sortie d'un tel filtre s'écrit

(6.23) $$y[k] = c + \sum_i h[i]\, x[k-i] + \sum_{i,j} h[i,j]\, x[k-i]\, x[k-j],$$

où le filtre quadratique possède les mêmes propriétés que précédemment.

En se plaçant de nouveau dans le cas où $x[k]$ est un BB4 on obtient comme précédemment l'expression de la covariance du signal $y[k]$,

(6.24) $$\bar{C}_2^y[\tau] = C_4^x R_1[\tau] + 2\{C_2^x\}^2 R_2[\tau] + C_3^x R_3[\tau] + C_2^x R_4[\tau]$$

où $R_1[\tau]$ et $R_2[\tau]$ ont été définis et

(6.25) $$R_3[\tau] \triangleq \sum_i \{h[i]\, h[\tau+i, \tau+i] + h[\tau+i]\, h[i,i]\}$$

(6.26) $$R_4[\tau] \triangleq \sum_i h[i]\, h[\tau+i].$$

La condition pour que $y^c[k]$ soit un BB2 s'écrivant

(6.27) $$\bar{C}_2^y[\tau] = C_2^y\, \delta[\tau],$$

on voit que le problème est plus complexe qu'au paragraphe 6.1. Cependant, si l'on ne s'intéresse qu'à une condition suffisante de conservation de la blancheur d'ordre deux, on constate d'une part, que si le filtre linéaire est un filtre de phase, $R_4[\tau]$ s'annule et d'autre part, si $C_3^x = 0$, $C_3^x R_3[\tau] = 0$. Sous ces deux conditions, on est ramené au cas du filtre quadratique.

Enfin, on peut donner une condition suffisante de conservation de l'indépendance statistique par filtrage de Volterra d'ordre deux. pour cela on suppose que $x[k]$ est un BB2 gaussien et on utilise encore un résultat existant ([16] p. 71) : le signal $y^c[k]$ est un BBP si et seulement si $\forall \tau \in \mathbb{Z}$, les matrices M_τ d'éléments $h[i+\tau, j+\tau]$ et les vecteurs V_τ de composantes $h[i+\tau]$ vérifient

(6.28) $$M_0\, M_\tau = M_0^2\, \delta[\tau],$$

(6.29) $$M_0\, V_\tau = M_0\, V_0\, \delta[\tau],$$

et

(6.30) $$V_0^T V_\tau = |V_0|^2\, \delta[\tau].$$

La condition (6.28) a déjà été étudiée, (6.30) signifie que le filtre linéaire de réponse impulsionnelle $h[k]$ est un filtre de phase et (6.29) s'écrit en développant,

(6.31) $$\forall i,\ \sum_j h[i,j]\, h[\tau+j] = R[i]\, \delta[\tau].$$

On voit alors qu'en utilisant dans (6.23) le filtre quadratique défini par (6.21) et le filtre linéaire qui lui est associé dans (6.21), on obtient un exemple de filtre de Volterra qui satisfait les contraintes précédentes.

7. Blancheur et transformations non linéaires instantanées

On conserve les notations introduites dans les paragraphes précédents et nous étudions tout d'abord le cas d'une transformation polynômiale à coefficients réels.

La relation entre $x[k]$ et $y[k]$ s'écrit alors

(7.1) $$y[k] = \sum_{i=1}^{l} a_{\nu_i} \{x[k]\}^{\nu_i}$$

où

(7.2) $$\forall i \in \{1, \ldots, l\},\ \nu_i \in \mathbb{N} \text{ et } a_{\nu_i} \in \mathbb{R}.$$

Si l'on pose

(7.3) $$\nu \triangleq \operatorname{Sup}_i (\nu_i),$$

on peut démontrer en utilisant les formules de [14] et la notion de partition indécomposable que si $x[k]$ est un BB$(p, \nu p)$ alors $y^c[k]$ est un BBp. Ce résultat généralise celui obtenu en 3.2 et naturellement la réciproque de la proposition précédente est fausse.

Dans le cas d'une transformation quelconque, l'analyse devient très complexe. On sait que si $x[k]$ est un BBP alors $y^c[k]$, si c'est toujours une VA, l'est aussi. Ceci est en particulier le cas si $x[k]$ est un BB2 gaussien. C'est précisément cette hypothèse de normalité que les auteurs ([26]-[28]) adoptent car elle simplifie considérablement le problème. Ainsi si $x[k]$ est un signal aléatoire stationnaire et gaussien de covariance normalisée $\rho^x[\tau]$, alors le signal $y[k]$ est stationnaire et si la transformation est développable en série au moyen des polynômes d'Hermite, on montre ([26]) que $|\rho^x[\tau]| \geq |\rho^y[\tau]|$. On peut alors dire dans un certain sens que « $y^c[k]$ est plus proche du BB2 que $x[k]$ ». Cette propriété devient fausse si l'on enlève l'hypothèse gaussienne comme le montre l'exemple pris en 3.3 où $x[k]$ est un BBF et $y^c[k]$ n'est pas un BB2.

8. Conclusion

Nous avons montré dans cet article que l'usage des cumulants dans l'étude des statistiques d'ordre supérieur à deux permet d'étendre avec un formalisme assez simple la notion de blancheur d'un signal aléatoire, jusqu'alors limité à l'ordre deux. Nous avons défini une multitude de classes de bruits blancs d'ordre supérieur et montré qu'il existe des relations non triviales entre toutes ces classes. Puis, examinant les transformations de la blancheur dans des opérations couramment pratiquées en traitement du signal, nous avons en particulier trouvé des résultats bien connus des statisticiens concernant la caractérisation de la loi gaussienne. Enfin, nous avons établi une condition générale de conservation de la blancheur dans une transformation instantannée polynomiale.

On donne ci-dessous un tableau récapitulatif des différentes définitions de la blancheur d'ordre supérieur proposées dans cet article.

Dénomination de la blancheur	Définition
Bruit blanc d'ordre 2	suite de variables aléatoires décorrélées
Bruit blanc pur	suite de variables aléatoires indépendantes
Bruit blanc fort	$E[x_n \mid \{x_i\}_{i \neq n}] = 0$
Bruit blanc fort causal	$E[x_n \mid \{x_i\}_{i < n}] = 0$
Bruit blanc de degré d	$C(x_{i_1}, x_{i_2}^{\alpha_2}) = C(x_i^{\alpha})\,\delta[i_1, i_2, i]$, $\alpha = 1 + \alpha_2$, $1 \leqslant \alpha_2 \leqslant d$
Bruit blanc de degré d causal	$C(x_{i_1}, x_{i_2}^{\alpha_2}) = C(x_i^{\alpha})\,\delta[i_1, i_2, i]$, $\alpha = 1 + \alpha_2$, $1 \leqslant \alpha_2 \leqslant d$, $i_1 \geqslant i_2$ (sauf pour $\alpha_2 = 1$)
Bruit blanc d'ordre q	$C(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}) = C(x_i^k)\,\delta[i_1, i_2, \dots, i_k, i]$, $2 \leqslant k \leqslant q$
Bruit blanc (p, q)	$C(x_{i_1}^{\alpha_1}, \dots, x_{i_k}^{\alpha_k}) = C(x_i^{\alpha})\,\delta[i_1, \dots, i_k, i]$, $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k \geqslant k$, $2 \leqslant k \leqslant p$, $2 \leqslant \alpha \leqslant q$

Remerciements

Ce travail a été partiellement soutenu par la convention 8948603009 du GERDSM, Le Brusc.

Annexe

On présente ici un autre résultat illustrant le lien entre les transformations de la blancheur d'un signal aléatoire stationnaire par filtrage linéaire et le caractère gaussien.

THÉORÈME : *On note* $x[k]$ *l'entrée d'un filtre linéaire* H *de réponse impulsionnelle* $h[k]$ *et* $y[k]$ *ou* y_k *la sortie. Supposons que* $x[k]$ *soit un BBq stationnaire* $(q > 2)$ *et que* H *soit un filtre de phase,*

$$\text{(A1)} \qquad \forall n \in \mathbb{Z}, \quad \sum_k h[k]\, h[k+n] = |h|^2 \delta[n],$$

vérifiant de plus

$$\text{(A2)} \qquad \exists p \in \mathbb{N}, \quad 2 < p \leqslant q \setminus \forall j \in \{2, \dots, p-1\}, \quad \exists n \in \mathbb{N} - \{0\} \setminus \sum_k h^j[k]\, h[k+n] \neq 0.$$

Alors $y[k]$ *est un* $\mathrm{BB}^{p-1}\mathrm{C}$ *si et seulement si* $x[k]$ *est gaussien d'ordre* p.

Preuve : On note

$$\text{(A3)} \qquad \mathrm{I} \triangleq \{1, \dots, p-1\}.$$

Soit $j \in \mathrm{I}$, nous avons d'après P_2

$$\text{(A4)} \quad C(y_r, y_s^j) = \sum_{l_0} \cdots \sum_{l_j} h[r - l_0]\, h[s - l_1] \cdots h[s - l_j]\; C^x[l_0, l_1, \dots, l_j].$$

D'autre part, $x[k]$ est un BBq stationnaire et $j \in \mathrm{I}$ donc,

$$\text{(A5)} \qquad C^x[l_0, l_1, \dots, l_j] = C^x_{j+1}\, \delta[l_0, l_1, \dots, l_j]$$

ce qui donne en reportant dans (A4),

$$\text{(A6)} \qquad C(y_r, y_s^j) = C^x_{j+1} \sum_k h^j[k]\, h[k + l]$$

avec

$$\text{(A7)} \qquad l \triangleq r - s.$$

Le signal $y[k]$ étant stationnaire, il est $\mathrm{BB}^{p-1}\mathrm{C}$ si et seulement si

$$\text{(A8)} \qquad \forall l \geqslant 0, \forall j \in \mathrm{I}, \quad C(y_r, y_s^j) = C^y_{j+1}\, \delta[l],$$

soit

$$\text{(A9)} \qquad \forall l \geqslant 0, \forall j \in \mathrm{I}, \quad C^y_{j+1}\, \delta[l] = C^x_{j+1} \sum_k h^j[k]\, h[k+l].$$

Supposons

$$\text{(A10)} \qquad \exists j \in \mathrm{I} - \{1\}, C^x_{j+1} \neq 0,$$

on a alors d'après (A2) une contradiction avec (A9) et on en déduit donc que si $y[k]$ est un $\mathrm{BB}^{p-1}\mathrm{C}$ alors $x[k]$ est gaussien d'ordre p. La réciproque est évidente d'après (A9).

On a vu au paragraphe 3 que si $y[k]$ est un BBP ou un BBF alors c'est un $\mathrm{BB}^{p-1}\mathrm{C}$ et on retrouve ainsi que les propriétés d'indépendance ou de constance de la régression de $y[k]$ caractérisent la normalité du signal $x[k]$ ([16], [21]-[25]).

Pour illustrer ce théorème on peut donner un exemple dans la classe des filtres dynamiques. Il est connu qu'un filtre dynamique est un filtre de phase si et seulement si les pôles et les zéros de sa fonction de transfert en z, $H(z)$ sont conjugués harmoniques c'est-à-dire que a est un pôle si et seulement si a^{-1} est un zéro. L'exemple le plus simple est

(A11) $$H(z) = \frac{a - z^{-1}}{1 - az^{-1}}$$

où $a \in \mathbb{R}$ et $|a| < 1$. On en déduit directement $h[k]$,

(A11) $$h[k] = \begin{cases} (a^2 - 1)\, a^{k-1} & k > 0 \\ a & k = 0 \\ 0 & k < 0 \end{cases}$$

et on peut montrer que si

(A13) $$(1/2)^{-1/2} \leqslant a < 1\,,$$

alors

(A14) $$\forall j > 1, \forall n \in \mathbb{N} - \{0\}\,, \quad \sum_k h^j[k]\, h[k+n] \neq 0\,.$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] B. Picinbono, *Théorie des signaux et systèmes*, Dunod, 1989.

[2] D. R. Brillinger, An introduction to polyspectra, *Ann. Math. Stat. 36*, p. 1351-1374, 1965.

[3] K. S. Lii and M. Rosenblatt, Deconvolution and estimation of transfer function phase and coefficients for non-gaussian linear process, *Ann. Stat.* 10, p. 1195-1208, 1982.

[4] M. Rosenblatt, *Cumulant and cumulant spectra*, In Time series in the frequency domain, chap. 17, D. R. Brillinger and P. Krishaïah, North Holland, 1983.

[5] T. Subba rao and M. M. Gabr, *An introduction to bispectral analysis and bilinear times series models*, Lect. notes in stat. 24, Springer-Verlag, 1984.

[6] B. Picinbono and P. Duvaut, *Optimal linear-quadratic systems for detection and estimation*, IEEE Trans. II, IT. 34, p. 304-311, 1988.

[7] G. B. Giannakis and J. M. Mendel, *Identification of non-minimum phase systems using higher-order statistics*, IEEE Trans. ASSP. 37, p. 360-377, 1989.

[8] B. Picinbono, *Estimation non linéaire de l'amplitude d'un signal*, 12e Colloque GRETSI, 1989.

[9] C. W. J. Granger, *Forecasting white noise*, Discussion paper.

[10] A. Blanc-Lapierre et R. Fortet, *Théorie des fonctions aléatoires*, Masson, 1953.

[11] D. Guegan, *Étude d'un modèle non linéaire, le modèle superdiagonal d'ordre 1*, C.R. Acad. Sc. Paris, t. 293, p. 95-98, 1981.

[12] D. Guegan, *Cadre d'étude pour des modèles non linéaires*, C.R. Acad. Sc. Paris, t. 296, p. 167-170, 1983.

[13] M. G. Kendall and A. Stuart, *The advanced theory of statistics*, Griffin, vol. 1, chap. 3, 1969.

[14] V. P. Leonov and A. N. Shiryaev, *On a method of calculation of semi-invariants*, Th. Prob. Appl. vol. 4, n° 3, p. 319-329, 1959.

[15] A. Segal, *Stochastic processes in estimation theory*, IEEE Trans. IT. 22, p. 275-286, 1976.

[16] E. Lukacs and R. G. Laha, *Applications of characteristic functions*, Hafner, New York, 1964.

[17] J. Stoyanov, *Counterexamples in probability*, Wiley, 1987.

[18] B. Picinbono, Sur certains problèmes concernant la détection des signaux faibles, *Ann. Téléc.* 16, p. 2-33, 1961.

[19] D. R. Brillinger, *Time series data analysis and theory*, Holt, Rinehart and Winston, 1975.

[20] A. N. Shiryaev, Some problems in spectral theory of higher-order moments I, *Th. Prob. App.* vol. 5, n° 3, p. 265-284, 1960.

[21] A. M. Kagan, Yu Linnik, C. R. Rao, *Characterization problems in mathematical statistics*, Wiley, New York, 1973.

[22] G. Darmois, Analyse générale des liaisons stochastiques, *Rev. Inst. Inter. Stat.* 21, p. 2-8, 1953.

[23] V. P. Skitovich, Linear forms in independent random variables and the normal distributions, *Selected Translation in Math. Stat. and Prob.* 2, p. 211-228, 1962.

[24] J. M. Marcinkiewicz, *Sur une propriété de la loi de Gauss, Math. Zeitschrift*, 44, p. 612-618, 1939.

[25] E. Masry and B. Picinbono, Linear/Non linear forms and the normal law : Characterization by high order correlations, *Ann. Inst. Stat. Math.* 39, part A, p. 417-428, 1987.

[26] C. W. J. Granger and P. Newbold, Forecasting transformed series, *J.R.S.S.* série B, 38, p. 189-203, 1976.

[27] G. Bonnet, *Sur certaines propriétés statistiques de fonctions aléatoires issues de transformations non linéaires*, C.R. Acad. Sc. Paris, t. 258, p. 4917-4920, 1964.

[28] G. Bonnet, Transformations des signaux aléatoires à travers les systèmes non linéaires sans mémoire, *Ann. Téléc.* 19, p. 203-220, 1964.

Manuscrit reçu le 6 février 1990.