

**Estimation de la structure**  
**des corrélations spatiales du bruit**  
**reçu sur une antenne de grande dimension**

**Estimation of the spatial correlation of the noise**

**received on a large array**

**J. P. LE CADRE**



IRISA, Campus de Beaulieu, Avenue Général Leclerc, 35042 RENNES CEDEX.

Jean-Pierre Le Cadre a soutenu une thèse de 3<sup>e</sup> cycle en juin 1982, puis une thèse de Doctorat d'Etat en octobre 1987, toutes deux en traitement du signal et à l'INPG. De 1980 à 1988, ses travaux portent essentiellement sur le traitement d'antenne appliqué à l'acoustique sous-marine et sont effectués au GERDSM. Depuis le 1<sup>er</sup> octobre 1988, J.-P. Le Cadre est affecté à l'IRISA (Rennes) en qualité de Chargé de recherche au CNRS.

**P. GOUNON**



CEPHAG, B.P. n° 46, 38402 SAINT MARTIN D'HÈRES.

P. GOUNON a effectué un DEA de géophysique à Grenoble en 1985. Après une année de scientifique du contingent au GERDSM, il exerce des activités d'enseignement à l'INPG et des activités de recherche au CEPHAG en traitement d'antenne appliqué à l'acoustique sous-marine. Il termine actuellement une thèse de doctorat.

**RÉSUMÉ**

Le but de cet article est de présenter une méthode pour l'estimation des corrélations spatiales du bruit reçu sur une antenne de grande dimension (nombre de capteurs important). Dans ce but, on développe un algorithme utilisant les sorties de formation de voies. Les propriétés asymptotiques de la méthode sont détaillées ainsi que diverses extensions de celle-ci. Son comportement est illustré sur plusieurs simulations.

La méthode développée s'avère robuste et efficace, son faible coût de calcul devrait permettre de l'intégrer sans difficulté au traitement d'antenne et d'en améliorer les performances.

**MOTS-CLÉS :** Traitement d'antenne, Estimation de bruit, Fonctionnelle d'entropie relative.

**SUMMARY**

*This paper intends to present a method of estimating the spatial correlation of the noise received on a large array (high number of sensors). With this aim in view, we develop an algorithm which uses beamforming outputs. The asymptotic properties of the method are detailed as well as many extensions of this one. Its behavior is illustrated by many simulations.*

*The developed method proves robust and efficient. Its low computation cost should allow to integrate without any difficulty into array processing and to improve its performances.*

**KEY WORDS :** Array processing, Noise estimation, Relative entropy functional.

## 1. Introduction

Le problème de l'estimation des corrélations spatiales (intercapteurs) du bruit additif reçu sur une antenne se pose de manière cruciale pour l'utilisation directe des méthodes haute résolution [1] en sortie des capteurs. Un exemple typique est celui des signaux d'acoustique sous-marine où le bruit additif peut être fortement corrélé ; ainsi même un bruit isotrope sphérique conduit à des corrélations spatiales (du bruit) non nulles (sauf aux espacements multiples d'une demi-longueur d'onde).

Pour la suite de cet article, on appellera bruit additif la somme de tous les types de bruits reçus sur l'antenne, c'est-à-dire la somme du bruit de mer ambiant, du bruit de trafic, du bruit d'écoulement... On considérera donc que c'est la partie du signal reçu qui n'est pas totalement cohérente spatialement. Cette définition ne manque pas d'ambiguïté et laisse volontairement de côté les problèmes de détection des sources. Ainsi, à partir de quel niveau doit-on inclure une source faible au bruit de trafic ? Le débat est, à ce niveau, plutôt philosophique et nous nous attacherons surtout à prouver le bien fondé de notre définition ainsi que son utilité pratique, tout en ayant bien à l'esprit ses limitations. Celles-ci sont aussi celles du traitement d'antenne (T.A.) comme on le verra par la suite.

Ces dernières années ont vu l'émergence de nouvelles méthodes de traitement d'antenne utilisant les propriétés des interspectres des signaux reçus sur l'antenne. L'identification du champ de signaux reçus repose sur des hypothèses physiques (cohérence spatiale des sources, sources ponctuelles, sources décorrélées entre elles et décorrélées du bruit) et conduit, grâce à des techniques puissantes d'algèbre linéaire, à des méthodes de traitement d'antenne ayant un pouvoir de résolution élevé. Ces méthodes supposent de plus que le bruit de fond est blanc spatialement. Cette hypothèse n'est pas vérifiée en général, mais si la matrice de covariance du bruit est connue, on peut se ramener par blanchiment spatial à un bruit blanc. Il est donc important dans la pratique d'estimer les corrélations du bruit additif reçu sur l'antenne.

De très nombreux articles existent sur ces nouvelles méthodes de traitement d'antenne. Toutefois, l'étude des interspectres n'est pas une fin en soi et pour l'utilisateur, seule compte la densité spatio-temporelle du processus à deux dimensions (temps et espace) observée sur les capteurs. Les méthodes à haute résolution angulaire peuvent considérablement améliorer l'estimation de cette densité bidimensionnelle (fréquences temporelles et spatiales) [2] ; cependant, dans le cas d'une antenne de grande dimension, l'amélioration vis-à-vis de l'analyse de Fourier bidimensionnelle est proportionnellement moins grande [3] au prix d'un accroissement considérable de la charge de calcul (évoluant en première approximation comme le cube du nombre de capteurs). L'intérêt de l'analyse de Fourier 2-D (au moins pour le préfiltrage spatial [4], [5]) apparaît donc de façon évidente.

Les corrélations du bruit additif se traduisent alors

par les propriétés de la densité spectrale de puissance spatio-temporelle (ou directivité [6]) de celui-ci. Cette directivité est en général variable dans le cas d'un bruit spatialement corrélé et peut, suivant la nature du bruit, la forme de l'antenne, présenter des variations très importantes (en terme de fréquences spatiales). Ce phénomène traduit la coloration spatiale du bruit [7]. A partir de l'étude de cette fonction de directivité spatiale, il est relativement aisé de quantifier l'influence de la corrélation spatiale du bruit sur les divers T.A. Si les conséquences de cette directivité peuvent apparaître catastrophiques pour les méthodes dites à haute résolution, elles sont moins dramatiques pour les méthodes classiques (analyse de Fourier, méthode de Capon, prédiction linéaire). Toutefois, même pour ces méthodes elles peuvent être importantes dans la pratique car elles induisent des variations locales du gain d'antenne pouvant être considérables. Ces variations locales pourront avoir comme effets néfastes la non-détection des sources faibles en sortie de T.A. classique.

Après formation de voies (TF spatiale), le problème du traitement spatial consiste en fait à extraire des raies spatiales (associées à des sources) d'un « fond » continu correspondant à la densité spatiale du bruit. Dans la pratique, le nombre de capteurs est limité et les intensités relatives des sources très différentes. Le traitement (formation de voies) transforme les raies spatiales par la fonction de directivité de l'antenne ; par conséquent, lorsque le bruit est lui-même fortement directif, la détection des sources faibles devient très difficile.

Les remèdes classiques s'appellent algorithmes de normalisation et reposent en général sur l'étude des variations locales de la puissance en sortie de formation de voies. Ces algorithmes sont le plus souvent heuristiques [8] et effectuent un traitement local avec tous les dangers que cela comporte. On s'attache ici à développer une méthode globale (i.e. sur l'ensemble des fréquences spatiales ou encore sur tout l'horizon en gisement) d'estimation de la directivité du bruit vue par l'antenne. Le traitement proposé utilisera comme observations les sorties de formation de voies (et non celles des capteurs) qui constituent les données de référence pour tout sonariste.

La méthode proposée devra donc être utilisable directement en sortie de formation de voies, de plus elle devra posséder les qualités suivantes sans lesquelles son intérêt pratique serait nul : robustesse (vis-à-vis des hypothèses physiques, de la puissance des sources), faible coût de calcul, convergence assurée.

La méthode est présentée dans un premier temps puis ses propriétés sont étudiées. Elle repose sur la définition d'une fonctionnelle dite d'entropie relative. La maximisation de cette fonctionnelle nécessite l'usage d'algorithmes itératifs (méthode de gradient) qui sont détaillés (calcul des gradients, convergence, approximation du pas optimal). On présente ensuite l'extension de cette méthode à l'identification multifréquences (pseudo large-bande) du modèle du bruit additif. L'exposé est enfin complété par la

présentation de méthodes rapides de blanchiment spatial adaptées au problème posé (sorties de formation de voies).

Des résultats de simulation mettent en évidence l'intérêt de la méthode en traitement d'antenne (son coût est chiffré pour quelques exemples) ainsi que l'utilité de l'analyse multifréquences.

**Notations :** Pour la suite de l'exposé, les lettres majuscules maigres désignent des matrices tandis que les lettres majuscules grasses désignent des vecteurs.

## 2. Définition de la fonctionnelle d'entropie relative dans le cas d'une antenne de grande dimension

### 2.1. PRÉSENTATION DE LA FONCTIONNELLE D'ENTROPIE RELATIVE, PROPRIÉTÉS

Considérons une antenne linéaire constituée de  $n_c$  capteurs équirépartis. On se place à une fréquence donnée  $f_0$  (omise pour la suite de l'exposé), on souhaite estimer la matrice interspectrale  $B$  du bruit additif. On appellera (*abusivement*) corrélations du bruit les interspectres de celui-ci à la fréquence  $f_0$ . Pour cela, les seules observations disponibles sont les sorties des capteurs de l'antenne, dont un résumé exhaustif à la fréquence  $f$  est la matrice interspectrale  $R$ . Algébriquement, le problème s'énonce très simplement par l'équation ci-dessous :

$$(1) \quad R = S + B$$

( $S$  étant la matrice interspectrale des sources).  
Tel quel, ce problème n'a aucun sens. On est alors amené à faire les hypothèses suivantes :

- le nombre de sources est majoré (la matrice  $S$  est de rang déficient)
- $B$  correspond à une hypothèse de corrélation courte.

Cette dernière hypothèse est fondamentale. Utilisant le fait que l'on dispose (théoriquement) de plusieurs échantillons vectoriels indépendants du bruit additif sur l'antenne et le concept d'information mutuelle [9], on définit une fonctionnelle dite d'entropie relative par la formule ci-dessous [9], [10] :

$$(2) \quad H(B) = \log \det (R - B) + L \log \det (B)$$

(det : signifiant déterminant)

Dans cette formule,  $L$  est un facteur scalaire appelé facteur de redondance (pour l'information relative à la structure du bruit). Le problème numérique qui se pose est l'estimation de la matrice  $B$  (définie positive) qui maximise la fonctionnelle d'entropie relative (FER).

Pour que ce problème ait un sens numérique, il est nécessaire de supposer une paramétrisation de  $B$  : cela peut être un modèle Toeplitz-bande (il faut inclure l'hypothèse supplémentaire de positivité dans ce cas), un modèle M.A. spatial, ... Il est alors

possible de donner (indirectement) une borne sur la précision de l'estimation des paramètres définissant  $B$ .

Plus précisément, soit  $B_0$  la matrice interspectrale du bruit additif, en supposant que  $B_0$  peut être décrite par la paramétrisation définissant  $B$  et sans considération des problèmes d'estimation de  $R$ , la propriété fondamentale ci-dessous a été démontrée [10], [11].

**Propriété 1 :** Soient  $\hat{B}$  la matrice maximisant  $H$  (sous les contraintes de positivité de  $B$  et de  $R - B$ ) et  $\hat{\lambda}_i^w$  les valeurs propres de  $B_0^{-1} \cdot \hat{B}$ , ces valeurs propres satisfont les inégalités ci-dessous :

$$(3) \quad \frac{L}{L+1} \leq \hat{\lambda}_i^w \leq 1.$$

La démonstration de cette propriété nécessite des calculs élémentaires mais assez longs d'algèbre linéaire exposés en annexe A. Notons de plus que le résultat est donné uniquement en fonction des valeurs propres de  $B_0^{-1} \cdot \hat{B}$ . Evidemment lorsque  $L$  croît les valeurs propres  $\hat{\lambda}_i^w$  tendent vers 1 ce qui assure, sous des hypothèses réalistes, que  $\hat{B}$  tend vers  $B_0$  [9], [10], [11] (au sens d'une norme matricielle). Cette propriété (qui est uniquement asymptotique) est vraie quelles que soient les puissances des sources.

Une propriété équivalente (**Propriété 3**) sera démontrée beaucoup plus simplement par la suite ; de plus les bornes pour l'estimation des paramètres définissant  $B$  seront données de façon explicite et le sens physique de cette propriété apparaîtra plus clairement.

Notons que ce résultat suppose de plus les hypothèses suivantes :

- Nombre de sources inférieur à la dimension de  $R$ .
- Cohérence spatiale des sources.

Compte-tenu des hypothèses faites sur le bruit (faible longueur de corrélation, stationnarité spatiale), la paramétrisation la plus générale de la matrice de bruit consiste à écrire  $B$  sous la forme d'une matrice Toeplitz-bande :

$$B = \sum_{i=0}^p \beta_i U_i$$

avec : 
$$U_i(k, l) = \begin{cases} 1 & \text{si } |k - l| = i \\ 0 & \text{si } |k - l| \neq i \end{cases}$$

et  $p$  : longueur de corrélation du bruit.

Le problème numérique de maximisation de la FER nécessite de maximiser celle-ci relativement aux corrélations spatiales  $\beta_i$  du bruit. Pour cela on dispose fort heureusement de la propriété ci-dessous [9], [10], [11].

**Propriété 2 :** La fonctionnelle d'entropie relative est concave relativement aux corrélations spatiales du bruit.

Cette propriété dont on rappelle l'origine en annexe A assure la convergence des méthodes de gradient à

pas optimal. Ce dernier peut être calculé grâce à un algorithme simple et efficace [10], [11]. Les problèmes d'unicité de la décomposition sources et bruit ont été succinctement abordés sous l'angle de l'algèbre linéaire dans [10], [11], ainsi que les problèmes d'identifiabilité de la structure de corrélation du bruit.

On voit donc l'intérêt de cette méthode. Cependant elle nécessite pratiquement l'usage de techniques d'analyse numérique matricielle qui présentent d'une part l'inconvénient d'avoir un coût de calcul croissant comme approximativement le cube de la dimension de  $R$  et d'autre part de ne pas utiliser directement les sorties de formation de voies. Par passage à la limite (nombre de capteurs élevé), il va être possible de définir une méthode dérivée de celle-ci et ne possédant pas ces deux inconvénients. La formulation matricielle précédente de la FER sera traduite en une fonctionnelle de termes scalaires.

## 2.2. ANALYSE EN FRÉQUENCES SPATIALES

Définissons en premier lieu les grandeurs qui seront utilisées par la suite. On considérera un processus  $X(t, M)$  doublement indicé par le temps et l'espace, stationnaire temporellement et spatialement, de fonction de corrélation spatio-temporelle :

$$(4) \quad R(\tau, \mathbf{r}) = E \{ X(t, M) \cdot \bar{X}(t - \tau, M - \mathbf{r}) \}.$$

Sa densité spectrale spatio-temporelle, fonction de la fréquence  $f$  et du vecteur  $\mathbf{k}$  des nombres d'onde (ou fréquences spatiales), est définie par :

$$(5) \quad P(f, \mathbf{k}) = \int_{\mathbb{R}^4} R(\tau, \mathbf{r}) e^{-2i\pi(f \cdot \tau + \mathbf{k}^* \cdot \mathbf{r})} d\tau d\mathbf{r}$$

(\* : signifiant transposition suivie de conjugaison [12]).

Cette définition correspond à une double transformation de Fourier (temps, espace) de la fonction de corrélation  $R(\tau, \mathbf{r})$  [13], [14].

Pour la suite de l'exposé, on désigne par  $d$  l'espace intercapteur et par  $\lambda$  la longueur d'onde. Le processus  $X$  est observé au moyen d'une antenne linéaire de centre de phase 0, comportant  $n_c$  capteurs, située sur une droite confondue avec l'axe  $Ox$  et admettant un espacement intercapteur constant. On appelle  $\theta$  et  $s$  les angles de gisement et de site d'un point  $M$  quelconque dont  $M'$  est la projection orthogonale sur le plan  $(Ox, Oy)$ , on a alors  $\theta = (Ox, OM')$  et  $s = (OM, OM')$ .

Un vecteur d'onde  $\mathbf{k}$  colinéaire à  $OM$  a pour composantes :

$$(6) \quad \mathbf{k} = \frac{1}{\lambda} \begin{pmatrix} \cos(\theta) \cdot \cos(s) \\ \sin(\theta) \cdot \cos(s) \\ \sin(s) \end{pmatrix}$$

Les capteurs étant alignés sur  $Ox$ , le vecteur  $\mathbf{r}$  a pour composantes  $(r, 0, 0)$ ; on appelle  $(k, k', k'')$  les composantes de  $\mathbf{k}$ , le produit scalaire  $\mathbf{k}^* \cdot \mathbf{r}$  se réduit

au produit simple  $k \cdot r$  et l'intégrale quadruple devient une intégrale double.

$$(7) \quad P(f, k) = \int_{\mathbb{R}^2} R(\tau, r) e^{-2i\pi(f \cdot \tau + k \cdot r)} d\tau dr.$$

Cette formule ne correspond à aucune hypothèse particulière sur le champ reçu. Elle est valable aussi bien pour le signal que pour le bruit pourvu qu'ils soient tous deux stationnaires temporellement et spatialement.

Une antenne linéaire composée de  $n_c$  capteurs équirépartis sur une droite avec un espacement élémentaire  $d$  réalise un échantillonnage spatial du processus spatio-temporel  $X(t, M)$ . La formule 7 est alors remplacée par la formule ci-dessous :

$$(8) \quad \hat{P}(f, k) = \sum_{j=-n_c+1}^{n_c-1} r(f, jd) e^{-2i\pi kjd}$$

$r(f, jd)$  désigne l'interspectre entre 2 points séparés de la distance  $jd$ .

La densité spatiale estimée  $\hat{P}(f, k)$  définie par (8) est périodique relativement à  $k$  (de période  $\frac{1}{d}$ ) et on considérera pour la suite  $\hat{P}(f, k)$  définie sur sa période élémentaire. On représente sur la figure 1 le support spatio-fréquentiel de  $\hat{P}(f, k)$ .

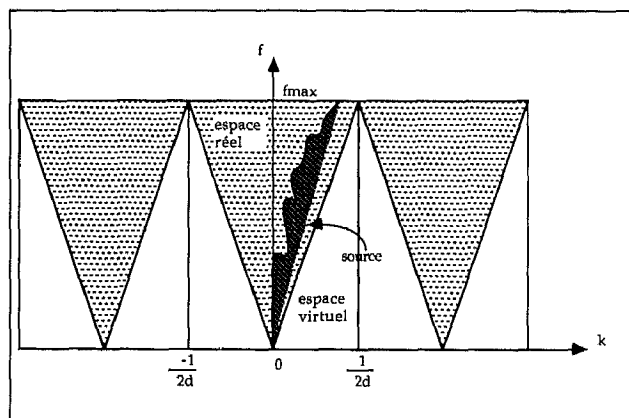


Fig. 1. — Support spatio-fréquentiel de  $\hat{P}(f, k)$ .

Le signal se propageant acoustiquement est représenté dans le plan  $(f, k)$  par l'espace réel. L'espace virtuel correspond à un mode de propagation non acoustique (propagation mécanique dans l'antenne par exemple).

La densité spectrale spatio-temporelle étant définie, nous rappellerons l'énoncé du théorème de Szegő [15] qui s'avérera fondamental pour la suite.

$$(9) \quad \lim_{n_c \rightarrow \infty} \frac{1}{n_c + 1} \log \det (Rf_0) = \frac{1}{2w} \int_{-w}^w \log P(f_0, k) dk$$

avec

$$(10) \quad w : \text{largeur de bande spatiale i.e. } w = \frac{1}{2d} \text{ et } Rf_0 : \text{matrice interspectrale à la fréquence } f_0.$$

Par conséquent, en supposant que l'on dispose d'un nombre de capteurs élevé, la FER définie par (2) prend la forme ci-dessous :

$$(11) \quad H = \int_{-w}^w \log [R(k) - B(k)] dk + L \cdot \int_{-w}^w \log B(k) dk$$

(la fréquence de « travail »  $f_0$  est omise pour la suite,  $R(k)$  et  $B(k)$  sont respectivement les densités spatiales des observations et du bruit additif.

*Remarque :* La matrice interspectrale du bruit  $B$  étant définie positive, on a :

$$B(k) = D_k^* B D_k > 0 \quad \forall k$$

( $D_k$  : vecteur direction associé à  $k$  [17]).

Il n'y a donc pas de problème de divergence de l'intégrale et on peut retenir la formule « logique »  $w = \frac{1}{2d}$ . Il faut tout de même remarquer que pour la plupart des hypothèses réalistes, le bruit (de surface, isotrope sphérique, impulsif, etc...) correspond à des hypothèses physiques de génération et est quasiment nul en dehors de la fenêtre acoustique (non nul cependant car  $B$  est définie positive).

Le problème consiste désormais à estimer la densité spatiale  $B(k)$  qui maximise l'expression (11) de la FER. A son tour, la résolution de ce problème nécessite une paramétrisation de la densité  $B(k)$ . De nombreux choix sont possibles [13]. Parmi ceux-ci, un modèle MA spatial présente de nombreux avantages [9], il est défini de la façon suivante :

$$(12) \quad \begin{cases} B(k) = \sigma^2 F(z) \cdot F^* \left( \frac{1}{z} \right) \\ \text{avec} \\ F(z) = 1 + b_1 z^{-1} + \dots + b_p z^{-p} \\ z = e^{2i\pi kd} \end{cases}$$

Comme on le verra par la suite, tous les bruits d'origines physiques (i.e. : engendrés par des hypothèses physiques de répartition des sources élémentaires de bruit) peuvent être modélisés par un modèle MA spatial d'ordre raisonnable.

Si on suppose que le bruit reçu par une antenne linéaire peut être modélisé par un processus MA du type (12), alors les coefficients du modèle MA maximisant la FER  $H$  satisfont la propriété suivante :

**Propriété 3 :** Soient  $\hat{b}_{i,L}$  les coefficients du modèle MA maximisant  $H$  définie par (11) ; ils vérifient :

$$(13) \quad \left| (b_i^0 - \hat{b}_{i,L}) \cdot \frac{1}{b_i^0} \right| \leq 1 - \sqrt{\frac{L}{L+1}} \quad i = 1, 2, \dots, p$$

( $b_i^0$  : valeur exacte du paramètre).

Notons que ce résultat ne tient pas compte des erreurs d'estimation de la densité spatiale des observations  $R(k)$  (sinon  $L$  serait choisi aussi grand que

possible !). Ce n'est pas un résultat statistique mais il a l'avantage de rendre plus explicite la propriété 1. La démonstration de cette propriété se trouve dans l'annexe B.

Si  $b_i^0$  est positif, (13) prend la forme ci-dessous :

$$(14) \quad b_i^0 \cdot \sqrt{\frac{L}{L+1}} \leq \hat{b}_{i,L} \leq b_i^0.$$

Cette propriété est illustrée par la figure 2 qui représente l'allure de la FER lorsque le signal reçu sur l'antenne est composé d'une source et d'un bruit additif modélisé par un processus MA d'ordre 2.

Comme on peut le constater sur cette figure, la fonctionnelle est concave et son extremum vérifie l'encadrement défini par la propriété 3. Cet encadrement est plutôt pessimiste car les valeurs estimées des paramètres sont respectivement  $\hat{b}_0 = 0,71$  et

$\hat{b}_1 = -0,22$  soit encore un rapport  $\frac{\hat{b}_1}{b_1^0} = -0,309$ . Le

modèle de bruit n'étant défini qu'à un facteur multiplicatif près pour le blanchiment spatial, le résultat trouvé peut donc être considéré comme excellent.

Après avoir présenté la formulation en termes de fréquences spatiales, nous allons étudier les méthodes pratiques de maximisation de la FER.

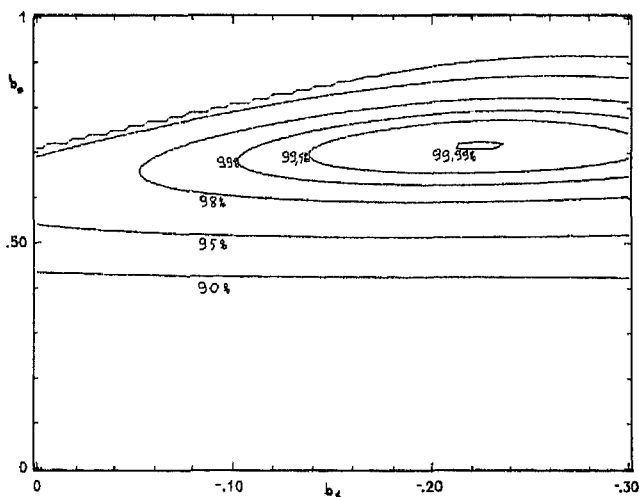


Fig. 2. — H en fonction de  $b_0$  et de  $b_1$

1 source :  $\theta = 45^\circ$   $\sigma = 0,1$   
Bruit MA d'ordre 2 :  $b_0 = 1$   $b_1 = -0,3$

### 2.3. ALGORITHMES DE MAXIMISATION DE LA FER

Le problème pratique consiste à déterminer les coefficients du modèle de bruit maximisant la fonctionnelle définie par (11). Dans la pratique, on ne dispose pas de  $R(k)$  (valeur exacte de la densité spatiale des observations). Deux types de méthodes sont alors utilisables.

#### a) Estimation simultanée de $R(k)$ et de $B(k)$

Supposant les sources et le bruit indépendants :

$$R(k) = S(k) + B(k)$$



peut considérer approximativement les matrices  $(R-B_k)^{-1} D_k$  et  $B_k^{-1} D_k$  comme deux matrices bandes.

On peut alors approximer les valeurs propres de ces matrices par les valeurs échantillonnées de leurs densités spectrales respectives [21] i.e.  $\frac{d(k)}{b(k)}$  et  $\frac{d(k)}{\hat{r}(k) - b(k)}$ , l'échantillonnage spatial étant constant i.e.  $k_m \cdot d = \frac{m}{n_c}$ ,  $m$  variant de 1 à  $n_c$  (pour  $d = \frac{\lambda}{2}$ ).

L'approximation ainsi obtenue du pas optimal s'avère satisfaisante dans la pratique et assure la convergence de la méthode de gradient. A titre indicatif, le nombre d'itérations nécessaires pour atteindre un extremum passe de plus de 100 pour une méthode de gradient à pas fixe à environ 10 lorsque le pas optimal est remplacé par son approximation.

2.4. DISCUSSION SUR LA FONCTIONNELLE D'ENTROPIE RELATIVE

Ce paragraphe a pour but de justifier la formulation de la FER définie par (11). La propriété 3 met en évidence l'intérêt de celle-ci pour l'estimation des paramètres définissant le bruit. La figure 2 illustre le comportement de la méthode qui consiste à chercher le modèle de bruit le plus aléatoire (i.e. maximisant  $\log \det B$  ou  $\int_{-w}^w \log B(k) dk$ ) sous la contrainte de

positivité de  $B$  et de  $R-B$ . En ce sens, la méthode apparaît comme une méthode de déconvolution ; l'objectif étant cette fois d'estimer à partir des données (sorties des capteurs) et de la connaissance de la fonction de transfert de l'appareil (la loi des déphasages de l'antenne) un modèle du bruit seul.

La méthode proposée fait penser aux méthodes de régularisation d'un problème mal posé (qui est dans ce cas l'équation :  $R = S + B$ ). Dans les méthodes de régularisation usuelles, dues principalement à Tikhonov [22], la régularisation du problème mal posé  $Az = y$  ( $z$  inconnu) nécessite le choix de « normes »  $\| \cdot \|$  et d'une fonctionnelle stabilisante  $\|Pz\|$ . Le problème régularisé consiste à chercher  $z$  qui minimise la fonctionnelle ci-dessous :

$$f(Z) = \|Az - y\|^2 + \lambda \|Pz\|^2.$$

Dans la formule ci-dessus,  $\lambda$  est appelé paramètre de régularisation et détermine [22] le compromis entre le degré de régularisation d'une solution et sa proximité des données réelles. Pour ces méthodes,  $A$  est linéaire et la norme  $\| \cdot \|$  est quadratique en général. Ce n'est pas le cas ici, mais la F.E.R. jouit cependant de propriétés remarquables. Pour continuer l'analogie ; notons que le terme  $\log (R-B)$  de (11) interdit au modèle de bruit de décrire les sources (pour un modèle d'ordre donné et pour une finesse d'analyse spatiale suffisante), alors que le facteur  $L$  détermine le compromis entre la proximité de données réelles (cf. Propriété 3) et l'incertitude relative aux mesures. Le terme « facteur d'incertitude » serait peut-être le plus approprié pour dési-

gner ce facteur  $L$  dont l'importance est prouvée par les simulations.

La fonction  $\log (R-B)$  joue quant à elle le rôle d'une fonctionnelle « barrière » que l'algorithme de gradient ne peut franchir. « Radialement » l'allure de la fonctionnelle est décrite par la figure 3 ci-dessous.

L'algorithme de gradient est initialisé près de 0. Si le pas est convenablement choisi, on voit qu'il n'est pas possible de franchir cette barrière et donc d'utiliser le modèle du bruit pour décrire les sources. La propriété 3 repose d'une part sur l'hypothèse de cohérence spatiale des sources (i.e. : raies spatiales en termes de fréquence spatiale) et d'autre part sur la définition de  $H$ . Le rôle du terme  $\log (R-B)$  apparaît clairement (fonction barrière), celui du terme  $L \cdot \log (B)$  est de tenir compte de l'incertitude sur  $B$  et surtout de garantir la position du maximum de  $H$ .

Un autre problème pratique est lié au choix du modèle de bruit (AR, MA, ...) et à la détermination de son ordre). Pour la plupart des applications pratiques, un modèle MA nous semble bien adapté. La détermination de son ordre a été envisagé par divers auteurs [23], [24], toutefois, il importe de prouver que la méthode donne des résultats satisfaisants lorsque cet ordre est surdéterminé ainsi que le prouvent la démonstration de la propriété 3 et les résultats des simulations.

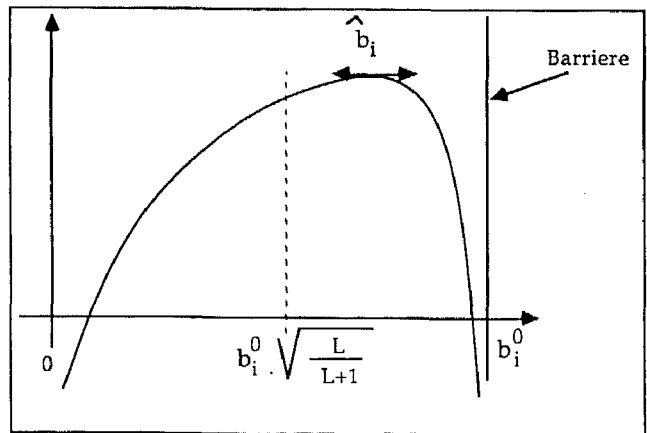


Fig. 3. — Allure de la fonctionnelle.

3. Estimation multifréquences d'un modèle de bruit additif

3.1. INTRODUCTION, AVANTAGES DE L'ANALYSE MULTIFRÉQUENCES

L'hypothèse suivant laquelle le bruit additif peut être décrit par un modèle unique sur une gamme de fréquence assez large semble être vérifiée dans de nombreuses situations en acoustique sous-marine.

En considérant un certain nombre d'hypothèses physiques concernant le processus d'engendrement du bruit, il est possible (dans des cas simples) de calculer les valeurs théoriques de la fonction de

corrélation spatiale du bruit [6]. On constate alors que la directivité du bruit est fonction de la fréquence. De plus, on vérifie que la corrélation du bruit à la fréquence  $f_i$  se déduit de la corrélation du bruit à la fréquence  $f_0$  par la relation :

$$(22) \quad r_b(f_i, l) = r_b\left(f_0, l \frac{f_i}{f_0}\right).$$

Cette relation exprime le fait que changer de fréquence revient à modifier l'échantillonnage spatial de la fonction de corrélation spatiale, ce qui se retrouve sur de nombreuses données réelles [9].

Nous allons donc développer une méthode permettant de tirer profit de cette hypothèse. Les avantages attendus sont non seulement liés à une meilleure estimation des coefficients du bruit grâce à l'accroissement du nombre d'observations indépendantes (augmentation du produit BT [25]), mais aussi au fait que la densité spatiale (directivité) d'un bruit de coefficients donnés évolue suivant les fréquences, ce qui n'est évidemment pas le cas de la position des sources. Ce dernier point est particulièrement important pour réduire (très efficacement) les problèmes d'estimation des paramètres du bruit induits par des « paquets » de sources fortes.

### 3.2. FORMULATION DE LA FER EN ANALYSE MULTIFRÉQUENCES

On effectue une analyse multifréquences sur une « octave »  $[f_0, 2f_0]$ . Le modèle du bruit étant défini à la fréquence de référence  $f_0$ , on considère que l'espacement élémentaire intercepteur satisfait à l'hypothèse usuelle d'échantillonnage spatial (i.e.  $d \leq \frac{1}{2} \frac{c}{2f_0}$ ) afin de s'affranchir des problèmes

de sous-échantillonnage spatial. Le problème consiste alors à calculer les corrélations du bruit à la fréquence  $f_i$  ( $f_i \in [f_0, 2f_0]$ ). Ceci est réalisé en interpolant la fonction de corrélation spatiale définie à la fréquence  $f_0$  par le modèle de bruit, ce qui revient à rajouter des capteurs fictifs.

Cette interpolation est effectuée de façon rigoureuse par transformée de Fourier.  $B(f_0, k)$  étant calculé à partir de  $r_b(f_0, nd)$  par la formule (8), il est possible de calculer les valeurs interpolées  $r_b(f_0, x)$  par transformée de Fourier inverse :

$$(23) \quad r_b(f_0, x) = \int_{-\frac{1}{2d}}^{\frac{1}{2d}} B(f_0, k) e^{-2i\pi kx} dk$$

et en posant  $x = nd \frac{f_i}{f_0}$ , on obtient alors les corrélations du bruit à la fréquence  $f_i$ .

La formule (23) est exacte mais elle peut être remplacée par d'autres méthodes d'interpolation moins coûteuse.

En utilisant l'hypothèse de décorrélation des sorties de transformation de Fourier (pour des fréquences d'analyse suffisamment éloignées) on définit une FER multifréquence par :

$$(24) \quad H = \sum_{f_i=f_0}^{2f_0} \left[ \int_{-W}^W \log [\hat{R}(f_i, k) - B(f_i, k)] + L \cdot \log B(f_i, k) dk \right].$$

Il importe maintenant de paramétriser la corrélation du bruit. De même que dans l'analyse monofréquentielle, un modèle MA spatial est bien adapté. On va donc chercher un modèle MA à la fréquence  $f_0$  tel que les densités spatiales du bruit aux fréquences  $f_i$  maximise l'expression (24).

Le problème de la maximisation de la FER multifréquence  $H$  définie par (24) est alors résolu par l'emploi d'un algorithme de gradient similaire à celui exposé au § 2.3.

La différence essentielle réside dans le calcul du gradient. En effet, la relation (22) permet d'obtenir les corrélations du bruit à chaque fréquence mais ne donne pas directement les coefficients du modèle. Il convient alors de réécrire la formule (19) :

$$(25) \quad Bf_n = \sum_{i=0}^p r_b(i, f_n) U_i$$

avec  $U_i = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & & & & & & \cdot \\ \cdot & & & & & & \cdot \\ 1 & & & & & & \cdot \\ \cdot & & & & & & \cdot \\ \cdot & & & & & & \cdot \\ \cdot & & & & & & \cdot \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$

On a donc :

$$(26) \quad Bf_n(k) = \sum_{i=0}^p r_b(i, f_n) U_i(k)$$

et

$$(27) \quad \frac{\partial Bf_n(k)}{\partial b_j} = \sum_{i=0}^p \frac{\partial r_b(i, f_n)}{\partial b_j} U_i(k)$$

avec  $U_i(k) = D_k^* U_i D_k$ .

La dérivée de  $Bf_n(k)$  dépend donc directement des dérivées des corrélations par rapport aux coefficients du modèle. Une solution simple pour calculer le gradient consiste alors à calculer  $\frac{\partial r_b(i, f_0)}{\partial b_j}$  puis à

interpoler cette fonction de façon identique à (22).

Les niveaux des sources peuvent évidemment varier d'une fréquence à l'autre, mais la propriété 3 reste vérifiée. Le niveau du bruit peut lui aussi varier (ce qui revient à faire dépendre la puissance du bruit excitant le modèle MA), mais ceci ne remet pas en cause l'estimation des coefficients  $\{b_i\}$  puisque ceci revient uniquement à modifier le rapport signal à bruit pour chaque fréquence. Notons que dans la pratique, il est généralement nécessaire d'utiliser la formule (23) d'interpolation du fait de la contrainte de positivité de  $\hat{b}_b(f_i, k)$ .



L'hypothèse de base affirmant que le modèle du bruit est identique quelle que soit la fréquence considérée peut paraître contraignante pour certaines applications. Il est alors possible de considérer des techniques du type extension de modèle [26].

#### 4. Méthodes de blanchiment spatial

##### 4.1. ANALYSE THÉORIQUE

Supposons que l'on ait estimé un modèle MA du bruit (ce type de modèle semble suffisamment général pour la plupart des situations pratiques), le problème qui se pose maintenant est d'utiliser ce modèle pour effectuer un blanchiment spatial.

La technique classique consiste à effectuer la décomposition de Choleski de la matrice interspectrale de bruit estimée comme matrice de covariance du modèle MA estimé (i.e.  $B = TT^*$ ), puis à multiplier les observations par les facteurs inverses ( $T^{-1}$ ) de cette décomposition. Cette technique comporte de nombreux inconvénients pour nos applications qui sont principalement : coût de calcul (lorsque le nombre de capteurs est grand), effets de bords (destruction de la stationnarité spatiale), mauvais conditionnement numérique lorsque le bruit est fortement directif. Pour toutes ces raisons, l'approche suivante nous semble préférable. On détermine le filtre AR équivalent (d'ordre donné) au modèle MA. Le filtre blanchisseur spatial est alors le filtre inverse, ce qui dans le cas d'un modèle AR est particulièrement simple.

Le filtre AR d'ordre  $q$  équivalent au modèle MA est déterminé par les méthodes classiques [27], [28] ; par exemples, en calculant la matrice de covariance du modèle MA à partir des coefficients estimés puis en résolvant les équations de Yule-Walker correspondantes [27] ou encore par identification des coefficients des puissances de  $z$  [28]. On en déduit un vecteur  $A' = (1, a_1, \dots, a_q)$  et le filtre associé  $\frac{1}{A(z^{-1})}$ . Le filtre blanchisseur est donc  $A(z^{-1})$ .

La covariance exacte des données blanchies par ce filtre s'écrit [24] :

$$(28) \quad r_w(l) = \mathbf{E} \left\{ \left( \sum_{i=0}^q a_i x_{n-i} \right) \cdot \left( \sum_{i=0}^q a_i x_{n-i-l} \right)^* \right\} \quad (a_0 = 1)$$

soit encore sous la forme matricielle :

$$(29) \quad R_w = A_w \cdot R \cdot A_w^*$$

avec  $R_w$  : matrice de covariance des données blanchies

$$R_w(i, j) = r_w(|i - j|)$$

$R_w$  est une matrice de Toeplitz de dimension  $(n_c - q - 1, n_c - q - 1)$  et  $A_w$  : matrice rectangulaire  $(n_c - q - 1, n_c)$  définie par :

$$A_w = \begin{pmatrix} 1 & a_1 & \dots & a_q & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & & & & \cdot \\ \cdot & & & & & & \cdot \\ \cdot & & & & & & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & a_1 & \dots & a_q \end{pmatrix}$$

Cette méthode de blanchiment n'a pas les inconvénients de la méthode classique. Ceci est mis en évidence en examinant l'effet de ce blanchiment sur une source ; d'après (29) on a :

$$R_w(\theta) = A_w \cdot (D_\theta \cdot D_\theta^*) \cdot A_w^*$$

avec  $D'_\theta = (1, e^{i\alpha}, \dots, e^{i \cdot (n_c - 1)\alpha})$

$$\alpha = -2\pi \frac{fd}{c} \cos \theta$$

On vérifie immédiatement les propriétés suivantes :

- 1)  $R_w(\theta)$  est une matrice de Toeplitz de rang 1
- 2)  $A_w \cdot D_\theta = (1 + a_1 e^{i\alpha} + \dots + a_q e^{iq\alpha}) D'_\theta$   
 $D'_\theta$  étant le vecteur déduit de  $D_\theta$  en ne retenant que ses  $(n_c - q - 1)$  premières composantes.

Par conséquent, on a [24] :

$$(30) \quad R_w(\theta) = q(\theta) \cdot D'_\theta D'^*_\theta$$

avec  $q(\theta) = |1 + a_1 e^{i\alpha} + \dots + a_q e^{iq\alpha}|^2$ .

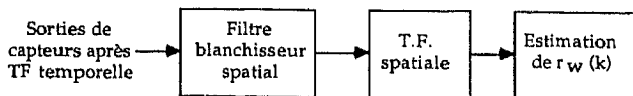
Ce résultat est fondamental car il prouve que le blanchiment défini par cette méthode ne modifie pas les vecteurs sources modèles qui restent des vecteurs du type  $D_\theta$ . On voit de plus que cette méthode évite les effets de bords des méthodes liées à la décomposition de Choleski, au prix toutefois d'une diminution de la dimension de l'espace des capteurs. Puisqu'on a fait l'hypothèse d'un grand nombre de capteurs, cet inconvénient est négligeable. Cette méthode évite, entre autres, le calcul des facteurs de Choleski de  $B$  et de leurs inverses, elle est donc bien plus rapide dans le cas d'antenne à grand nombre de capteurs.

La formule (30) suggère aussi une méthode très rapide de blanchiment de la formation de voies consistant simplement à calculer la fonction de  $\theta$  ci-dessous :

$$(31) \quad f_w(\theta) = q^{-1}(\theta) \cdot D'^*_\theta \cdot R \cdot D'_\theta$$

##### 4.2. IMPLANTATION PRATIQUE DU BLANCHIMENT PAR FILTRAGE INVERSE

L'utilisation la plus simple du filtre blanchisseur consiste à l'appliquer directement aux sorties de capteurs comme indiqué à la formule (28), à effectuer une TF spatiale (i.e. : formation de voies) puis à en déduire une estimée du spectre spatial blanchi suivant le diagramme ci-dessous :



L'utilisation de méthodes haute résolution est possible soit après l'étape TF spatiale, soit directement en utilisant la matrice  $R_w$ .

## 5. Résultats de simulation

### 5.1. CALCUL DES DSP SIMULÉES

Afin de vérifier l'efficacité de la méthode proposée, nous avons simulé des sorties de formation de voies bruitées.

La première étape des simulations consiste à créer une matrice de covariance représentant le bruit et les sources désirées. Les sources sont définies par leurs gisements et leurs puissances; le bruit par les coefficients d'un processus MA.

Le vecteur signal en sorties de capteurs est calculé de la façon suivante :

$$S = \sum_{i=1}^{n_s} a_i D_{\theta_i}$$

avec

$n_s$  : nombre de sources

$a_i$  :  $N(0, \sigma_i^2)$  ou  $\sigma_i^2$  est la puissance des sources

$D_{\theta_i}$  : vecteur direction associé à la source  $i$ .

Le vecteur bruit s'obtient à partir de la décomposition de Choleski de la matrice de covariance exacte du bruit :

$$B = T \cdot X$$

avec

$$TT^* = B$$

$$X = N(0, Id)$$

La matrice de covariance  $\hat{R}$  (Signal + Bruit) est alors obtenue par la méthode du périodogramme moyenné sur plusieurs réalisations de signal et de bruit.  $\hat{R}$  est rendue de Toeplitz en effectuant la moyenne de ses composantes sur chacune des diagonales.

La densité spatiale simulée est calculée par :

$$\hat{f}(\theta) = D_{\theta}^* \hat{R} D_{\theta}$$

### 5.2. INFLUENCE DU FACTEUR L

Le but des figures 4 a à 4 f est d'une part de mettre en évidence l'influence du facteur L sur l'estimation de la coloration du bruit et d'autre part de montrer que la propriété 3 est peu sensible aux erreurs d'estimation de la DSP.

Les paramètres des simulations sont les suivants :

— Nombre de capteurs : 32.

— Nombre de réalisations : 100.

Le bruit simulé est un modèle MA réel d'ordre 3 ( $b_0 = 1$ ;  $b_1 = 0,3$ ;  $b_2 = -0,3$ ). Les covariances exactes sont donc :  $\Gamma_0 = 1,18$ ;  $\Gamma_1 = 0,21$ ;  $\Gamma_2 = -0,30$ . Sur chacune des figures, la courbe en pointillés représente la directivité du bruit estimé en maximisant la FER, les courbes en traits pleins représentent la directivité théorique du bruit et la directivité du signal reçu sur l'antenne. Deux sources sont présentes sur les figures 4 a à 4 c ( $\theta_1 = 50^\circ$ ,  $\sigma_1 = 0,1$  et  $\theta_2 = 110^\circ$ ,  $\sigma_2 = 0,2$ ). Les figures 4 d à 4 f correspondent à des simulations sans source.

On constate d'après ces figures :

1) Lorsque le facteur L augmente, la directivité du bruit estimé se rapproche de la directivité théorique. Ceci est une conséquence directe de la propriété 3.

2) Les covariances du bruit estimé vérifient la propriété 3, les faibles écarts par rapport aux valeurs théoriques étant dus aux erreurs d'estimation de la DSP.

On a représenté sur le tableau 1 les coefficients du bruit maximisant la FER lorsque la DSP est parfaitement estimée (= nombre de réalisations infini). On constate alors que les valeurs des coefficients vérifient exactement la propriété 3.

De plus, on a constaté que le nombre d'itérations augmente lorsque le facteur L augmente ( $\cong 5$  itérations pour  $L = 1$  et  $\cong 20$  itérations pour  $L = 10$ ). On a aussi constaté que la variance de l'estimation augmente avec L [9], [10]. Augmenter L revient à augmenter le poids de l'incertitude sur B. Pratiquement, il importe de trouver le facteur L donnant un compromis acceptable entre la qualité des estimations, leurs variances et le temps de calcul. La valeur empirique  $L = \frac{n_c}{2p}$  ( $n_c$  : nombre de capteurs,  $p$  : longueur de corrélation spatiale du bruit) semble être un bon compromis [9].

Tableau 1. — Comparaison des coefficients  $b_i$  calculés et théoriques.

Facteur L	$b_i$	$b_i$ estimés	$b_i$ estimés	$b_i^0$	$b_i^0 \sqrt{\frac{L}{L+1}}$
		sans source	avec source	simulé	
1	$b_0$	0,71	0,73	1,0	0,71
	$b_1$	0,21	0,22	0,3	0,21
	$b_2$	-0,21	-0,23	-0,3	-0,21
2	$b_0$	0,82	0,84	1,0	0,82
	$b_1$	0,24	0,25	0,3	0,24
	$b_2$	-0,24	-0,27	-0,3	-0,24
3	$b_0$	0,87	0,89	1,0	0,87
	$b_1$	0,26	0,26	0,3	0,26
	$b_2$	-0,26	-0,28	-0,3	-0,26
4	$b_0$	0,89	0,91	1,0	0,89
	$b_1$	0,27	0,27	0,3	0,27
	$b_2$	-0,27	-0,28	-0,3	-0,27
5	$b_0$	0,91	0,93	1,0	0,91
	$b_1$	0,27	0,28	0,3	0,27
	$b_2$	-0,27	-0,29	-0,3	-0,27
10	$b_0$	0,95	0,97	1,0	0,95
	$b_1$	0,29	0,29	0,3	0,29
	$b_2$	-0,29	-0,29	-0,3	-0,29

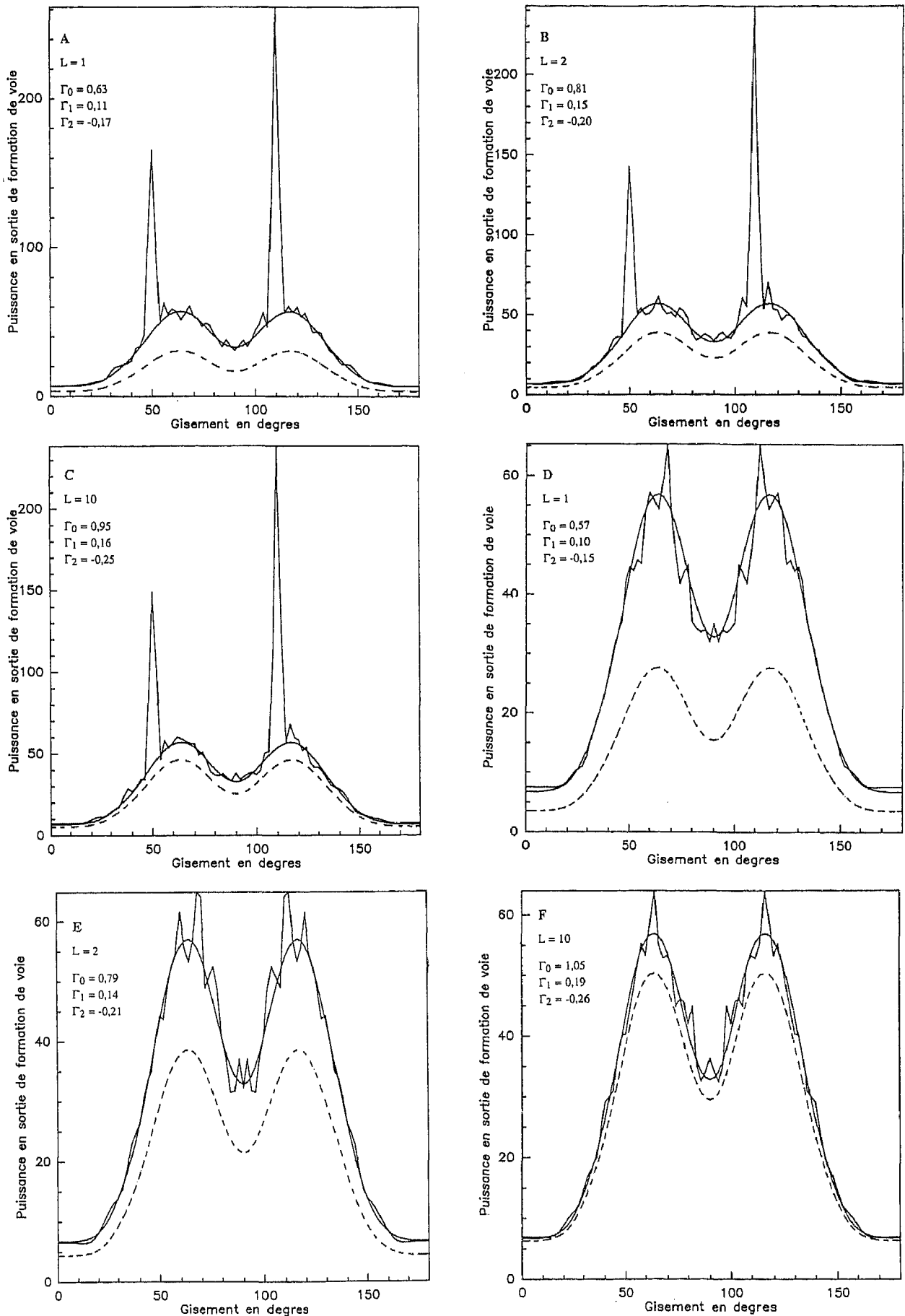


Fig. 4. — Influence du facteur L.

## 5.3 BLANCHIMENT

La figure 5 illustre les résultats obtenus après le blanchiment des données simulées lorsque le traitement d'antenne choisi est la formation de voies. La courbe en trait plein représente la DSP simulée; celle en pointillés représente la DSP après blanchiment par le modèle de bruit estimé.

Les coefficients du bruit estimé ( $b_0 = 1,12$ ,  $b_1 = 0,28$ ,  $b_2 = -0,03$ ,  $b_3 = -0,47$ ) peuvent sembler éloignés des coefficients exacts ( $b_0 = 1,0$ ,  $b_1 = 0,5$ ,  $b_2 = 0,2$ ,  $b_3 = -0,7$ ); cependant, il faut noter que la densité spatiale du bruit est définie par les covariances du modèle MA. Dans notre cas, les covariances exactes sont :

$$\Gamma_0 = 1,78, \quad \Gamma_1 = 0,46, \quad \Gamma_2 = -0,15, \quad \Gamma_3 = -0,7$$

et les covariances estimées :

$$\Gamma_0 = 1,64, \quad \Gamma_1 = 0,31, \quad \Gamma_2 = -0,16, \quad \Gamma_3 = -0,53$$

Après blanchiment, on retrouve la source à  $45^\circ$ ; le lobe situé à  $140^\circ$  a totalement disparu et on distingue alors très nettement la source à  $100^\circ$ , source difficilement interprétable avant le blanchiment. Le bruit résiduel après traitement est parfaitement blanc, ce qui valide le blanchiment effectué.

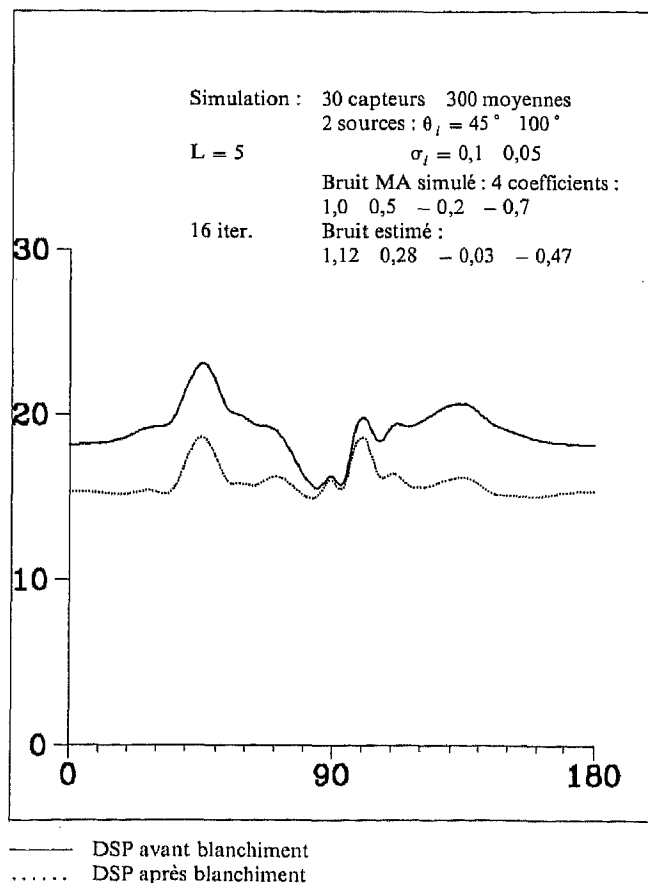


Fig. 5. — DSP avant et après blanchiment (échelle log).

## 5.4. BRUITS D'ORIGINE PHYSIQUE

Nous appellerons « bruits physiques » les bruits dont le processus d'engendrement correspond à une hypothèse de répartition physique des bruiteurs [6]. Il est possible de calculer les corrélations spatiales correspondantes et d'en déduire la densité spatiale vue par l'antenne (appelée improprement « directivité »).

Sur la figure 6, nous avons représenté la densité spatiale d'un bruit de surface (chaque élément de surface émet un bruit, exemple : l'action du vent) vue par une antenne linéaire. A ce bruit de surface s'ajoute une source à  $45^\circ$  de puissance 0,1.

L'ordre du modèle MA par lequel on cherche à modéliser le bruit de surface a été fixé à 5. L'algorithme de maximisation de la FER converge rapidement vers les valeurs  $b_0 = 0,76$ ,  $b_1 = 0,43$ ,  $b_2 = 0,10$ ,  $b_3 = -0,07$ ,  $b_4 = -0,07$ ,  $b_5 = -0,03$ . Le bruit est alors bien estimé. On constate même qu'un modèle d'ordre 3 ou 4 est suffisant pour ce type de bruit (les deux derniers coefficients sont proches de 0).

Sur la figure 7, les hypothèses physiques du bruit sont différentes : on considère ici un bruit impulsif (infinité de sources élémentaires, indépendantes entre elles, de même niveau et réparties sur un cercle de rayon infini).

Avec un modèle MA d'ordre 5 (fig. 7 a), la DSP du bruit est fort mal estimée; la DSP du bruit impulsif étant difficilement modélisable par un MA d'ordre faible. Il est nécessaire, pour avoir une bonne estimation de ce bruit, d'augmenter l'ordre du modèle (9 coefficients sur la figure 7 b; 15 coefficients sur la figure 7 c). La charge de calcul étant proportionnelle au nombre de coefficients, cette augmentation entraîne un accroissement significatif du temps de calcul.

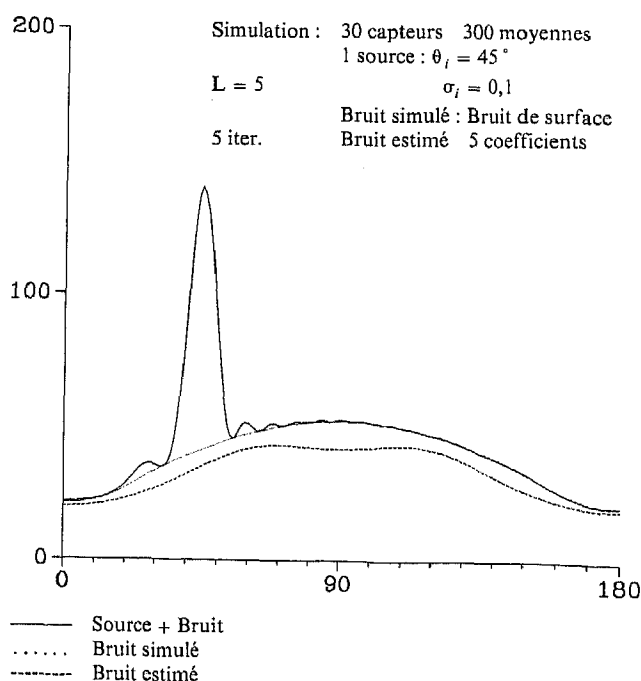
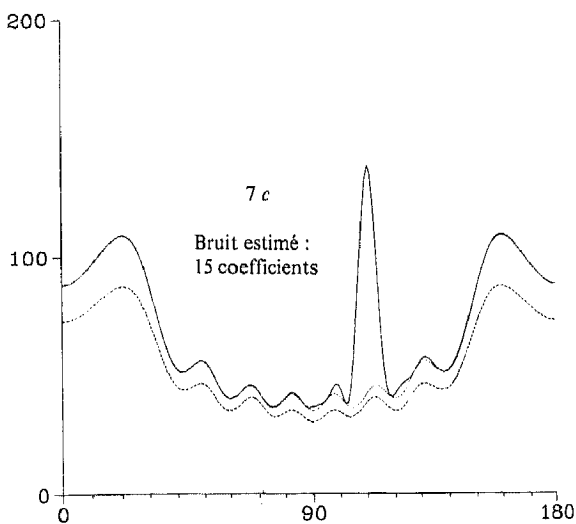
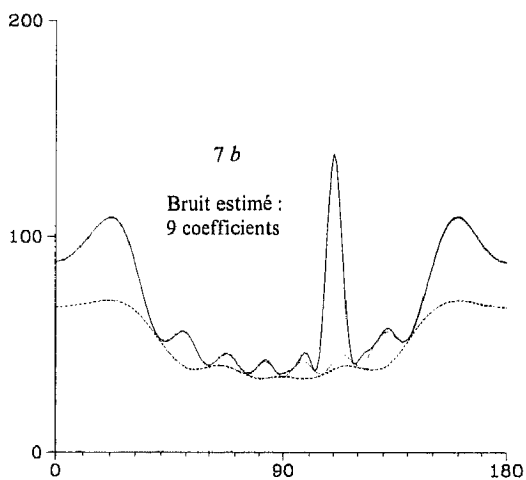
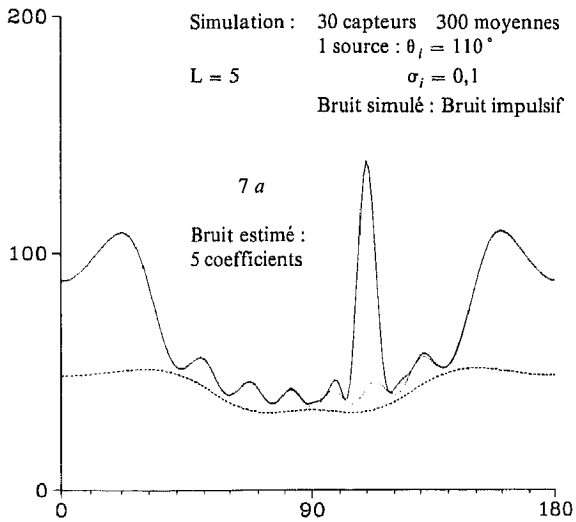


Fig. 6. — Bruit de surface.



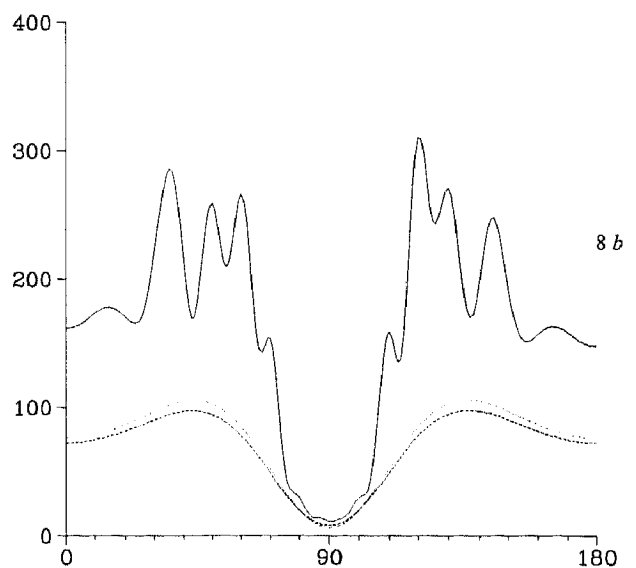
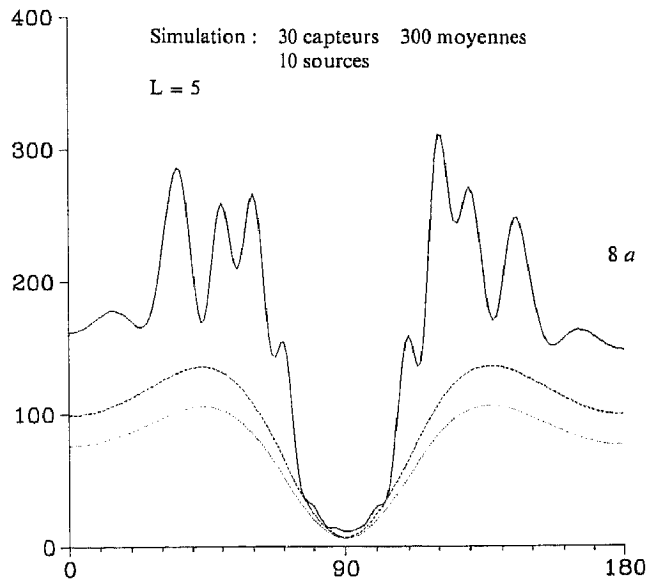
— Source + Bruit  
..... Bruit simulé  
----- Bruit impulsif

Fig. 7. — Bruit impulsif.

Il est toutefois intéressant de remarquer que sur la figure 7 c, l'hypothèse de départ conduisant à la définition de la FER (cf. § 2.1) n'est pas respectée. Le modèle MA d'ordre élevé correspond à une hypothèse de corrélation élevée. Cependant le bruit est très bien estimé, ce qui suggère que la méthode est robuste vis-à-vis des hypothèses de longueur de corrélation du bruit. Enfin notons que ce type de bruit est modélisable par un AR spatial déterminé par un faible nombre de coefficients [9] et que l'algorithme de maximisation de la FER peut être étendu sans aucune difficulté aux modèles AR(MA) du bruit [9].

5.5. ESTIMATION MULTIFRÉQUENCE

Sur la figure 8, nous avons simulé deux « paquets » de sources réparties symétriquement par rapport à



— Source + Bruit  
----- Bruit estimé  
..... Bruit simulé

Fig. 8. — Estimation multifréquences.

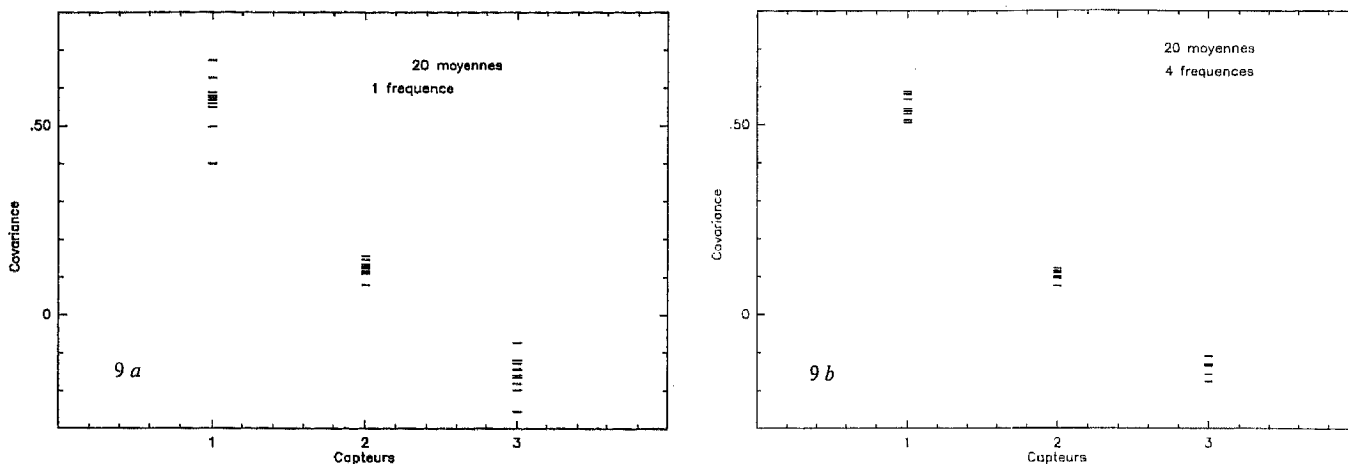


Fig. 9. — Diminution de la variance.

90°. Cette configuration est relativement défavorable car la DSP d'un processus MA est elle aussi symétrique par rapport à 90° et les deux paquets de sources peuvent être assimilés à du bruit.

Les courbes en trait plein représentent les DSP simulées Sources + Bruit, celles en pointillés courts les DSP Bruit simulé seul et celles en tirets les DSP Bruit estimé. Sur la figure 8 a, le bruit a été estimé à une seule fréquence ( $\lambda = 0,5 d$ ) alors que sur la figure 8 b, on a utilisé deux fréquences pour l'estimation du bruit ( $\lambda = 0,5 d$  et  $\lambda = 0,25 d$ ). On a tracé sur ces deux figures les DSP correspondant à la même fréquence ( $\lambda = 0,5 d$ ). L'estimation du bruit est meilleure avec deux fréquences comme prévu au § 3, le nombre d'observations indépendantes étant doublé.

Un autre effet de l'intégration fréquentielle est illustré sur la figure 9. Cette figure représente les covariances estimées pour 10 simulations identiques. Les paramètres des simulations sont les suivants :

- aucune source
- bruit : MA d'ordre 3 :  $b_0 = 1$  ;  $b_1 = 0,3$  ;  $b_2 = -0,3$
- DSP estimés sur 20 réalisations.

En 9 a, le modèle de bruit est estimé en utilisant qu'une seule fréquence ( $\lambda = 0,25 d$ ) alors qu'en 9 b, 4 fréquences sont utilisées ( $\lambda = 0,25 d$ ,  $\lambda = 0,30 d$ ,  $\lambda = 0,40 d$ ,  $\lambda = 0,50 d$ ).

On constate alors une nette diminution de la variance de l'estimation lorsque le nombre de fréquences utilisées augmente.

## 6. Conclusion

Une méthode originale a été développée pour l'estimation d'un modèle de bruit additif reçu sur une antenne, en présence de sources. L'approche présentée ici est utilisable en sorties de formation de voies et donc applicable à des antennes de grande dimension. Elle s'apparente à une méthode de déconvolution qui permet d'obtenir une solution convenable à un problème mal posé. La méthode nécessite l'utilisation d'un algorithme de gradient ; la convergence de celui-ci a été étudiée ainsi que les propriétés théoriques de l'extremum. Le coût de calcul de cette méthode a l'avantage de ne pas dépendre du nombre de capteurs.

De plus, la robustesse de la méthode vis-à-vis des hypothèses physiques a été prouvée à la fois sur le plan théorique (niveau des sources, surdétermination de l'ordre du modèle, convergence de l'algorithme) et sur des simulations. Une extension simple à l'analyse multifréquence a été présentée ; celle-ci peut être fort utile dans la pratique.

La méthode proposée apparaît donc directement applicable en sorties de formation de voies et devrait permettre d'améliorer sensiblement les performances de la chaîne sonar quel que soit le post-traitement au prix d'un coût de calcul très modeste.

*Manuscrit reçu le 16 août 1989.*

Les auteurs remercient les experts qui ont permis, par leurs recommandations, d'améliorer cet article.

**Annexe A**

Remarquons en premier lieu que la concavité de la fonctionnelle d'entropie relative (notée H) provient de calcul élémentaire. En effet, supposons la matrice B paramétrisée par sa première ligne (B est Toeplitz-bande), i.e. :

$$(A1) \quad B = \sum_{i=1}^p \beta_i U_i$$

( $U_i$  : base orthogonale usuelle des matrices de Toeplitz).

On obtient alors :

$$(A2) \quad \frac{\partial^2}{\partial \beta_i \partial \beta_j} H = \\ - \text{tr}[(R-B)^{-1} \cdot U_i \cdot (R-B)^{-1} \cdot U_j] \\ - L \text{tr}[B^{-1} \cdot U_i \cdot B^{-1} \cdot U_j] = H_2(i, j).$$

Le terme  $H_2(i, j)$  est ici le terme  $(i, j)$  de la matrice Hessienne de H. Il suffit donc de considérer cette matrice, en effet :

$$(A3) \quad X' H_2 X = \\ - \text{tr} \left[ (R-B)^{-1} \cdot \sum_{i=1}^p \beta_i U_i \cdot (R-B)^{-1} \cdot \sum_{i=1}^p \beta_i U_i \right] \\ - L \text{tr} \left[ B^{-1} \cdot \sum_{i=1}^p \beta_i U_i \cdot B^{-1} \cdot \sum_{i=1}^p \beta_i U_i \right] \\ \text{avec} \quad X' = (\beta_1, \dots, \beta_p).$$

Les matrices (R-B) et B étant définies positives par hypothèse, on déduit de (A3) que la matrice  $H_2$  est négative et donc que la fonctionnelle est concave relativement aux paramètres  $\{\beta_i\}$  (qui sont les corrélations du bruit).

Considérons maintenant la démonstration de la propriété 1. La fonctionnelle s'écrit sous la forme ci-dessous :

$$(A4) \quad H = \log \det (S + (B_0 - B)) + L \log \det B \\ \text{avec} \quad R = S + B_0.$$

La matrice  $B_0$  étant positive, il est donc possible de la factoriser en facteurs triangulaires :

$$(A5) \quad B_0 = T_0 \cdot T_0^*.$$

Alors :

$$(A6) \quad \log \det (S + (B_0 - B)) \\ = \log \det (S \cdot T_0^{-1*} \cdot (Id - T_0^{-1} \cdot B \cdot T_0^{-1*})^{-1} \\ \times T_0^{-1} + Id) + \log \det (B_0 - B).$$

Considérons maintenant la décomposition spectrale de la matrice hermitienne  $(Id - T_0^{-1} \cdot B \cdot T_0^{-1*})^{-1}$  :

$$(A7) \quad (Id - T_0^{-1} \cdot B \cdot T_0^{-1*})^{-1} = W \Delta W^*$$

avec W matrice unitaire constituée des vecteurs propres  $\Delta$  matrice diagonale des valeurs propres.

Alors :

$$(A8) \quad \Delta(i, i) = (1 - \lambda_i^W)^{-1}$$

avec  $\lambda_i^W =$  valeurs propres de  $B_0^{-1} \cdot B$ .

Et de plus :

$$(A9) \quad \log \det (S + (B_0 - B)) = \log \det (B_0 - B) \\ + \log \det (S \cdot T_0^{-1*} \cdot W \cdot \Delta \cdot W^* \cdot T_0^{-1} + Id).$$

On montre aisément que :

$$(A10) \quad \log \det (S \cdot T_0^{-1*} \cdot W \cdot \Delta \cdot W^* \cdot T_0^{-1} + Id) \\ = \log \det (\Delta^{1/2} \cdot W^* \cdot S' \cdot W \cdot \Delta^{1/2} + Id) \\ = \log \det (\Delta^{1/2} \cdot W^* \cdot (S' + W \cdot \Delta^{-1} \cdot W^*) \cdot W \cdot \Delta^{1/2}) \\ = \log \det \Delta + \log \det (S' + W \cdot \Delta^{-1} \cdot W^*)$$

avec  $S' = T_0^{-1} \cdot S \cdot T_0^{-1*}$

et  $\Delta^{1/2}(i, j) = [\Delta(i, i)]^{1/2}$ .

Par conséquent,

$$(A11) \quad \frac{\partial}{\partial \lambda_i^W} H = L \cdot \frac{1}{\lambda_i^W} \cdot \frac{1}{1 - \lambda_i^W} \\ + \left\{ \frac{1}{1 - \lambda_i^W} + \text{tr} \left( (S' + W \cdot \Delta^{-1} \cdot W^*)^{-1} \right. \right. \\ \left. \left. \times W \cdot \frac{\partial}{\partial \lambda_i^W} \Delta^{-1} \cdot W^* \right) \right\}$$

or (A12)

$$\text{tr} \left( (S' + W \cdot \Delta^{-1} \cdot W^*)^{-1} \cdot W \cdot \frac{\partial}{\partial \lambda_i^W} \Delta^{-1} \cdot W^* \right) = \\ - W_i^* \cdot (S' + W \cdot \Delta^{-1} \cdot W^*)^{-1} \cdot W_i$$

mais

$$(A13) \quad - W_i^* \cdot (S' + W \cdot \Delta^{-1} \cdot W^*) \cdot W_i \geq \\ - W_i^* \cdot (W \cdot \Delta^{-1} \cdot W^*) \cdot W_i = \\ - \frac{1}{1 - \lambda_i^W}$$

(puisque  $S' + W \cdot \Delta^{-1} \cdot W^* \geq W \cdot \Delta^{-1} \cdot W^*$ ).

Par conséquent, le terme entre accolades de (A11) est positif ( $\lambda_i^W \in ]0, 1[$ ) et donc les dérivées partielles  $\frac{\partial}{\partial \lambda_i^W} H \geq 0$  quand  $\lambda_i^W$  appartient à l'intervalle  $\left] 0, \frac{L}{L+1} \right[$ .

De plus, quand  $\lambda_i^W$  tend vers  $1^-$ , H tend vers  $-\infty$ ; H étant une fonctionnelle concave, tout ceci prouve la propriété 1.

Le lecteur ayant résisté à cette démonstration pourra se reposer en lisant l'annexe B.

**Annexe B**

Le but de cette annexe est de donner une démonstration de la propriété 3 ; la FER H est définie par (11) et ses dérivées partielles données par :

$$\frac{\partial}{\partial b_k} H = - \int_{-w}^w \frac{\text{Re}(z^i \cdot \bar{F}(k))}{R(k) - B(k)} dk + L \int_{-w}^w \frac{\text{Re}(z^i \cdot \bar{F}(k))}{B(k)} dk$$

(avec les notations de (12)), soit encore :

$$(B1) \quad \frac{\partial}{\partial b_k} H = - \int_{-w}^w \frac{\text{Re}(z^i \cdot \bar{F}(k)) \cdot [LR(k) - (L+1)B(k)]}{(R(k) - B(k)) \cdot B(k)} dk$$

(par souci de clarté la dérivée partielle relative à  $\sigma^2$  est omise).

Si on fait l'hypothèse qu'il n'y a aucune source présente, une conséquence directe de (B1) est que les dérivées partielles  $\frac{\partial}{\partial b_i} H$  sont nulles quand

$\hat{b}_i$  est égal à  $b_i^0$ .  $\sqrt{\frac{L}{L+1}}$  ( $b_i^0$  étant la valeur exacte du paramètre). H étant une fonctionnelle concave relativement aux  $\{b_i\}$ , on en déduit que :

$$(B2) \quad \hat{b}_{i,l} = b_i^0 \cdot \sqrt{\frac{L}{L+1}} \quad \text{pour } i = 1, \dots, p.$$

La covariance du bruit est donc estimée sans erreur (à un facteur constant près). La propriété 3 est aisément démontrée dans ce cas particulier ; le problème se complique cependant en présence de sources. Pour démontrer la propriété 3, considérons la somme pondérée des dérivées partielles définie ci-dessous :

$$\sum_{i=1}^p b_i \cdot \frac{\partial}{\partial b_i} H.$$

D'après (B1) celle-ci s'écrit :

$$(B3) \quad \sum_{i=1}^p b_i \frac{\partial}{\partial b_i} H = - \int_{-w}^w \frac{\text{Re} \left( \left( \sum_{i=1}^p b_i \cdot z^i \right) \bar{F}(k) \right) \cdot [L \cdot R(k) - (L+1) \cdot B(k)]}{(R(k) - B(k)) \cdot B(k)} dk$$

$$= \int_{-w}^w \frac{L \cdot R(k) - (L+1) \cdot B(k)}{R(k) - B(k)} dk$$

$$= L \int_{-w}^w \frac{S(k)}{R(k) - B(k)} dk + L \int_{-w}^w \frac{B_0(k) - (L+1)/L \cdot B(k)}{R(k) - B(k)} dk$$

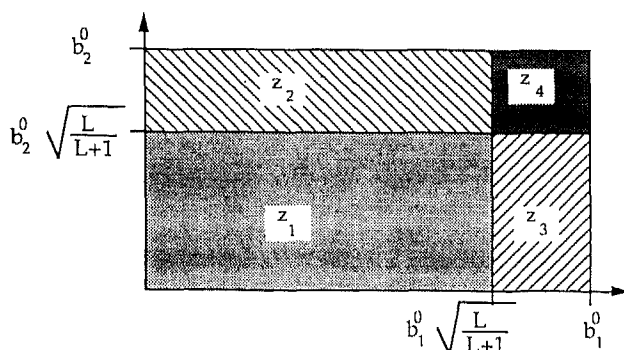
① ②

(avec  $R(k) = S(k) + B_0(k)$  ;  $S(k)$  : densité spatiale du signal).

Examinons maintenant les signes respectifs des quantités ① et ② du membre de droite de l'équation (B3).

La quantité ① est positive puisque  $S(k)$  et  $R(k) - B(k)$  sont positives (quel que soit  $k$ ) par hypothèse (on suppose que le pas de l'algorithme du gradient est choisi de façon telle qu'il ne puisse pas franchir la frontière du domaine de positivité de  $R(k) - B(k)$ ).

Divisons le domaine des  $\{b_i\}$  en quatre zones, comme indiqué ci-dessous :





Montrons d'abord que le maximum de H ne peut pas se trouver dans la zone  $z_1$ . Plus précisément, lorsque les  $\{b_i\}$  vérifient les inégalités suivantes :

$$(B4) \quad |b_i| \leq |b_i^0| \cdot \sqrt{\frac{L}{L+1}} \quad \text{pour } i = 1, 2, \dots, p$$

on vérifie aisément que :

$$(B5) \quad \int_{-W}^W B(k) - \frac{L+1}{L} B(k) dk > 0.$$

En effet :

$$\int_{-W}^W B(k) dk = \Gamma_B(0) = \sum_{i=0}^p b_i^2$$

( $\Gamma_B$  étant la covariance du processus MA de densité spatiale  $B(k)$ ).

On a donc :

$$(B6) \quad \int_{-W}^W B_0(k) - \frac{L+1}{L} B(k) dk = \sum_{i=0}^p (b_i^0)^2 - \frac{L+1}{L} (b_i)^2$$

ce qui prouve l'assertion (B5).

Par ailleurs, on peut considérer que  $R(k) - B(k)$  est minoré par un nombre  $\alpha$  strictement positif (hypothèse tout à fait réaliste car si  $R(k) - B(k) \rightarrow 0$  sur un ensemble de mesures non nul alors  $H \rightarrow -\infty$ ) donc :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^p b_i \cdot \frac{\partial}{\partial b_i} H &\geq L \int_{-W}^W \frac{S(k)}{R(k) - B(k)} dk + \\ &+ \frac{1}{\alpha} \int_{-W}^W B_0(k) - \frac{L+1}{L} \cdot B(k) dk \\ \Rightarrow \sum_{i=1}^p b_i \cdot \frac{\partial}{\partial b_i} H &\geq 0. \end{aligned}$$

Par conséquent, si les coefficients  $\{b_i\}$  vérifient les inégalités (B4) (i.e. se trouvent dans la zone 1) la somme pondérée des dérivées partielles est strictement positive, le maximum de H ne peut donc pas se trouver dans cette zone.

Jusqu'à présent, seule la positivité de  $S(k)$  a été utilisée, mais en fait  $S(k)$  correspond au spectre spatial des sources vues par l'antenne; il faudra utiliser cette hypothèse pour montrer que le maximum ne se trouve pas en zone 2 ou 3.

Si on suppose qu'une seule source est présente :

$$(B7) \quad S(k) = \frac{\sigma^2}{|z - z_0|^2}; \quad z_0: \text{ pôle associé à la source}$$

( $z_0$  peut être supposé plus ou moins loin du cercle unité suivant la fonction de pondération choisie).

Par conséquent :

$$(B8) \quad \int_{-W}^W \frac{S(k)}{R(k) - B(k)} dk \geq \frac{1}{\alpha} \int_{-W}^W S(k) dk = \frac{1}{\alpha} \frac{\sigma^2}{1 - |z_0|^2}.$$

Si les coefficients  $\{b_i\}$  appartiennent aux zones 2 ou 3, l'intégrale (B6) n'est plus nécessairement positive mais elle reste bornée. Par ailleurs, si la fonction de pondération n'élargit pas démesurément le lobe d'une source, l'intégrale (1) de (B3) est très grande; on peut donc affirmer que la somme des dérivées partielles pondérées par les coefficients est positive sur ces zones.

Si les coefficients  $\{b_i\}$  tendent vers leurs valeurs exactes, la fonctionnelle tend vers  $-\infty$ . On peut donc affirmer que le maximum se trouve dans la zone 4, elle-même déterminée par les conditions

$$(B9) \quad |b_i - b_i^0| \leq |b_i^0| \cdot \left(1 - \sqrt{\frac{L}{L+1}}\right)$$

pour  $i = 1, 2, \dots, p$ .

Notons que pour  $b_i^0$  positif, elle prend une forme particulièrement simple :

$$\sqrt{\frac{L}{L+1}} b_i^0 \leq \hat{b}_{i,L} \leq b_i^0 \quad \text{pour } i = 1, 2, \dots, p.$$

Si L devient grand, on voit donc que  $\hat{b}_{i,L}$  tend vers sa valeur exacte.

Comme sous-produit de ceci, notons le résultat suivant qui est assez étonnant :

Le terme  $\log \det B$  de H définie par (2) ne dépend pas des paramètres  $\{b_i\}$  quand le nombre de capteurs devient grand. Autrement dit, le terme  $\log \det B$  ne dépend pas (asymptotiquement) de la coloration spatiale du bruit. La démonstration de ce résultat découle du théorème de Szegö :

$$\lim_{n_c \rightarrow \infty} \frac{1}{n_c} \log \det B = \frac{1}{2W} \int_{-W}^W \log B(k) dk$$

( $n_c$  : nombre de capteurs constituant l'antenne)

$$B(k) = \sigma^2 F(k) \cdot \bar{F}(k)$$

et par conséquent :

$$\frac{1}{2W} \int_{-W}^W \log B(k) dk = \log \sigma^2 + l_2 + \bar{l}_2$$

où :

$$l_2 = \frac{1}{2W} \oint \log (Z^* \cdot B) \frac{dz}{z}$$

$$\bar{l}_2 = \frac{1}{2W} \oint \log (B^* \cdot Z) \frac{dz}{z}$$

avec :

$$(B10) \quad \mathbf{B}^i = (1, b_1, \dots, b_p) \quad \text{et} \quad \mathbf{Z}^i = (1, z^{-1}, \dots, z^{-p})$$

(le contour de l'intégrale  $\oint$  est le cercle unité pris dans le sens rétrograde).

De plus on a :

$$(B11) \quad \mathbf{Z}^* = (1, z, \dots, z^p) \quad \text{sur le cercle unité.}$$

Or le modèle MA considéré étant supposé à phase minimale, tous les zéros de  $\mathbf{B}^*$ .  $\mathbf{Z}$  sont situés en dehors du cercle unité. Par conséquent, on déduit du théorème de Cauchy que :

$$\bar{l}_2 = 0 \quad \text{et donc} \quad l_2 = 0$$

et finalement :

$$(B12) \quad \frac{1}{2W} \int_{-W}^W \log B(k) dk = \log \sigma^2.$$

On prouve par le même raisonnement que cette propriété est également vraie dans le cas d'un modèle AR(MA). On pourrait également la retrouver en considérant une approximation des valeurs propres de  $B$ . Cette remarque permet de réduire le calcul du vecteur gradient.

#### Remarques :

1) Dans la démonstration de la propriété 3, on suppose que le modèle exact du bruit est décrit par le modèle MA que l'on cherche à estimer.

2) La forme de  $S(k)$  intervient de façon fondamentale ; on peut remarquer qu'il en est de même pour la démonstration de la propriété 1 où l'hypothèse  $S$  matrice singulière positive est elle aussi fondamentale.

3) L'effet d'une source est de déplacer le maximum de  $H$  vers les valeurs exactes des paramètres (dans la zone 4) et de détruire l'égalité théorique (à une constante près) que l'on obtient dans le cas sans source.

4) On retrouve la propriété 1 à partir de la propriété 3 en utilisant l'approximation suivante :

$B$  étant la matrice de covariance du bruit (Toeplitz bande), les valeurs propres de  $B$  tendent vers les valeurs échantillonnées de la densité spatiale  $B(k)$  lorsque le nombre de capteurs devient grand devant la longueur de corrélation du bruit.

Le nombre de capteurs étant grand (hypothèse de base de l'analyse en fréquences spatiales), on peut donc approximer les valeurs propres  $\lambda_i$  de la matrice interspectrale du bruit par  $B(k)$ . De plus la propriété 3 entraîne

$$\frac{L}{L+1} B^0(k) < B(k) < B^0(k)$$

d'où :

$$\frac{L}{L+1} \lambda_i^0 < \lambda_i < \lambda_i^0$$

La réciproque n'étant pas vraie :

$$\frac{L}{L+1} B^0(k) < B(k) < B^0(k)$$

n'entraîne pas

$$|b_i - b_i^0| \leq |b_i^0| \cdot \left(1 - \sqrt{\frac{L}{L+1}}\right).$$

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] G. BIENVENU, L. KOPP, « Optimality of high resolution method array processing using the eigensystem approach », *IEEE Trans. on ASSP*, Vol. ASSP 31, n° 5, pp. 1235-1247, October 1983.
- [2] O. S. HALPENY, D. G. CHILDERS, « Composite wavefronts decomposition via multidimensional digital filtering of array data », *IEEE Trans. Circuit Syst.*, Vol. CAS 22, pp. 552-562, June 1975.
- [3] L. KOPP, G. BIENVENU, « Méthodes haute-résolution : présentation statistiques », Actes de la réunion SEE du 25-04-84, Paris.
- [4] G. BIENVENU, L. KOPP, « Méthodes haute-résolution après formation de voies », Actes du 10<sup>e</sup> colloque GRETSI, Nice, pp. 325-330, mai 1985.
- [5] P. FORSTER, G. VEZZOSI, « Application of Spheroidal sequences to array processing », *Proc. of the ICASSP*, Dallas, pp. 2268-2271, April 1987.
- [6] W. S. BURDIC, *Underwater acoustic system analysis*, Prentice Hall, 1984.
- [7] E. M. ARASE, T. ARASE, « Correlation of ambient sea noise », *J. Acoust. Soc. Am.*, Vol. 40, n° 1, pp. 205-210, 1966.
- [8] C. PLUMEJEAUD, B. RAFFINE, B. LUCAS, « Un algorithme de normalisation », Actes du 9<sup>e</sup> colloque GRETSI, Nice, pp. 111-114, mai 1983.
- [9] J. P. LE CADRE, Contribution à l'utilisation de méthodes paramétriques en traitement d'antenne, Thèse de doctorat-es-sciences, INPG-USMG, Grenoble, octobre 1987.
- [10] J. P. LE CADRE, « High resolution methods in presence of noise correlated sensor outputs, A relative entropy approach », submitted to IEEE ASSP.
- [11] J. P. LE CADRE, P. RAVAZOLLA, « Practical use of parametric method for array processing », Lecture notes in Control and Information Sciences, M. Bouvet and G. Biennu editors, Springer Verlag 1990.
- [12] P. LANCASTER, M. TISMENETSKY, *The theory of matrices*, 2nd edition, Academic Press, 1985.
- [13] P. Y. ARQUES, J. P. LE CADRE, « Underwater noise models and their identification for array processing », *Proc. of the EUSIPCO*, Grenoble, pp. 15-21, September 1987.
- [14] T. E. BERNARD, « Two maximum entropy beamforming algorithms for equally spaced line arrays », *IEEE Trans. on ASSP*, Vol. ASSP 30, n° 2, pp. 175-188, April 1982.
- [15] U. GRENANDER, G. SZEGO, *Toeplitz form and their applications*, University of California Press, San Francisco, 1958.
- [16] R. N. MC DONOUGH, « Maximum entropy spatial processing of array data », *Geophys.*, Vol. 39, pp. 843-851, December 1974.
- [17] G. BIENVENU, L. KOPP, « Principe de la goniométrie passive adaptative », Actes du 7<sup>e</sup> colloque GRETSI, Nice, pp. 106-110, mai 1979.
- [18] B. FRIEDLANDER, « On the computation of the Cramer-Rao bound for ARMA parameter estimation », *IEEE Trans. on ASSP*, Vol. ASSP 32, n° 4, pp. 721-728, August 1984.

- [19] G. H. GOLUB, C. F. VAN LOAN, *Matrix computations*, The Johns Hopkins University Press, 1983.
- [20] T. KAILATH, A. VIEIRA, M. MORF, « Inverses of toeplitz and close to toeplitz matrices », *Linear algebra and its applications*, Vol. 75, pp. 173-192, 1986.
- [21] B. N. MURKHERJEE, S. SAMARMAITI, « On some properties of positive definite toeplitz matrices and their possible applications », *Linear algebra and its applications*, Vol. 102, pp. 211-240, 1988.
- [22] A. TIKHONOV, V. ARSENINE, *Méthodes de résolution de problèmes mal posés*, Edition de Moscou, 1974.
- [23] J. J. FUCHS, « Estimation du nombre de sinusoides dans du bruit coloré », Actes du 11<sup>e</sup> colloque GRETSI, Nice, pp. 197-200, mai 1987.
- [24] J. P. LE CADRE, « Parametric methods for spatial signal processing in the presence of unknown colored noise fields », submitted to IEEE trans on ASSP.
- [25] G. VEZZOSI, F. FLORIN, B. BOUTHEMY, « Localisation de sources ponctuelles à large bande », Actes du 12<sup>e</sup> colloque GRETSI, Juan-les-pins, pp. 449-452, mai 1989.
- [26] Y. GRENIER, « Model expansion applied to speech analysis and source location », *Proc. of the ICASSP*, Glasgow, pp. 2302-2305, mai 1989.
- [27] S. D. STEARN, R. A. DAVID, *Signal processing algorithms*, Prentice Hall, 1989.
- [28] A. V. OPPENHEIM, R. W. SCHAFFER, *Discrete-time signal processing*, Prentice Hall, 1989.