

Une méthode d'invariants de l'analyse harmonique en reconnaissance de formes

Invariants from harmonic analysis

for pattern recognition



François GOURD

Laboratoire d'Automatique et de Génie des Procédés, LAGEP, Université Claude-Bernard, Lyon-I, Bât. n° 721, 43, boulevard du 11-Novembre-1918, 69622 VILLEURBANNE.

François Gourd, né en 1964 est ingénieur ENSIEG 1987 et titulaire d'un DEA de mathématiques pures depuis 1986 (Université P.-et-M.-Curie de Paris). Il prépare actuellement son Doctorat à l'INPG. Ses domaines d'intérêt sont le traitement d'image, la reconnaissance de formes.



Jean-Paul GAUTHIER

Laboratoire d'Automatique et de Génie des procédés, LAGEP, Université Claude-Bernard, Lyon-I, Bât. n° 721, 43, boulevard du 11-Novembre-1918, 69622 VILLEURBANNE.

Jean-Paul Gauthier, né en 1952 est ingénieur ENSIM 1975, Docteur ès sciences physiques 1982, Ses axes de recherches sont la théorie de la commande des systèmes non linéaires, les aspects mathématiques de l'analyse des systèmes et du traitement du signal. Il est professeur à l'Université Claude-Bernard, Lyon-I.

Hussein YOUNES

Société RSI, ZIRST, 6, chemin du Pré-Carré, 38240 MEYLAN.

Titulaire d'une maîtrise de mathématiques appliquées, Hussein Younes est ingénieur de modélisation dans la Société RSI. Il s'intéresse particulièrement à la simulation des procédés.

RÉSUMÉ

Dans cet article, nous proposons une approche de la reconnaissance de formes basée sur la Transformée de Fourier « généralisée » sur les groupes. Les nombreux exemples évoqués montrent effectivement que cette Transformée peut avoir beaucoup d'applications dans le domaines de la reconnaissance, de la détection et de la représentation des mouvements en analyses d'images.

Ces méthodes proviennent de la théorie des représentations de groupes et de l'Analyse Harmonique Abstraite.

Une application sur un procédé industriel (dépropaniseur de raffinerie) pour la détection de perturbations figure dans la dernière partie de cet article.

MOTS CLÉS

Groupes, représentations, Transformée de Fourier, intégration invariante, reconnaissance de formes, traitement d'images, détection de perturbations, invariants.

SUMMARY

In this paper, we propose a pattern recognition approach based on the "generalized" Fourier Transform on groups. The various examples we give, actually show that this transform may be used for many applications in pattern recognition, detection and motion analysis.

An application in disturbance detection on an industrial process is given in the last part of this paper.

KEY WORDS

Groups, representations, Fourier Transform, invariant integral, pattern recognition, pattern analysis, disturbance detection, invariants.

Introduction

(a) LES TRANSFORMATIONS DE FOURIER DANS LA RECONNAISSANCE DE FORMES

Les transformations de Fourier standard sont des outils couramment utilisés dans les problèmes de reconnaissance ou de classification de formes.

Étant donné une image plane f [il s'agit d'une notion physique consistant à associer à un certain nombre de points du plan (fréquentiel ou spatial, spatial dans notre cas), une grandeur physique du type intensité lumineuse, appelée niveau de gris. Une image est donc représentée par une fonction $f(x, y)$ définie sur des coordonnées d'espace (x, y) , à valeurs positives et à support limité c'est-à-dire que f est nulle en dehors d'un ensemble borné du plan], on cherche des grandeurs caractéristiques de f invariantes sous l'effet des déplacements plans (combinaisons de rotations et de translations) telles que, *inversement leur connaissance permette de « reconstruire » l'image f à un déplacement près*. Un tel ensemble de grandeurs caractéristiques sera appelé « système complet d'invariants sur \mathbb{R}^2 par rapport à l'action des déplacements du plan ». Une méthode possible est la suivante : afin d'éliminer l'effet des translations, on « centre » l'image f autour de son centre de gravité lumineux.

$$f(x, y) \rightarrow f(x + x_c, y + y_c) = f_c(x, y)$$

Ensuite, on procède en l'extraction du contour C de l'image (ceci peut être fait avec la méthode « de passage à zéro » (zéro-crossing) par exemple : cf. [4]) et l'on considère une paramétrisation $\rho_c(\theta)$ de C . [Plusieurs paramétrisations sont possibles ; par exemple si C est convexe, l'expression $\rho_c(\theta)$ du contour en coordonnées polaires autour du centre de gravité peut être utilisée. On préfère en général des paramétrisations « du genre » $\rho_c(s) + \Phi(s)$ où s est l'abscisse curviligne normalisée sur le contour choisi, $\rho_c(s)$ est l'angle formé par la tangente en avant au contour au point s avec une direction privilégiée. $\Phi(s)$ est un terme correctif qui rend la continuité à la fonction $\rho_c(s) + \Phi(s)$ (voir [5] pour plus de détails.) $\rho_c(\theta)$ est une fonction périodique (de période 2π) que l'on développe en série de Fourier :

$$\rho_c(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{\rho}_c(n) e^{in\theta}$$

Ce travail a été financé par la Société RSI.

Les $|\hat{\rho}_c(n)|$ sont invariants sous l'effet des translations mais aussi sous l'action des rotations car si l'image f subit une rotation d'angle θ_0 les $\hat{\rho}_c(n)$ sont transformés en $\hat{\rho}_c(n) e^{in\theta_0}$: les modules sont donc conservés mais ne constituent pas une information suffisante sur le contour car on a perdu tous les renseignements sur les phases $e^{i\varphi(n)} = \hat{\rho}_c(n) / |\hat{\rho}_c(n)|$.

Afin de s'affranchir de cette difficulté, on adjoint à la collection des $|\hat{\rho}_c(n)|$ les grandeurs $(\varphi(n)/n) - (\varphi(n_0)/n_0)$ où n_0 est un entier tel que $\rho_c(n_0) \neq 0$ un calcul simple montre :

(A) la réunion des $|\hat{\rho}_c(n)|$ et des $(\varphi(n)/n) - (\varphi(n_0)/n_0)$ constitue un système complet d'invariants du contour C de l'image f sous l'effet des déplacements du plan ce sont les descripteurs de Fourier de f .

Le défaut de la méthode décrite ci-dessus est qu'elle ne permet pas de distinguer deux images ayant même contour : les descripteurs de Fourier sont des grandeurs caractéristiques du contour et non pas de l'intérieur de l'image.

Une deuxième catégorie de problèmes quasi académiques de reconnaissance de formes est la reconnaissance de courbes, pour laquelle comme nous le verrons, les méthodes que nous développons ici s'appliquent *stricto sensu*. D'un point de vue pratique, une classe d'applications importantes est la suivante : très souvent, pour les grands procédés industriels contrôlés, un nombre très important de grandeurs sont enregistrées en continu sous forme de courbes. Des perturbations peuvent apparaître sur le procédé, se matérialisant sur ces enregistrements par un changement qualitatif d'allure de la réponse observée. Une idée communément admise actuellement est que l'homme, face à de telles situations réagit à travers des mécanismes de reconnaissance de formes : il a appris que telle ou telle perturbation se manifeste sur tel ou tel enregistrement par un certain type de modification. L'opérateur décide de la nature de l'incident en effectuant la discrimination de ces comportements qualitatifs.

Une courbe (ou une famille de courbes) $\varphi(t)$ — les enregistrements observés — peuvent dans ce contexte subir des modifications de facteur d'échelle $\varphi(t) \rightarrow a \cdot \varphi(t)$ (ce qui correspond à une hypothèse de linéarité pour l'effet de la perturbation sur l'enregistrement) de l'amplitude de celle-ci. $\varphi(t)$ subit aussi des modifications du type retard : $\varphi(t) \rightarrow a \cdot \varphi(t + t_0)$; le retard correspondant à l'instant d'apparition de la perturbation.

Le problème est donc de décider quand deux signaux ou familles de signaux ont la « même allure » modulo des transformations du type dilatations plus retard.

(b) LE BUT DE L'ARTICLE

Comme nous venons de le voir dans la partie (a), le contour $\rho_1(\theta)$ d'une image se déduit d'un autre contour $\rho_2(\theta)$ par une rotation d'angle θ_0 si :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \hat{\rho}_1(n) = \hat{\rho}_2(n) e^{in\theta_0}.$$

C'est donc en considérant ρ_1 et ρ_2 comme des fonctions sur le cercle unité S_1 (fonctions périodiques) et en effectuant leur décomposition en série de Fourier que l'on peut analyser si ρ_1 et ρ_2 s'obtiennent l'un de l'autre par une rotation.

De façon analogue, considérons deux signaux d'énergie finie $f_1(t)$ et $f_2(t)$. Ils se déduisent l'un de l'autre par un « retard t_0 » si :

$$f_1(t) = f_2(t + t_0).$$

En prenant leur transformée de Fourier sur \mathbb{R} [i. e.

la TF usuelle $\hat{h}(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) \cdot e^{-i\lambda t} dt$] il est bien connu que l'on a :

$$\hat{f}_1(\lambda) = \hat{f}_2(\lambda) \cdot e^{i\lambda t_0}$$

Dans la première partie de cet article, en analysant cette analogie et en utilisant une notion de Transformée de Fourier généralisée sur les groupes des transformations que peuvent subir les signaux considérés (rotations dans le cas des contours d'objets plans, dilatations plus translations dans le cas de la reconnaissance de perturbations sur des courbes enregistrées, déplacements dans le cas des images planes pour lesquelles le contour n'est pas discriminant, etc.) nous allons construire des familles d'invariants analogues à (A) qui sous certaines hypothèses (essentiellement la commutativité du groupe des transformations autorisées) seront suffisants pour discriminer (i. e. constitueront un système d'invariants complets).

Dans le cas du groupe des déplacements du plan, avec la même démarche, des invariants non complets mais plus riches que ceux relatifs au contour (A) ont déjà été exhibés avec cette méthode. Nous rappellerons brièvement ce point.

L'article est donc organisé comme suit :

la première partie est consacrée à la présentation des outils mathématiques utilisés. De nombreux exemples illustrent les notions introduites et montrent que les transformées classiques (TF, séries de Fourier, TFD...) sont des cas particuliers de la transformée de Fourier abstraite. Nous donnons dans cette partie un théorème permettant de calculer des invariants nécessaires et suffisants dans le cas où le groupe des transformations envisagées est commutatif et indiquons comment il est possible de généraliser ce théorème à d'autres groupes ;

la seconde partie traite de l'analyse d'images, le groupe considéré étant celui des déplacements plans,

les images s'interprétant comme des fonctions définies sur ce groupe ;

la dernière partie traite un cas précis de détection de perturbations sur un procédé industriel (colonne de distillation binaire) ;

la démonstration du théorème permettant l'obtention d'invariants nécessaires et suffisants dans le cas où le groupe est commutatif est mis en annexe. La lecture de celle-ci peut être omise sans pour autant nuire à la compréhension de l'article.

Une conclusion figure à la fin de ce travail, résumant les différents points abordés.

1. Aspects théoriques

1.1. QUELQUES RAPPELS MATHÉMATIQUES

1.1.1. Des groupes topologiques

Un groupe topologique est un espace topologique muni d'une structure de groupe compatible avec sa topologie.

Exemples :

- l'ensemble \mathbb{R} des nombres réels avec l'addition ;
- l'ensemble \mathbb{Z} des entiers relatifs avec l'addition ;
- l'ensemble S_1 des nombres complexes de module 1 avec la multiplication : $e^{i\theta_1} \cdot e^{i\theta_2} = e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$;
- l'ensemble M_2 des déplacements du plan, un élément (x, y, θ) de M_2 étant la combinaison d'une translation de vecteur (x, y) avec la rotation d'angle θ (toutes les rotations considérées étant autour d'un point fixe). La multiplication s'écrit :

$$\begin{aligned} (x_1, y_1, \theta_1) \cdot (x_2, y_2, \theta_2) &= (x_2 \cos \theta_1 - y_2 \sin \theta_1 \\ &+ x_1, x_2 \sin \theta_1 + y_2 \cos \theta_1 + y_1, \theta_1 + \theta_2) \end{aligned}$$

Dans les exemples considérés, \mathbb{Z} est évidemment muni de la topologie discrète, les autres groupes (\mathbb{R} , S_1 , M_2 , ...) étant pris avec leur topologie naturelle.

1.1.2. Densité invariante sur un groupe

Soit G un groupe. On dit qu'une fonction $\rho(g)$ définie sur G , à valeurs réelles est une densité invariante (mesure de Haar) à gauche (resp. à droite) si pour tout ensemble borné A dans G , on a :

$$\int_A \rho(g) dg = \int_{a \cdot A} \rho(g) dg$$

$$\left[\text{resp. } \int_{A \cdot a} \rho(g) dg \right]$$

où $a \in G$ quelconque et $aA = \{ a \cdot g, g \in A \}$.

On en déduit alors que si $f(g)$ est une fonction telle que $I = \int_G f(g) \rho(g) dg$ existe,

on a pour une densité à gauche

$$I = \int_G f(ag) \rho(g) dg$$

et pour une densité à droite

$$I = \int_G f(ga) \rho(g) dg$$

Un théorème (dit de Haar, cf. [9]) montre l'existence et l'unicité (à une constante multiplicative près) de la densité invariante à gauche ρ_g et à droite ρ_d dès que le groupe est localement compact. Si $\rho_g = \rho_d$, le groupe est dit unimodulaire (c'est le cas des groupes commutatifs).

Remarquons que l'hypothèse de locale compacité est toujours vérifiée en pratique pour les groupes envisagés.

Exemples :

— \mathbb{R} avec l'addition

alors $\rho(x) dx = dx$ et si $I = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ existe, on a :

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x+a) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(a+x) dx$$

— un exemple de calcul de densité invariante :

on considère le groupe \mathbb{R}_*^+ des réels strictement positifs avec la multiplication ;

calculons ρ : on doit avoir pour tout $a > 0$

$\rho(x) dx = \rho(ax) d(ax)$ donc $\rho(x) dx = \rho(ax) a dx$, soit $\rho(x)/a = \rho(ax)$ pour tout a et $x > 0$;

en particulier pour $x=1$ on a : $\rho(a) = \rho(1)/a$ donc à une constante multiplicative près [à savoir $\rho(1)$], $\rho(x) = 1/x, \forall x \in \mathbb{R}_*^+$.

— S_1 , les complexes de module 1 :

$$\rho(e^{i\theta}) d\theta = d\theta$$

et :

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\theta}) \rho(e^{i\theta}) d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{ia} \cdot e^{i\theta}) d\theta = \int_{-\pi+a}^{\pi+a} f(e^{i\theta}) d\theta$$

— les déplacements du plan avec la composition :

un calcul simple montre que $\rho(x, y, \theta) dx dy d\theta = dx dy d\theta$ (c'est un exemple de groupe unimodulaire non commutatif).

1.1.3. Les représentations d'un groupe

Soit G un groupe et H un espace vectoriel. On dit que (T, H) est une représentation de G si T associe à tout élément g de G une matrice $T(g)$ sur H (endomorphisme de H) et si T est telle que :

$$T(e) = I \quad (\text{opérateur identique sur } H)$$

$$T(g_1 g_2) = T(g_1) \cdot T(g_2)$$

H peut être de dimension infinie. Comme il est d'usage, on désignera par T et non (T, H) la représentation considérée.

T est dite irréductible si elle ne laisse aucun sous-espace de H invariant i. e. s'il n'existe pas de sous-espace S de H tel que $T(g)S \subset S$ pour tout $g \in G$.

Si H est un espace de Hilbert et $T(g)$ est une matrice unitaire, pour tout $g \in G$, on dit que la représentation est unitaire. L'ensemble des représentations unitaires irréductibles de G s'appelle le « dual de G » et est noté selon l'usage \hat{G} .

Exemples :

On montre (Dualité de Pontrjagin) que pour un groupe commutatif G , \hat{G} est aussi un groupe et que pour tout $T \in \hat{G}$, l'espace associé est \mathbb{C} (l'ensemble des nombres complexes) et T agit par multiplication sur les complexes, c'est-à-dire : $\forall T \in \hat{G}, \forall g \in G$

$$T(g): \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$z \mapsto T(g) \cdot z \quad \text{et} \quad T(g) \in \mathbb{C}.$$

Par exemple :

— si $G = \mathbb{R}$, alors $\hat{G} = \mathbb{R}$ avec

$$\forall T \in \hat{G}, \exists \lambda \in \mathbb{R}/T(x) \cdot z = e^{i\lambda x} \cdot z$$

$$\forall z \in \mathbb{C}, \forall x \in \mathbb{R}$$

— si $G = S_1$ (les complexes de module 1) alors $\hat{G} = \mathbb{Z}$ (les entiers relatifs) avec

$$\forall T \in \hat{G}, \exists n \in \mathbb{Z}/T(\zeta) \cdot z = \zeta^n \cdot z$$

$$\forall \zeta \in S_2, \forall z \in \mathbb{C}$$

— si $G = \mathbb{Z}$, alors $\hat{G} = S_1$ avec

$$\forall T \in \hat{G}, \exists \zeta \in S_1/T(n) \cdot z = \zeta^n \cdot z$$

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \forall z \in \mathbb{C}.$$

Si G est commutatif, les éléments de \hat{G} s'appellent les « caractères » de G . Dans le cas non commutatif, \hat{G} n'est plus un groupe. (Pour plus de détails sur la théorie des représentations, cf. [6], [7], [8], [9].)

1.1.4. Action d'un groupe sur un espace X

Soit G un groupe et X un espace de points. On dit que G agit sur X s'il existe pour tout $g \in G$ une « transformation » Ω qui à tout point x de X associe un point de X noté $\Omega(g) \cdot x$ avec en outre, $\Omega(g_1 \cdot g_2) = \Omega(g_1) \cdot \Omega(g_2)$. Ω est appelée alors l'« action » (pour plus de détails, cf. [6]).

Exemples :

— si G est le groupe S_1 des complexes de module 1 alors $X = \mathbb{R}^2$ le plan.

Pour tout élément $z = e^{i\beta}$ on pose $\Omega(e^{i\beta}) = \text{rot}(\beta)$, la rotation d'angle β , on a :

$$\Omega(e^{i\beta_1} \cdot e^{i\beta_2}) = \Omega(e^{i\beta_1}) \cdot \Omega(e^{i\beta_2}).$$

— pour un groupe quelconque G , en prenant $X = G$: pour tout élément g_0 de G ,

$$\Omega(g_0): G \rightarrow G$$

$$g \mapsto g_0 \cdot g$$

alors

$$\Omega(g_1 \cdot g_2) \cdot g = (g_1 \cdot g_2) \cdot g$$

$$= g_1 \cdot (g_2 \cdot g) = \Omega(g_1) \cdot \Omega(g_2) \cdot g.$$

(G agit sur lui-même par les translations à gauche. Si $\Omega(g_0) \cdot g = g \cdot g_0^{-1}$, on a les « translations à droite » de G.)

1.1.5. *La transformation de Fourier sur un groupe*

Soit G un groupe et \hat{G} son dual. $\forall \lambda \in \hat{G}$, on note $T_\lambda(g)$ la valeur de la représentation λ en le point $g \in G$.

Soit f une fonction définie sur G à valeurs complexes i. e., $\forall g \in G$ on a : $f(g) \in \mathbb{C}$.

On définit sa « Transformée de Fourier » par :

$$\hat{f}(\lambda) = \int_G f(g) T_\lambda(g)^{-1} \rho_g(g) dg$$

où ρ_g est la densité invariante à gauche de G. Donc $\forall \lambda \in \hat{G}$, $\hat{f}(\lambda)$ est un opérateur sur l'espace H associé à la représentation λ .

Exemples classiques :

– $G = \mathbb{R}^n, \hat{G} = \mathbb{R}^n$

$$x = (x_1, \dots, x_n), \quad \lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n),$$

$$\lambda \cdot x = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n$$

$$\hat{f}(\lambda) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-i\lambda \cdot x} dx$$

c'est la TF classique, très adaptée pour l'étude d'objets en translation dans l'espace.

– $G = S_1, \hat{G} = \mathbb{Z}$

$$\hat{f}(n) = \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta$$

On retrouve par cette formule la décomposition en série de Fourier classique d'une fonction périodique, utilisée pour l'étude des mouvements en rotation que l'on peut faire subir à une image plane.

– $G = \mathbb{Z}, \hat{G} = S_1$

$$\hat{f}(e^{i\theta}) = \sum_{-\infty}^{+\infty} f(n) e^{-in\theta}$$

Il s'agit de la théorie des fonctions génératrices.

– $G = \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ (les entiers modulo N), $\hat{G} = \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$

$$\hat{f}(l) = \sum_{p=0}^{N-1} f(p) e^{-2i\pi pl/N}$$

c'est la TFD (transformée de Fourier discrète); dans le cas où $N=2^n$, alors le calcul de la T.F.D. peut se faire par l'algorithme de la FFT (voir [11] pour une généralisation de cette notion soit avec $N \neq 2^n$, soit pour d'autres groupes)

– $G = \mathbb{R}_*^+, \hat{G} = \mathbb{R}$ et

$$\hat{f}(\lambda) = \int_0^\infty f(x) e^{-i\lambda \cdot \text{Log } x} \frac{dx}{x}$$

c'est la transformée de Fourier-Mellin, bien adaptée à des transformations de type « changement de facteur d'échelle ».

On voit donc qu'avec la définition de la transformée de Fourier sur un groupe, on généralise utilement toutes les notions classiques de TF, de série de Fourier, etc. Lorsque le groupe G n'est pas commutatif, on peut obtenir des expressions relativement complexes, bien que la base des calculs soit très simple.

1.2. FORMULATION D'UN PROBLÈME DE RECONNAISSANCE DE FORME

Soit X un espace de points sur lequel agit un groupe G via l'action Ω . Une image sur X est une fonction réelle positive, définie sur X (niveau de gris au point considéré) à support borné, c'est-à-dire nulle en dehors d'un ensemble borné de X.

1.2.1. *Le problème*

Étant donnée une image f sur X, déterminer des grandeurs caractéristiques de f , invariantes sous l'action de G, c'est-à-dire : si f et h sont deux images sur X telles que :

$$\exists a \in G / \forall x \in X, \quad f(x) = h(\Omega(a) \cdot x)$$

Calculer des grandeurs égales pour f et h donc invariantes sous l'action Ω et déterminer si possible un système complet d'invariants (i. e. permettant de décider si deux images f et h sur X se déduisent l'une de l'autre via l'action de G sur X).

Remarque fondamentale

Soient f, h deux fonctions sur le groupe G, telles qu'il existe un élément $a \in G$ avec $\forall g \in G, f(g) = h(ag)$. Alors sur les transformées de Fourier, on a :

$$\begin{aligned} \hat{f}(\lambda) &= \int_G f(g) T_\lambda(g^{-1}) \rho_g(g) dg \\ &= \int_G h(a \cdot g) T_\lambda^{-1}(g) \rho_g(g) dg \\ &= \int_G h(a \cdot g) T_\lambda^{-1}(a^{-1} \cdot a \cdot g) \rho_g(a \cdot g) d(a \cdot g) \\ &= \int_G h(g) T_\lambda(a^{-1} \cdot g)^{-1} \rho_g(g) dg \\ \hat{f}(\lambda) &= \int_G h(g) T_\lambda(g^{-1} \cdot a) \rho_g(g) dg \end{aligned}$$

avec

$$T_\lambda(g^{-1} \cdot a) = T_\lambda(g^{-1}) \cdot T_\lambda(a)$$

d'où l'on tire :

$$(RF) \quad \hat{f}(\lambda) = \hat{h}(\lambda) \cdot T_\lambda(a)$$

Mais comme $T_\lambda(a)$ est unitaire, on a

$$\hat{f}(\lambda) \cdot \hat{f}(\lambda)^* = \hat{h}(\lambda) \cdot \hat{h}(\lambda)^* \quad \text{et} \quad |\hat{f}(\lambda)| = |\hat{h}(\lambda)|$$

où $|\hat{f}(\lambda)|$ et $|\hat{h}(\lambda)|$ sont les modules de $\hat{f}(\lambda)$ et $\hat{h}(\lambda)$ (pour une matrice $|A|^2 = AA^*$, est semi-définie positive, et par conséquent admet une racine carrée semi-définie positive, notée $|A|$).

La famille de matrices $\{|\hat{f}(\lambda)|\}_{\lambda \in G}$ forme ce que l'on appelle ici les « descripteurs de Fourier » de f .

Dans le cas où $G = \mathbb{R}$, on retrouve les descripteurs de Fourier classiques comme des modules de TF c'est-à-dire analogues à des densités spectrales. Dans ce cas, ils sont par nature invariants par translation.

En revenant au problème considéré, si $X = G$, les descripteurs de Fourier sont invariants sous l'action des translations à gauche de G , mais inversement, si deux images ont les mêmes descripteurs, ce n'est pas pour autant que l'on puisse affirmer que chacune se déduit l'une de l'autre par une translation de G . Néanmoins dans beaucoup de situations pratiques, on se limite au calcul de ces invariants pour effectuer la comparaison.

Prenons un exemple :

$$G = \mathbb{R}, \quad X = \mathbb{R},$$

l'action étant les translations.

Soit $a > 0$ et posons :

$$f_1(x) = (1/\pi) (\sin xa)/x$$

$$f_2(x) = (1/\pi) [\sin(xa + \beta) - \sin \beta]/x$$

où $\beta \neq 2k\pi$.

Un calcul simple donne :

$$\hat{f}_1(\lambda) = \begin{cases} 1 & \text{si } |\lambda| \leq a \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\hat{f}_2(\lambda) = \begin{cases} e^{i\beta} & \text{si } -a \leq \lambda \leq 0 \\ e^{-i\beta} & \text{si } 0 \leq \lambda \leq a \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Il est clair que f_1 et f_2 ne s'obtiennent pas l'une de l'autre par une translation et pourtant, elles possèdent les mêmes descripteurs de Fourier :

$$|\hat{f}_1(\lambda)| = |\hat{f}_2(\lambda)| = \begin{cases} 1 & \text{si } |\lambda| \leq a \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

ceci est tout naturel car en passant aux modules, on a perdu toute l'information sur la phase des $\hat{f}_1(\lambda)$ et $\hat{f}_2(\lambda)$. Le théorème que nous proposons dans la partie suivante, permet de calculer des invariants de phase, complémentaires aux descripteurs de Fourier, l'ensemble formant un système d'invariants complets sous les translations.

1.2.2. Cas où X peut s'identifier à un quotient du groupe G

C'est le cas où G agit transitivement sur X (i.e. $\forall x_1, x_2 \in X, \exists g \in G/x_2 = \Omega(g).x_1$).

Il existe alors un sous-groupe G_0 de G tel que $G/G_0 = X$ (voir [6]).

Dans une telle situation, on peut utiliser la transformée de Fourier sur G que l'on applique aux images sur X , considérées comme des fonctions sur G , constantes sur des classes modulo G_0 .

(On rappelle que si G_0 est un sous-groupe de G alors le quotient G/G_0 est l'ensemble des classes d'équivalence de G modulo G_0 : $G/G_0 = \{g^0, g \in G\}$ où $g^0 = \{a \in G/ga^{-1} \in G_0\}$. C'est le cas où G agit transitivement sur X .)

Exemple 1 :

Soit M_2 le groupe des déplacements du plan et $X = \mathbb{R}^2$.

Alors $X = M_2/SO_2$ où SO_2 est le groupe des rotations autour de l'origine. X s'identifie ainsi au sous-ensemble de M_2 , formé des éléments (O, x, y) et deux images f et h se déduisent l'une de l'autre par un déplacement (θ_0, x_0, y_0) si :

$$f(x, y) = h(x \cos \theta_0 - y \sin \theta_0 + x_0, x \sin \theta_0 + y \cos \theta_0 + y_0)$$

1.2.3. Résultat principal

Théorème (Gourd-Gauthier) : Soit G un groupe commutatif, localement compact et soient $f, h \in L^2(G, dg)$ réelles (dg désigne la mesure de Haar sur G). f et h vérifient la condition C_1 :

$$\exists g_0 \in G/\hat{f}(\lambda) = \hat{h}(\lambda).T_\lambda(g_0), \quad \forall \lambda \in \hat{G},$$

si et seulement si (condition C_2) :

$$\hat{f}(\lambda_1) \dots \hat{f}(\lambda_n) \bar{\hat{f}}(\lambda'_1) \dots \bar{\hat{f}}(\lambda'_m) = \hat{h}(\lambda_1) \dots \hat{h}(\lambda_n) \bar{\hat{h}}(\lambda'_1) \dots \bar{\hat{h}}(\lambda'_m)$$

$$\forall \lambda_1, \dots, \lambda_n, \lambda'_1, \dots, \lambda'_m \in \hat{G}$$

avec

$$\lambda_1 \times \dots \times \lambda_n = \lambda'_1 \times \dots \times \lambda'_m$$

(où \times désigne la multiplication dans \hat{G}). La condition C_2 exprime que l'ensemble :

$$\hat{C}_2 = \{ \hat{f}(\lambda_1) \dots \hat{f}(\lambda_n) \bar{\hat{f}}(\lambda'_1) \dots \bar{\hat{f}}(\lambda'_m) \}$$

$$\text{où } \lambda_1 \times \dots \times \lambda_n = \lambda'_1 \times \dots \times \lambda'_m \}$$

constitue un système complet d'invariants sous l'action des translations de G .

Pour la démonstration, voir l'annexe. La preuve de ce théorème repose sur la dualité de Pontrjagin et demeure relativement technique; elle peut être omise en première lecture, sans nuire à la compréhension de l'article.

On pourrait penser que la condition C_2 est une conséquence immédiate de C_1 : ce n'est pas le cas, C_2 ne se déduit pas trivialement de C_1 .

L'intérêt de C_2 est de proposer une méthode pratique pour tester si la condition C_1 est satisfaite : il suffit de calculer un ensemble nécessaire et suffisant de nombres pour voir si C_2 (donc C_1 d'après le théorème) est vérifiée.

Cas particulier de \mathbb{R}

Si $G = \mathbb{R}$, on montre facilement que \hat{C}_2 se réduit à :

$$\hat{C}_2 = \{ |\hat{f}(\lambda)|, \lambda \in \mathbb{R} \} \cup \{ \hat{f}(\lambda_1) \hat{f}(\lambda_2) \bar{\hat{f}}(\lambda_1 + \lambda_2), \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \}$$

Il suffit même de prendre les λ_1, λ_2 dans un ensemble d'intérieur non vide de \mathbb{R} : c'est-à-dire que deux fonctions f et h sur \mathbb{R} vérifient la condition C_1 : $\exists t_0/f(t) = h(t + t_0)$ si et seulement si :

$$|\hat{f}(\lambda)| = |\hat{h}(\lambda)|, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\hat{f}(\lambda_1) \hat{f}(\lambda_2) \bar{\hat{f}}(\lambda_1 + \lambda_2) = \hat{h}(\lambda_1) \hat{h}(\lambda_2) \bar{\hat{h}}(\lambda_1 + \lambda_2)$$

où λ_1, λ_2 appartiennent à un sous-ensemble d'intérieur non vide de \mathbb{R} .

Cas du cercle S_1

Si $G=S_1$, l'exemple suivant montre que \hat{C}_2 ne peut être réduit à \hat{C}'_2 : en effet soient f et h deux fonctions définies sur S_1 dont les transformées de Fourier respectives sont données par :

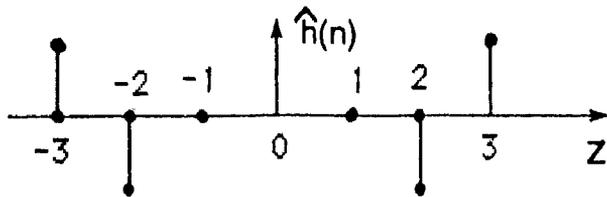
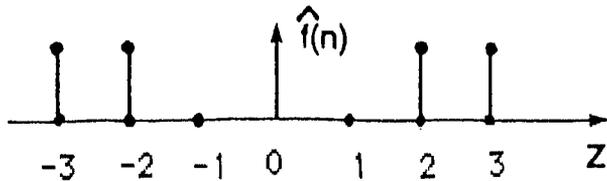
$$\hat{f}(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } |n|=3 \text{ ou } |n|=2 \text{ ou } i=0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\hat{h}(n) = \begin{cases} -1 & \text{si } |n|=2 \\ 1 & \text{si } |n|=3 \text{ ou } n=0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Il est alors évident que $\forall n, m \in \mathbb{Z}$:

– $|\hat{f}(n)| = |\hat{h}(n)|$;
 – $\hat{f}(n) \hat{f}(m) \hat{f}(n+m) = \hat{h}(n) \hat{h}(m) \hat{h}(n+m) = 0$ c'est-à-dire que le critère C'_2 ne distingue pas f de h .

Cependant avec $-3-3+2 = -2-2$, on a :



$$\hat{f}(-3) \hat{f}(-3) \hat{f}(-2) \hat{f}(-2) = 1$$

et

$$\hat{h}(-3) \hat{h}(-3) \hat{h}(-2) \hat{h}(-2) = -1$$

Donc f et h ne se déduisent pas par une translation sur S_1 , bien que $\hat{C}'_2(f) = \hat{C}'_2(h)$.

Remarquons aussi que notre théorème permet dans le cas du cercle de retrouver les invariants de phase classiques de (A) :

si $\hat{f}(n) = |\hat{f}(n)| e^{i\Phi(n)}$ et si $\hat{h}(n) = |\hat{h}(n)| e^{i\eta(n)}$, comparer $(\Phi(n)/n) - (\Phi(n_0)/n_0)$ avec $(\eta(n)/n) - (\eta(n_0)/n_0)$ [n_0 est un entier tel que $\hat{f}(n_0)$ et $\hat{h}(n_0)$ sont non nuls], revient à comparer $[\hat{f}(n_0)]^n \cdot [\hat{f}(n)]^{n_0}$ avec $[\hat{h}(n_0)]^n \cdot [\hat{h}(n)]^{n_0}$ en ayant l'égalité des modules : $|\hat{f}(n)| = |\hat{h}(n)|$.

Remarque : Dans le cas où G est compact, mais plus nécessairement commutatif, on obtient un théorème analogue (à paraître), dont la démonstration repose sur la théorie de Tannaka-Krein, beaucoup plus sophistiquée que celle de Pontrjagin (voir [7]). Signaux aussi que dans le cas du groupe SO_3 des rotations spatiales (SO_3 est compact), des idées similaires ont été développées dans l'article de S. Chen [3], pour l'analyse des mécanismes de reconnaissance par l'œil humain.

En effet, l'œil est assimilable à la sphère tridimensionnelle S_2 . On montre que S_2 s'identifie au quotient SO_3/SO_2 et donc qu'une image sur l'œil peut être considérée comme une fonction définie sur SO_3 , constante sur les classes modulo SO_2 . La théorie des représentations montre que dans le cas où $G=SO_3$, apparaissent naturellement les fonctions harmoniques sphériques jouant le rôle des $e^{in\theta}$ dans le cas de $S_1=SO_2$. La Transformée de Fourier sur SO_3 consiste en le développement des fonctions définies sur SO_3 en séries d'harmoniques sphériques : en appliquant ces résultats aux images sur S_2 , on accède facilement à leurs descripteurs de Fourier. Par ailleurs, les déplacements d'objets de \mathbb{R}^3 , en projection sur la sphère S_2 se matérialisent par la combinaison de rotations spatiales et d'homothéties. Des techniques analogues peuvent alors être employées (voir [3]).

2. Deux exemples d'application de la reconnaissance par la méthode des invariants

2.1. UN EXEMPLE SIMPLE ENTIÈREMENT TRAITÉ

Soit G le groupe formé par les translations horizontales et les homothéties verticales du demi-plan supérieur $X = \{(x, y), y > 0\}$. Ce groupe interviendra dans le cadre de la détection de perturbations d'un procédé industriel décrit dans la dernière partie de cet article.

– La multiplication de G s'écrit :

$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 \cdot y_2).$$

Il est clair que G est commutatif; il en est donc de même pour \hat{G} .

Un calcul simple montre que tout élément T de \hat{G} est indexé par deux réels λ_1, λ_2 et que l'on a :

$$T_{(\lambda_1, \lambda_2)}(x, y) = e^{i(x \cdot \lambda_1 + \lambda_2 \text{ Log } y)}$$

– La densité invariante se calcule comme suit :

$$\rho(x, y) dx dy = \rho(x + x_0, y \cdot y_0) d(x + x_0) d(y \cdot y_0)$$

donc

$$\rho(x, y) dx dy = \rho(x + x_0, y \cdot y_0) dx \cdot y_0 dy.$$

Prenons $x=0$ et $y=1$ et l'on a :

$$(\rho(0, 1))/y_0 = \rho(x_0, y_0), \quad \forall (x_0, y_0) \in G,$$

donc $\rho(x, y) = 1/y$ à une constante multiplicative près.

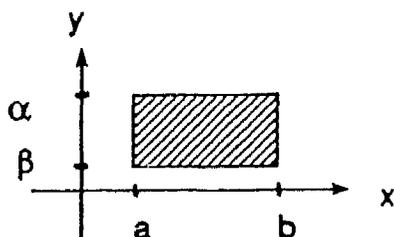
– La transformée de Fourier d'une image f sur X s'écrit :

$$\hat{f}(\lambda_1, \lambda_2) = \int_0^\infty \int_{-\infty}^{+\infty} [f(x, y) e^{-ix \cdot \lambda_1} dx] e^{-i\lambda_2 \text{ Log } y} dy/y$$

La transformée de Fourier sur G est donc la composition d'une TF sur l'axe des x , adaptée aux translations (ici horizontales) et d'une transformée de Fourier-Mellin (en y), adaptée aux changements d'échelle.

— Soit f l'image sur le demi-plan supérieur suivante :

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } a \leq x \leq b, \alpha \leq y \leq \beta \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$



Le calcul de sa transformée de Fourier donne :

$$\hat{f}(\lambda_1, \lambda_2) = (e^{-ib \cdot \lambda_1} - e^{-ia \cdot \lambda_1}) \times (e^{-i \lambda_2 \text{ Log } \alpha} - e^{-i \lambda_2 \text{ Log } \beta}) / \lambda_1 \cdot \lambda_2$$

Si h est l'image tradatée de f par (x_0, y_0) :

$$h(x, y) = f(x + x_0, y \cdot y_0)$$

en reprenant les calculs ci-dessus de façon identique, on a :

$$\hat{h}(\lambda_1, \lambda_2) = [e^{-i(b-x_0) \cdot \lambda_1} - e^{-i(a-x_0) \cdot \lambda_1}] \times [e^{-i \lambda_2 \text{ Log } (\alpha/y_0)} - e^{-i \lambda_2 \text{ Log } (\beta/y_0)}] / \lambda_1 \cdot \lambda_2$$

et l'on retrouve la relation de (RF)

$$\hat{h}(\lambda_1, \lambda_2) = \hat{f}(\lambda_1, \lambda_2) e^{i(x_0 \cdot \lambda_1 + \lambda_2 \text{ Log } y_0)}$$

Les descripteurs de Fourier sont donc donnés par :

$$\Delta(\lambda_1, \lambda_2) = (2/|\lambda_1 \lambda_2|) \sqrt{[1 - \cos(\lambda_2 \text{ Log } (\beta/\alpha))]} \times \sqrt{[1 - \cos(\lambda_1(b-a))]}$$

Ils sont clairement invariants sous l'action des translations horizontales et des homothéties verticales.

On vérifie sans peine sur cet exemple que l'on a :

$$\hat{f}(\lambda_1, \lambda_2) \hat{f}(\mu_1, \mu_2) \hat{f}(\lambda_1 + \mu_1, \lambda_2 + \mu_2) = \hat{h}(\lambda_1, \lambda_2) \hat{h}(\mu_1, \mu_2) \hat{h}(\lambda_1 + \mu_1, \lambda_2 + \mu_2)$$

2. 2. LE CAS DES DÉPLACEMENTS DU PLAN

Il s'agit d'un cas très important dans le cadre des applications physiques.

Le plan \mathbb{R}^2 s'identifie au sous-groupe des translations planes sur lequel agissent les déplacements eux-mêmes. Un élément du groupe des déplacements plans M_2 est noté (θ, x, y) , θ angle de rotation; (x, y) , vecteur de translation. Le produit s'écrit :

$$(\theta, x, y)(\theta', x', y') = (\theta + \theta', x + x' \cos \theta - y' \sin \theta, y + x' \sin \theta + y' \cos \theta)$$

Une image plane $f(x, y)$ s'interprète donc comme une fonction définie sur le groupe M_2 , mais indépendante de la variable θ .

$$f: M_2 \rightarrow \mathbb{R}^+ \\ (\theta, x, y) \quad f(x, y)$$

Puisque f est une image, $\iint f(x, y) dx dy$ existe et donc :

$$\int_0^{2\pi} \iint f(x, y) dx dy d\theta = 2\pi \iint f(x, y) dx dy$$

converge et est l'intégrale de f sur M_2 .

On vérifie sans peine que M_2 est unimodulaire : $\rho(\theta, x, y) dx dy d\theta = dx dy d\theta$. On montre que le dual de M_2 peut être identifié à \mathbb{R}_*^+ : $M_2 = \mathbb{R}_*^+$ et que toutes les représentations T_λ unitaires irréductibles de M_2 agissent sur l'espace $L^2(S_1, d\theta)$ des fonctions ψ définies sur le cercle S_1 , de carré intégrable :

$$\int_0^{2\pi} |\psi(\theta)|^2 d\theta < \infty$$

Les T_λ sont donc de dimension infinie.

On peut calculer ces représentations et l'on obtient :

$$T_\lambda(\theta, x, y): L^2(S_1, d\theta) \rightarrow L^2(S_1, d\theta) \\ \psi \quad [T_\lambda(\theta, x, y)] \cdot \psi$$

où

$$[T_\lambda(\theta, x, y) \cdot \psi](z) = e^{i\lambda(x \cdot \cos z + y \cdot \sin z)} \psi(z + \theta)$$

C'est Vilenkin qui a calculé ces représentations le premier (voir [10]); il est assez difficile d'en donner une interprétation physique élémentaire.

La transformée de Fourier de l'image f s'écrit alors :

$$\forall \lambda > 0,$$

$$\hat{f}(\lambda) = \int_{M_2} f(x, y) T_\lambda^{-1}(\theta, x, y) dx dy d\theta,$$

c'est-à-dire :

$$\forall \psi \in L^2(S_1, d\theta),$$

$$[\hat{f}(\lambda) \cdot \psi](z) = \int_{M_2} f(x, y) [T_\lambda^{-1}(\theta, x, y) \cdot \psi](z) dx dy d\theta$$

Si l'on passe en coordonnées polaires, on obtient

$$\begin{cases} x = \rho \cos \omega \\ y = \rho \sin \omega \end{cases}$$

et l'on a :

$$[\hat{f}(\lambda) \cdot \psi](z) = \int_{M_2} f(\rho, \omega) \cdot e^{-i\lambda \rho \cos(\theta + \omega - z)} \psi(z - \theta) \rho d\rho d\omega d\theta$$

Posant $\theta' = \theta - z$, on a :

$$[\hat{f}(\lambda) \cdot \psi](z) = \int_{M_2} f(\rho, \omega) \cdot e^{-i\lambda\rho \cos(\theta' + \omega)} \psi(-\theta') \rho d\rho d\omega d\theta'$$

Cette dernière intégrale est indépendante de z donc $\hat{f}(\lambda)$ associe linéairement à ψ un scalaire (fonction constante sur S_1); il en résulte que la transformée de Fourier de f, \hat{f} détermine la famille de formes linéaires $\hat{f}(\lambda), \lambda > 0$ sur $L^2(S_1, d\theta)$ dont l'expression dans la base $\{e^{in\theta}, n \in \mathbb{Z}\}$ est :

$$\hat{f}(\lambda)_n = 2\pi e^{in\pi/2} \iint f(\rho, \omega) e^{in\omega} J_n(-\lambda\rho) \rho d\rho d\omega d\theta$$

où $J_n(x)$ est la n -ième fonction de Bessel :

$$J_n(x) = 1/2\pi \int e^{i(n\theta - x \cdot \sin \theta)} d\theta$$

Les $J_n(x)$ constituent les coefficients de Fourier de $e^{-ix \cdot \sin \theta}$ et ce développement de $e^{-ix \cdot \sin \theta}$ est classique dans la théorie de la modulation de fréquence. Ces calculs représentent ce que l'on appelle classiquement la transformée de Fourier-Bessel.

On démontre que l'on peut définir sur le dual \hat{M}_2 une densité $P(\lambda) d\lambda$ dite densité de Plancherel telle que l'on ait l'analogie de la formule de Plancherel :

Si f_1 et f_2 sont deux fonctions de carré intégrable sur M_2 , alors :

$$\int_{M_2} f_1(\theta, x, y) \bar{f}_2(\theta, x, y) dx dy d\theta = \int_{\hat{M}_2} \text{Tr}[\hat{f}_1(\lambda) \hat{f}_2(\lambda)^*] P(\lambda) d\lambda.$$

Le calcul donne $P(\lambda) = \lambda/4\pi^2$. Dans de telles conditions, on montre que l'on a aussi une transformée de Fourier inverse :

$$[F^{-1}(\hat{f})](\theta, x, y) = \int_{\hat{M}_2} \text{Tr}[\hat{f}(\lambda) T_\lambda(\theta, x, y)] P(\lambda) d\lambda$$

Le calcul des descripteurs de Fourier sur les déplacements se calculent facilement et l'on prouve qu'ils sont donnés par :

$$D(\lambda) = \sum_n \hat{f}(\lambda)_n \bar{\hat{f}}(\lambda)_n$$

Sur les figures suivantes, on voit facilement qu'ils ne sont pas suffisants pour déterminer entièrement une image, bien qu'ils le soient en général lorsqu'il s'agit d'images naturelles : encore une fois nous avons perdu des informations de phase, en passant aux modules des $\hat{f}(\lambda)_n$; $D(\lambda)$ joue ici le rôle d'une densité spectrale. Néanmoins, pour des problèmes pratiques de discrimination, on se limite souvent à ces invariants.

La théorie nous amène à penser que les invariants de phase qu'il faut ajouter aux modules pour caractériser entièrement l'image sont analogues à ceux présentés dans notre théorème et qu'ils s'écrivent :

$$[\hat{f}(\lambda_1) \otimes \hat{f}(\lambda_2) \otimes \dots \otimes \hat{f}(\lambda_n)] \cdot \hat{f}^*(\lambda'_1 \otimes \lambda'_2 \otimes \dots \otimes \lambda'_m)$$

pour tous les $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n; \lambda'_1, \lambda'_2, \dots, \lambda'_m$ dans le dual \hat{M}_2 , tels que $\lambda_1 \otimes \lambda_2 \otimes \dots \otimes \lambda_n$ soit égal (en un certain sens) à $\lambda'_1 \otimes \lambda'_2 \otimes \dots \otimes \lambda'_m$ (le symbole \otimes désigne le produit tensoriel intérieur de représentations); nous n'entrons pas dans les détails (article à paraître).

Dans le cas où l'on ne s'intéresse qu'aux rotations discrètes d'angle $2k\pi/N, 0 \leq k \leq N-1$ (c'est-à-dire si l'on substitue le groupe des combinaisons de petites

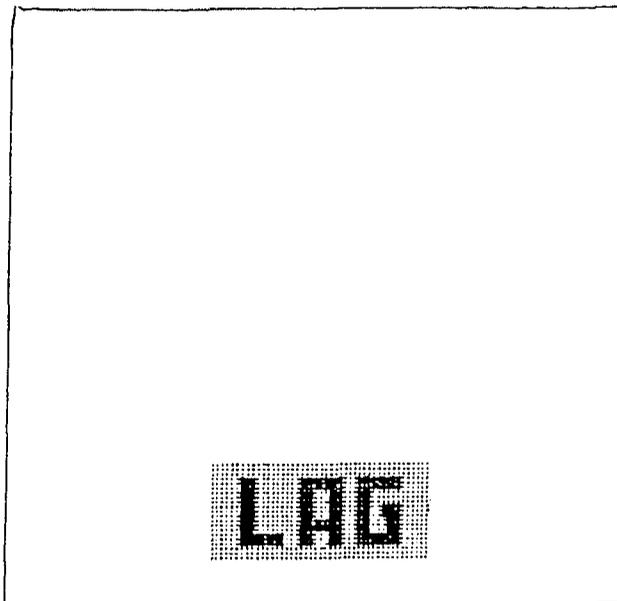


Image originale.

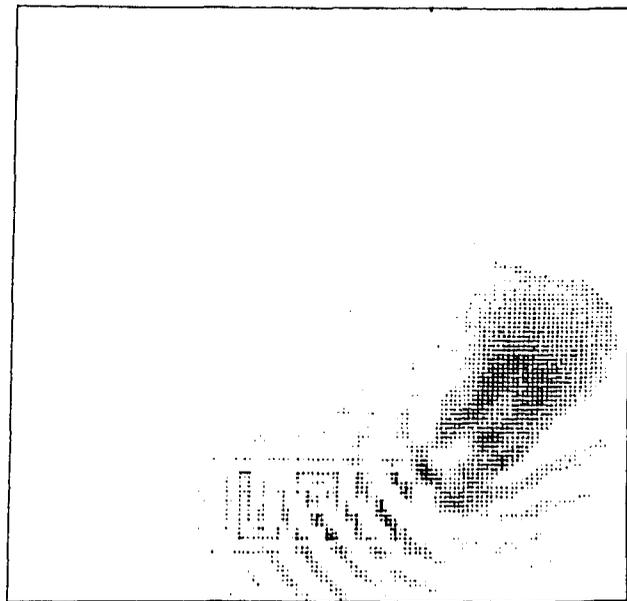


Image II ayant les mêmes descripteurs de Fourier que l'image I.

rotations discrètes et de translations au groupe M_2) on démontre que les représentations unitaires irréductibles de ce nouveau groupe M^n obtenu agissent sur \mathbb{C}^N et sont donc de dimension finie.

On peut de plus, voir que lorsque N tend vers l'infini, le groupe M^n se « déforme » (en un certain sens) vers M_2 . Il en résulte des algorithmes de calculs efficaces pour la détermination numérique des transformations de Fourier sur M_2 . Pour plus de détails voir [1] et surtout [2] pour l'aspect numérique.

Notons dans l'exemple précédent, que l'on s'est affranchi, par ces calculs, des problèmes d'extraction de contour et de l'utilisation des méthodes de passage à zéro (zero crossing), c'est-à-dire que l'on a calculé directement sur M_2 les descripteurs de Fourier de l'image considérée au lieu de se ramener à un calcul sur S_1 . Cette dernière méthode semble plus naturelle que l'approche de l'exemple introductif et permet en particulier d'obtenir plus d'invariants et donc de mieux caractériser l'image. Il n'en demeure pas moins que les deux méthodes proposées restent basées sur le même objet fondamental : la Transformée de Fourier abstraite.

2. 3. INTÉRÊTS DES MÉTHODES DÉVELOPPÉES

2. 3. 1. De la reconnaissance de formes

La méthode ci-dessus présentée consiste en le calcul de grandeurs caractéristiques de la forme considérée, invariants sous l'effet des transformations autorisées. Deux formes se déduisent donc l'une de l'autre par l'une de ces transformations si elles possèdent les mêmes invariants. Il suffit donc de tester la différence entre des nombres pour savoir si deux images sont équivalentes. Cette procédure est nettement plus simple à réaliser que la recherche d'une éventuelle transformation (qui peut ne pas exister) permettant de passer d'une forme à une autre. Même si elle existe, cette transformation peut être très difficile à déterminer : par exemple des méthodes de moindres carrés pour la détermination des paramètres de l'hypothétique déplacement conduisent inévitablement à des extrémums locaux.

2. 3. 2. Le calcul effectif de la transformation de Fourier

Tous les exemples précédents montrent que le calcul de ces transformées de Fourier généralisées se ramènent à celui de TF ordinaires : on utilise alors numériquement la FFT quand cela est possible.

2. 3. 3. Conclusion des deux premières parties

Nous avons montré dans la première partie comment on pouvait introduire naturellement les outils d'analyse harmonique abstraite en traitement d'images, la Transformée de Fourier généralisée étant le point essentiel des techniques ainsi proposées.

Il nous a alors été possible de définir d'une façon systématique les descripteurs de Fourier d'une image par rapport à un groupe de transformations donné G . Dans le cas où G est commutatif, nous avons donné un théorème permettant de calculer les invariants complets (*i. e.* nécessaires et suffisants) des images sur G .

Ce théorème présente aussi l'intérêt de montrer comment on peut généraliser ces méthodes aux cas de groupes non commutatifs et permet en particulier de calculer des invariants de phase complémentaires aux modules des transformées de Fourier.

La seconde partie montre comment on peut utiliser pratiquement les méthodes proposées, notamment dans le cadre de la reconnaissance d'objets plans.

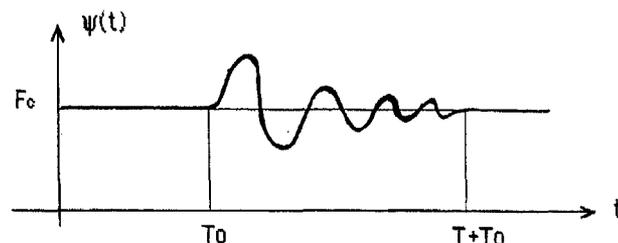
3. Une application de la méthode d'invariants en reconnaissance de formes à la détection de perturbations

3. 1. POSITION DU PROBLÈME

Comme il a été expliqué dans l'introduction, on s'intéresse à la détection de perturbations sur un procédé industriel *via* l'analyse qualitative des enregistrements des variables observées. On fait, comme il a été dit, la première approximation de linéarité de l'effet de la perturbation sur les enregistrements.

Le point pratique suivant est *essentiel* pour la validité de la méthode : Très souvent, les variables enregistrées sur un procédé industriel correspondent à des grandeurs régulées. Un des objectifs de la régulation est justement de combattre l'apparition des perturbations et de ramener les grandeurs concernées à une valeur souhaitée dite « valeur de consigne », en agissant sur des variables physiquement manipulables sur le procédé. En supposant que ces régulations sont efficaces (ce qui est assez souvent le cas), on pourra donc admettre que le scénario suivant est raisonnable :

- Le procédé fonctionne correctement, les grandeurs enregistrées, régulées sont approximativement constantes.
- Une perturbation apparaît à un certain instant T_0 , avec une amplitude a .
- Il s'ensuit une réponse transitoire de la variable enregistrée, dont l'amplitude dépend linéairement de a , le signal revenant au bout d'un certain temps T à sa valeur de consigne.



On peut donc considérer que le retard T_0 correspondant à l'instant d'apparition de la perturbation s'interprète comme une translation appliquée à un signal $\psi(t)$ nul en dehors d'un certain intervalle $[\alpha, \beta]$. Ce point sera essentiel ultérieurement et cette interprétation ne serait pas valide si l'effet statique des perturbations considérées persistait.

Comme nous venons de le voir, il est naturel de faire intervenir le groupe G du premier exemple de la partie II (groupe des homothéties verticales et des

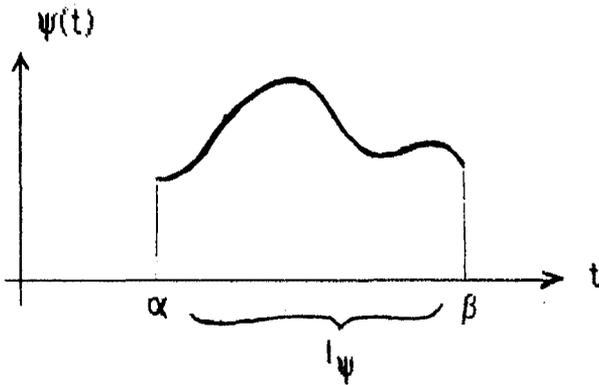
translations horizontales), les homothéties étant associées aux changements d'amplitude des signaux considérés et les translations aux retards correspondants.

Afin de déterminer la nature des perturbations mises en jeu à partir de l'analyse du signal $f(t)$, on cherche à calculer des grandeurs caractéristiques de la portion de signal modifiée invariante sous les transformations $f(t) \rightarrow k \cdot f(t+t_0)$, c'est-à-dire invariante sous l'action des translations du groupe G . Nous allons montrer comment il est possible de considérer la portion de signal étudiée comme une image sur G afin de se ramener aux techniques d'invariants précédemment exposées, reposant sur la Transformée de Fourier sur le groupe G .

3.2. L'ASPECT MATHÉMATIQUE DU PROBLÈME

Nous considérons ici le groupe G du premier exemple de la partie II de l'article.

Soit ψ une fonction réelle, continue par morceaux, telle qu'il existe un intervalle $[\alpha, \beta]$ sur lequel ψ est strictement positive et en dehors duquel ψ est identiquement nulle. On note par E l'ensemble de ces fonctions.



Si $\psi \in E$, on note par I_ψ l'intervalle où ψ est strictement positive. Montrons que G agit sur E : $\forall \psi \in E, \forall (x, a) \in G$, on pose :

$$[\Omega(x, a) \cdot \psi](t) = a \cdot \psi(t+x).$$

On voit facilement que Ω est une action; en effet, $\forall \psi \in E, \forall (x_1, a_1), (x_2, a_2) \in G$, on a :

$$\begin{aligned} [\Omega\{(x_1, a_1), (x_2, a_2)\} \cdot \psi](t) &= [\Omega(x_1 + x_2, a_1 \cdot a_2) \cdot \psi](t) \\ &= a_1 \cdot a_2 \cdot \psi(t + x_1 + x_2) \\ [\Omega\{(x_1, a_1), (x_2, a_2)\} \cdot \psi](t) &= [\Omega(x_1, a_1)] \cdot [\Omega(x_2, a_2) \cdot \psi](t) \end{aligned}$$

donc Ω est bien une action [on vérifie sans peine que si $\psi \in E$, alors $\Omega(x, a) \cdot \psi$ est aussi un élément de E . De même, il est aisé de voir que si $\psi \in E$, alors $I_{\Omega(x, a) \cdot \psi} = I_\psi - x = \{t - x, t \in I_\psi\}$.

Le problème. — Étant donné deux éléments ψ_1, ψ_2 de E , déterminer une CNS pour qu'il existe $(x, a) \in G$ tel que $\psi_1 = \Omega(x, a) \cdot \psi_2$.

3.3. LA RÉOLUTION

On essaie de se ramener aux méthodes proposées dans les deux premières parties de cet article.

Toute fonction ψ de E définit une image f_ψ sur G donnée par :

$$f_\psi(x, a) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in I_\psi \text{ et } a = \psi(x) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

f_ψ est l'image définissant la courbe $a = \psi(x), x \in I_\psi$. La transformée de Fourier de f_ψ est nulle car l'intégrale dans la direction verticale

$$\int_0^\infty f_\psi(x, a) e^{-i(\lambda_2 \cdot \text{Log } a)} da/a$$

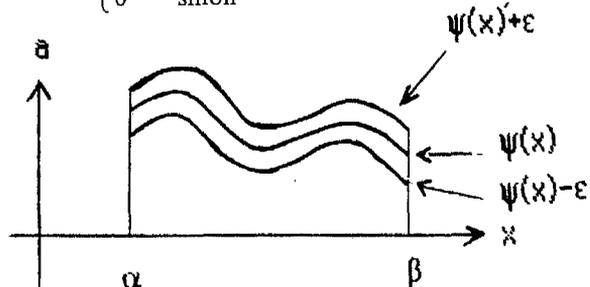
apparaissant dans l'expression de

$$\hat{f}_\psi(\lambda_1, \lambda_2) = \iint_G f_\psi(x, a) e^{-i(\lambda_2 \cdot \text{Log } a + \lambda_1 \cdot x)} dx da/a$$

est nulle [à x fixé dans $I_\psi, f_\psi(x, a)$ est une fonction de a , nulle pour tout $a > 0$ sauf pour $a = \psi(x)$; cela signifie physiquement que le trait de la courbe représentative de la fonction $a = \psi(x)$ est infiniment mince. On va donc « épaissir » ce trait]. Afin de s'affranchir de cette difficulté, on considère l'image suivante :

soit $\varepsilon > 0$

$$f_{\psi, \varepsilon}(x, a) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in I_\psi \text{ et } a \in [\psi(x) - \varepsilon, \psi(x) + \varepsilon] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$



On calcule ensuite $\hat{f}_{\psi, \varepsilon}$ dont on effectue un développement limité par rapport à ε au voisinage de $\varepsilon = 0$ ($\varepsilon = 0$ signifie que le trait de la courbe est d'épaisseur nulle). Un calcul simple donne :

$$\hat{f}_{\psi, \varepsilon} = \varepsilon \tilde{\psi} + \varepsilon r(\varepsilon) \quad \text{où } \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} r(\varepsilon) = 0$$

avec

$$\tilde{\psi}(\lambda_1, \lambda_2) = \int_{I_\psi} e^{-i(\lambda_2 \cdot \text{Log } \psi(x) + \lambda_1 \cdot x)} dx$$

Remarque 1 : On peut montrer que $\psi \rightarrow \tilde{\psi}$ est injective (c'est-à-dire que si $\psi_1 \neq \psi_2$ alors, $\tilde{\psi}_1 \neq \tilde{\psi}_2$).

Remarque 2 : $\tilde{\psi}(\lambda_1, \lambda_2)$ peut s'interpréter en termes de distributions; en effet :

si $\mathbf{1}_{[\alpha, \beta]}(x)$ est la fonction définie par :

$$\mathbf{1}_{[\alpha, \beta]}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [\alpha, \beta] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et si δ est la distribution de Dirac, alors pour toute fonction $f(x, a)$ on a :

$$\int \int f(x, a) \mathbf{1}_{[\alpha, \beta]}(x) \delta[a - \psi(x)] dx da = \int_{\alpha}^{\beta} f(x, \psi(x)) dx$$

Donc en particulier, si

on a : $f(x, a) = e^{-i[\lambda_2 \cdot \text{Log } a + \lambda_1 \cdot x]}$

$$\int \int f(x, a) \mathbf{1}_{[\alpha, \beta]}(x) \delta[a - \psi(x)] dx da = \int_{\alpha}^{\beta} e^{-i[\lambda_2 \cdot \text{Log } \psi(x) + \lambda_1 \cdot x]} dx$$

c'est-à-dire, avec les notations classiques,

$$\tilde{\Psi}(\lambda_1, \lambda_2) = \langle \mathbf{1}_{[\alpha, \beta]}(x) \delta[a - \psi(x)], e^{-i[\lambda_2 \cdot \text{Log } a + \lambda_1 \cdot x]} \rangle$$

on en déduit donc que $\tilde{\Psi}(\lambda_1, \lambda_2)$ est l'évaluation de la distribution $\mathbf{1}_{[\alpha, \beta]}(x) \delta[a - \psi(x)]$ sur le caractère $e^{-i[\lambda_2 \cdot \text{Log } a + \lambda_1 \cdot x]}$, la distribution ainsi définie exprime simplement le fait que l'on a placé sur la courbe $a = \psi(x)$, $x \in [\alpha, \beta]$ une très « forte densité ou poids » qui corresponde à la limite (au sens des distributions) de $(1/\varepsilon) f_{\psi, \varepsilon}$ quand ε tend vers 0.

Remarque fondamentale : $\forall \psi \in E, \forall (x, a) \in G,$

$$\begin{aligned} [\Omega(x, a) \cdot \psi](\lambda_1, \lambda_2) &= \int_{\mathbf{1}_{[\Omega(x, a) \cdot \psi]}(\lambda_1, \lambda_2)} e^{-i[\lambda_1 u + \lambda_2 \log(a \cdot \psi(x+u))]} du \\ &= \int_{\mathbf{1}_{\psi-x}} e^{-i[\lambda_1 u + \lambda_2 \log(a \cdot \psi(x+u))]} du \\ &= \int_{\mathbf{1}_{\psi-x}} e^{-i[\lambda_1 (u+x-x) + \lambda_2 \log(a \cdot \psi(x+u))]} du \\ &= e^{i[\lambda_1 x - \lambda_2 \log a]} \int_{\mathbf{1}_{\psi}} e^{-i[\lambda_1 u + \lambda_2 \log \psi(u)]} du \end{aligned}$$

c'est-à-dire :

$$[\Omega(x, a) \cdot \psi](\lambda_1, \lambda_2) = e^{i[\lambda_1 x - \lambda_2 \log a]} \cdot \tilde{\Psi}(\lambda_1, \lambda_2)$$

On observe donc que l'on passe du membre de droite à celui de gauche par la multiplication du caractère associé à $(x, 1/a)$.

Avec la remarque précédente, on a :

La formulation définitive du problème

Étant donné ψ_1 et ψ_2 deux éléments de E , trouver une CNS pour qu'il existe $(x, a) \in G$ tel que :

$$\tilde{\Psi}_1(\lambda_1, \lambda_2) = e^{i[\lambda_1 x - \lambda_2 \log a]} \cdot \tilde{\Psi}_2(\lambda_1, \lambda_2), \quad \forall (\lambda_1, \lambda_2) \in \hat{G}.$$

La résolution

S'étant ramené au problème évoqué dans les parties précédentes, et en remarquant que G est commutatif, on peut utiliser le théorème de la partie I et la CNS

s'écrit (critère simplifié comme dans le cas particulier de \mathbb{R}) :

$$\begin{aligned} \forall (\lambda_{11}, \lambda_{21}), (\lambda_{12}, \lambda_{22}) \in \mathbb{R}^2 = \hat{G} \\ \tilde{\Psi}_1(\lambda_{11}, \lambda_{21}) \cdot \tilde{\Psi}_1(\lambda_{12}, \lambda_{22}) \cdot \overline{\tilde{\Psi}_1(\lambda_{11} + \lambda_{12}, \lambda_{21} + \lambda_{22})} \\ = \tilde{\Psi}_2(\lambda_{11}, \lambda_{21}) \cdot \tilde{\Psi}_2(\lambda_{12}, \lambda_{22}) \\ \cdot \overline{\tilde{\Psi}_2(\lambda_{11} + \lambda_{12}, \lambda_{21} + \lambda_{22})} \end{aligned}$$

Cas de N courbes

Supposons que l'on ait $2N$ courbes ψ_1, \dots, ψ_N et $\varphi_1, \dots, \varphi_N$ de E : on cherche une CNS pour qu'il existe $(x_1, a_1), \dots, (x_N, a_N) \in G$ tels que : $\forall k \in [1, N], \Omega(x_k, a_k) \cdot \psi_k = \varphi_k$. Pour ce faire, on écrira le critère précédent pour chacun des couples (ψ_k, φ_k) . Pour tout $\psi \in E$, les grandeurs

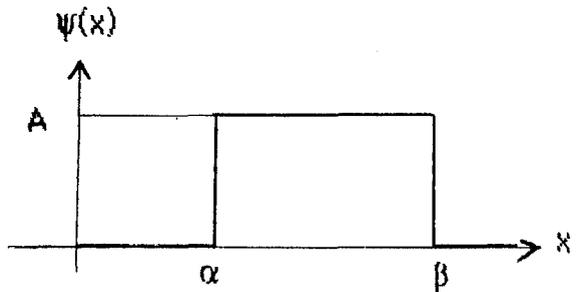
$$\tilde{\Psi}(\lambda_{11}, \lambda_{21}) \cdot \tilde{\Psi}(\lambda_{12}, \lambda_{22}) \cdot \overline{\tilde{\Psi}(\lambda_{11} + \lambda_{12}, \lambda_{21} + \lambda_{22})}$$

sont donc invariantes sous les transformations $\psi(x) \rightarrow a \cdot \psi(x + x_0)$ et sont caractéristiques de la famille des fonctions de E se déduisant de ψ par une telle transformation.

Un exemple de calcul d'invariants

Soit ψ le signal suivant :

$$\psi(x) = \begin{cases} A > 0 & \text{si } x \in [\alpha, \beta] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$



Un calcul simple donne :

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi}(\lambda_{11}, \lambda_{21}) \cdot \tilde{\Psi}(\lambda_{12}, \lambda_{22}) \cdot \overline{\tilde{\Psi}(\lambda_{11} + \lambda_{12}, \lambda_{21} + \lambda_{22})} \\ = 2[\sin \lambda_{12}(\alpha - \beta) + \sin \lambda_{11}(\alpha - \beta) \\ + \sin(\lambda_{11} + \lambda_{12})(\alpha - \beta)] / \lambda_{11} \cdot \lambda_{12} \cdot (\lambda_{11} + \lambda_{12}) \end{aligned}$$

On remarque que ces invariants sont indépendants de A , de λ_{21} et de λ_{22} . En revanche, ils dépendent de l'écart $\alpha - \beta$ qui est invariant sous l'effet des translations $\alpha \rightarrow \alpha + x_0$ et $\beta \rightarrow \beta + x_0$. On aurait pu se douter de ces résultats en regardant la courbe représentative de ψ .

3. 1. COMMENTAIRES

Mise en pratique du calcul

Soit $\psi \in E, \forall (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$

$$\tilde{\Psi}(\lambda_1, \lambda_2) = \int_{\mathbf{1}_{\psi}} e^{-i[\lambda_1 x + \lambda_2 \log \psi(x)]} dx$$

Posons :

$$\psi_{\lambda_2}^*(x) = \begin{cases} e^{-i\lambda_2 \log \psi(x)} & \text{si } x \in I_\psi \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

alors

$$\tilde{\Psi}(\lambda_1, \lambda_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\lambda_1 x} \psi_{\lambda_2}^*(x) dx$$

donc $\tilde{\Psi}(\lambda_1, \lambda_2) = \psi_{\lambda_2}^*(\lambda_1)$ où $\tilde{\cdot}$ dénote la TF usuelle sur \mathbb{R} .

A λ_2 fixé, $\tilde{\Psi}(\lambda_1, \lambda_2)$ se calcule par la TF de $\psi_{\lambda_2}^*$: on utilisera en pratique un algorithme de FFT pour évaluer $\tilde{\Psi}(\lambda_1, \lambda_2)$.

On échantillonne $\psi_{\lambda_2}^*$ sur un nombre N (une puissance de 2 afin d'appliquer l'algorithme de FFT) de points. On a donc N valeurs $\psi_{0, \lambda_2} \dots \psi_{N-1, \lambda_2}$ déterminant une fonction $\psi_{\lambda_2}^*$ définie sur $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$.

Dans ce cas, λ_1 prendra les valeurs $0, \dots, N-1$ car λ_1 est considéré comme élément de $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z} = \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$.

L'invariant associé à ψ s'écrivant

$$\tilde{\Psi}(\lambda_1, \lambda_2) \cdot \tilde{\Psi}(\mu_1, \mu_2) \cdot \tilde{\Psi}(\lambda_1 + \mu_1, \lambda_2 + \mu_2),$$

à λ_2 et μ_2 fixés, le calcul de l'invariant donne :

$$\text{Inv}_{\lambda_2, \mu_2}(p, q) = \psi_{\lambda_2}^*(p) \psi_{\mu_2}^*(q) \tilde{\Psi}_{\lambda_2 + \mu_2}^*(p + q),$$

où $p, q \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$.

Ainsi, à λ_2 et μ_2 fixés, on forme une matrice carrée $M_{\lambda_2, \mu_2}(\psi)$ à N^2 éléments dont le coefficient (p, q) est $\text{Inv}_{\lambda_2, \mu_2}(p, q)$.

Exemple 1 :

On présente ci-dessous l'exemple de deux fonctions $f(t)$ et $g(t)$ se déduisant l'une de l'autre par $g(t) = a \cdot f(t - t_0)$ (fig. 1). On calcule numériquement les invariants associés à f et g puis on les compare.

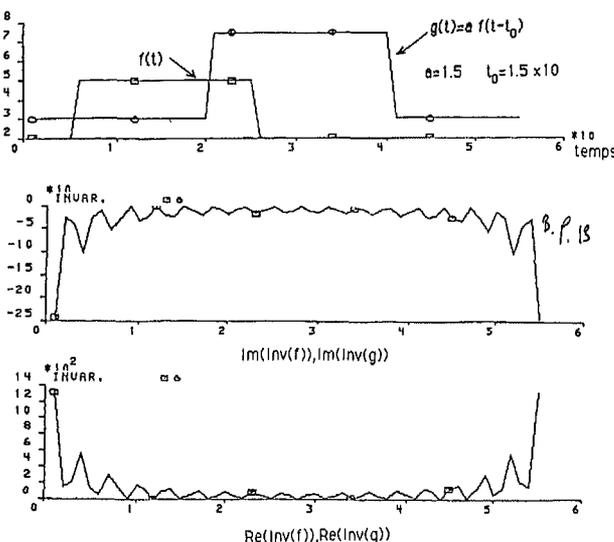


Fig. 1.

$\text{Im}(\text{Inv}(f))$ et $\text{Im}(\text{Inv}(g))$ sont les graphes représentatifs de la partie imaginaire de la première colonne de $M_{\lambda_2, \mu_2}(f)$ et $M_{\lambda_2, \mu_2}(g)$ respectivement. Ils coïncident exactement.

On considère de même $\text{Re}(\text{Inv}(f))$ et $\text{Re}(\text{Inv}(g))$ qui sont les courbes représentatives de la partie réelle de la première colonne de $M_{\lambda_2, \mu_2}(f)$ et $M_{\lambda_2, \mu_2}(g)$: elles coïncident aussi.

Remarque : On a fait $\lambda_2 = \mu_2$ afin que la matrice $M_{\lambda_2, \mu_2}(f)$ soit symétrique (il suffit de considérer la formule donnant $\text{Inv}_{\lambda_2, \mu_2}$ pour voir que $\text{Inv}_{\lambda_2, \mu_2} = \text{Inv}_{\mu_2, \lambda_2}$); il ne suffit plus alors que de stocker les valeurs, les courbes étant symétriques. Ici et dans la suite, on a choisi de ne calculer ces invariants que pour une seule valeur de $\lambda_2 = \mu_2$.

Exemple 2 :

On montre ici l'inconvénient que présente l'utilisation de la FFT. On considère deux fonctions f et g se déduisant l'une de l'autre par une translation et un facteur d'homothétie (voir fig. 2); on remarque qu'alors, les parties réelles des invariants de ces fonctions ne coïncident pas et de même pour les parties imaginaires. Ceci provient du fait, qu'une fois f et g échantillonnés (N points), on obtient deux fonctions f^*, g^* définies sur $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ et par conséquent f et g auront les mêmes invariants numériques (c'est-à-dire calculés à l'aide de la FFT sur f^* et g^*), si et seulement si f^* et g^* se déduisent en temps par une translation de $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ ce qui n'est clairement pas le cas sur la figure 2.

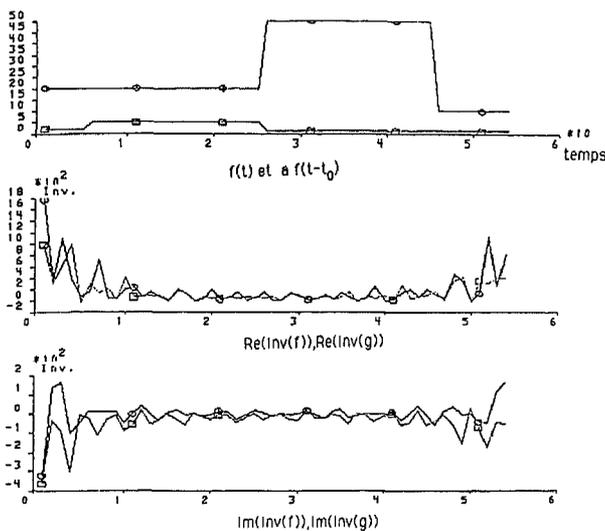


Fig. 2.

Notons tout de même, que malgré le fait que f^* et g^* ne se déduisent pas par une translation de $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$, les invariants associés restent très voisins et ont également même « allure ».

Néanmoins, il faut remarquer que ce calcul discret par échantillonnage est un calcul exact et indépendant de toute notion de largeur de spectre pour les signaux à échantillonner, dans le sens suivant : on s'intéresse à la restriction des signaux aux instants d'échantillonnage, et si l'on cherche à savoir s'ils se déduisent par une translation de la forme $n \cdot \Delta T$, et une dilatation quelconque, alors appliquer l'algorithme proposé revient à travailler exactement avec la Transformée de Fourier sur $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$, ou encore pour le problème de départ, à considérer le groupe $\tilde{G} = \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \times \mathbb{R}^+$ et à chercher quand deux fonctions sur \tilde{G} se déduisent par une translation de \tilde{G} .

Au contraire, sur la figure 3, on a tenu compte de la structure cyclique de Z/NZ i.e. f^* et g^* s'obtiennent l'un de l'autre par une translation en temps de Z/NZ . On a alors les mêmes invariants :

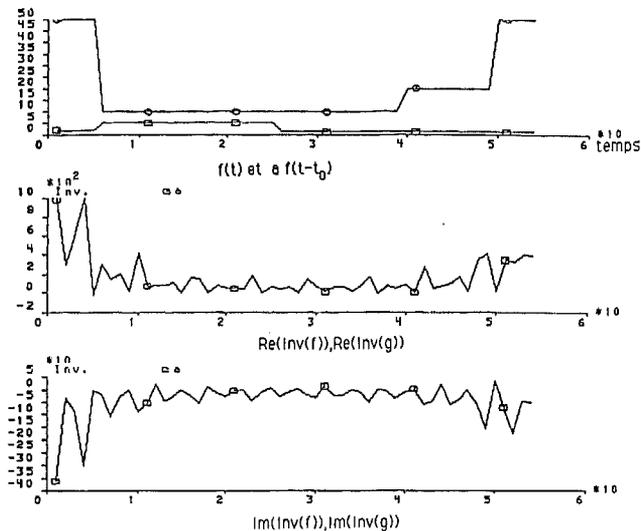


Fig. 3.

Schéma de principe d'une colonne à distiller.

Il est surtout important de remarquer que les invariants associés à un signal ψ dépendent continûment de ψ (ceci provient essentiellement du fait que la transformation de Fourier est continue grâce au théorème de Plancherel); le principal intérêt de cette remarque est que lorsque l'on aura affaire à des signaux faiblement bruités dans le cadre de la détection de perturbations non mesurables, les invariants du signal bruité restant proches de ceux du signal isolé, on aura encore une bonne estimation de la perturbation mise en jeu.

3. 5. UN EXEMPLE D'APPLICATION

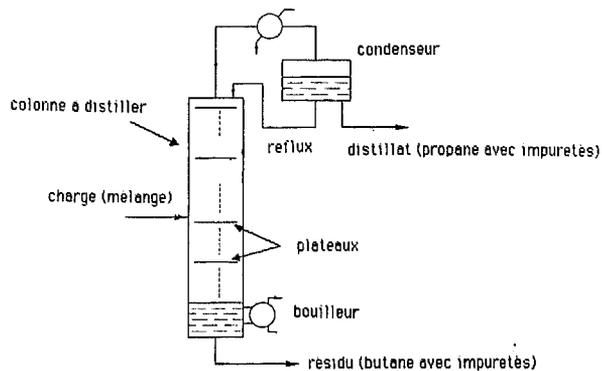
On considère ici un dépropaniseur, c'est-à-dire un procédé qui permet de séparer, par une distillation, un mélange propane-butane,

Le schéma simplifié de la colonne est le suivant :

Le but du jeu est de détecter « au vu d'enregistrements de certains signaux » l'apparition de perturbations non mesurables, susceptibles d'affecter le procédé et d'en identifier la nature. Nous avons considéré seulement deux perturbations et un signal régulé, observé, qui seront précisés plus loin.

L'intérêt d'utiliser une méthode d'invariants est le suivant :

On simule numériquement ou on provoque réellement des situations où des perturbations non mesurables interviennent et l'on calcule les invariants associés aux grandeurs $f_1(t), \dots, f_N(t)$ que l'on observe : à chaque nature de perturbation correspond donc un ensemble d'invariants que l'on stocke dans une bibliothèque. Dans le cas réel, dès qu'une anomalie apparaît, on calcule les invariants des signaux



$f_1(t), \dots, f_N(t)$ et les compare avec ceux des situations simulées, stockés dans la bibliothèque. Les invariants les plus proches donneront la meilleure estimation du type de perturbation à considérer.

Le signal observé est la température d'un des plateaux (dit « plateau sensible) que l'on relève au cours du temps dans le cas de deux perturbations que nous présentons à titre d'exemples :

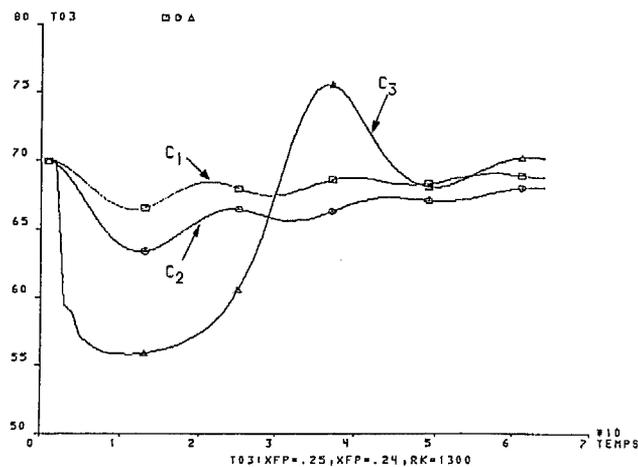


Fig. 4.

- (a) une perturbation sur la composition de la charge intervient (sur la fraction molaire en propane x_{FP});
- (b) le coefficient d'échange thermique du bouilleur est modifié (encrassement ou détérioration complète de l'échangeur).

On calcule dans ces différentes situations les invariants associés au signal observé puis on les compare. L'intérêt de procéder ainsi est de faire des estimations et des discriminations en présence de perturbations non mesurables et non contrôlables (la modification du coefficient d'échange du bouilleur, due à un encrassement par exemple, constitue une bonne illustration de telles perturbations). Comme on le verra dans certains cas, l'observation de la température du plateau sensible suffit pour analyser le type de perturbations auxquelles on a affaire, mais dans d'autres situations, il sera nécessaire de disposer d'autres informations et donc d'analyser des signaux supplémentaires.

La température du plateau sensible est régulée par un régulateur PI, l'action étant le débit de reflux de la colonne. La fenêtre d'observation a une largeur de 64 secondes, nous échantillons les signaux avec $\Delta T = 1$ seconde.

Sur la figure 4 sont tracées les courbes de température pour des variations de :

- C_1 : la charge x_{FP} de 4 %;
- C_2 : la charge x_{FP} de 8 %;
- C_3 : le coefficient d'échange du bouilleur de 18 %.

De même que précédemment, on trace les invariants associés à chacune des caractéristiques (voir fig. 5).

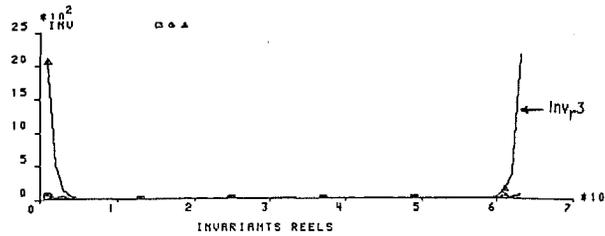


Fig. 5.

On observe que ces invariants permettent de bien discriminer C_3 par rapport à (C_1, C_2) et que par contre les invariants de C_1 sont très proches de ceux de C_2 : ceci illustre notre remarque sur la continuité de ces invariants; notons que la courbe C_3 est très différente du couple (C_1, C_2) et que la discrimination se fait sans peine : la seule observation de la température du plateau sensible permet dans les trois situations (a), (b) et (c) de distinguer la nature des perturbations intervenant.

Afin de mieux observer ces invariants, on les trace ensuite en éliminant les valeurs extrêmes de C_3 afin de s'affranchir de l'écrasement de C_1, C_2 dû à ces dernières (voir fig. 6).

On observe que les invariants de C_1 et C_2 ont des comportements très voisins et très différents de celui de C_3 .

Dans ce cas de fonctionnement, on remarque que l'analyse de la température du plateau sensible par notre méthode permet de bien distinguer les cas de perturbations de nature différente (modification de la composition de la charge, modification du coefficient d'échange du bouilleur) en particulier ici, les courbes C_1 et C_2 sont relatives à des perturbations se déduisant l'une de l'autre d'un simple facteur d'homothétie.

Dans le cas de fonctionnement suivant (fig. 7) [mêmes perturbations sur la charge, mais variation plus faible du coefficient d'échange (16 %)], on effectue les mêmes opérations que précédemment et l'on voit immédiatement que notre méthode ne permet plus de faire une distinction aussi nette entre deux perturbations

d'origines différentes : la seule analyse de la température du plateau sensible ne suffit plus pour discriminer les différents types de perturbations affectant le procédé.

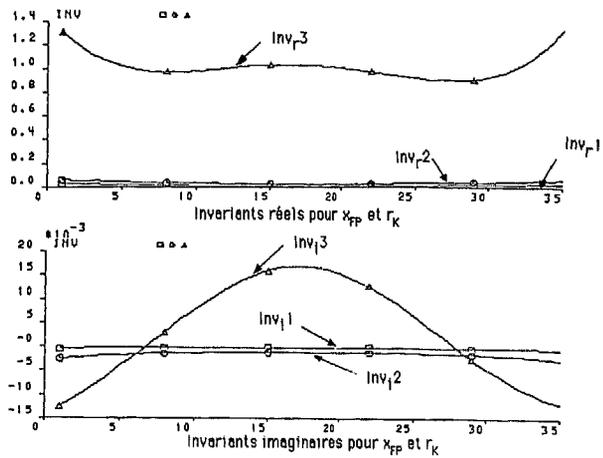


Fig. 6.

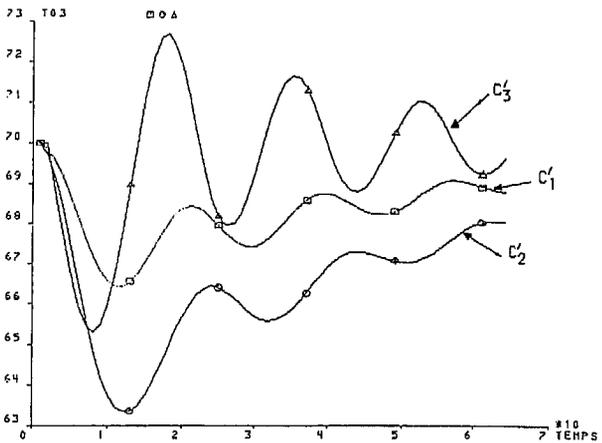


Fig. 7.

En traçant les invariants de C'_1, C'_2 et C'_3 (fig. 8), on obtient le même phénomène d'écrasement que précédemment, dû aux valeurs extrêmes élevées de ces invariants.

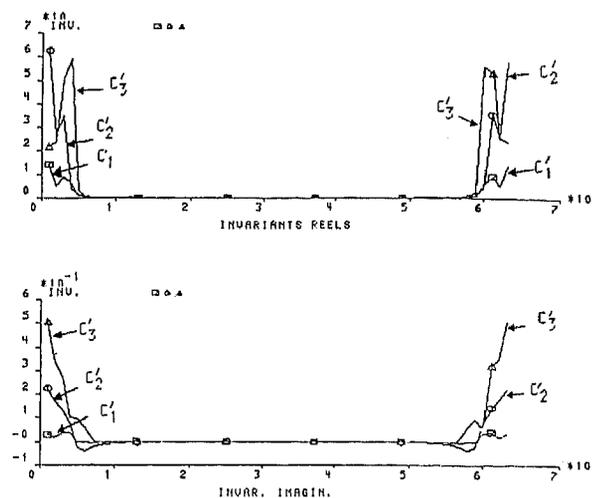


Fig. 8.

En les éliminant, on obtient les courbes de la figure 9 où les invariants de C'_1 et C'_2 restent encore relativement proches.

En effectuant la même opération sur la figure 9, on aboutit à la figure 10 où au contraire $\text{Inv } C'_1$ est plus proche de $\text{Inv } C'_3$ que de $\text{Inv } C'_2$.

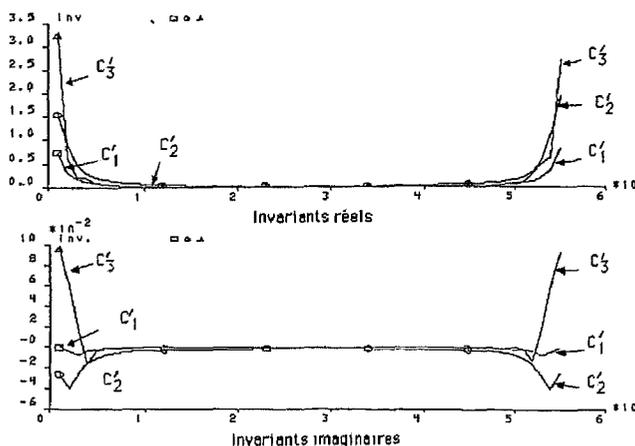


Fig. 9.

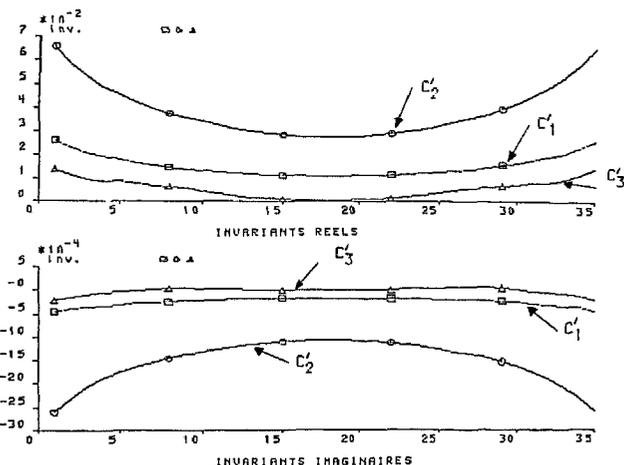


Fig. 10.

Ce n'est que sur les valeurs extrêmes des invariants que l'on peut remarquer que $\text{Inv } C'_1$ est proche de $\text{Inv } C'_2$.

Dans les deux situations présentées, l'analyse ne se fait qu'à partir de l'observation de la température du plateau sensible. Un choix de mesures sur d'autres grandeurs (c'est-à-dire en disposant d'autres capteurs, par exemple au niveau de l'échangeur) et l'utilisation des méthodes proposées peut par contre permettre

une bonne analyse des situations dans lesquelles le procédé se trouve et donc plus particulièrement lorsque des perturbations non mesurables sont susceptibles de l'affecter.

Conclusion

La partie 1 de cet article nous a permis de montrer comment les techniques classiques de traitement d'image peuvent être interprétées en termes d'analyse harmonique abstraite. Ceci nous a permis de développer une technique de reconnaissance de formes par une méthode d'invariants.

La partie 2 montre comment cette technique d'invariants s'applique en traitement d'image, comment l'on peut calculer les descripteurs de Fourier généralisés d'une image considérée et quel est l'intérêt qu'ils présentent par rapport aux descripteurs classiques.

Toutes les méthodes proposées ont été appliquées dans la partie 3 à la détection de perturbations sur un procédé réel. Cela nous a permis en particulier de tester l'efficacité des outils présentés.

Manuscrit reçu le 21 novembre 1988.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] BORNARD, GAUTHIER et SILBERMANN, Mouvements et traitement d'images, *Traitement du Signal*, 3, n° 6, 1986, p. 281-290.
- [2] BORNARD, GAUTHIER et SILBERMANN, Harmonic Analysis on motion groups and their Homogeneous Spaces, *IEEE Systems, Man and Cybernetics* (à paraître).
- [3] CHEN, A new Vision System and the Fourier Descriptors Method by Group Representations Theory, *CDC Conference*, 1985, Las Vegas, USA.
- [4] MARR et HILDRETT, Theory of Edge Detection, *Proc. Royal Society*, London, b204, 1980, p. 187-217.
- [5] PERSON, KING et SUN FU, Shape discrimination using Fourier descriptors, *IEEE Systems, Man and Cybernetics*, SMC-7, n° 3, mars 1977.
- [6] KIRILLOV, Elements of the Theory of Representations, *Grundlehren der Math-Wissenschaften*, n° 220, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1976.
- [7] HEWITT et ROSS, *Abstract Harmonic Analysis*, Springer Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1963, 2 t.
- [8] NAIMARK-STERN, *Théorie des Représentations des Groupes*, ED, MIR, Moscou, 1974, French Translation, 1976.
- [9] WEIL, *L'intégration dans les Groupes Topologiques et ses Applications*, Hermann, Paris, 1965.
- [10] VILENKIN, *Fonctions Spéciales et Théorie de la Représentation des Groupes*, Dunod, Paris, 1969.
- [11] AUSLANDER, *A factorization theorem for the Fourier Transform of a separable, locally compact abelian group in Special functions: Group theoretical aspects and applications*, Reidel publishing company, 1984.

Annexe

Démonstration du théorème (Gourd-Gauthier)

— $C_1 \rightarrow C_2$ (comme il est d'usage, on note $\chi(g)$ par $\langle \chi, g \rangle$, $\forall \chi \in \hat{G}$, $\forall g \in G$ avec C_1 , $f(\lambda) = \hat{h}(\lambda) \langle \chi_\lambda, g_0 \rangle$ où χ_λ est le caractère de la classe $\lambda \in \hat{G}$, d'où :

$$\begin{aligned} & \forall \lambda_1, \dots, \lambda_n, \lambda'_1, \dots, \lambda'_m \in \hat{G}/ \\ & \prod_{i=1}^n \hat{f}(\lambda_i) \cdot \prod_{k=1}^m \bar{\hat{f}}(\lambda'_k) = \lambda_1 \times \dots \times \lambda_n = \lambda'_1 \times \dots \times \lambda'_m \\ & = \prod_{i=1}^n \hat{h}(\lambda_i) \prod_{k=1}^m \bar{\hat{h}}(\lambda'_k) \cdot \prod_{i=1}^n \langle \chi_{\lambda_i}, g_0 \rangle \cdot \prod_{k=1}^m \overline{\langle \chi_{\lambda'_k}, g_0 \rangle} \end{aligned}$$

or

$$\begin{aligned} & \prod_{i=1}^n \langle \chi_{\lambda_i} g_0 \rangle \prod_{k=1}^m \langle \overline{\chi_{\lambda'_k} g_0} \rangle \\ &= \langle \chi_{\lambda_1 \times \dots \times \lambda_n} g_0 \rangle \langle \overline{\chi_{\lambda'_1 \times \dots \times \lambda'_m} g_0} \rangle \\ &= \langle \chi_{\lambda_1 \times \dots \times \lambda_n} \chi_{\lambda'_1 \times \dots \times \lambda'_m}^{-1} g_0 \rangle \\ &= \langle 1, g_0 \rangle = 1 \end{aligned}$$

car $\lambda_1 \times \dots \times \lambda_n = \lambda'_1 \times \dots \times \lambda'_m$ d'où $C_1 \Rightarrow C_2$.

— $C_2 \Rightarrow C_1$

Soient :

$$\begin{aligned} A_f &= \{ \lambda \in \hat{G} / \hat{f}(\lambda) \neq 0 \} \\ G_f &= \bigcap_{\lambda \in A_f} \text{Ker } \chi_\lambda \end{aligned}$$

(G_f est trivialement un sous-groupe fermé de G).

Remarquons tout d'abord que f « descend » sur G/G_f , car avec la formule de Plancherel :

$$\begin{aligned} f(g) &= \int_{\hat{G}} \hat{f}(\lambda) \langle \chi_\lambda, g \rangle d\lambda, \quad \forall g \in G \\ &= \int_{A_f} \hat{f}(\lambda) \langle \chi_\lambda, g \rangle d\lambda \end{aligned}$$

d'où

$$\forall \gamma \in G_f, \quad f(\gamma g) = \int_{A_f} \hat{f}(\lambda) \langle \chi_\lambda, \gamma g \rangle d\lambda$$

Soit :

$$f(\gamma g) = \int_{A_f} \hat{f}(\lambda) \langle \chi_\lambda, g \rangle \langle \chi_\lambda, \gamma \rangle d\lambda$$

or

$$\langle \chi_\lambda, \gamma \rangle = 1, \quad \forall \lambda \in A_f$$

donc

$$f(\gamma g) = f(g), \quad \forall \gamma \in G_f.$$

f est donc constante sur les classes modulo G_f et définit un élément $\hat{f} \in L^2(G/G_f)$.

La formule de Plancherel appliquée à \hat{f} sur G/G_f donne :

$$\hat{f}(\hat{g}) = \int_{(G/G_f)} \hat{f}(v) \langle \chi_v, \hat{g} \rangle dv$$

où dv est la mesure de Haar sur G/G_f . Or G/G_f est l'annihilateur $\text{Ann}(G_f)$ de G_f dans \hat{G} , donc

$$\hat{f}(\hat{g}) = \int_{\text{Ann}(G_f)} \hat{f}(\lambda) \langle \chi_\lambda, g \rangle d\lambda$$

Une vérification simple montre que :

$$\text{Ann}(G_f) = \langle \bar{A}_f \rangle$$

où $\langle \bar{A}_f \rangle$ désigne la fermeture du sous-groupe $\langle A_f \rangle$ engendré par A_f , donc :

$$f(g) = \hat{f}(\hat{g}) = \int_{\langle \bar{A}_f \rangle} \hat{f}(\lambda) \langle \chi_\lambda, g \rangle d\lambda$$

f et h vérifiant la condition C_2 , on a en particulier

$$|\hat{f}(\lambda)|^2 = |\hat{h}(\lambda)|^2, \quad \forall \lambda \in \hat{G}$$

d'où, avec $\hat{f}, \hat{h} \in L^2(\hat{G})$, il existe $\varphi \in L^0(\hat{G})$ et $\text{Im } \varphi \subset [-\pi, \pi]$ telle que :

$$\hat{f}(\lambda) = e^{i\varphi(\lambda)} \hat{h}(\lambda)$$

et donc

$$\forall \lambda \in A_f, \quad e^{i\varphi(\lambda)} = \hat{f}(\lambda) / \hat{h}(\lambda).$$

Prolongeons φ à $\langle A_f \rangle$ comme suit :

Si $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in A_f$, on pose

$$e^{i\varphi(\lambda_1 \times \dots \times \lambda_n)} = e^{i\varphi(\lambda_1)} \dots e^{i\varphi(\lambda_n)}$$

On vérifie facilement que $e^{i\varphi(\lambda_1 \times \dots \times \lambda_n)}$ est indépendant de la décomposition $\lambda_1 \times \dots \times \lambda_n$.

En effet, si $\lambda_1 \times \dots \times \lambda_n = \lambda'_1 \times \dots \times \lambda'_m$, les $\lambda'_k \in A_f$ alors :

$$e^{i\varphi(\lambda_1 \times \dots \times \lambda_n)} = \frac{\prod_{i=1}^n \hat{f}(\lambda_i)}{\prod_{i=1}^n \hat{h}(\lambda_i)}$$

et

$$e^{i\varphi(\lambda'_1 \times \dots \times \lambda'_m)} = \frac{\prod_{k=1}^m \hat{f}(\lambda'_k)}{\prod_{k=1}^m \hat{h}(\lambda'_k)}$$

donc

$$e^{i\varphi(\lambda_1 \times \dots \times \lambda_n) - i\varphi(\lambda'_1 \times \dots \times \lambda'_m)} = \frac{\prod_{i=1}^n \hat{f}(\lambda_i)}{\prod_{i=1}^n \hat{h}(\lambda_i)} \cdot \frac{\prod_{k=1}^m \bar{\hat{f}}(\lambda'_k)}{\prod_{k=1}^m \bar{\hat{h}}(\lambda'_k)}$$

avec la condition C_2 , le membre de droite vaut 1 d'où

$$e^{i\varphi(\lambda_1 \times \dots \times \lambda_n)} = e^{i\varphi(\lambda'_1 \times \dots \times \lambda'_m)}$$

f étant réelle, si $\lambda \in A_f$ alors $\lambda^{-1} \in A_f$ car $\bar{\hat{f}}(\lambda^{-1}) = \bar{\hat{f}}(\lambda)$ donc $e^{i\varphi(\lambda^{-1})} = e^{-i\varphi(\lambda)}$.

$e^{i\varphi}$ est par conséquent un homomorphisme de $\langle A_f \rangle$ dans T .

— Soit f est nulle dg p. p., alors $\hat{f} = 0$ $d\lambda$ p. p. et alors $\text{mes}(A_f) = 0$: dans un tel cas, $\forall g_0 \in G$, on a $\hat{f}(\lambda) = \langle \chi_\lambda, g_0 \rangle \hat{h}(\lambda)$.

— Soit $\hat{f} \neq 0$ donc $f \neq 0$ par Plancherel, d'où $\text{mes}(A_f) > 0$ (éventuellement = $+\infty$).

Montrons que $\langle A_f \rangle$ est localement compact :
 $\forall x \in A_f$, on a $x^{-1} \cdot A_f \subset \langle A_f \rangle$ et $e \in x^{-1} \cdot A_f$.

De plus, $\text{mes}(x^{-1} A_f) = \text{mes}(A_f) > 0$ puisque la mesure est invariante.

Soit donc $x \in A_f$, \hat{G} étant localement compact, e admet dans \hat{G} un voisinage compact V_e . La mesure de Haar étant régulière, avec le critère de Lusin, il existe un compact K de \hat{G} , tel que $K \subset V_e \cap x^{-1} \cdot A_f$ ($V_e \cap x^{-1} \cdot A_f$ appartient évidemment à la tribu borélienne de \hat{G}). Il est trivial d'affirmer que K est un compact de $\langle A_f \rangle$. Soit $y \in K$. Alors $y^{-1} \cdot K$ est un compact de \hat{G} contenant e . Il est donc fermé dans \hat{G} et donc est localement compact : e y admet donc un voisinage compact qui est aussi dans $\langle A_f \rangle$.

Puisque $e^{i\varphi} \in L^0(\hat{G})$, $e^{i\varphi}$ est élément de $L^0(\langle A_f \rangle)$: $e^{i\varphi}$ est donc une représentation de dimension finie, mesurable de $\langle A_f \rangle$ qui est localement compact : $e^{i\varphi}$ est un homomorphisme continu. Utilisant le théorème (cf. [7], I, p. 380, n° 24.12) qui affirme que tout caractère d'un sous-groupe fermé H d'un groupe localement compact Γ se prolonge continûment à un caractère de Γ et en prolongeant $e^{i\varphi}$ à $\langle \bar{A}_f \rangle$, on obtient finalement un caractère

(continu) de \hat{G} . La théorie de Pontrjagin nous donne l'existence d'un $g_0 \in G$, tel que le prolongement obtenu s'écrive :

$$\lambda \mapsto \langle g_0, \lambda \rangle = \langle \chi_{\lambda}, g_0 \rangle$$

On a donc :

$$\forall \lambda \in A_f, \\ \hat{f}(\lambda) = \hat{h}(\lambda) \langle \chi_{\lambda}, g_0 \rangle$$

d'où

$$\int_{A_f} \hat{f}(\lambda) \langle \chi_{\lambda}, g \rangle d\lambda = \int_{A_f} \hat{h}(\lambda) \langle \chi_{\lambda}, g_0 \rangle \langle \chi_{\lambda}, g \rangle d\lambda$$

soit

$$\int_{\hat{G}} \hat{f}(\lambda) \langle \chi_{\lambda}, g \rangle d\lambda = \int_{\hat{G}} \hat{h}(\lambda) \langle \chi_{\lambda}, g_0 g \rangle d\lambda$$

c'est-à-dire :

$$f(g) = h(g_0 g).$$

CQFD