

Observabilité et entrée sensibilisante

en poursuite azimétrique

Observability and optimal maneuver for bearings only tracking

Gilberto Sergio TABOADA



Centre d'Études et de Recherches de Toulouse, Département d'Études et de Recherches en Automatique, B. P. 4025, 31055 TOULOUSE CEDEX.

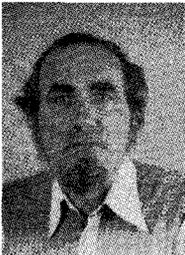
Ingénieur Électronicien à l'Institut Militaire de Engenharia, Rio de Janeiro (Brésil), 1972.

M.S.c. en Génie Électrique du même institut en 1984.

Docteur Ingénieur de l'ENSAE à Toulouse en 1986.

Ses activités sont exercées actuellement à l'Institut de Pesquises à Rio de Janeiro et concernent les domaines de la simulation et de l'estimation non linéaire.

Michel GAUVRIT



Centre d'Études et de Recherches en Automatique, B. P. 4025, 31055 TOULOUSE CEDEX.

Ingénieur Automaticien au Département d'Études et de Recherches en Automatique (DERA) du Centre d'Études et de Recherches de Toulouse (CERT).

Docteur d'État en Automatique, Toulouse, 1982.

Ses activités de recherche concernent plus particulièrement les domaines de la poursuite multicibles multisenseurs, du filtrage non linéaire et de la commande robuste.

RÉSUMÉ

Le but de cet article est d'une part de définir un critère qualifiant en temps réel les performances de la poursuite azimétrique en précisant la direction la plus et la moins observable, et d'autre part, de rechercher la manœuvre optimale du lanceur assurant la meilleure observabilité des estimés. Pour améliorer la robustesse du filtre, un algorithme adaptatif est décrit dans la dernière partie de cet article.

MOTS CLÉS

Poursuite azimétrique, observabilité, manœuvre optimale, filtre de Kalman étendu, filtre bayésien.

SUMMARY

The aim of this paper is to define a criteria of quality of the estimates for bearings only tracking. The index of performance is a function of the "condition number" of the error covariance matrix in the extended Kalman filter in the second part, we describe the on-line maneuver of the own ship minimizing the error of the estimates. To improve the robustness of the filter a new adaptive algorithm is proposed.

KEY WORDS

Bearings only tracking, observability, optimal maneuver, extended Kalman Filter, Bayesian algorithm.

1. Introduction

L'estimation des paramètres dynamiques de la trajectoire d'un mobile (but) à partir des mesures bruitées de son azimut référencé par rapport à une plate-forme mobile (lanceur) conduit à des problèmes particulièrement riches.

L'observabilité de l'état du système en l'absence de manœuvres du lanceur et la non-linéarité inhérente à la mesure constituent la spécificité du problème. En effet, l'observabilité de l'état est fortement liée à la géométrie du scénario et certaines composantes du vecteur d'état ne seront observables qu'en présence de manœuvres du lanceur.

Le but de cet article est dans une première étape de définir un critère qualifiant en temps réel les performances de la poursuite et de préciser la direction la plus et la moins observable. Nardone et Aidala [1] ont étudié le problème de la trajectographie passive sous l'angle déterministe en montrant que les manœuvres assurant une meilleure observabilité ne sont pas arbitraires. La seconde partie de ce travail s'est ainsi orientée vers la recherche de la manœuvre du lanceur optimisant la qualité de la poursuite.

2. Équations du filtre de Kalman

Dans le but de simplifier l'analyse, on suppose que le but se déplace sur une trajectoire rectiligne à vitesse constante ou du moins sur une trajectoire décomposable en une série de tronçons rectilignes parcourus à vitesses constante. Le lanceur suit une trajectoire accélérée quelconque.

Dans ce cas, on peut modéliser le système en coordonnées cartésiennes par les équations matricielles :

$$(1) \quad \mathbf{x}_k = \varphi(k, k-1) \mathbf{x}_{k-1} + \Gamma_k$$

$$(2) \quad z_k = h(\mathbf{x}_k) + v_k$$

où \mathbf{x}_k est le vecteur d'état de dimension 4, $\varphi(k, k-1)$ est la matrice de transition du système, Γ_k est un vecteur déterministe qui tient compte des manœuvres du lanceur, z_k est la mesure bruitée de l'azimut et v_k le bruit additif de mesure.

$$\mathbf{x}_k = [x_B - x_L \quad y_B - y_L \quad \dot{x}_B \quad \dot{y}_B]^T$$

$$\Gamma_k = \begin{bmatrix} -\mathbb{I} \mathbb{I}_2 \\ \mathbb{O}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_L \\ \dot{y}_L \end{bmatrix}$$

T représente le temps séparant deux mesures.

Les composantes du vecteur d'état sont les coordonnées cartésiennes du but et des dérivées dans un repère centré sur la position du lanceur. Dans les expressions précédentes $x_B, y_B, \dot{x}_B, \dot{y}_B, x_L, y_L, \dot{x}_L, \dot{y}_L$ représentent respectivement les coordonnées cartésiennes du but (et du lanceur) ainsi que ses dérivées (fig. A) :

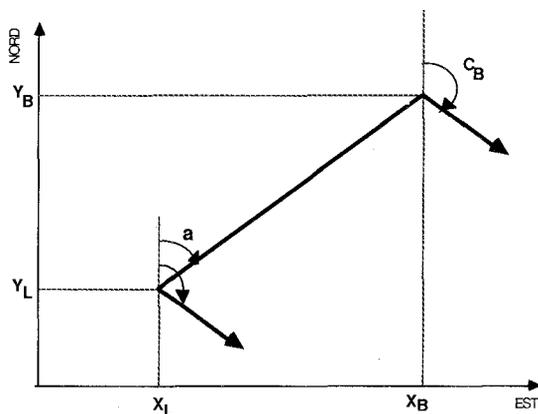


Fig. A

Nous avons :

$$\varphi(k, k-1) = \begin{bmatrix} \mathbb{I}_2 & \mathbb{T} \mathbb{I}_2 \\ \mathbb{O}_2 & \mathbb{I}_2 \end{bmatrix}$$

$$h(\mathbf{x}_k) = \tan^{-1} \left(\frac{x_B - x_L}{y_B - y_L} \right)_k$$

avec

$$\mathbb{I}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbb{O}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Le vecteur d'état est estimé par un filtre de Kalman étendu (FKE) dont l'algorithme est décrit par les équations classiques suivantes :

$$(3) \quad \hat{\mathbf{x}}_{k/k-1} = \varphi(k, k-1) \hat{\mathbf{x}}_{k-1/k-1} + \Gamma_k$$

$$(4) \quad \mathbf{P}_{k/k-1} = \varphi(k, k-1) \mathbf{P}_{k-1/k-1} \varphi(k, k-1)^T$$

$$(5) \quad \hat{\mathbf{x}}_{k/k} = \hat{\mathbf{x}}_{k/k-1} + \mathbf{K}_k [z_k - h(\hat{\mathbf{x}}_{k/k-1})]$$

$$(6) \quad \mathbf{K}_k = \mathbf{P}_{k/k-1} \mathbf{H}_k^T [\mathbf{H}_k \mathbf{P}_{k/k-1} \mathbf{H}_k^T + \sigma_k^2]^{-1}$$

$$(7) \quad \mathbf{H}_k = \left. \frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}^T} \right|_{\mathbf{x} = \hat{\mathbf{x}}_{k/k-1}}$$

où

$$(8) \quad \mathbf{P}_{k/k} = [\mathbb{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k] \mathbf{P}_{k/k-1}$$

$$(9) \quad \mathbf{P}_{k/j} = E[(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k/j})(\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k/j})^T]$$

et

$$(10) \quad \sigma_k^2 = E[v_k^2]$$

3. Conditionnement matriciel et observabilité

Nous allons dans ce paragraphe montrer l'existence d'un lien étroit entre les valeurs propres de la matrice de covariance d'erreur d'estimation et l'observation du système en nous appuyant sur les travaux de Ham [2].

Désignons $\mathbf{e}_{k/k} = \mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_{k/k}$, l'erreur d'estimation du filtre de Kalman :

$$(11) \quad \mathbf{e}_{k/k} = [e_1, e_2, \dots, e_k]^T$$

La grandeur $\mathbf{e}_{k/k}$ représente une variable vectorielle aléatoire avec les propriétés statistiques suivantes :

$$(12) \quad E[\mathbf{e}_{k/k}] = 0$$

$$(13) \quad E[\mathbf{e}_{k/k} \mathbf{e}_{k/k}^T] = \mathbf{P}_{k/k}$$

La condition (12) suppose implicitement l'observabilité du système linéaire.

Nous définissons une variable aléatoire w_k , combinaison linéaire des éléments de $\mathbf{e}_{k/k}$:

$$(14) \quad w_k = \mathbf{V}_1 e_1 + \mathbf{V}_2 e_2 + \dots + \mathbf{V}_k e_k = \mathbf{V}^T \mathbf{e}_{k/k}$$

Nous pouvons écrire :

$$(15) \quad \begin{cases} E[w_k] = 0 \\ E[w_k^2] = \sigma_w^2 = E[\mathbf{V}^T \mathbf{e}_{k/k} \mathbf{e}_{k/k}^T \mathbf{V}] = \mathbf{V}^T \mathbf{P}_{k/k} \mathbf{V} \end{cases}$$

Nous recherchons la combinaison linéaire soumise à la contrainte

$$(16) \quad \mathbf{V}^T \mathbf{V} = 1$$

qui conduise à la plus grande variance c'est-à-dire qui corresponde à la direction la moins observable dans l'espace d'état.

La condition d'extremum, compte tenu de cette contrainte s'écrit :

$$(17) \quad \frac{\partial}{\partial v} [\sigma_w^2 - \lambda (\mathbf{V}^T \mathbf{V} - 1)] = 0$$

où λ est le multiplicateur de Lagrange.

En remplaçant l'expression (15) dans l'équation (17) nous obtenons la condition suivante :

$$(18) \quad \frac{\partial}{\partial v} [\mathbf{V}^T \mathbf{P}(k/k) \mathbf{V} - \lambda (\mathbf{V}^T \mathbf{V} - 1)] = 0$$

ce qui amène à l'équation :

$$(19) \quad (\mathbf{P}(k/k) - \lambda \mathbf{I}) \mathbf{V} = 0$$

Cette dernière relation possède une solution non triviale si et seulement si :

$$(20) \quad \det(\mathbf{P}(k/k) - \lambda \mathbf{I}) = 0$$

Les solutions de l'équation (19) représentent donc les directions propres de la matrice $\mathbf{P}(k/k)$.

En prémultipliant les deux membres de l'expression (19) par \mathbf{V}^T et en combinant les expressions (15), (16) et (19), nous obtenons :

$$(21) \quad \sigma_w^2 = \lambda_{\max}(\mathbf{P}(k/k))$$

La plus grande valeur propre de $\mathbf{P}(k/k)$ est donc la variance de la combinaison linéaire d'états la moins observable et inversement la plus faible est la variance de la combinaison la plus observable.

En outre, Daum et Fitzgerald [3] ont montré qu'un mauvais conditionnement de la matrice $\mathbf{P}(k/k)$

(valeur élevée du rapport $\frac{\lambda_{\max}(\mathbf{P}(k/k))}{\lambda_{\min}(\mathbf{P}(k/k))}$)

entraîne des estimées peu fiables même si la trace de la matrice $\mathbf{P}(k/k)$ est faible (ce qui signifie habituellement la présence d'erreurs d'estimation faibles). Au contraire, une valeur élevée du conditionnement signifie qu'il existe une direction très observable et une direction de très faible observabilité. Ceci découle d'une mauvaise estimation de certaines composantes du vecteur d'état. Nous pouvons donc définir un concept d'observabilité dynamique directement lié au conditionnement de la matrice $\mathbf{P}(k/k)$, un mauvais conditionnement entraînant une faible observabilité dynamique du système.

Afin de faciliter les comparaisons et rendre homogènes les éléments de la matrice $\mathbf{P}(k/k)$ et les composantes du vecteur d'état, nous utiliserons un schéma de normalisation proposé par Ham [2]. En rendant adimensionnelles les composantes des vecteurs propres, ce schéma limite les valeurs propres de la matrice $\mathbf{P}(k/k)$ entre la valeur nulle et l'ordre du système ($n=4$ dans le cas de la trajectographie passive). A partir d'un tel schéma la situation la plus observable correspondrait au cas où toutes les valeurs propres seraient égales à l'unité. Au fur et à mesure que

l'observabilité se dégrade, le conditionnement croît sans limite et le déterminant de la matrice $\mathbf{P}(k/k)$ décroît vers zéro.

4. Lien entre l'observabilité et le gradient de la mesure

Intuitivement, on voit qu'une grande variation de l'angle d'azimut apporte une information plus riche à l'observateur donc améliore la qualité de l'estimation. Une démonstration rigoureuse de cette assertion semble très difficile, dans cet article nous la ferons dans un cas particulier.

La variable la moins observable dans un scénario de poursuite azimétrique étant la distance, nous supposons connue la vitesse du but et nous analyserons l'effet de la variation d'azimut sur l'estimation de la distance. Sous cette hypothèse, les équations dynamiques du système s'écrivent (fig. 9) :

$$(22) \quad \mathbf{x}_k = \mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{T} \mathbf{v}_{k-1} + \mathbf{u}_{k-1}$$

où

$$\mathbf{x}_k = [x \quad y]^T_k, \quad \mathbf{v}_k = [v_x \quad v_y]^T_k$$

\mathbf{u}_k est le vecteur de commande associé au mouvement du lanceur et \mathbf{T} l'intervalle entre les mesures. \mathbf{V}_k désigne le vecteur vitesse.

Réécrivons les équations du FKE sous la forme non récursive suivante [5] :

$$(23) \quad \hat{\mathbf{x}}_{k/k} = \hat{\mathbf{x}}_{0/k} + \sum_{j=1}^k (\mathbf{T} \mathbf{v}_j + \mathbf{u}_j)$$

$$(24) \quad \mathbf{P}_{k/k} = \mathbf{P}_{0/k}$$

$$(25) \quad \hat{\mathbf{x}}_{0/k} = \mathbf{P}_{0/k} \mathbf{P}_{0/0}^{-1} \hat{\mathbf{x}}_{0/0} + \mathbf{P}_{0/k} \sum_{j=1}^k \mathbf{M}_j^T \sigma_j^{-2} [z_j - h(\hat{\mathbf{x}}_{j,j-1})] + \mathbf{P}_{0/k} \sum_{j=0}^k \mathbf{M}_j^T \sigma_j^{-2} \mathbf{M}_j \mathbf{u}_j$$

$$(26) \quad \mathbf{P}_{0/k} = \left[\mathbf{P}_{0/0}^{-1} + \sum_{j=1}^k \mathbf{M}_j^T \sigma_j^{-2} \mathbf{M}_j \right]^{-1}$$

où

$$(27) \quad \mathbf{M}_j = \mathbf{H}_j = \begin{bmatrix} \cos \hat{z}_j & -\sin \hat{z}_j \\ \hat{d}_j & \hat{d}_j \end{bmatrix}$$

et

$$(28) \quad \hat{d}_j = (\hat{x}_j^2 + \hat{y}_j^2)^{1/2}$$

En supposant une grande méconnaissance a priori des erreurs d'estimation, nous pouvons faire $\mathbf{P}_{0/0}^{-1} = 0$ ce qui permet de réécrire l'expression (26) sous la forme :

$$(29) \quad \mathbf{P}_{0/k} = \left[\sum_{j=1}^k \mathbf{M}_j^T \sigma_j^{-2} \mathbf{M}_j \right]^{-1}$$

Si la variance de bruit de mesure est indépendante du temps, nous obtenons finalement :

$$(30) \quad P_{0/k} = P_{k/k} = \sigma^2 \left[\sum_{j=1}^k M_j^T M_j \right]^{-1}$$

$$(31) \quad M_j^T M_j = \frac{1}{d_j^2} \begin{bmatrix} \cos^2 \hat{z}_j & -\frac{1}{2} \sin 2\hat{z}_j \\ +\frac{1}{2} \sin 2\hat{z}_j & \sin^2 \hat{z}_j \end{bmatrix}$$

Si la distance lanceur-but est élevée par rapport au produit $k v_r T$, où v_r est la vitesse relative lanceur-but, nous pouvons considérer cette distance comme approximativement constante ($d_j = d$). Dans ce cas, la somme :

$$\sum_{j=1}^k M_j^T M_j$$

peut être décomposée sous la forme modale suivante :

$$(32) \quad \sum_{j=1}^k M_j^T M_j = \frac{1}{d^2} \begin{bmatrix} \cos \bar{z} & \sin \bar{z} \\ -\sin \bar{z} & \cos \bar{z} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \frac{k}{2} + m & 0 \\ 0 & \frac{k}{2} - m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \bar{z} & -\sin \bar{z} \\ \sin \bar{z} & \cos \bar{z} \end{bmatrix}$$

avec

$$(33) \quad \bar{z} = \frac{1}{2} \arctg \frac{\sum_{j=1}^k \sin 2\hat{z}_j}{\sum_{j=1}^k \cos 2\hat{z}_j}$$

et

$$(34) \quad m = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^k \cos 2(\hat{z}_j - \bar{z})$$

Si les \hat{z}_j sont distribués symétriquement autour d'un azimut moyen, la valeur de \bar{z} coïncide avec celle de l'azimut moyen, soit :

$$(35) \quad \bar{z} = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \hat{z}_j$$

Dans ce cas particulier, la valeur de m peut être approchée par l'expression :

$$(36) \quad m = \frac{k}{2} \frac{\sin \Delta z}{\Delta z}$$

où Δz vaut deux fois, le maximum de l'écart angulaire des \hat{z}_j par rapport à la valeur moyenne \bar{z} .

Alors, si $\Delta z \neq 0$, nous pouvons écrire :

$$(37) \quad P_{k/k} = \frac{2 \sigma^2 d^2}{k} \begin{bmatrix} \cos \bar{z} & \sin \bar{z} \\ -\sin \bar{z} & \cos \bar{z} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \frac{1}{1 + (\sin \Delta z / \Delta z)} & 0 \\ 0 & \frac{1}{1 - (\sin \Delta z / \Delta z)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \bar{z} & -\sin \bar{z} \\ \sin \bar{z} & \cos \bar{z} \end{bmatrix}$$

Les covariances des erreurs d'estimation sont proportionnelles à la variance du bruit de mesure et au carré de la distance et inversement proportionnelles au nombre de mesures. Le conditionnement est alors défini par l'expression :

$$(38) \quad c(P_{k/k}) = \frac{1 + (\sin \Delta z) / \Delta z}{1 - (\sin \Delta z) / \Delta z}$$

Nous voyons apparaître deux situations extrêmes :

(a) le cas $\Delta z = 0$ qui correspond à un scénario où la variation d'azimut est nulle. L'estimation de l'azimut est celle d'une grandeur constante et on peut s'attendre à une excellente estimation de sa valeur. La distance, par contre, est absolument inobservable. La direction la moins observable est celle de la ligne de visée et la plus observable lui est orthogonale;

(b) le cas $\Delta z = \pi$ qui correspond à la variation maximale de l'azimut.

Le conditionnement prend alors sa valeur minimale 1, indiquant l'absence de directions privilégiées d'observation. Les cas pratiques se situent évidemment entre ces deux extrêmes, les petites variations de l'azimut entraînant des valeurs élevées du conditionnement et par conséquent une faible observabilité de la distance associée à une excellente observabilité de l'azimut. La direction la moins observable coïncide sensiblement avec la visée, la direction la plus observable lui étant presque orthogonale.

D'autre part, les grandes variations de l'azimut conduisent à des faibles valeurs de conditionnement avec une bonne estimation de la distance obtenue aux dépens d'une faible détérioration de celle de l'azimut. La direction la moins observable s'écarte de la ligne de visée et la plus observable ne lui est plus orthogonale.

Dans le paragraphe suivant nous allons illustrer ces concepts par des simulations.

5. Simulations

Afin de corroborer les conclusions précédentes, nous avons simulé deux scénarios de poursuite visualisés sur les figures 1 et 2. Dans chaque scénario le but suit la même trajectoire tandis que le lanceur dont la position initiale par rapport au but est la même, suit des trajectoires avec des degrés d'observabilité dynamique très différents.

On a supposé un bruit avec un écart-type $\sigma = 0,5^\circ$ pour la mesure de l'azimut. L'estimée initiale de la distance est de 30 km, l'estimée initiale de l'azimut est égale à la première mesure et les deux composantes de la vitesse sont initialisées à 0 m/s et la matrice

TRAJECTOGRAPHIE PASSIVE
SCENARIO 1

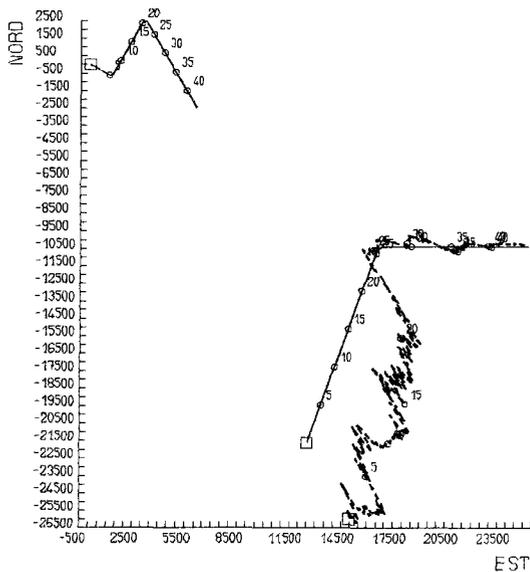


Fig. 1

TRAJECTOGRAPHIE PASSIVE
SCENARIO 2

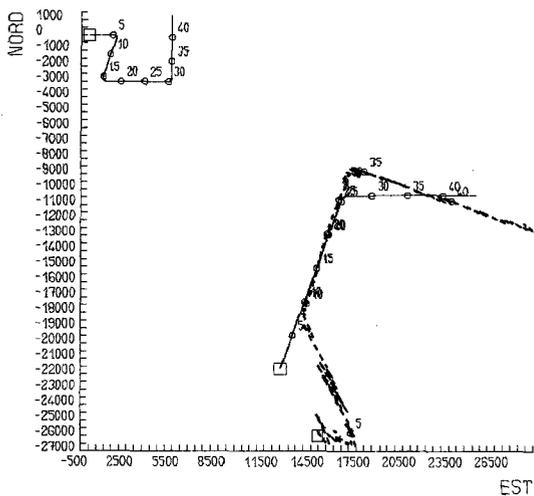


Fig. 2

de covariance d'erreur est initialisée sous la forme diagonale avec des écarts-type de 10 km sur les coordonnées de la distance et de 10 m/s sur celles de la vitesse.

Les trajectoires estimées du but apparaissent en pointillé sur les mêmes figures.

Un test permet la détection de la manœuvre du but, suivi d'une réinitialisation de la matrice de covariance d'erreur qui permet au filtre de poursuivre l'estimation d'une nouvelle trajectoire rectiligne.

Le critère de détection de manœuvre est une intégration à mémoire limitée des innovations défini comme

suit :

$$C_{k+1} = \alpha C_k + \delta_{k+1}$$

où C_k est la valeur du critère à l'instant t_k , $0 < \alpha < 1$ et

$$\delta_k = \tilde{Z}_k^2 \cdot F_k^{-1};$$

où \tilde{Z}_k est l'innovation à l'instant k et F_k sa covariance. Si l'innovation est supposée gaussienne, alors δ_k est une distribution du type « chi-square » à un degré de liberté. Alors :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} E[C_k] = \frac{1}{1 - \alpha}$$

On a utilisé $\alpha = 0,8$, donc la longueur $\Delta = 1/(1 - \alpha)$ de la fenêtre est égale à 5 mesures. On a choisi un seuil de détection de 25 ce qui donne une région de confiance de 99,99 % pour la détection.

Si on suppose que la manœuvre s'effectue après la convergence du filtre, la distance estimée est à peu près correcte et seules les composantes de la vitesse sont erronées. La nouvelle matrice de covariance devient diagonale avec des écarts-type de 1 km sur la distance et de 10 m/s sur la vitesse.

Les figures 3 et 4 précisent les résultats de cette première simulation. Dans la première colonne apparaissent les variables d'état en coordonnées polaires (valeurs théoriques en trait continu et valeurs estimées en pointillé). La seconde colonne visualise les quatre valeurs propres de la matrice $P(k/k)$ normalisée et les troisième et quatrième colonnes les directions propres correspondant à la plus faible et la plus grande valeur propre ainsi que les angles que les projections de ces vecteurs sur le plan x-y font avec le nord (angles notés AN1 et AN4). La dernière colonne fournit les valeurs de conditionnement et du déterminant de la matrice $P(k/k)$ ainsi que les angles que la ligne de visée fait avec les directions AN1 et AN4.

Ces résultats sont très éclairants. Nous remarquons d'abord que les intervalles de temps où la qualité de l'estimation est excellente correspondent à ceux où le conditionnement est faible. Ceci est caractérisé essentiellement par une augmentation importante de la plus petite valeur propre (notée LM1) de la matrice $P_{k/k}$ normalisée.

Dans ces deux scénarios, seule la trajectoire du lanceur est modifiée. Dans les deux cas, le lanceur effectue une première manœuvre 5 minutes après le début des observations. Dans le scénario 2, cette manœuvre provoque un taux assez élevé de variation de l'azimut qui entraîne la convergence de l'estimée de la distance et une diminution de la valeur du conditionnement. A l'inverse, dans le scénario 1, le lanceur suit après la manœuvre une trajectoire parallèle (et dans le même sens) à celle du but. Le taux de variation de l'azimut étant beaucoup plus faible conduit passagèrement à une qualité de l'estimation de la distance médiocre.

On remarque de plus sur les figures 3 et 4, que la direction la moins observable est alignée avec la ligne de visée (angle $AN4 - AZ = 0^\circ$ ou 180°) et la direction la plus observable lui est sensiblement orthogonale (angle $AN1 - AZ \simeq \pi/2$). On peut d'ailleurs voir qu'il

TRAJECTOGRAPHIE PASSIVE
SCENARIO 1

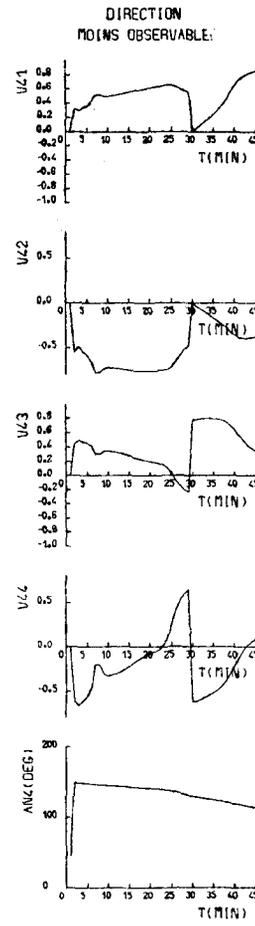
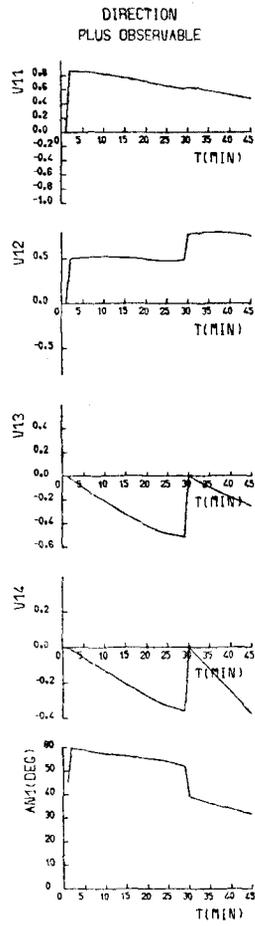
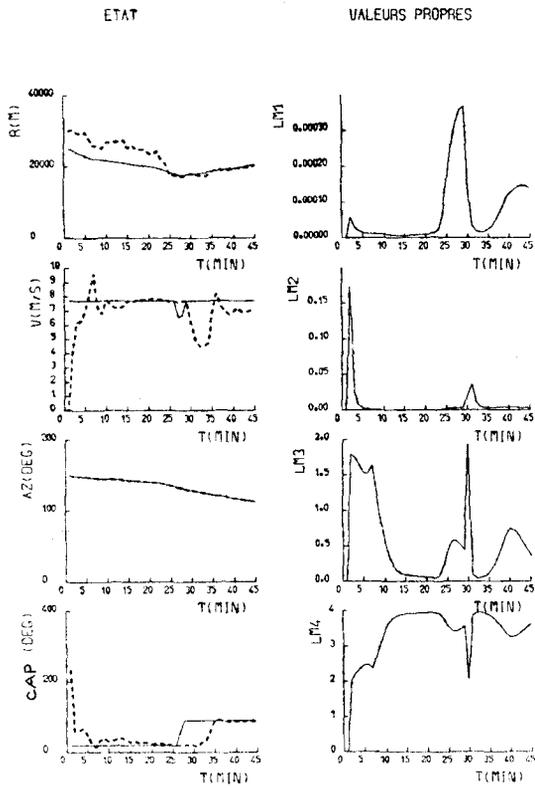


Fig. 3

TRAJECTOGRAPHIE PASSIVE
SCENARIO 2

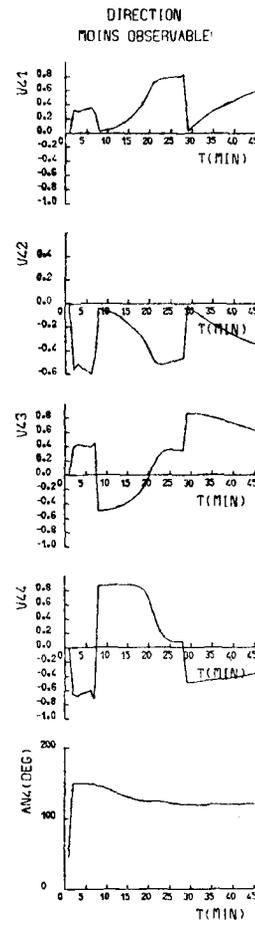
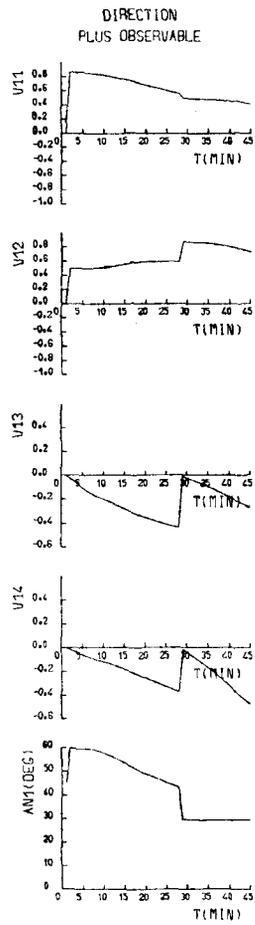
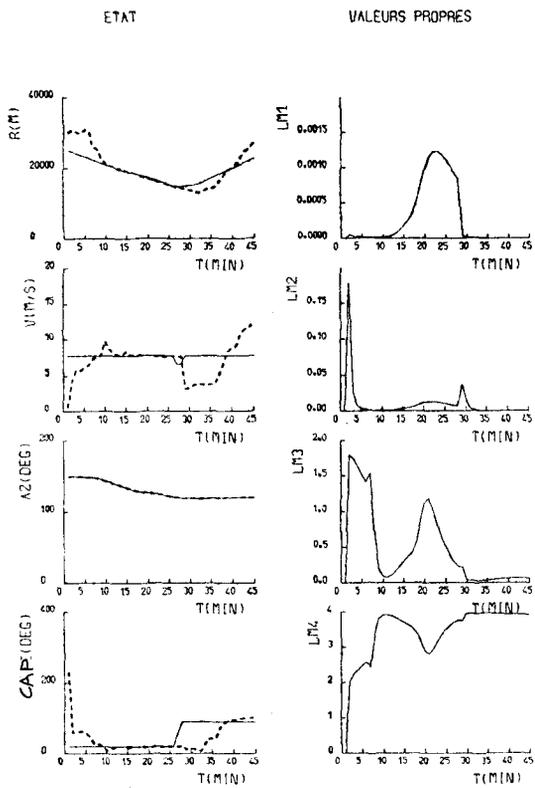


Fig. 4

suffit de variations faibles (de l'ordre de quelques degrés) autour de ces directions pour assurer la convergence des estimés. On voit très nettement sur la figure 4 que les intervalles de temps, où les directions ne sont pas rigoureusement la ligne de visée et l'orthogonale à la ligne de visée, correspondent précisément à ceux où la qualité des quatre estimés est remarquable (amélioration rapide de l'observation).

On mesure donc les liens très étroits qui existent entre l'observabilité du système, le conditionnement et le déterminant de la matrice $P_{k/k}$ normalisée, le taux de variation de l'azimut et les angles entre les directions la plus et la moins observable et la ligne de visée.

Ces dépendances peuvent être utilisées dans la recherche de trajectoires du lanceur améliorant l'observabilité du système.

6. Détermination d'une manœuvre sous-optimale du lanceur (entrée sensibilisante)

Les simulations du paragraphe antérieur ont mis en évidence le lien étroit entre la qualité des estimations et la nature de la trajectoire du lanceur, ainsi que le rapport entre la qualité des estimations et les valeurs propres de la matrice de covariances d'erreur d'estimation. Cela suggère la trajectoire du lanceur qui assure une bonne observabilité du système en utilisant, comme critère de qualité, une relation entre les valeurs propres de la matrice $P(k/k)$ normalisée.

On suppose que la trajectoire du lanceur est constituée par plusieurs segments rectilignes parcourus à vitesse constante séparés par des manœuvres caractérisées par un changement de cap.

Si une manœuvre a lieu à l'instant t_k et si l'intervalle entre deux manœuvres est égale à T , nous cherchons le cap que doit suivre le lanceur entre les instants t_k et $t_k + T$ qui extrémise le critère à cet instant.

Dans le développement de l'algorithme d'optimisation, nous supposons que la prochaine mesure traitée arrive à l'instant $t_k + T$. Nous pouvons alors écrire :

$$(39) \quad t_{k+1} = t_k + T$$

$$(40) \quad \hat{x}_{k+1/k} = \varphi(t_k + T, t_k) \hat{x}_{k/k} + \Gamma_k$$

$$(41) \quad P_{k+1/k} = \varphi(t_k + T, t_k) A_{k/k} \varphi^T(t_k + T, t_k)$$

$$(42) \quad H_{k+1} = \left. \frac{\partial h}{\partial x^T} \right|_{x = \hat{x}_{k+1/k}}$$

$$(43) \quad K_{k+1} = P_{k+1/k} H_{k+1}^T \times [H_{k+1} P_{k+1/k} H_{k+1}^T + R_{k+1}]^{-1}$$

$$(44) \quad P_{k+1/k+1} = [I - K_{k+1} H_{k+1}] P_{k+1/k}$$

avec

$$(45) \quad \Gamma_k = -T v_L [\sin C_L \quad \cos C_L \quad 0 \quad 0]^T$$

où v_L est le module de la vitesse du lanceur et C_L son cap. On remarque qu'en faisant varier le cap, la valeur de $\hat{x}_{k+1/k}$ varie ainsi que celles de H_{k+1} , K_{k+1} et $P_{k+1/k+1}$ qui en dépendent.

Pour chaque valeur possible du cap, on calcule les valeurs propres de la matrice $P_{k+1/k+1}$ normalisée et on détermine la valeur du cap qui minimise le critère

suivant :

$$QVP = \frac{\lambda_4 \lambda_3}{\lambda_2 \lambda_1} \quad \text{avec} \quad \lambda_4 \geq \lambda_3 \geq \lambda_2 \geq \lambda_1$$

Ce critère, quotient des deux plus grandes valeurs propres sur les deux plus faibles, caractérise la qualité de l'observation dynamique de l'estimation du système non linéaire.

Le cap est suivi par le lanceur jusqu'à la nouvelle détermination du cap obtenu à l'instant $t_k + T$.

TRAJECTOIRE OPTIMISEE

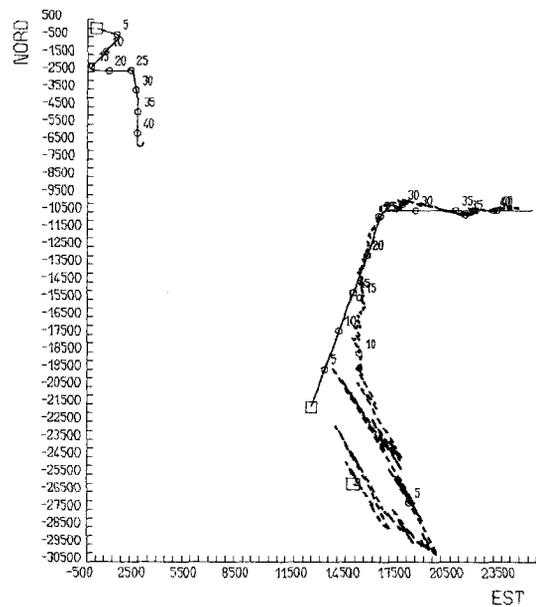


Fig. 5

La figure 5 montre la trajectoire pseudo-optimale du lanceur obtenue par cette méthode. L'amélioration de l'observabilité de la trajectoire du but identique à celle des scénarios 1 et 2 est évidente. La figure 6 qui reproduit l'ensemble des paramètres des figures 3 et 4 confirme nettement ce résultat.

Cet algorithme pseudo-optimal est d'un intérêt pratique évident, car il fournit à chaque instant de manœuvre le cap minimisant le critère à l'extrémité de la future branche de la trajectoire du lanceur. L'implantation temps réel d'un tel algorithme est en voie de réalisation.

7. Filtre adaptatif fondé sur l'observabilité

Dans les paragraphes antérieurs, nous avons supposé que la trajectoire du but était constituée de segments rectilignes parcourus à vitesse constante avec éventuellement un changement de cap entre deux segments. En réalité, des perturbations se présentent qui rendent erronée la modélisation retenue.

Nous pouvons donc compléter la modélisation précédente en y ajoutant [équation (46)] un terme w_k représentant les variations accélérométriques du but avec

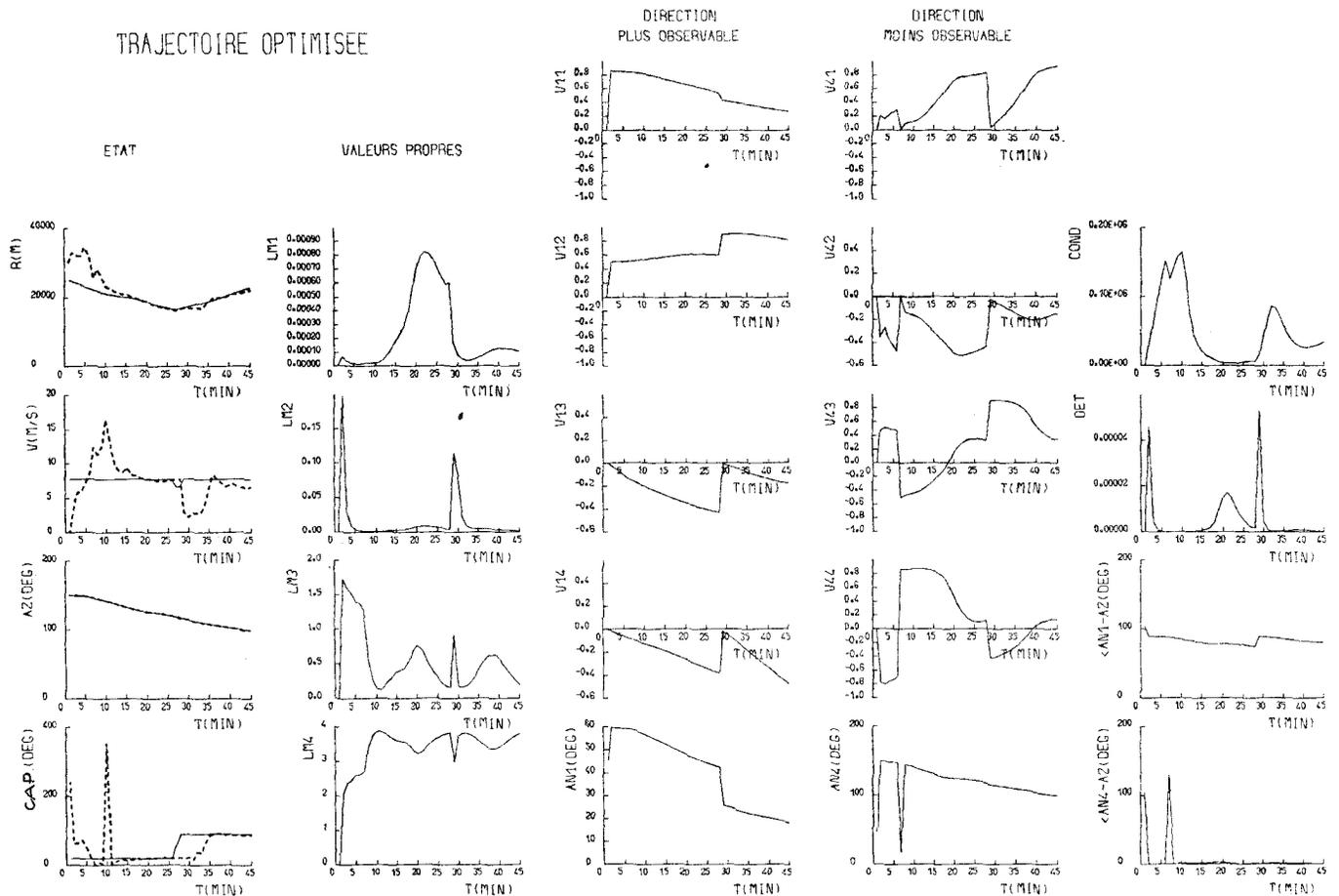


Fig. 6

les hypothèses statistiques discrètes dans des relations (47) et (48) :

$$(46) \quad \mathbf{x}_k = \varphi(k, k-1) \mathbf{x}_{k-1} + \Gamma_k + \mathbf{w}_k$$

$$(47) \quad E(\mathbf{w}_k) = 0$$

$$(48) \quad E(\mathbf{w}_k \mathbf{w}_k') = \mathbf{Q}_k$$

Le vecteur perturbation est lui-même relié aux composantes a_x et a_y de l'accélération par l'équation matricielle suivante :

$$(49) \quad \mathbf{W}_k = \begin{bmatrix} T^2/2 & 0 \\ 0 & T^2/2 \\ -T & 0 \\ 0 & T \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \end{bmatrix}$$

avec

$$(50) \quad E(a_x) = E(a_y) = 0$$

$$(51) \quad E(a_x^2) = E(a_y^2) = \sigma_Q^2$$

A partir d'une connaissance de la variance σ_Q , on peut bâtir un filtre de Kalman étendu estimant la trajectoire, la figure 7 visualise le résultat obtenu pour un scénario de poursuite donné.

La connaissance de cette variance étant utopique, nous avons construit une algorithmique adaptative estimant en temps réel la variance du bruit d'état. L'approche bayésienne classique existant dans le fonc-

tionnement de filtres en parallèle montre ici ses limites car la faible observabilité dynamique du système rend quasi-insensible le facteur innovation à la grandeur σ_Q . Nous avons donc choisi d'employer un filtre adaptatif dont la structure est bayésienne mais fondée sur l'observabilité du système.

On fait fonctionner m filtres en parallèle pour des valeurs différentes de σ_Q et on pondère les estimées de chaque filtre par une grandeur fonction du degré d'observabilité du filtre.

Soient $\lambda_{j,i}$ ($i=1, \dots, 4$), les valeurs propres de la matrice de covariance d'erreur d'estimation normalisée du filtre fonctionnant sur le modèle M_j .

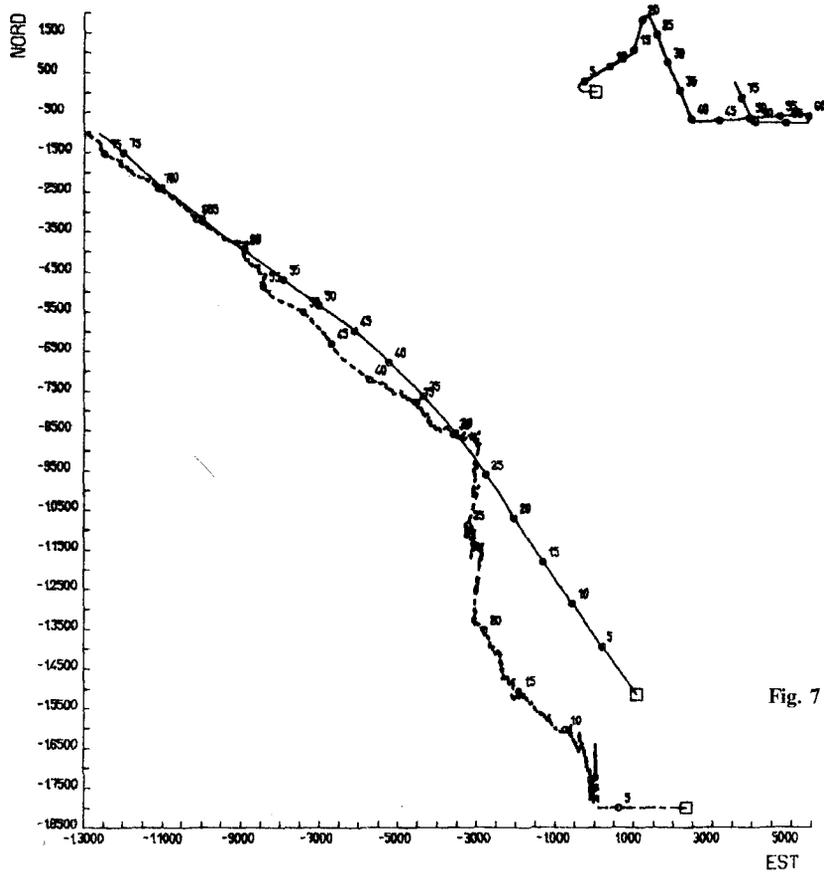
On cherche la fonction $f_j = f(\lambda_{j,i})$ ($i=1, \dots, 4$) qui représente un critère significatif de la qualité de l'estimation fournie par le filtre basé sur le modèle M_j .

Comme nous l'avons montré, le caractère fortement non linéaire de l'équation de mesure impose de choisir un critère de qualité lié au conditionnement de la matrice de covariance d'erreur.

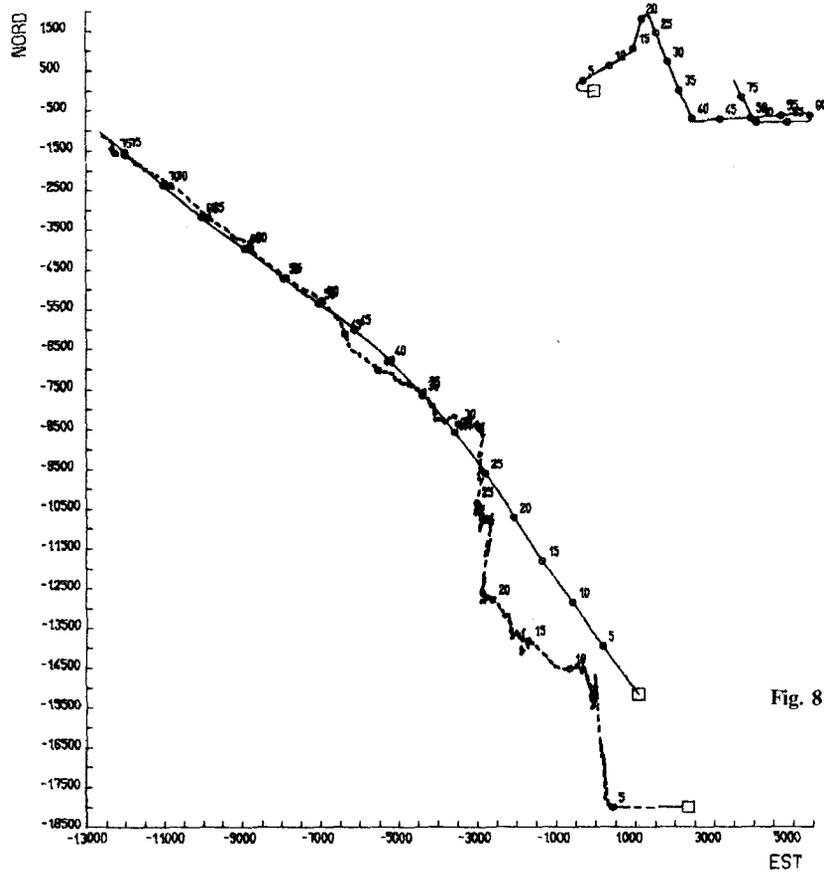
Si $\hat{\mathbf{x}}_{j,k/k}$ désigne l'estimé de l'état issue du filtre M_j , l'estimée résultante $\hat{\mathbf{x}}(k/k)$ de l'état sera :

$$(52) \quad \hat{\mathbf{x}}(k/k) = \frac{\sum_{j=1}^m f_j \hat{\mathbf{x}}_{j,k/k}}{\sum_{j=1}^m f_j}$$

FILTRE DE KALMAN ETENDU
TRAJECTOIRE PERTURBEE
SIMB1.DON
SIGMA-Q = 0.01



FILTRE ADAPTATIF
TRAJECTOIRE PERTURBEE
SIMB1.DON



avec

$$f_j = \left[\frac{\lambda_4 \lambda_3}{\lambda_2 \lambda_1} \right]_j$$

La figure 8 montre le résultat obtenu avec un ensemble de cinq filtres. On remarque une excellente similitude avec les résultats de la figure 7 ce qui confirme la qualité de l'adaptativité du filtre.

8. Conclusion

Nous avons montré la relation existante entre le degré d'observabilité dynamique d'un scénario de trajectographie passive et la trajectoire du lanceur. Il a été aussi établi un lien entre l'observabilité et les valeurs propres de la matrice de covariance d'erreur d'estimation normalisée.

Des relations entre les valeurs propres peuvent alors être utilisées pour établir un degré de qualité des estimées fournies par un filtre étant donnée une trajectoire du lanceur, voire obtenir une trajectoire qui augmente le degré d'observabilité dynamique du système.

Finalement, nous avons vu que l'observabilité représentée par le déterminant de la matrice $P(k/k)$ norma-

lisée, peut être utilisée comme facteur de pondération pour un filtre adaptatif.

Ces concepts ouvrent pour la trajectographie passive et pour le filtrage non linéaire en général un champ de recherches particulièrement attrayant.

Manuscrit reçu le 7 novembre 1986.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] S. NARDONE et V. AIDALA, Observability criteria for bearings only target motion analysis, *IEEE Trans. Aerospace Elect. Systems*, AES 17, n° 2, March 1981, p. 162-166.
- [2] F. M. HAM et R. G. BROWN, Observability, eigenvalues and Kalman filtering, *IEEE Trans. Aerosp. Electr. Systems*, AES-19, n° 2, March 1983, p. 269-273.
- [3] F. E. DAUM et R. J. FITZGERALD, Decoupled Kalman Filter for phased array radar tracking, *IEEE Trans. Automatic Control*, AC28, n° 3, March 1983, p. 269-283.
- [4] S. G. TABOADA, Synthèse de filtres non linéaires appliqués à la poursuite 3D et à l'azimétrie, *Thèse de Docteur Ingénieur*, ENSAE, Toulouse, septembre 1986.
- [5] V. I. AIDALA et J. S. DAVIS, The utilization of data measurement residual for adaptive Kalman Filtering, *Proc. IEEE Conf. Engineering in the Ocean Environment (Ocean 73)*, 1973.