UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE MÉXICO

FACULTAD DE ECONOMÍA

CUADERNO DE EJERCICIOS

# LA MICROECONOMÍA EN EL ÁMBITO DE LOS NEGOCIOS INTERNACIONALES

UNIDAD DE APRENDIZAJE: MICROECONOMÍA 2
LICENCIATURAS NEGOCIOS INTERNACIONALES BILINGÜE

JUVENAL ROJAS MERCED

TOLUCA MÉX, OCTUBRE DE 2017

# INDICE

# PRESENTACIÓN

El actual orden económico y financiero, tanto nacional como internacional exige una estrecha relación entre los agentes económicos, relación la cual se lleva dentro del mercado y que además genera una serie de situaciones que requieren de un estricto análisis de la situación en la que se encuentra. Los agentes económicos involucrados presentan un rasgo común, un comportamiento, el buscar la mejor situación que le permita generar el máximo nivel de bienestar.

Para tal fin es necesario conocer, comprender y utilizar los conceptos y principios que se relacionan con el estudio de la microeconomía el cual o pretende explicar aspectos de la realidad económica, ya sea equilibrio parcial o general, en la toma de decisiones bajo certeza o incertidumbre. Es así que el Programa de Estudios por Competencias Microeconomía 2, es parte trascendente del Programa de Licenciatura en Negocios Internacionales Bilingüe, el cual se imparte en la Facultad de Economía de la Universidad Autónoma del Estado de México.

La microeconomía es la parte de la economía que estudia el comportamiento económico de agentes económicos en forma individual, analizando la toma de decisiones en busca de cumplir sus objetivos, la satisfacción de sus necesidades. Los elementos básicos en los que se centra el análisis microeconómico son los bienes, los precios, los mercados y los agentes económicos.

Su importancia radica en que los agentes económicos en la toma de decisiones se enfrentan al riesgo y la incertidumbre en un horizonte futuro. Para reducirla se recurre a la proposición de modelos matemáticos, financieros o de negocios que desarrollen los supuestos sobre el comportamiento de los agentes económicos, tratando de establecer una previsión de los fenómenos, y con ello anticiparse a lo que sucederá. Es claro que las conclusiones a la que se llegue usando dichos modelos sólo será válida, en la medida en la que se cumplan los supuestos, hecho que no siempre ocurre.

Dado lo anterior, la Unidad de Aprendizaje Microeconomía 2, tiene como propósito comprender los principios del equilibrio general de una economía, mediante el análisis de los procesos de intercambio en el consumo y producción, y la manera en que éstos son afectados por las principales fallas del mercado que condicionan la eficiencia.

El propósito de este cuaderno de ejercicios es proporcionar un material didáctico práctico que se adapte a las diversas necesidades de los estudiantes de microeconomía 2 de la licenciatura en Negocios Internacionales Bilingüe. Lo anterior como consecuencia de que en la actualidad existe una gran escasez de manuales y libros que incluyan ejercicios o problemas resueltos. La experiencia docente indica que los conocimientos y contenidos teóricos se asimilan mucho mejor si su estudio va acompañado de ejercicios prácticos.

La selección de los diversos ejercicios y/o problemas corresponden con el contenido de la unidad de aprendizaje de la asignatura de microeconomía 2 impartida a la licenciaturas en Negocios Internacionales Bilingüe, buscando en todo momento el facilitar la comprensión tanto teórica como práctica de los contenidos de cada una de las unidades que constituyen el programa correspondiente, para de esta forma, el discente cuente con los elementos necesarios para dar solución a problemas que se presenten.

Por su contenido puede servir de complemento de cualquiera de los manuales o libros utilizados como bibliografía dentro del curso. El cual en particular se adoptara el texto de Gravelle y Rees (Microeconomía, Pearson Prentice Hall).

El cuaderno presenta una serie de ejercicios que se resuelven utilizando tanto instrumental analítico como gráfico. El nivel de formalización matemática corresponde con el del alumno que conoce y maneja, con cierta facilidad, las técnicas básicas de optimización, tratando en todo momento realizar la explicación en forma detallada, lo cual busca facilitar el seguimiento del alumno.

Lo anterior debido a que se considera que la resolución de ejercicios constituye una parte sumamente importante en enseñanza del análisis microeconómico.

# EJERCICIO DEMOSTRATIVO

La forma en cómo se propone se vaya resolviendo los ejercicios y/o problemas es de tal que se vaya desarrollando, sino paso por paso, sin los pasos necesarios buscando con ello se facilite la comprensión por parte del alumno. Así, se recomienda sea de la siguiente forma:

**Una empresa monopolista enfrenta la demanda siguiente: $P = -3/100Q + 10$. Para satisfacer la demanda tiene la opción de producir en sus dos fábricas o comprar la producción en el extranjero. Los costos marginales de producción en las dos fábricas son: $CMg_1 = 1/10Q + 4$ y $CMg_2 = 1/20Q + 6$. El monopolista sabe que puede abastecerse en el extranjero. Podría importar cantidades suficientes para el mercado a un precio fijo de compra de $P = 6.5$. ¿Cuál será en ese caso el precio de venta del monopolista si desea maximizar sus utilidades?**

Consideremos la posibilidad de comprar el producto en lugar de fabricarlo. Si el precio es fijo e igual a $6.5$, este valor representa a la vez el costo marginal ($CMg$) y el costo variable medio ($CVMe$) de la empresa. Apliquemos la regla de maximización de beneficios.

$$IMg = CMg$$

$$-\frac{3}{50}Q + 10 = 6.5$$

$$Q = 58.33$$

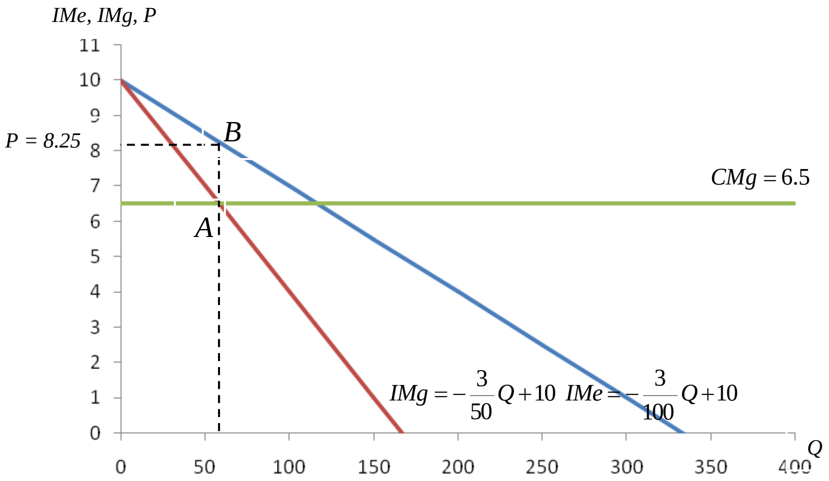
Podemos calcular el precio de venta si reportamos este valor en la función de demanda:

$$P = -\frac{3}{100}(58.33) + 10 \rightarrow P = 8.25$$

En este caso su margen de utilidad será

$$X = \frac{P - CVMe}{CVMe} = \frac{8.25 - 6.50}{6.50} = 27\%$$

$$X = 27\%$$



# EJERCICIOS PROPUESTOS

## Unidad de competencia 1. Equilibrio del Mercado

1. Partiendo de la función indirecta de utilidad

$$V = \frac{8M^3}{27P_X P_Y^2}$$

Obtener

a. Las funciones de demanda ordinaria,
b. La ecuación de gasto
c. Las demandas compensadas.

2. Partiendo de la función indirecta de utilidad $e^u = \frac{M^2}{4P_1P_2}$, mostrar que se cumple

a. la identidad de Roy,
b. el Lema de Shepard
c. Las identidades en el equilibrio

3. Dada la siguiente función de utilidad

$$U = Lnx_1 + Lnx_2$$

Determinar

a. Las funciones de demanda ordinarias
b. Función de demanda compensada
c. Funciones de demanda compensadas
d. La función de gasto del consumidor
e. Las comprobaciones correspondientes.

4. Dada la siguiente Función Indirecta de Utilidad

$$v = \frac{1}{4}\left(\frac{p_2}{cp_1}\right) + \frac{cM}{p_2}$$

Determinar:

a. Las funciones de demanda ordinarias
b. La función de gasto
c. Las funciones de demanda compensadas

5. Comprobar si las demandas ordinarias cumplen las restricciones impuestas por la teoría.

$$X_1 = \left(\frac{p_2}{4c\ p_1}\right)^2 \quad \text{y} \quad X_2 = \frac{M}{p_2} - \frac{p_2}{4c^2 p_1}$$

**6.** Partiendo de la función de producción

$$Y = X_1^{1/2} + X_2^{1/2}$$

Obtener las funciones de demanda de los factores, la función de producción, la función de ingreso total, la función de costos y la función de beneficios

7. Partiendo de la siguiente función de beneficios:

$$\Pi(P, W_1, W_2) = \frac{P^2(W_1 + W_2)}{4W_1W_2}$$

a. Obtener las demandas de inputs
b. Obtener la función de oferta del output
c. Obtener las demandas condicionadas de los inputs
d. la función de costos
e. la función de producción

8. Partiendo de la siguiente función de beneficios

$$\Pi = \frac{200P^2}{r^{1/2}w^{1/2}}$$

Determinar las funciones de demanda de los insumos Capital ($K$) y Trabajo ($L$) y la función de oferta

9. Partiendo de los resultados del ejercicio anterior determinar las funciones de demanda condicionada de los factores, y la función de costo mínimo.

10. Partiendo de la función de costo mínimo obtenida en el ejercicio anterior, determinar la función de producción original.

## Unidad de competencia 2. Equilibrio General en una Economía de Intercambio Puro

1. Considere una economía en la que hay 50 unidades del bien 1 y 100 del bien 2 para repartir entre las personas A y B, cuyas preferencias están dadas por:

$$U^A = MIN\left\{X_1^A, X_2^A\right\}$$

$$U^B = X_1^B + ln\, X_2^B$$

Encuentre el conjunto de asignaciones eficientes y verifique que si las dotaciones iníciales son

| | $X_1$ | $X_2$ |
|---|---|---|
| $A$ | 0 | 100 |
| $B$ | 50 | 0 |

se alcanza un equilibrio walrasiano cuando la relación de precios $P_1 / P_2 = 99$

2. Sea una economía de intercambio puro con dos consumidores y dos bienes, Las funciones de utilidad de los consumidores son:

$$U_1\left(x^1\right) = x_{11}^{2/3} x_{12}^{1/3} \qquad U_2\left(x^2\right) = x_{21}^{1/3} x_{22}^{2/3}$$

El consumidor 1 tiene una dotación inicial de $w^1 = (300, 700)$ unidades, y el consumidor 2 de $w^2 = (700, 300)$ unidades. Calcular Las funciones de demanda de cada consumidor

3. Sea una economía de intercambio puro con dos consumidores y dos bienes, Las funciones de utilidad de los consumidores son:

$$U_1\left(x^1\right) = x_1^1 x_2^1 + 12x_1^1 + 3x_2^1 \quad \text{y}$$

$$U_2\left(x^2\right) = x_1^2 x_2^2 + 8x_1^2 + 9x_2^2$$

El consumidor 1 tiene una dotación inicial de 38 unidades de $x_1$ y 0 de $x_2$, y el consumidor 2 de 0 unidades del bien $x_1$ y 20 de $x_2$. Calcular la curva de contrato

4. Consideramos dos consumidores de dos bienes, agua y ketchup. El precio del agua es $p_x$ y el precio del ketchup es $p_y$. Sus utilidades son:

$$u_i(x,y) = x^{\frac{1}{2}} y^{\frac{2}{3}} \quad y \quad u_j(x,y) = 10x^{\frac{3}{4}} y^{\frac{1}{3}}$$

donde *x* es la cantidad de agua y $y$ la cantidad de ketchup que consumen. Supongamos que las dotaciones iniciales de los agentes *i* y *j* son respectivamente

$w_i = (3, 1) \quad w_j = (2, 10)$

Calcular el equilibrio Walrasiano.

5. Sea una economía de intercambio puro con dos consumidores y dos bienes. Las funciones de utilidad de los consumidores son:

$$u^1 = 4x_{11}^{1/3} x_{12}^{1/2} \qquad u^2 = 3x_{21}^{1/2} x_{22}^{1/2}$$

Determinar la curva de contrato

6. Consideramos una economía de intercambio con dos consumidores, $i$ y $j$, y dos bienes, $x$ & $y$. En la economía, hay 100 unidades de cada bien. Las funciones de utilidad de los dos agentes son:

$$U_i\left(x_i, y_i\right) = 5x_i^{2/3} y_i^{1/3} \qquad U_j\left(x_j, y_j\right) = 10x_j^{\frac{2}{3}} y_j^{\frac{1}{3}}$$

a. Hallar las condiciones para que tengamos un óptimo de Pareto
b. Escribir la ecuación correspondiendo a los puntos en los que tenemos un óptimo de Pareto.
   suponiendo que las dotaciones iniciales son las siguientes:

$$w_i^x = 20 \qquad w_i^y = 70$$

$$w_j^x = 80 \qquad w_j^y = 30$$

Calcular el equilibrio Walrasiano.

7. Sea una economía de intercambio puro con dos consumidores y dos bienes, Las funciones de utilidad de los consumidores son:

$$U_1 = x_{11}x_{12} + 2x_{11} + 5x_{12} \qquad U_2 = x_{21}x_{22} + 4x_{21} + 2x_{22}$$

El consumidor 1 tiene una dotación inicial de 78 y 0 unidades de $x_1$ y $x_2$ respectivamente, y el consumidor 2 de 0 y 164 unidades de cada bien. Obtener:

a. Las funciones de exceso de demanda de cada consumidor
b. El precio relativo de equilibrio de esta economía.
c. Las cantidades óptimas de demanda

8. Sea una economía de intercambio puro con dos consumidores y dos bienes, Las funciones de utilidad de los consumidores son:

$$U_1 = x_{11}x_{12} + 2x_{11} + 5x_{12} \qquad U_2 = x_{21}x_{22} + 4x_{21} + 2x_{22}$$

El consumidor 1 tiene una dotación inicial de 78 y 0 unidades de $x_1$ y $x_2$ respectivamente, y el consumidor 2 de 0 y 164 unidades de cada bien.

   a. Calcular la curva de contrato
   b. Las funciones de demanda de cada consumidor
   c. El núcleo de la economía.
   d. Las curvas de disposición

9. Sea una economía de intercambio puro con dos consumidores y dos bienes, Las funciones de utilidad de los consumidores son:

$$U_1\left(x^1\right) = x_1^1 x_2^1 + 12x_1^1 + 3x_2^1 \qquad U_2\left(x^2\right) = x_1^2 x_2^2 + 8x_1^2 + 9x_2^2$$

El consumidor 1 tiene una dotación inicial de $w^1 = (8, 30)$ de $x_1$ y $x_2$ respectivamente, y el consumidor 2 de $w^2 = (10, 10)$ de cada bien.

a. Calcular las funciones de demanda de cada consumidor
b. Calcular las funciones de excesos de demanda de cada consumidor
c. Calcular el precio relativo de equilibrio de esta economía.

10. Sea una economía de intercambio puro con dos consumidores y dos bienes. Las funciones de utilidad de los consumidores son:

$$U_1\left(x^1\right) = x_1^1 x_2^1 + 12x_1^1 + 3x_2^1 \quad \text{y} \quad U_2\left(x^2\right) = x_1^2 x_2^2 + 8x_1^2 + 9x_2^2$$

El consumidor 1 tiene una dotación inicial de 38 unidades de $x_1$ y 0 de $x_2$, y el consumidor 2 de 0 unidades del bien $x_1$ y 20 de $x_2$.

Calcular:

   a. Las funciones de demanda de cada consumidor
   b. El precio relativo de equilibrio de esta economía
   c. Los niveles de utilidad, así como las curvas de indiferencia antes y después del intercambio
   d. El núcleo de la economía
   e. Las curvas de disposición

## Unidad de competencia 3. Equilibrio General Competitivo en una Economía de Intercambio y Producción

1. Supongamos una economía en la cual se producen dos bienes: Carbón $x_1$ y Maíz $x_2$. Los cuales utilizan un único factor trabajo $L$. Existiendo una dotación de 100 unidades de ese factor cada uno de los factores es producido según su función de producción $X_1 = 2L_1^{1/2}$ y $X_2 = L_2^{1/2}$. Obtener la frontera de posibilidades de la producción y graficar.

2. Suponga una economía en la cual se producen dos bienes: $X_1$ y $X_2$ Los cuales Utilizan un único factor trabajo ($L$) existiendo una dotación de 20 unidades de este factor. Cada uno de los Factores es producido Según su función de producción $X_1 = \sqrt{L_1}$ y $X_2 = 2L_2$ Obtener frontera de posibilidades de la producción.

3. Una economía utiliza un único factor productivo (y) para producir dos bienes ($x_1$ y $x_2$). La tecnología disponible para ello viene representada por las siguientes funciones de producción.

$$x_1 = f^1(y_1) = 2(y_1)^{0.6} \qquad x_2 = f^2(y_2) = 6(y_2)^{0.3}$$

donde $y_1$ e $y_2$ son las cantidades de factor productivo utilizadas para producir $x_1$ y $x_2$ respectivamente. En dicha economía hay 100 unidades de factor productivo como dotaciones iniciales.

a. Derivar las condiciones de eficiencia de la producción
b. Calcular la curva de transformación o frontera de posibilidades de la producción

4. Suponga que dos individuos (Smith y Jones) tiene cada uno 10 horas de trabajo para producir helado ($X$) o sopa de pollo ($Y$). La demanda de Smith de $X$ y de $Y$ está dada por:

$$X_S = \frac{0.3M_S}{P_X} \qquad Y_S = \frac{0.7M_S}{P_Y}$$

Mientras que la demanda de Jones está dada por:

$$X_J = \frac{0.5M_J}{P_X} \qquad Y_J = \frac{0.5M_J}{P_Y}$$

Donde $M_S$ y $M_J$ representan los ingresos de Smith y de Jones, respectivamente (que provienen únicamente del trabajo).

A los individuos no les importa si producen $X$ o $Y$ y la función de producción de cada bien está dada por:

$$X = 2Lx$$
$$Y = 3Ly$$

Donde L es el trabajo total dedicado a la producción de cada bien.

a. Cuál debe ser la relación de precios $P_X$ y $P_Y$
b. Dada esta relación de precios, qué cantidad de $X$ y $Y$ demandarán
c. ¿Cómo se debe asignar el trabajo entre $X$ y $Y$ para satisfacer la demanda

5. Suponga que Robinson Crusoe utiliza únicamente trabajo para producir Cocos y Peces. La función de producción de los Peces es: $F = 6L_F$

La función de producción de los cocos está dada por: $C = 5Lc^{½}$

Su función de utilidad es $U = F^2C$. Recolectando alimentos seis horas por día.

Determinar:

a. La frontera de Posibilidades de la Producción a la que se enfrenta
b. La maximización de la utilidad combinada de los cocos y peces por día
c. El tiempo destinado a cada una de las actividades
d. Mostrar que la relación o tasa marginal de sustitución es igual a la tasa marginal de Transformación

6. Considere una economía en la que la producción y el consumo son realizados por un único agente esquizofrénico: Robinson Crusoe. Robinson-consumidor vende su tiempo de trabajo $h$ (en horas) a Robinson-empresario, quién produce cocos ($x$), que luego vende a Robinson-consumidor. Todos los beneficios de la venta de cocos son para Robinson-consumidor. Robinson-empresario tiene una función de producción

$x = a\,h$, donde $a > 0$.

Robinson-consumidor tiene una función de utilidad

$$u(\text{ocio}, \text{coco}) = \min\{\text{ocio}, \text{coco}\}.$$

Suponga que la dotación inicial de horas de trabajo es $T > 0$. Determine el salario real de equilibrio y la demanda de trabajo de la empresa en el Equilibrio General Competitivo.

7. Robinson Crusoe es el único ser viviente en su isla del Atlántico Sur. Produce cocos ($C$) usando como insumo su trabajo ($L$). Su función de utilidad es: $U(L,C) = (24 - L)C$. Puede producir cocos de acuerdo a la siguiente función de producción: $C = \sqrt{L}$.

Halle el óptimo y el Halle el equilibrio.

8. Suponga que Robinson Crusoe utiliza únicamente trabajo para recolectar alimentos para su consumo. La función de producción de la recolección de alimentos es: $C = AL^{\gamma}$Su función de utilidad es $U = C^{\alpha}(T – L)^{\beta}$

Determinar los niveles de consumo y trabajo óptimos

9. Suponga una economía que produce cañones (x) y mantequilla (y) con trabajo únicamente, de acuerdo con las siguientes funciones de producción:

$$x = \sqrt{L_X} \qquad y = \frac{1}{2}\sqrt{L_Y}$$

Donde $L_X$ y $L_Y$ representan el trabajo dedicado a la producción de $X$ e $Y$ respectivamente. El trabajo es fijo e igual a 100, además de las preferencias de esa comunidad vienen representadas por la función:

$$U(x, y) = \sqrt{xy}$$

Obtener

a. La Frontera de Posibilidades de la producción
b. Las cantidades y precios de equilibrio del consumidor.

10. Considere dos bienes ($X$ e $Y$) y dos agentes económicos ($A$ y $B$) dentro de la economía, producen con sus respectivas funciones de producción $X = K_X^{1/2}L_X^{1/2}$ y $Y = 4K_Y^{1/2}L_Y^{1/2}$. Demandan de acuerdo con las funciones de utilidad:

$$U_A = X_A Y_A^2 \quad \text{y} \quad U_B = X_B^2 Y_B$$

y las siguientes dotaciones iniciales:

$L_A = 100$ $L_B = 200$ $L = 300$
$K_A = 800$ $K_B = 400$ $K = 1,200$

Obtener el equilibrio general competitivo (La producción por empresa, los precios de los productos, las cantidades óptimas de demanda).

**Unidad de competencia 4. Economía del Bienestar**

1. Una planificadora social ha decidido que quiere distribuir el ingreso entre dos personas de modo que se maximice la función $\sqrt{Y_1} + \sqrt{Y_2}$ , donde $Y_i$ es la cantidad de ingreso de que dispone la persona i. Supongamos que la planificadora dispone de una cantidad fija de dinero para distribuir y que ella puede decidir cualquier distribución del ingreso tal que $Y_1 + Y_2 = W$, donde W es esa cantidad fija. ¿Cómo distribuiría este ingreso?

2. Suponiendo una asamblea de 60 votantes que deben elegir entre tres propuestas $a$, $b$ y $c$. Las preferencias se manifiestan de este modo (entendiendo que $a > b$ representa el hecho de que se prefiere $a$ a $b$):

23 votantes prefieren: $a > c > b$
19 votantes prefieren: $b > c > a$
16 votantes prefieren: $c > b > a$
2 votantes prefieren: $c > a > b$
Cuál será la propuesta ganadora?

3. Imaginemos que hay una elección entre 4 candidatos: Ana, Juan, Pedro y María. Supongamos que un votante rellena la papeleta de la siguiente manera:

| | |
|---|---|
| Ana | 3 |
| Juan | 1 |
| Pedro | 2 |
| María | 4 |

Utilizando el método de Conteo de votos mediante matrices para determinar al candidato ganador

4. Imaginemos que los habitantes de Tennessee, un estado de Estados Unidos quiere elegir su capital. Las cuatro ciudades más grandes de Tennessee son las candidatas.

Imaginemos que todo el electorado quiere que la capital sea la ciudad en la que viven, o que esté lo más cerca posible a su ciudad. Las ciudades candidatas son:

- Memphis La ciudad más grande, con el 42% de los votantes pero muy lejana del resto de las ciudades.
- Nashville con el 26% de los votantes.
- Knoxville con el 17% de los votantes.
- Chattanooga con el 15% restante.

Las preferencias de los votantes son las siguientes:

| 42% de los votantes (cercanos a Memphis) | 26% de los votantes (cercanos a Nashville) | 15% de los votantes (cercanos a Chattanooga) | 17% de los votantes (cercanos a Knoxville) |
|---|---|---|---|
| 1. Memphis | 1. Nashville | 1. Chattanooga | b) Knoxville |
| 2. Nashville | 2. Chattanooga | 2. Knoxville | c) Chattanooga |
| 3. Chattanooga | 3. Knoxville | 3. Nashville | d) Nashville |
| 4. Knoxville | 4. Memphis | 4. Memphis | e) Memphis |

¿Cuál será la ciudad ganadora desde el punto de vista de Condorcet?

5. Consideremos tres países, con cinco habitantes cada uno. En el primero, las rentas de sus habitantes, ordenadas de más a menos, son (4,4,5,6,6), en el segundo son (3,4,5,6,7) mientras que en el tercero son (4,4,4,4,9). ¿Cuál es más igualitario?

6. Existen 200 kg de alimentos en una isla y se deben distribuir entre dos marineros abandonados. La función de utilidad del primer marinero está dada por $U_1 = \sqrt{F_1}$ donde $F_1$ es la cantidad de alimentos consumidos por el primer marinero. Para el segundo marinero, la utilidad (como función del consumo de alimentos) está dada por:

$$U_2 = {}^{1}\!/_{2}\sqrt{F_2}$$

a. Si los alimentos se distribuyen por igual entre los marineros ¿Cuánta utilidad recibirá cada uno?

b. ¿Cómo se deben distribuir los alimentos entre los marineros para garantizar una igualdad de utilidad?

c. ¿Cómo deben repartirse los alimentos desde el punto de vista del criterio utilitarista?

7. Suponga que la demanda de brécol es: Q = 1,000 – 5P donde Q es la cantidad anual expresada en cientos de quintales y P es el precio en pesos por cada 100 quintales. La curva de oferta a largo plazo de brécol es: Q = 4P – 80

Determinar:

a. El precio y la cantidad de equilibrio.

b. Gasto total en brécol

c. ¿Cuál es el excedente del consumidor en este equilibrio? ¿Y el excedente del productor?

d. ¿Cuánto excedente total del consumidor y del productor se perdería si $Q = 300$ en lugar de $Q = 400$?

*8.* La función indirecta de un consumidor es:

$$V(P,M) = \frac{M}{P_Y} + \frac{P_Y}{4P_X}$$

a. Derivar la demanda Marshalliana del bien $X$.

b. A partir del Teorema de Hotelling derivar la demanda hicksiana del bien X.

A partir de una situación inicial de equilibrio con una ingreso $M = 100$ y unos precios $P_X^0 = P_Y^0 = 1$ si se duplica el precio de $X$, determinar la variación del bienestar del consumidor.

9. Considere un consumidor con función de utilidad indirecta dada por:

$$V(P_1, P_2, M) = \frac{M}{P_2} - 2\left(\frac{P_1}{P_2}\right)^{1/2} \quad ; \; M \succ (P_1, P_2)^{1/2}$$

Inicialmente $M = 16$, $P_1 = 1$ y $P_2 = 1$. Suponga que debido a un impuesto $P_2$ aumenta hasta 4. Calcular

a. La variación compensada y la variación equivalente asociadas al aumento del precio, usando:

- La función indirecta de utilidad.

- La función de gasto.
- Las funciones de demanda compensadas.

b. La variación experimentada del excedente del consumidor.

c. La pérdida de eficiencia (deadweight loss) y el exceso de carga del impuesto. ¿Cómo procedería si sólo conociese las funciones de demanda marshallianas?

10. Suponiendo una economía en la cual existen dos factores de la producción, Capital ($K$) y Trabajo ($L$), los cuales se destinan a la producción de dos bienes ($X$) y ($Y$).

$$\bar{K} = K_X + K_Y \qquad \bar{L} = L_X + L_Y$$

La función de producción de cada uno de los bienes viene representada por

$$X = X\left(K_X, L_X\right) \qquad Y = Y\left(K_Y, L_Y\right)$$

La producción es distribuida entre dos consumidores ($A$ y $B$)

$$X = X_A + X_B \qquad Y = Y_A + Y_B$$

La cantidad que demanden de cada uno de los bienes va a depender de la utilidad que le brinde o proporcione cada uno de ellos.

$$U_A = U_A\left(X_A, Y_A\right) \qquad U_B = U_B\left(X_B, Y_B\right)$$

Obtener las condiciones de eficiencia del bienestar

## Unidad de competencia 5. Fallos en el Mercado: Externalidades y Bienes Públicos

1. Como ilustración de la externalidad manzana-abeja, suponga que un apicultor está ubicado cerca de un huerto de 20 hectáreas de extensión. Cada colmena de abejas poliniza ¼ de hectárea de manzanos, aumentando así el valor de la producción de manzanas en $25.

a. Suponga que el valor de mercado de la miel de una colmena es de $50 y que los costos marginales del apicultor es $CMg = 30 + 0.5Q$, donde $Q$ es el número de colmenas empleadas. En ausencia de negociación ¿Cuántas colmenas tendrá el apicultor y qué porción del huerto será polinizada?

b. ¿Cuál es la cantidad máxima por colmena que el propietario del cultivo pagaría al apicultor para inducirlo a instalar más colmenas?

2. Una empresa de una industria perfectamente competitiva ha patentado un nuevo proceso para fabricar ciertos artefactos. El nuevo proceso disminuye los costos medios de la empresa, lo que significa que sólo esta compañía (así sea tomadora de precios) puede recibir beneficios económicos reales a largo plazo.

a. Si el precio de mercado es de $20 por artefacto y la curva de costo marginal de la empresa está dada por $CMg = 0.4q$, donde $q$ es la producción diaria de artefactos de la empresa, ¿Cuántos dispositivos producirá la empresa?

b. Suponga que un estudio del gobierno ha encontrado que el nuevo proceso de la empresa contamina el aire y se estima que el costo marginal social de la producción de artefactos de esta empresa es $CMgS = 0.5q$. Si el precio de mercado sigue siendo $20, ¿Cuál es el nivel de producción socialmente óptimo de la empresa? Para lograr este nivel de producción óptimo, ¿Cuál debería ser el monto de un impuesto específico que fije el gobierno?

3. La red de transporte terrestre es una industria competitiva, cuya función de costos totales es

$$CT = 5Q^2 + 50Q + 1{,}400$$

Dicha industria contamina el aire, pero a la red de transporte no le importa, pues no ha de pagar nada por dicha contaminación, sabiendo que la valoración marginal de los consumidores de la red de transporte viene dada por la función de demanda

$$P = 150 - Q$$

a. Qué combinación de cantidad y precio debe venderse los boletos para encontrarse en equilibrio?

b. ¿Está incluido en el precio del boleto el costo social?

4. Un apicultor vive al lado de un manzanar, cuyo dueño se beneficia, porque cada colmena poliniza alrededor de una hectárea. Sin embargo, el dueño del manzanar no paga nada por este servicio, porque las abejas acuden al manzanar sin que tenga que hacer nada. No hay suficientes abejas para polinizar todo el manzano, por lo que su dueño debe completar la polinización por medios artificiales con un costo de 10 pesos por hectárea de árboles.

La apicultura tiene un costo marginal de $CMg = 10 + 2Q$, donde $Q$ es el número de colmenas. Cada colmena produce miel por valor de \$20.

a. ¿Cuántas colmenas mantendrá el apicultor?
b. ¿Es económicamente eficiente este número de colmenas?
c. ¿Qué cambios harían que esta actividad fuera más eficiente?

5. La demanda de osos de peluche está dada por $Q = 200 – 100P$ y estos se pueden fabricar con un $CMg = 0.50$

a. Cuánto estaría dispuesto a pagar en sobornos la empresa para que el gobierno le otorgué una concesión de monopolio
b. Este soborno representa un costo para el bienestar.

6. En una economía existe un bien público ($x_1$) y otro privado ($x_2$), dos consumidores ($A$ y $B$ con dos funciones de utilidad $U^A$ y $U^B$) y una función de transformación $F(x_1, x_2) = 0$
   a. Plantear el problema cuya solución proporcione la asignación óptima paretiana.
   b. Proporcione, para este caso, la condición de eficiencia paretiana
   c. ¿Qué igualdad cumplirían las relaciones marginales de sustitución en un equilibrio competitivo con precios $p_1$ y $p_2$?

7. Las funciones de demanda de un bien público que consumen dos individuos $A$ y $B$ son $Q^D = 40 – 2P_A$ y $Q^D = 30 – ½P_B$

Determinar:

a. La demanda conjunta del bien público
b. Cuál será la valoración social (Precio) de cada unidad del bien, si la provisión óptima es de 10 unidades
c. El precio máximo que estaría dispuesto a pagar cada individuo cuando se suministra el nivel óptimo del bien público

8. Diez consumidores homogéneos tienen todos ello unas curvas individuales de disposición a pagar $P = 12 – {}^1/_5q$ por el bien público: un concierto en un parque, donde $P$ esta expresado en Pesos y q representa el número de minutos que dura el concierto,
   a. Hallar y representar gráficamente la curva agregada de disposición a pagar
   b. En el caso de un concierto de 30 minutos, ¿Cuál es la cantidad máxima que estaría dispuesto a pagar cada uno?

Suponiendo que el costo marginal de proporcionar el concierto es $CMg = 2q$. Hallar la duración óptima del concierto

9. Suponga que la Frontera de Posibilidades de la producción de una economía que produce un bien público ($P$) y un bien privad ($G$) viene dada por

$$FPP \qquad G^2 + 100P^2 = 5{,}000$$

Esta economía está formada por 100 personas idénticas, cada una de las cuales tiene una función de utilidad de la forma

$$U = \sqrt{G_i P}$$

donde $G_i$ es la proporción de la producción de un bien privado correspondiente al individuo ($G_i = {}^G/_{100}$). Obsérvese que el bien público no es exclusivo y que todo el mundo se benefició por igual de su nivel de producción

a. Si el mercado de $G$ y $P$ fueran perfectamente competitivos, ¿Qué niveles de esos bienes se producirían? ¿Cuál sería la utilidad del individuo representativo de esa situación?
b. ¿Cuáles son los niveles óptimos de producción de $G$ y $P$? ¿Cuál sería el nivel de utilidad del individuo representativo? ¿Cómo debería gravarse el consumo del bien G para obtener ese resultado?

10. Suponga una economía donde existen dos consumidores, un bien privado ($x_1$) y un bien público ($x_2$). Las preferencias de los consumidores son idénticas y vienen representadas por la función de utilidad $U^i\left(x_1^i, x_2\right) = x_1^i x_2$ para $i = 1, 2$. Cada consumidor dispone de 45 unidades de $x_1$ como dotaciones iniciales que se utilizan para su consumo directo y para la producción del bien público $x_2$ de acuerdo con la siguiente función de producción $y_2 = ½\, y_1$, donde $y_2$ es la cantidad producida del bien público (es obvio que $y_2 = x_2$) e $y_1$ es la cantidad del bien $x_1$ utilizada como factor en la producción del bien público. Calcular:

a. La curva de transformación o frontera de posibilidades de la producción
b. Las cantidades de los bienes $x_1$ y $x_2$ óptimas
c. Las cantidades de los bienes de equilibrio general

# SOLUCIÓN A LOS EJERCICIOS PROPUESTOS

# UNIDAD DE COMPETENCIA 1. EL EQUILIBRIO DE MERCADO

1. **Partiendo de la función indirecta de utilidad**

$$V = \frac{8M^3}{27P_X P_Y^2}$$

**Obtener**

- **a. Las funciones de demanda ordinaria,**
- **b. La ecuación de gasto**
- **c. Las demandas compensadas,**

---

a. Para obtener las funciones de demanda ordinaria hacemos uso de la identidad de Roy, ya que esta identidad nos permite pasar de la función de utilidad indirecta a la demanda ordinaria a través de la siguiente expresión

$$X = -\frac{\frac{\partial V}{\partial P_X}}{\frac{\partial V}{\partial M}}$$

Así realizando las operaciones correspondientes

$$\frac{\partial V}{\partial P_X} = -\frac{8M^3}{27P_X^2 P_Y^2} \qquad \frac{\partial V}{\partial M} = \frac{24M^2}{27P_X P_Y^2}$$

De esta forma:

$$X = -\frac{\frac{\partial V}{\partial P_X}}{\frac{\partial V}{\partial M}} = -\frac{-\frac{8M^3}{27P_X^2 P_Y^2}}{\frac{24M^2}{27P_X P_Y^2}} = \frac{\left(8M^{\cancel{3}}\right)\left(\cancel{27}\,\cancel{P_X}\,\cancel{P_Y^2}\right)}{\left(24\cancel{M^2}\right)\left(\cancel{27}P_X^{\cancel{2}}\,\cancel{P_Y^2}\right)} = \frac{M}{3P_X}$$

Similarmente para $Y$

$$Y = -\frac{\frac{\partial V}{\partial P_Y}}{\frac{\partial V}{\partial M}}$$

$$\frac{\partial V}{\partial P_Y} = -\frac{16M^3}{27P_X P_Y^3} \qquad \frac{\partial V}{\partial M} = \frac{24M^2}{27P_X P_Y^2}$$

De esta forma:

$$Y = -\frac{\frac{\partial V}{\partial P_Y}}{\frac{\partial V}{\partial M}} = -\frac{-\frac{16M^3}{27P_X P_Y^3}}{\frac{24M^2}{27P_X P_Y^2}} = \frac{\left(16M^{\cancel{3}}\right)\left(\cancel{27}\,\cancel{P_X}\,\cancel{P_Y^2}\right)}{\left(24\cancel{M^2}\right)\left(\cancel{27}\,\cancel{P_X}\,P_Y^{\cancel{3}}\right)} = \frac{2M}{3P_Y}$$

b. Para obtener la función de gasto mínimo, dado que en equilibrio el ingreso es igual al gasto

$$V = \frac{8M^3}{27P_X P_Y^2} \rightarrow \frac{8E^3}{27P_X P_Y^2}$$

y dado que la función indirecta de utilidad y la ecuación de gasto son inversas:

$$V = \frac{8E^3}{27P_X P_Y^2} \rightarrow 27VP_X P_Y^2 = 8E^3 \rightarrow E = \left(\frac{27VP_X P_Y^2}{8}\right)^{1/3}$$

La cual solo simplificando $E = \frac{3}{2}\left(VP_X P_Y^2\right)^{1/3}$ Ecuación de gasto

c. Funciones de demanda compensadas (hicksianas)

Para ello hacemos uso del Lema de Shepard, el cual establece que derivando a la función de gasto con respecto al precio, obtendremos la demanda correspondiente

$$\frac{dE}{dP_i} = hx_i$$

Si $E = \frac{3}{2}\left(VP_X P_Y^2\right)^{1/3}$

Para el bien $1$

$$\frac{dE}{dP_X} = hx = \frac{1}{2}\left(VP_Y^2\right)^{1/3} P_X^{-2/3} = \left(\frac{VP_Y^2}{8P_X^2}\right)^{1/3} = h_X$$

Para el bien $2$

$$\frac{dE}{dP_Y} = h_Y = \left(VP_X\right)^{1/3} P_Y^{-1/3} = \left(\frac{VP_X}{P_Y}\right)^{1/3} = h_Y$$

2. **Partiendo de la función indirecta de utilidad $\boldsymbol{e^u = \frac{M^2}{4P_1P_2}}$, mostrar que se cumple**

a. **la identidad de Roy,**
b. **el Lema de Shepard**
c. **Las identidades en el equilibrio**

---

a. La identidad de Roy nos permite pasar de la función de utilidad indirecta a la demanda ordinaria y está dada por.

$$X_1 = -\frac{\frac{\partial V}{\partial P_1}}{\frac{\partial V}{\partial M}}$$

Realizando las operaciones correspondientes

$$\frac{\partial V}{\partial P_1} = \frac{\frac{-4M^2P_2}{(4P_1P_2)^2}}{\frac{M^2}{4P_1P_2}} = -\frac{4P_2}{4P_1P_2} = -\frac{1}{P_1}$$

$$\frac{\partial V}{\partial M} = \frac{\frac{2M}{4P_1P_2}}{\frac{M^2}{4P_1P_2}} = \frac{2M}{M^2} = \frac{2}{M}$$

De esta forma:

$$X_1 = -\frac{\frac{\partial V}{\partial P_1}}{\frac{\partial V}{\partial M}} = -\frac{-\frac{1}{P_1}}{\frac{2}{M}} = \frac{M}{2P_1}$$

**b.** El Lema de Shepard se obtiene aplicando el teorema de la envolvente a la función de mínimo costo o de gasto, vemos que

$$\frac{dE}{dP_i} = hx_i$$

Para ello requerimos la función de gasto, la cual se obtiene con solo despejar $M$ de la función indirecta de utilidad

$\boldsymbol{e^u = \frac{M^2}{4P_1P_2}}$**,** $\quad E = \sqrt{4e^u p_1 p_2}$

De esta forma realizando las operaciones correspondientes

$$\frac{dE}{dP_1} = \frac{1}{2}\frac{2e^{u/2}P_2^{1/2}}{P_1^{1/2}} = \frac{e^{u/2}P_2^{1/2}}{P_1^{1/2}} = \sqrt{\frac{e^u P_2}{P_1}} = e^{u/2}\sqrt{\frac{P_2}{P_1}} = hx_1$$

c. **Demostrar que en el equilibrio, las funciones de demanda ordinaria y compensada son iguales**

Esto se realiza a través de las identidades

$$X_i\left(P_1, P_2, M\right)\Big|_{M=E} \equiv hx_i$$

$$X_1\Big|_{M=E} = \frac{2e^{u/2}\sqrt{P_1P_2}}{2P_1} = e^{u/2}\sqrt{\frac{P_2}{P_1}} = hx_1$$

$$hx_i\left(P_1, P_2, U\right)\Big|_{u=v} \equiv X_i$$

$$hx_1\Big|_{u=v} = \sqrt{\frac{M^2}{4P_1P_2}}\sqrt{\frac{P_2}{P_1}} = \sqrt{\frac{M^2}{4P_1^2}} = \frac{M}{2P_1} = X_1$$

Con lo cual se establece que la función indirecta de utilidad cumple con las condiciones impuestas por la teoría.

3. **Dada la siguiente función de utilidad**

$$U = Lnx_1 + Lnx_2$$

**Determinar**

a. **Las funciones de demanda ordinarias**
b. **Función de demanda compensada**
c. **Funciones de demanda compensadas**
d. **La función de gasto del consumidor**
*e.* **Las comprobaciones correspondientes.**

---

a. Las funciones de demandas ordinarias las obtendremos a partir del problema primal: del problema de la maximización de la utilidad

$$\max \quad U = (X) = LnX_1 + LnX_2$$

$$s.a. \quad M = P_1X_1 + P_2X_2$$

Aplicamos la ley de la igualdad de las Utilidades Marginales Ponderadas o condición de primer orden (cpo)

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial U/\partial X_1}{\partial U/\partial X_2} = \dfrac{P_1}{P_2}\cdots \to \dfrac{\frac{1}{X_1}}{\frac{1}{X_2}} = \dfrac{X_2}{X_1} = \dfrac{P_1}{P_2}\cdots \to P_1X_1 = P_2X_2 \\ \text{Combinando con la restricción presupuestaria } M = P_1X_1 + P_2X_2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} X_1 = \dfrac{M}{2P_1} \\ X_2 = \dfrac{M}{2P_2} \end{array}$$

b. La Función indirecta de utilidad se obtiene sustituyendo la funciones de demanda ordinaria en la función de utilidad

$$U = Ln\left(\frac{M}{2P_1}\right) + Ln\left(\frac{M}{2P_2}\right)$$

$$U = Ln\left(\frac{M^2}{4P_1P_2}\right)\cdots \to e^u = \frac{M^2}{4P_1P_2}$$

c. Las funciones de demandas compensadas se obtienen a partir del problema dual

$$Min \quad P_1X_1 + P_2X_2$$

$$s.a \quad U(X) = LnX_1 + LnX_2$$

Al cual se aplica la ley de la igualdad de las Utilidades Marginales Ponderadas o *CPO*

$$\frac{\partial U/\partial X_1}{\partial U/\partial X_2} = \frac{P_1}{P_2}\cdots \to P_1X_1 = P_2X_2$$

Combinando con la función de utilidad (restricción).

$$U = LnX_1 + Ln\left(X_1\frac{P_1}{P_2}\right) = LnX_1 + LnX_1 + Ln\frac{P_1}{P_2}\cdots \to 2LnX_1 = U - Ln\frac{P_1}{P_2}$$

Eliminando el logaritmo:

$$X_1^2 = \frac{e^U}{\frac{P_1}{P_2}} = \frac{P_2}{P_1}e^U \cdots \to X_1 = \sqrt{\frac{P_2}{P_1}}e^{\frac{U}{2}}; \quad igualmente: \quad X_2 = \sqrt{\frac{P_1}{P_2}}e^{\frac{U}{2}}$$

b. Para obtener la función de Gasto, introduciremos las funciones de demandas compensadas en la Restricción presupuestaria:

$$M = E = P_1X_1 + P_2X_2 = P_1\sqrt{\frac{P_2}{P_1}}e^{\frac{U}{2}} + P_2\sqrt{\frac{P_1}{P_2}}e^{\frac{U}{2}} = 2\sqrt{P_1P_2}e^{\frac{U}{2}}$$

$$E = 2\sqrt{P_1P_2}e^{\frac{U}{2}}$$

c. **Realizando las comprobaciones correspondientes**

❖ **Identidad de Roy**

Esta identidad nos permite pasar de la función de utilidad indirecta a la demanda ordinaria a través de la expresión.

$$X_1 = -\frac{\frac{\partial V}{\partial P_1}}{\frac{\partial V}{\partial M}}$$

De esta forma realizando las operaciones correspondientes

$$\frac{\partial V}{\partial P_1} = \frac{\frac{-4M^2P_2}{(4P_1P_2)^2}}{\frac{M^2}{4P_1P_2}} = -\frac{4P_2}{4P_1P_2} = -\frac{1}{P_1}$$

$$\frac{\partial V}{\partial M} = \frac{\frac{2M}{4P_1P_2}}{\frac{M^2}{4P_1P_2}} = \frac{2M}{M^2} = \frac{2}{M}$$

De esta forma:

$$X_1 = -\frac{\frac{\partial V}{\partial P_1}}{\frac{\partial V}{\partial M}} = -\frac{-\frac{1}{P_1}}{\frac{2}{M}} = \frac{M}{2P_1}$$

- **Lema de Shepard**

Aplicando el teorema de la envolvente a la función de mínimo costo o de gasto, vemos que

$$\frac{dE}{dP_i} = hx_i$$

$$\frac{dE}{dP_1} = \frac{1}{2}\frac{2e^{u/2}P_2^{1/2}}{P_1^{1/2}} = \frac{e^{u/2}P_2^{1/2}}{P_1^{1/2}} = \sqrt{\frac{e^uP_2}{P_1}} = e^{u/2}\sqrt{\frac{P_2}{P_1}} = hx_1$$

- **En el equilibrio, las funciones de demanda ordinaria y compensada son iguales**

Esto se realiza a través de las identidades

b) $X_i\left(P_1, P_2, M\right)\Big|_{M=E} \equiv hx_i$

$$X_1\Big|_{M=E} = \frac{2e^{u/2}\sqrt{P_1P_2}}{2P_1} = e^{u/2}\sqrt{\frac{P_2}{P_1}} = hx_1$$

c) $hx_i\left(P_1, P_2, U\right)\Big|_{u=v} \equiv X_i$

$$hx_1\Big|_{u=v} = \sqrt{\frac{M^2}{4P_1P_2}}\sqrt{\frac{P_2}{P_1}} = \sqrt{\frac{M^2}{4P_1^2}} = \frac{M}{2P_1} = X_1$$

Comprobar si las demandas ordinarias cumplen las restricciones impuestas por la teoría.

- **Ley de Walras**

Verifiquemos que en equilibrio el ingreso es igual al gasto:

$$M = P_1X_1(P,M) + P_2X_2(P,M)$$

$$P_1\left(\frac{M}{2P_1}\right) + P_2\left(\frac{M}{2P_2}\right) = \frac{M}{2} + \frac{M}{2} = M \quad \text{Se cumple}$$

- **Homogeneidad de grado cero en (*P*,*M*)**

Comprobar que:

Siendo $X_i = X_i(P_1, P_2, M)$, se verifica : $X_i\lambda = \mathrm{X}_\mathrm{i}(\lambda P_1, \lambda P_2, \lambda M)$

Es cuestión de reemplazar precios y ingreso por un múltiplo de ellos mismos y verificar que se obtienen de nuevo las mismas funciones de demanda.

$$X_1 = X_1(P_1, P_2, M) = \frac{M}{2P_1} \cdots \rightarrow X_1(\lambda P_1, \lambda P_2, \lambda M) = \frac{\lambda M}{2\lambda P_1} = \frac{M}{2P_1}$$

$$X_2 = X_2(P_1, P_2, M) = \frac{M}{2P_2} \cdots \rightarrow X_2(\lambda P_1, \lambda P_2, \lambda M) = \frac{\lambda M}{2\lambda P_2} = \frac{M}{2P_2}$$

- **Agregación de Cournot**

Partiendo de la restricción presupuestaria, si la derivamos respecto de $p_j$ obtenemos: si cae el precio del bien 1 y la cantidad demandada del bien 2 no cambia, entonces el gasto en el bien 1 debe permanecer constante: si $p_1$ cae en *a%*, $x_1$ debe aumentar en el mismo *a%* (si no, no sería cierto que se gasta todo el ingreso, lo que no sería consistente con no saciedad).

Se trata de verificar que:

a) Al variar $P_1$: $\varepsilon_{X_1,P_1} \cdot S_1 + \varepsilon_{X_2,P_1} \cdot S_2 = -S_1$, veamos

$$\varepsilon_{X_1,P_1} = \frac{\partial X_1}{\partial P_1}\frac{P_1}{X_1} = \left(-\frac{2M}{4P_1^2}\right)\frac{P_1}{M/2P_1} = -1 \quad ; \quad \varepsilon_{X_2,P_1} = 0$$

$$\varepsilon_{X_1,P_1} \cdot S_1 + \varepsilon_{X_2,P_1} \cdot S_2 = (-1)S_1 + (0)S_2 = -S_1$$

Al variar P2: $\varepsilon_{X_1,P_2} \cdot S_1 + \varepsilon_{X_2,P_2} \cdot S_2 = -S_2$, veamos

$$\varepsilon_{X_2,P_2} = \frac{\partial X_2}{\partial P_2}\frac{P_2}{X_2} = \left(-\frac{2M}{4P_2^2}\right)\frac{P_2}{M/2P_2} = -1 \quad ; \quad \varepsilon_{X_1,P_2} = 0$$

$$\varepsilon_{X_1,P_2} \cdot S_1 + \varepsilon_{X_2,P_2} \cdot S_2 = (0)S_1 + (-1)S_2 = -S_2$$

b) $X_1 + \frac{dX_1}{dP_1}P_1 + \frac{dX_2}{dP_1}P_2 = 0 \Rightarrow$

$$X_1 - \frac{2M}{4P_1^2}P_1 + 0P_2 = X_1 - \underbrace{\frac{M}{2P_1}}_{X_1} = 0$$

$$X_2 + \frac{dX_1}{dP_2}P_1 + \frac{dX_2}{dP_2}P_2 = 0 \Rightarrow X_2 + 0P_1 - \frac{2M}{4P_2^2}P_2 = X_2 - \underbrace{\frac{M}{2P_2}}_{X_2} = 0$$

### ❖ Agregación de Engel

La suma ponderada de las elasticidades ingreso de los distintos bienes debe ser uno. Esto implica, por ejemplo, que no todos los bienes pueden ser neutros (la suma ponderada de las elasticidades sería cero). La intuición de este resultado es que si todos los bienes fueran neutros, diríamos que al aumentar el ingreso del individuo, no aumenta su consumo en ninguno de los bienes: es decir, si antes del cambio estaba gastando todo su ingreso, después del cambio le estará sobrando ingreso, lo que no es consistente con la no saciedad

Se trata de verificar que: $\varepsilon_{X_1,M}S_1 + \varepsilon_{X_2,M}S_2 = 1$

$$\varepsilon_{X_1,M} = \frac{\partial X_1}{\partial M}\frac{M}{X_1} = \left(\frac{1}{2P_1}\right)\frac{M}{M/2P_1} = 1 \quad ; \quad \varepsilon_{X_2,M} = \frac{\partial X_2}{\partial M}\frac{M}{X_2} = \left(\frac{1}{2P_2}\right)\frac{M}{M/2P_2} = 1$$

Si $S_1 = \frac{P_1X_1}{M}$ y $S_2 = \frac{P_2X_2}{M}$

$$\varepsilon_{X_1,M}S_1 + \varepsilon_{X_2,M}S_2 = 1\left(\frac{P_1X_1}{M}\right) + 1\left(\frac{P_2X_2}{M}\right) = \frac{P_1X_1 + P_2X_2}{M} = 1$$

### ❖ Simetría de los efectos sustitución cruzados.

Es decir, en las demandas compensadas los efectos cruzados son simétricos. En términos de elasticidades
Comprobar que: $S_{12} = S_{21}$
Pasemos a obtener los elementos de la matriz pedida. Sabemos que la derivada de la función de gasto con respecto a cada precio es la correspondiente demanda compensada o hicksiana.

$$E_1 = \frac{\partial E(P_1, P_2, U)}{\partial P_1} = h_{X_1}(P_1, P_2, U) \; ; \; h_{X_1} = e^{U/2}P_2^{1/2}P_1^{-1/2}$$

$$E_2 = \frac{\partial E(P_1, P_2, U)}{\partial P_2} = h_{X_2}(P_1, P_2, U) \; ; \; h_{X_2} = e^{U/2}P_1^{1/2}P_2^{-1/2}$$

Las derivadas segundas son los correspondientes efectos sustitución.

$$s_{11} = E_{11} = \frac{\partial E_1}{\partial P_1} = -\frac{1}{2}e^{U/2}P_2^{1/2}P_1^{-3/2} = -\frac{e^{U/2}P_1^{1/2}P_2^{1/2}}{2P_1^2} = -\frac{M/2}{2P_1^2} = -\frac{M}{4P_1^2} \prec 0$$

$$s_{22} = E_{22} = \frac{\partial E_2}{\partial P_2} = -\frac{1}{2}e^{U/2}P_1^{1/2}P_2^{-3/2} = -\frac{\overbrace{e^{U/2}P_1^{1/2}P_2^{1/2}}^{E/2}}{2P_2^2} = -\frac{M/2}{2P_2^2} = -\frac{M}{4P_2^2} \prec 0$$

$$s_{12} = s_{21} = \frac{\partial E_1}{\partial P_2} = \frac{\partial E_2}{\partial P_1} = \frac{1}{2} e^{U/2} P_1^{-1/2} P_2^{-1/2} = \frac{\overbrace{e^{U/2} P_1^{1/2} P_2^{1/2}}^{E/2}}{2P_1\, P_2} = -\frac{M/2}{2P_1\, P_2} = \frac{M}{4P_1\, P_2} \succ 0$$

Vamos ahora a la matriz

$$E_{11} = s_{11} = -\frac{M}{4P_1^2} \prec 0$$

$$\begin{vmatrix} E_{11} & E_{12} \\ E_{21} & E_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\dfrac{M}{4P_1^2} & \dfrac{M}{4P_1 P_2} \\ \dfrac{M}{4P_1 P_2} & -\dfrac{M}{4P_2^2} \end{vmatrix} = 0$$

Es semidefinida negativa

4. **Dada la siguiente Función Indirecta de Utilidad**

$$v=\frac{1}{4}\left(\frac{p_2}{cp_1}\right)+\frac{cM}{p_2}$$

**Determinar:**

a. **Las funciones de demanda ordinarias**
b. **La función de gasto**
c. **Las funciones de demanda compensadas**

---

a. Las funciones de demanda ordinaria las obtendremos a partir de la identidad de Roy:

$$X_1=-\frac{\frac{\partial V}{\partial P_1}}{\frac{\partial V}{\partial M}} \quad \text{y} \quad X_2=-\frac{\frac{\partial V}{\partial P_2}}{\frac{\partial V}{\partial M}}$$

Para $X_1$

$$\frac{\partial V}{\partial p_1}=\frac{-4cp_2}{\left(4cp_1\right)^2}=-\frac{p_2}{4cp_1^2} \qquad \frac{\partial V}{\partial M}=\frac{c}{P_2}$$

De esta forma:

$$X_1=-\frac{\frac{\partial V}{\partial P_1}}{\frac{\partial V}{\partial M}}=-\frac{-\frac{P_2}{4cP_1^2}}{\frac{c}{P_2}}=\frac{p_2^2}{4c^2p_1^2}=\left(\frac{p_2}{4c\ \ p_1}\right)^2$$

Para $X_2$

$$\frac{\partial V}{\partial p_2}=\frac{1}{4cp_1}-\frac{cM}{p_2^2}=\frac{p_2^2-4c^2Mp_1}{4cp_1p_2^2}=-\frac{\left(4c^2Mp_1-p_2^2\right)}{4cp_1p_2^2} \quad \text{y} \quad \frac{\partial V}{\partial M}=\frac{c}{P_2}$$

De esta forma:

$$X_2=-\frac{\frac{\partial V}{\partial P_2}}{\frac{\partial V}{\partial M}}=-\frac{-\frac{\left(4c^2Mp_1-p_2^2\right)}{4cp_1p_2^2}}{\frac{c}{P_2}}=\frac{P_2\left(4c^2Mp_1-p_2^2\right)}{4c^2p_1p_2^2}=\frac{4c^2Mp_1-p_2^2}{4c^2p_1p_2}$$

$$X_2=\frac{M}{p_2}-\frac{p_2}{4c^2p_1}$$

b. La función de gasto se obtiene a partir de la *FIU*

$$v=\frac{1}{4}\left(\frac{p_2}{cp_1}\right)+\frac{cM}{p_2}$$

Dado que en equilibrio $M = E$

$v-\frac{1}{4}\left(\frac{p_2}{cp_1}\right)=\frac{cE}{p_2}$ con lo cual $E=v\frac{p_2}{c}-\frac{1}{4}\left(\frac{p_2^2}{c^2p_1}\right)$ Ecuación de Gasto

c. Para obtener las funciones de demanda compensada hacemos uso del Lema de Shepard

Aplicando el teorema de la envolvente a la función de mínimo costo o de gasto, vemos que

$$\frac{dE}{dP_i}=hx_i$$

Por lo que realizando las operaciones para cada una de las variables

$$\frac{dE}{dp_1}=\frac{4c^2p_2^2}{\left(4c^2p_1\right)^2}=\frac{p_2^2}{4c^2p_1^{\ 2}}=hx_1$$

$$\frac{dE}{dp_2}=\frac{u}{c}-\frac{p_2}{4c^2p_1}=\frac{2ucp_1-p_2}{2c^2p_1}=hx_2$$

5. **Comprobar si las demandas ordinarias cumplen las restricciones impuestas por la teoría.**

$$X_1 = \left(\frac{p_2}{4c\ \ p_1}\right)^2 \quad \text{y} \quad X_2 = \frac{M}{p_2} - \frac{p_2}{4c^2 p_1}$$

---

- Ley de Walras

Verifiquemos que todo el ingreso se ocupa, o que el ingreso es igual al gasto: $M = P_1 X_1(P,M) + P_2 X_2(P,M)$

De esta forma sustituyendo las funciones de demanda ordinaria

$$p_1\left(\frac{p_2}{2cp_1}\right)^2 + p_2\left(\frac{M}{p_2} - \frac{p_2}{4c^2 p_1}\right) = \cancel{\frac{p_2^2}{4c^2 p_1}} + M - \cancel{\frac{p_2^2}{4c^2 p_1}} = M$$

Se cumple

- **Homogeneidad de grado cero en (*P,M*)**

Comprobar que:

$$\text{Siendo} \quad X_i = X_i(P_1, P_2, M), \quad \text{se verifica}: \ X_i\lambda = \mathrm{X_i}(\lambda P_1, \lambda P_2, \lambda M)$$

Es cuestión de reemplazar precios y ingreso por un múltiplo de ellos mismos y verificar que se obtienen de nuevo las mismas funciones de demanda.

$$X_1 = \left(\frac{p_2}{4c\ \ p_1}\right)^2 \rightarrow \ X_1(\lambda) = \left(\frac{\cancel{\lambda} p_2}{4c\ \cancel{\lambda} p_1}\right)^2 \frac{\lambda M}{2\lambda P_1} = \left(\frac{p_2}{4c\ \ p_1}\right)^2$$

$$X_2 = \frac{M}{p_2} - \frac{p_2}{4c^2 p_1} = \frac{\cancel{\lambda} M}{\cancel{\lambda} p_2} - \frac{\cancel{\lambda} p_2}{4c^2 \cancel{\lambda} p_1} = \frac{M}{p_2} - \frac{p_2}{4c^2 p_1}$$

- **Ley de Euler nos establece que al variar los precios y el ingreso en la misma magnitud el equilibrio no se modifica**

$$\frac{dx_1}{dp_1} p_1 + \frac{dx_1}{dp_2} p_2 + \frac{dx_1}{dM} M = 0$$

$$\frac{dx_1}{dp_1} = -\frac{p_2^2}{2c^2 p_1^3} \quad ; \quad \frac{dx_1}{dp_2} = \frac{p_2}{2c^2 p_1^2} \quad ; \quad \frac{dx_1}{dM} = 0$$

$$-\frac{p_2^2}{2c^2 p_1^3} p_1 + \frac{p_2}{2c^2 p_1^2} p_2 + 0M = -\frac{p_2^2}{2c^2 p_1^2} + \frac{p_2^2}{2c^2 p_1^2} = 0$$

- **Agregación de Cournot**

Se trata de verificar que:

a) Al variar P₁: $X_1 + \frac{dX_1}{dP_1} P_1 + \frac{dX_2}{dP_1} P_2 = 0$, De esta forma

$$x_1 + \frac{dx_1}{dp_1} p_1 + \frac{dx_2}{dp_1} p_2 = 0$$

$$\frac{dx_1}{dp_1} = -\frac{8c^2 p_1 p_2^2}{\left(4c^2 p_1^2\right)^2} = -\frac{1p_2^2}{2c^2 p_1^3}$$

$$\frac{dx_1}{dp_2} = \frac{4c^2 p_2}{\left(4c^2 p_1\right)^2} = \frac{p_2}{4c^2 p_1^2}$$

Sustituyendo en $X_1 + \frac{dX_1}{dP_1} P_1 + \frac{dX_2}{dP_1} P_2 = 0$

$$x_1 - \left(\frac{p_2^2}{2c^2 p_1^3}\right) p_1 + \left(\frac{p_2}{4c^2 p_1^2}\right) p_2 = 0$$

$$x_1 - \left(\frac{p_2^2}{2c^2 p_1^2}\right) + \left(\frac{p_2^2}{4c^2 p_1^2}\right) = 0 = x_1 - \underbrace{\left(\frac{p_2^2}{4c^2 p_1^2}\right)}_{x_1} = 0$$

Para el caso del bien 2

$$X_2 + \frac{dX_1}{dP_2} P_1 + \frac{dX_2}{dP_2} P_2 = 0$$

$$\frac{dx_1}{dp_2} = \frac{2p_2}{(2cp_1)^2} = \frac{p_2}{2c^2 p_1^2}$$

$$\frac{dx_2}{dp_2} = -\frac{M}{p_2^2} - \frac{1}{4c^2 p_1} == -\frac{M}{p_2^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2c^2 p_1}\right)$$

Sustituyendo en la condición

$$x_2 + \left(\frac{p_2}{2c^2 p_1^2}\right) p_1 + \left[-\frac{M}{p_2^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2c^2 p_1}\right)\right] p_2 = 0$$

$$x_2 + \left(\frac{p_2}{2c^2 p_1}\right) + \left[-\frac{M}{p_2} - \frac{1}{2}\left(\frac{p_2}{2c^2 p_1}\right)\right] = 0$$

$$x_2 + \frac{1}{2}\left(\frac{p_2}{2c^2 p_1}\right) - \frac{M}{p_2} = 0 = x_2 - \underbrace{\left[\frac{M}{p_2} - \frac{p_2}{4c^2 p_1}\right]}_{x_2} = 0$$

- **Agregación de Engel**

Se trata de verificar que: $\varepsilon_{X_1,M} S_1 + \varepsilon_{X_2,M} S_2 = 1$

$$\varepsilon_{X_1,M} = \frac{dx_1}{dM}\frac{M}{x_1} = 0$$

$$\varepsilon_{X_2,M} = \frac{dx_2}{dM}\frac{M}{x_2} = \frac{1}{p_2}\left(\frac{M}{\frac{4c^2 Mp_1 - p_2^2}{4c^2 p_1 p_2}}\right) = \frac{1}{\cancel{p_2}}\left(\frac{4Mc^2 p_1 \cancel{p_2}}{4c^2 Mp_1 - p_2^2}\right) = \frac{4Mc^2 p_1}{4c^2 Mp_1 - p_2^2}$$

Si $S_2 = \dfrac{p_2 x_2}{M}$

$$\varepsilon_{X_1,M} S_1 + \varepsilon_{X_2,M} S_2 = 0S_1 + \left(\frac{4Mc^2 p_1}{4c^2 Mp_1 - p_2^2}\right)\left(\frac{p_2 x_2}{M}\right)$$

Si multiplicamos a toda la expresión por $\dfrac{p_2}{p_2}$ esta no se alterara

$$\left(\frac{M}{p_2}\underbrace{\frac{4c^2 p_1 p_2}{4c^2 Mp_1 - p_2^2}}_{\frac{1}{x_2}}\right)\left(\frac{p_2 x_2}{M}\right) = \frac{\cancel{M}}{\cancel{p_2}}\frac{1}{\cancel{x_2}}\frac{\cancel{p_2}\cancel{x_2}}{\cancel{M}} = 1$$

- **Simetría de los efectos sustitución cruzados.**

Es decir, en las demandas compensadas los efectos cruzados son simétricos. Comprobar que: $S_{12} = S_{21}$ Si las derivadas segundas son los correspondientes efectos sustitución.

$$E_{11} = \frac{dE_1}{dp_1} = -\frac{p_2^2\left(8c^2 p_1\right)}{\left(4c^2 p_1^2\right)^2} = -\frac{p_2^2}{2c^2 p_1^3}$$

$$E_{12} = \frac{dE_1}{dp_2} = \frac{2p_2}{4c^2 p_1^2} = \frac{p_2}{2c^2 p_1^2}$$

$$E_{21} = \frac{dE_2}{dp_1} = \frac{p_2}{4c^2 p_1^2}$$

$$E_{22} = \frac{dE_2}{dp_2} = -\frac{1}{4c^2 p_1}$$

$$E = \begin{vmatrix} E_{11} & E_{12} \\ E_{21} & E_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\dfrac{p_2^2}{2c^2 p_1^3} & \dfrac{p_2}{2c^2 p_1^2} \\ \dfrac{p_2}{4c^2 p_1^2} & -\dfrac{1}{4c^2 p_1} \end{vmatrix} = 0$$

$$|E| = \left(-\frac{p_2^2}{2c^2 p_1^3} \times -\frac{1}{4c^2 p_1}\right) - \left(\frac{p_2}{4c^2 p_1^2} \times \frac{p_2}{2c^2 p_1^2}\right) = \frac{p_2^2}{8c^4 p_1^4} - \frac{p_2^2}{8c^4 p_1^4} = 0$$

Es semidefinida negativa

**6. Partiendo de la función de producción**

$$Y = X_1^{1/2} + X_2^{1/2}$$

**Obtener las funciones de demanda de los factores, la función de producción, la función de ingreso total, la función de costos y la función de beneficios**

Primero se formula la función de beneficios

$$\Pi = PX_1^{1/2} + PX_2^{1/2} - W_1X_1 - W_2X_2$$

Derivando Con respecto a las dos variables

$$\frac{d\Pi}{dX_1} = 1\!/\!2\, PX_1^{-1/2} - W_1 = 0$$

$$\frac{d\Pi}{dX_2} = 1\!/\!2\, PX_2^{-1/2} - W_2 = 0$$

De la primera ecuación obtenemos la función de demanda

$$\frac{P}{2X_1^{1/2}} = W_1 \cdots \to X_1^d = \frac{P^2}{4W_1^2}$$

De la segunda ecuación

$$\frac{P}{2X_2^{1/2}} = W_2 \cdots \to X_2^d = \frac{P^2}{4W_2^2}$$

Para obtener la función de producción se sustituyen las dos funciones de demanda en la función de producción original

$$Y = \frac{P}{2}\left(\frac{W_1 + W_2}{W_1W_2}\right)$$

Para obtener la función de Ingreso Total se multiplica la función de producción por el precio

La forma de obtener la función de Costo Total es sustituir las funciones de demanda en la restricción de costos

$$CT = W_1X_1 + W_2X_2$$

$$CT = W_1\left(\frac{P^2}{4W_1^2}\right) + W_2\left(\frac{P^2}{4W_2^2}\right) = \frac{P^2}{4W_1} + \frac{P^2}{4W_2}$$

$$CT = \frac{P^2}{4}\left(\frac{1}{W_1} + \frac{1}{W_2}\right) = \frac{P^2}{4}\left(\frac{W_1 + W_2}{W_1W_2}\right)$$

Obteniendo la función de beneficios

$$\Pi = IT - CT = \frac{P^2}{2}\left(\frac{W_1 + W_2}{W_1W_2}\right) - \frac{P^2}{4}\left(\frac{W_1 + W_2}{W_1W_2}\right)$$

**7. Partiendo de la siguiente función de beneficios:**

$$\Pi(P,W_1,W_2)=\frac{P^2(W_1+W_2)}{4W_1W_2}$$

**a. Obtener las demandas de inputs**
**b. Obtener la función de oferta del output**
**c. Obtener las demandas condicionadas de los inputs**
**d. la función de costos**
e. **la función de producción**

---

a. *Se trata de obtener las demandas de inputs*

$$X_1^d(P,W_1,W_2) \quad ; \quad X_2^d(P,W_1,W_2)$$

Para trabajar más cómodamente, expresaremos la función de beneficios de otra manera, a saber:

$$\Pi(P,W_1,W_2)=\frac{P^2(W_1+W_2)}{4W_1W_2}=\frac{P^2}{4}\left(\frac{1}{W_1}+\frac{1}{W_2}\right)=\frac{P^2}{4W_1}+\frac{P^2}{4W_2}$$

Y ahora, aplicando el Lema de Hotelling.

$$X_1^d=-\frac{\partial\Pi(P,W_1,W_2)}{\partial W_1}=-\left[\frac{P^2}{4}\left(-\frac{1}{W_1^2}\right)\right]=\frac{P^2}{4W_1^2}$$

$$X_2^d=-\frac{\partial\Pi(P,W_1,W_2)}{\partial W_2}=-\left[\frac{P^2}{4}\left(-\frac{1}{W_2^2}\right)\right]=\frac{P^2}{4W_2^2}$$

**b. Obtener la función de oferta del output** ***, se trata de*** **obtener la función:** $Y=Y(P,W_1,W_2)$

De nuevo aplicamos el Lema de Hotelling.

$$Y=\frac{\partial\Pi(P,W_1,W_2)}{\partial P}=\frac{2P(W_1+W_2)}{4W_1W_2}=\frac{P(W_1+W_2)}{2W_1W_2}$$

**c. Obtener las demandas condicionadas de los inputs, se trata de obtener las funciones:**

$$X_1^C(Y,W_1,W_2) \quad ; \quad X_2^C(Y,W_1,W_2)$$

A partir de la función de oferta obtenida, despejando el precio:

$$Y=\frac{P(W_1+W_2)}{2W_1W_2}\cdots\rightarrow P=\frac{2W_1W_2}{W_1+W_2}Y$$

Y llevando este precio a las demandas obtenidas inicialmente:

$$X_1^C=\frac{P^2}{4W_1^2}=\frac{1}{4W_1^2}\left(\frac{2W_1W_2}{W_1+W_2}Y\right)^2=\left(\frac{W_2}{W_1+W_2}Y\right)^2$$

$$X_2^C=\frac{P^2}{4W_2^2}=\frac{1}{4W_2^2}\left(\frac{2W_1W_2}{W_1+W_2}Y\right)^2=\left(\frac{W_1}{W_1+W_2}Y\right)^2$$

*d.* **Para obtener la función de costos, se trata de obtener la función:** ***CT(W₁,W₂,Y)***

operando:

$$CT(W_1,W_2,Y)=W_1X_1^C+W_2X_2^C$$

$$CT(W_1,W_2,Y)=W_1\left(\frac{W_2}{W_1+W_2}Y\right)^2+W_2\left(\frac{W_1}{W_1+W_2}Y\right)^2=\left[\frac{W_1W_2^2+W_2W_1^2}{(W_1+W_2)^2}\right]Y^2$$

$$CT(W_1,W_2,Y)=\left[\frac{W_1W_2^2+W_2W_1^2}{(W_1+W_2)^2}\right]Y^2=\frac{W_1W_2}{W_1+W_2}Y^2$$

**e. Obtener la función de producción, le damos "la vuelta" a la función de costos**

$$Y=\left(\frac{W_1+W_2}{W_1W_2}CT\right)^{1/2}$$

La función obtenida tiene la forma de una función "indirecta" de producción, ya que la cantidad de producto depende del precio de los inputs y del coste en el que queramos incurrir.

El problema que tenemos que resolver es:

$$\min_{(W_1,W_2)}\left(\frac{W_1+W_2}{W_1W_2}CT\right)^{1/2}$$

$$s.a.\quad CT=W_1X_1+W_2X_2$$

Formaremos el correspondiente lagrangiano:

$$L=\left(\frac{W_1+W_2}{W_1W_2}CT\right)^{1/2}-\lambda\left(CT-W_1X_1+W_2X_2\right)$$

las condiciones de primer orden son:

$$\frac{\partial L}{\partial W_1}=0\quad;\quad\frac{\partial L}{\partial W_2}=0\quad;\quad\frac{\partial L}{\partial\lambda}=0$$

*Para ganar tiempo, sugerimos obviar lo anterior y resolver el sistema:*

$$\begin{cases}\dfrac{\partial Y/\partial W_1}{\partial Y/\partial W_2}=\dfrac{X_1}{X_2}\\ CT=W_1X_1+W_2X_2\end{cases}$$

Vamos a operar:

$$\frac{\partial Y/\partial W_1}{\partial Y/\partial W_2}=\frac{X_1}{X_2}\cdots\to\frac{\cancel{\frac{1}{2}\left(\frac{W_1+W_2}{W_1W_2}CT\right)^{-1/2}}\left[\frac{W_1W_2-W_2\left(W_1+W_2\right)}{\cancel{\left(W_1+W_2\right)^2}}\xcancel{CT}\right]}{\cancel{\frac{1}{2}\left(\frac{W_1+W_2}{W_1W_2}CT\right)^{-1/2}}\left[\frac{W_1W_2-W_1\left(W_1+W_2\right)}{\cancel{\left(W_1+W_2\right)^2}}\xcancel{CT}\right]}=\frac{W_2^2}{W_1^2}=\frac{X_1}{X_2}$$

$$\frac{W_2}{W_1}=\left(\frac{X_1}{X_2}\right)^{1/2}$$

Entramos con esta última relación en la segunda de las ecuaciones:

$$CT=W_1X_1+W_2X_2=W_1X_1+W_1\left(\frac{X_1}{X_2}\right)^{1/2}X_2=W_1\left(X_1+X_1^{1/2}X_2^{1/2}\right)$$

$$W_1=\frac{CT}{X_1+X_1^{1/2}X_2^{1/2}}\quad;\ \text{igualmente}\quad W_2=\frac{CT}{X_1+X_1^{1/2}X_2^{1/2}}$$

El último paso es llevar estos valores a la función "indirecta" de producción.

$$Y=\left(\frac{W_1+W_2}{W_1W_2}CT\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\frac{CT}{W_2}+\frac{CT}{W_1}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$Y=\left(\frac{CT}{\frac{CT}{X_2+\sqrt{X_1X_2}}}+\frac{CT}{\frac{CT}{X_1+\sqrt{X_1X_2}}}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(X_2+2\sqrt{X_1X_2}+X_1\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$Y=\left[\left(\sqrt{X_1}+\sqrt{X_2}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}\cdots\to Y=X_1^{1/2}+X_2^{1/2}$$

**8. Partiendo de la siguiente función de beneficios**

$$\Pi = \frac{200P^2}{r^{1/2}w^{1/2}}$$

**Determinar las funciones de demanda de los insumos Capital (*K*) y Trabajo (*L*) y la función de oferta**

- A través del Lema de Hotelling

$$-\frac{d\Pi}{dw} = L = -\frac{\left(-200P^2\right)\left(\frac{1}{2}r^{1/2}w^{-1/2}\right)}{\left(r^{1/2}w^{1/2}\right)^2} = \frac{100P^2}{r^{1/2}w^{3/2}} = L$$

$$-\frac{d\Pi}{dr} = K = -\frac{\left(-200P^2\right)\left(\frac{1}{2}r^{-1/2}w^{1/2}\right)}{\left(r^{1/2}w^{1/2}\right)^2} = \frac{100P^2}{r^{3/2}w^{1/2}} = K$$

- Determinar la función de oferta

A través del Lema de Hotelling

$$\frac{d\Pi}{dP} = q = 2P\left(\frac{200}{r^{1/2}w^{1/2}}\right) = \frac{400P}{r^{1/2}w^{1/2}} = q$$

**9. Partiendo de los resultados del ejercicio anterior determinar las funciones de demanda condicionada de los factores, y la función de costo mínimo.**

- **Partiendo de la función de oferta anterior obtener las funciones de demanda condicionada de los factores Capital ($K$) y Trabajo ($L$)**

Si $q = \frac{400P}{r^{1/2}w^{1/2}}$ despejamos para $P$ $P = \frac{r^{1/2}w^{1/2}}{400}q$ y se sustituye en las funciones de demanda de los insumos Capital ($K$) y Trabajo ($L$)

Para $L = \frac{100P^2}{r^{1/2}w^{3/2}} = \frac{100}{r^{1/2}w^{3/2}}P^2$

$$L^c = \frac{100}{r^{1/2}w^{3/2}}\left(\frac{r^{1/2}w^{1/2}}{400}q\right)^2 = \frac{r^{1/2}}{1,600w^{1/2}}q^2$$

Para $K$ $\quad K = \frac{100P^2}{r^{3/2}w^{1/2}} = \frac{100}{r^{3/2}w^{1/2}}P^2$

$$K^c = \frac{100}{r^{3/2}w^{1/2}}\left(\frac{r^{1/2}w^{1/2}}{400}q\right)^2 = \frac{w^{1/2}}{1,600r^{1/2}}q^2$$

- **Determinar la función de costo mínimo**

Se obtiene sustituyendo las funciones de demanda condicionadas en la función de costo

$$CT = rK + wL = r\left(\frac{w^{1/2}}{1,600r^{1/2}}q^2\right) + w\left(\frac{r^{1/2}}{1,600w^{1/2}}q^2\right)$$

$$CT = \frac{r^{1/2}w^{1/2}}{1,600}q^2 + \frac{r^{1/2}w^{1/2}}{1,600}q^2 = \frac{2r^{1/2}w^{1/2}}{1,600}q^2$$

$$CT = \frac{r^{1/2}w^{1/2}}{800}q^2$$

### 10. Partiendo de la función de costo mínimo obtenida en el ejercicio anterior, determinar la función de producción original.

De la función de costo mínimo $CT = \frac{r^{1/2}w^{1/2}}{800}q^2$ despejamos a $q$

$$q = \frac{\left(800CT\right)^{1/2}}{r^{1/4}w^{1/4}}$$

Con base a esta última función se plantea el problema

$$\min \quad q = \frac{\left(800CT\right)^{1/2}}{r^{1/4}w^{1/4}}$$

$$s.a \quad CT = rK + wL$$

C.P.O. $\frac{\frac{dq}{dw}}{\frac{dq}{dr}} = \frac{L}{K}$

De esta forma:

$$\frac{\frac{dq}{dw}}{\frac{dq}{dr}} = \frac{-\cancel{\frac{1}{4}}\frac{\left(800CT\right)^{1/2}}{r^{1/4}w^{5/4}}}{-\cancel{\frac{1}{4}}\frac{\left(800CT\right)^{1/2}}{r^{5/4}w^{1/4}}} = \frac{\cancel{\left(800CT\right)^{1/2}}\, r^{5/4}w^{1/4}}{\cancel{\left(800CT\right)^{1/2}}\, r^{1/4}w^{5/4}} \Rightarrow \frac{r}{w} = \frac{L}{K}$$

Despejando para r

$$rK = wL \to r = w\frac{L}{K}$$

Sustituyendo en la restricción

$$CT = wL + wL = 2wL \qquad \Rightarrow \qquad w = \frac{CT}{2L}$$

Para $r$

$$r = \frac{CT}{2\cancel{L}}\frac{\cancel{L}}{K} = \frac{CT}{2K}$$

Sustituyendo el valor de $w$ y $r$ en la función objetivo

$$q = \frac{\left(800CT\right)^{1/2}}{r^{1/4}w^{1/4}} = \frac{\left(800CT\right)^{1/2}}{\left(\frac{CT}{2L}\right)^{1/4}\left(\frac{CT}{2K}\right)^{1/4}} = \frac{\left(800CT\right)^{1/2}}{\left(\frac{CT}{2}\right)^{1/2}\left(\frac{1}{LK}\right)^{1/4}}$$

$$q = \frac{\left(800CT\right)^{1/2}}{\left(\frac{CT}{2}\right)^{1/2}\left(\frac{1}{LK}\right)^{1/4}} = \frac{800^{1/2}\,\cancel{CT^{1/2}}\,2^{1/2}L^{1/4}K^{1/4}}{\cancel{CT^{1/2}}} = \left(800\times 2\right)^{1/2}L^{1/4}K^{1/4}$$

$$q = 40L^{1/4}K^{1/4}$$

Función de producción original

# UNIDAD DE COMPETENCIA 2.

# EL EQUILIBRIO GENERAL EN UNA ECONOMIA DE INTERCAMBIO PURO

1. **Considere una economía en la que hay 50 unidades del bien 1 y 100 del bien 2 para repartir entre las personas *A* y *B*, cuyas preferencias están dadas por:**

$$U^A = MIN\left\{X_1^A, X_2^A\right\}$$

$$U^B = X_1^B + ln\, X_2^B$$

**Encuentre el conjunto de asignaciones eficientes y verifique que si las dotaciones iníciales son**

| | $X_1$ | $X_2$ |
|---|---|---|
| $A$ | 0 | 100 |
| $B$ | 50 | 0 |

**se alcanza un equilibrio walrasiano cuando la relación de precios** $\frac{P_1}{P_2} = 99$

Debido a la "rigidez" de las preferencias de *A*, es necesario para la eficiencia que $X_1^A = X_2^A$ .Esto es posible para $X_1^A \leq 50$. Por otra parte, un $X_2^A \geq 50$ no es óptimo porque la utilidad marginal de este bien es 0 para *A*, mientras que para *B* es siempre positiva, de manera que se puede mejorar a *B* sin disminuir la de *A*.

Entonces, las asignaciones eficientes $\left(X_1^A, X_2^A, X_1^B, X_2^B\right)$ satisfacen:

$$\left\{X_1^A = X_2^A, X_2^A = 10 - X_2^B, X_1^B = 50 - X_1^A, X_1^A \leq 50\right\}$$

**Verificando que si con las dotaciones iníciales se alcanza un equilibrio walrasiano cuando la relación de precios** $\frac{P_1}{P_2} = 99$

Las demandas de *A* están dadas por

$$X_1^A = X_2^A$$

$$M = P_1 X_1^A + P_2 X_2^A \quad \Rightarrow X_1^A = \frac{M}{P_1 + P_2} \quad , \quad X_2^A = \frac{M}{P_1 + P_2}$$

mientras que las de *B* por

$$\frac{1}{\frac{1}{X_2^B}} = \frac{P_1}{P_2}$$

$$M = P_1 X_1^B + P_2 X_2^B \quad \Rightarrow X_1^B = \frac{M - P_1}{P_1} \quad , \quad X_2^B = \frac{P_1}{P_2}$$

De manera que la condición de equilibrio en el mercado 2 (por ley de Walras, esta condición es equivalente a la de equilibrio en el mercado 1) es:

$$\frac{M/P_2}{\frac{P_1}{P_2}+1} + \frac{P_1}{P_2} = 100 \quad \text{Si } \frac{P_1}{P_2} = 99,\ X_2^A = \frac{M/P_2}{\frac{P_1}{P_2}+1} = \frac{100}{99+1} = 1 \quad \text{y}$$

$X_2^B = \frac{P_1}{P_2} = 99$ , de manera que el mercado se equilibra

**2. Sea una economía de intercambio puro con dos consumidores y dos bienes, Las funciones de utilidad de los consumidores son:**

$$U_1\left(x^1\right)=x_{11}^{2/3}x_{12}^{1/3} \qquad U_2\left(x^2\right)=x_{21}^{1/3}x_{22}^{2/3}$$

**El consumidor 1 tiene una dotación inicial de $w^1 = (300, 700)$ unidades, y el consumidor 2 de $w^2 = (700, 300)$ unidades. Calcular Las funciones de demanda de cada consumidor**

---

El consumidor 1 se enfrenta al problema de maximizar su utilidad dada su restricción presupuestaria, esto es:

$$\left.\begin{array}{l} Max \;\; U_1\left(x^1\right)=x_{11}^{2/3}x_{12}^{1/3} \\ s.a \quad p_1x_{11}+p_2x_{12}=300p_1+700p_2 \end{array}\right\}$$

$$L(.)=x_{11}^{2/3}x_{12}^{1/3}-\lambda\left[p_1x_{11}+p_2x_{12}-300p_1-700p_2\right]$$

La $CPO$ de este problema es:

$$TMgS^1=\left.\frac{UMgX_1}{UMgX_2}\right|_1=\frac{p_1}{p_2}$$

Por lo que

$$TMgS^1=\left.\frac{UMgX_1}{UMgX_2}\right|_1=\frac{p_1}{p_2} \qquad \rightarrow \qquad \frac{2x_{12}}{x_{11}}=\frac{p_1}{p_2}$$

Despejando

$$x_{12}=\frac{p_1x_{11}}{2p_2}$$

Sustituyendo en la restricción

$$p_1x_{11}+\cancel{p_2}\left(\frac{p_1x_{11}}{2\cancel{p_2}}\right)=300p_1+700p_2$$

$$\frac{3p_1x_{11}}{2}=300p_1+700p_2$$

$$x_{11}=\frac{600p_1+1,400p_2}{3p_1}=\frac{2}{3}\left(\frac{300p_1+700p_2}{p_1}\right)$$ Función de demanda del consumidor 1 por el bien 1

Para $x_{12}$

$$x_{12}=\frac{\cancel{p_1}}{2p_2}\left(\frac{600p_1+1,400p_2}{3\cancel{p_1}}\right)$$

$$x_{12}=\left(\frac{300p_1+700p_2}{3p_2}\right)=\frac{1}{3}\left(\frac{300p_1+700p_2}{p_2}\right)$$ Función de demanda del consumidor 1 por el bien 2

Por su parte, el consumidor 2 se enfrenta a un problema similar de maximización condicionada, el cual es:

$$\left.\begin{array}{l} Max \;\; U_2\left(x^2\right)=x_{21}^{1/3}x_{22}^{2/3} \\ s.a \quad p_1x_{21}+p_2x_{22}=700p_1+300p_2 \end{array}\right\}$$

$$L(.)=x_{21}^{1/3}x_{22}^{2/3}-\lambda\left[p_1x_{21}+p_2x_{22}-700p_1-300p_2\right]$$

La $CPO$ de este problema es:

$$TMgS^2=\left.\frac{UMgX_1}{UMgX_2}\right|_2=\frac{p_1}{p_2}$$

Por lo que

$$TMgS^2=\left.\frac{UMgX_1}{UMgX_2}\right|_2=\frac{p_1}{p_2} \qquad \rightarrow \qquad \frac{x_{22}}{2x_{21}}=\frac{p_1}{p_2}$$

Despejando

$$x_{22}=\frac{2p_1x_{21}}{p_2}$$

Sustituyendo en la restricción

$$p_1 x_{21} + \cancel{p_2}\left(\frac{2p_1 x_{21}}{\cancel{p_2}}\right) = 700p_1 + 300p_2$$

$$3p_1 x_{21} = 700p_1 + 300p_2$$

$$x_{21} = \frac{700p_1 + 300p_2}{3p_1} = \frac{1}{3}\left(\frac{700p_1 + 300p_2}{p_1}\right)$$ Función de demanda del consumidor 2 por el bien 1

Para $x_{22}$

$$x_{22} = \frac{2\cancel{p_1}}{p_2}\left(\frac{700p_1 + 300p_2}{3\cancel{p_1}}\right)$$

$$x_{22} = \left(\frac{1,400p_1 + 600p_2}{3p_2}\right) = \frac{2}{3}\left(\frac{700p_1 + 300p_2}{p_2}\right)$$ Función de demanda del consumidor 1 por el bien 2

**3. Sea una economía de intercambio puro con dos consumidores y dos bienes, Las funciones de utilidad de los consumidores son:**

$$U_1\left(x^1\right)=x_1^1x_2^1+12x_1^1+3x_2^1 \quad \textbf{y}$$

$$U_2\left(x^2\right)=x_1^2x_2^2+8x_1^2+9x_2^2$$

**El consumidor 1 tiene una dotación inicial de 38 unidades de $x_1$ y 0 de $x_2$, y el consumidor 2 de 0 unidades del bien $x_1$ y 20 de $x_2$. Calcular la curva de contrato**

La determinación de la curva de contrato está dada a través de la condición de eficiencia en el consumo la cual viene dada por la tangencia de las curvas de indiferencia, es decir de la igualdad de las tasas marginales de sustitución de ambos consumidores:

$$TMgS^1=\left.\frac{UMgX_1}{UMgX_2}\right|_1=\left.\frac{UMgX_1}{UMgX_2}\right|_2=TMgS^2$$

De esta forma: $\dfrac{x_{12}+12}{x_{11}+3}=\dfrac{x_{22}+8}{x_{21}+9}$

Expresión en la cual observamos cuatro variables, por lo cual es necesario homogenizar, para ello hacemos uso de las dotaciones iníciales, de tal forma que:

$x_{11}+x_{21}=38 \quad \rightarrow \quad x_{21}=38-x_{11}$

$x_{12}+x_{22}=20 \quad \rightarrow \quad x_{22}=20-x_{12}$

Sustituyendo dichas expresiones en tasa marginal de sustitución del consumidor 2.

$$\frac{x_{12}+12}{x_{11}+3}=\frac{20-x_{12}+8}{38-x_{11}+9}=\frac{28-x_{12}}{47-x_{11}}$$

Realizando las operaciones correspondientes de multiplicación y simplificación

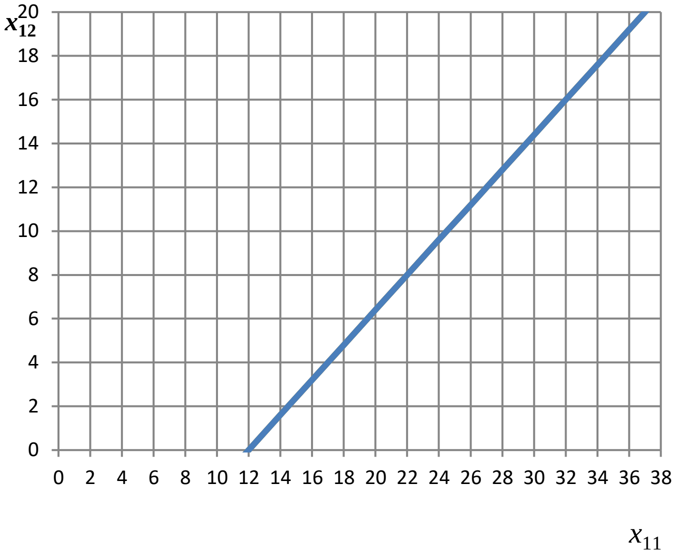
$$\left(x_{12}+12\right)\left(47-x_{11}\right)=\left(x_{11}+3\right)\left(28-x_{12}\right)$$

$$47x_{12}-\cancel{x_{11}x_{12}}+564-12x_{11}=28x_{11}+84-\cancel{x_{11}x_{12}}-3x_{12}$$

$$50x_{12}=40x_{11}-480 \qquad x_{12}=\frac{40x_{11}-480}{50}$$

Curva de Contrato

Su gráfica se obtiene de la tabulación de dicha expresión



**4. Consideramos dos consumidores de dos bienes, agua y ketchup. El precio del agua es $p_x$ y el precio del ketchup es $p_y$. Sus utilidades son:**

$$u_i(x,y)=x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{2}{3}} \quad \textbf{y} \quad u_j(x,y)=10x^{\frac{3}{4}}y^{\frac{1}{3}}$$

**donde $x$ es la cantidad de agua y $y$ la cantidad de ketchup que consumen.**
**Supongamos que las dotaciones iniciales de los agentes *i* y *j* son respectivamente**

$$w_i = (3, 1) \quad w_j = (2, 10)$$

**Calcular el equilibrio Walrasiano.**

---

Para calcular el equilibrio walrasiano necesitamos las demandas Marshallianas.

De da derivación de demandas Marshallianas de una función Cobb Douglas sabemos que son:

$$x(P,M)=\frac{\alpha M}{(\alpha+\beta)P_X} \quad \text{y} \quad y(P,M)=\frac{\beta M}{(\alpha+\beta)P_Y}$$

En este caso para el consumidor *i* $(\alpha,\beta)$ = ( ½ , $^2/_3$ ) y para *j* $(\alpha, \beta)$ = ( ½ , $^2/_3$ ). De esta forma, las demandas Marshallianas son:

$$x_i(P,M)=\frac{3(3P_X+P_Y)}{7P_X} \qquad x_J(P,M)=\frac{18(P_X+5P_Y)}{13P_X}$$

$$y_i(P,M)=\frac{4(3P_X+P_Y)}{7P_Y} \qquad y_J(P,M)=\frac{8(P_X+5P_Y)}{13P_Y}$$

Entonces las demandas netas son:

$$x(P)=\frac{669P_Y-212P_X}{91P_X}$$

$$x(P)=\frac{212P_x-669P_Y}{91P_Y}$$

Normalizando el $P_Y$ = 1, obtenemos como precios de equilibrio:

$$\frac{669-212P_X}{91P_X}=0$$

$$P_X^*=\frac{669}{212} \qquad P_Y^*=1$$

5. **Sea una economía de intercambio puro con dos consumidores y dos bienes. Las funciones de utilidad de los consumidores son:**

$$u^1 = 4x_{11}^{1/3}x_{12}^{1/2} \qquad u^2 = 3x_{21}^{1/2}x_{22}^{1/2}$$

**Determinar la curva de contrato**

---

La condición para la obtención de la curva de contrato es
*TMgS*$^1$ = *TMgS*$^2$

De esta forma, calculando la tasa marginal de sustitución del consumidor 1

$$TMgS^1 = \frac{UMgx_{11}}{UMgx_{12}} = \frac{\dfrac{\partial u^1}{\partial x_{11}}}{\dfrac{\partial u^1}{\partial x_{12}}} = \frac{\dfrac{4}{3}x_{11}^{-2/3}x_{12}^{1/2}}{\dfrac{4}{2}x_{11}^{1/3}x_{12}^{-1/2}} = \frac{4x_{12}^{1/2}x_{12}^{1/2}}{6x_{11}^{1/3}x_{11}^{2/3}} = \frac{2x_{12}}{3x_{11}}$$

Calculamos la tasa marginal de sustitución del consumidor 2

$$TMgS^2 = \frac{UMgx_{21}}{UMgx_{22}} = \frac{\dfrac{\partial u^2}{\partial x_{21}}}{\dfrac{\partial u^2}{\partial x_{22}}} = \frac{\dfrac{3}{2}x_{21}^{-1/2}x_{22}^{1/2}}{\dfrac{3}{2}x_{21}^{1/2}x_{22}^{-1/2}} = \frac{x_{22}^{1/2}x_{22}^{1/2}}{x_{21}^{1/2}x_{21}^{1/2}} = \frac{x_{22}}{x_{21}}$$

Sustituyendo en la condición

$$TMgS^1 = TMgS^2 \qquad \frac{2x_{12}}{3x_{11}} = \frac{x_{22}}{x_{21}}$$

Sabemos que:

$$x_1 = x_{11} + x_{21} \rightarrow x_{21} = x_1 - x_{11}$$
$$x_2 = x_{12} + x_{22} \rightarrow x_{22} = x_2 - x_{12}$$

Sustituyendo en la condición de la curva de contrato

$$\frac{2x_{12}}{3x_{11}} = \frac{x_{22}}{x_{21}} = \frac{x_2 - x_{12}}{x_1 - x_{11}}$$

Realizando las operaciones correspondientes

$$2x_{12}\left(x_1 - x_{11}\right) = 3x_{11}\left(x_2 - x_{12}\right)$$
$$2x_1x_{12} - 2x_{11}x_{12} = 3x_2x_{11} - 3x_{11}x_{12}$$
$$2x_1x_{12} - 2x_{11}x_{12} + 3x_{11}x_{12} = 3x_2x_{11}$$
$$x_{12}\left(2x_1 + x_{11}\right) = 3x_2x_{11}$$

$$x_{12} = \frac{3x_2x_{11}}{2x_1 + x_{11}}$$ Curva de contrato

6. **Consideramos una economía de intercambio con dos consumidores, *i* y *j*, y dos bienes, *x* & *y*. En la economía, hay 100 unidades de cada bien. Las funciones de utilidad de los dos agentes son:**

$$U_i(x_i, y_i) = 5x_i^{2/3} y_i^{1/3} \qquad U_j(x_j, y_j) = 10x_j^{\frac{2}{3}} y_j^{\frac{1}{3}}$$

   a. **Hallar las condiciones para que tengamos un óptimo de Pareto**
   b. **Escribir la ecuación correspondiendo a los puntos en los que tenemos un óptimo de Pareto.**

**suponiendo que las dotaciones iniciales son las siguientes:**

$$w_i^x = 20 \qquad w_i^y = 70$$

$$w_j^x = 80 \qquad w_j^y = 30$$

c. **Calcular el equilibrio Walrasiano.**

---

a. Tenemos un óptimo de Pareto cuando las curvas de indiferencias son tangentes, lo que implica que las tazas marginales de sustitución son iguales. Solucionando los programas de maximización de cada consumidor, obtenemos que las TMS siguientes:

$$TMgS_i = 2\frac{y_i}{x_i} \qquad TMgS_j = 2\frac{y_j}{x_j}$$

Este resultado es previsible, puesto que los dos agentes tienes las mismas preferencias (es decir, la función de utilidad de uno es una transformación monótona de la función de utilidad del otro).

$$2\frac{y_i}{x_i} = 2\frac{y_j}{x_j}$$

b. Ecuación correspondiendo a los puntos en los que tenemos un óptimo de Pareto

Si una asignación es Pareto óptima, entonces tenemos:

$x = x_i + x_j$ y $y = y_i - y_j$ .
Entonces,

$$2\frac{y_i}{x_i} = 2\frac{y_j}{x_j} \Rightarrow 2\frac{y_i}{x_i} = 2\frac{y - y_j}{x - x_j} \Rightarrow y_i = \frac{yx_i}{x} = x_i$$

(la última igualdad viene de que $x = y = 100$). Entonces, las asignaciones óptimas están en la diagonal de la caja de Edgeworth.

c. La dotación inicial no es un óptimo de Pareto. Tenemos que calcular las demandas netas (o los excesos de demanda).

| Las demandas Marshallianas son: | Entonces, las demandas netas son: |
|---|---|
| $x_i(p, w_i) = \frac{2(20p_x + 70p_y)}{3p_x}$ | $z_i^x(p, w_i) = \frac{20(7p_y - p_x)}{3p_x}$ |
| $y_i(p, w_i) = \frac{20p_x + 70p_y}{3p_x}$ | $z_i^y(p, w_i) = \frac{20(p_x - 7p)}{3p_y}$ |
| $x_j(p, w_j) = \frac{2(80p_x + 30p_y)}{3p_x}$ | $z_j^x(p, w_j) = \frac{20(3p_y - 4p_x)}{3p_x}$ |
| $y_j(p, w_j) = \frac{80p_x + 30p_y}{3p_x}$ | $z_j^y(p, w_j) = \frac{20(4p_x - 3p)}{3p_y}$ |

Entonces tenemos:

$$z^x(p) = z_i^x(p, w_i) + z_j^x(p, w_j) = \frac{100(2p_y - p_x)}{3p_x}$$

$$z^y(p) = z_i^y(p, w_i) + z_j^y(p, w_j) = \frac{100(p_x - 2p_y)}{3p_x}$$

Tenemos que solucionar el sistema siguiente:

$$\begin{cases} z^x\left(p_x, p_y\right) = 0 \\ z^y\left(p_x, p_y\right) = 0 \end{cases}$$

La única solución es $p_x = 2p_y$. Entonces, si ponemos $p_y = 1$ (hay que acordarse que siempre se puede normalizar los precios), tenemos un equilibrio walrasiano:

$$p_x^* = 2 \qquad p_y^* = 1$$

7. **Sea una economía de intercambio puro con dos consumidores y dos bienes, Las funciones de utilidad de los consumidores son:**

$$U_1 = x_{11}x_{12} + 2x_{11} + 5x_{12} \qquad U_2 = x_{21}x_{22} + 4x_{21} + 2x_{22}$$

**El consumidor 1 tiene una dotación inicial de 78 y 0 unidades de $x_1$ y $x_2$ respectivamente, y el consumidor 2 de 0 y 164 unidades de cada bien. Obtener:**

a. **Las funciones de exceso de demanda de cada consumidor**
b. **El precio relativo de equilibrio de esta economía.**
c. **Las cantidades óptimas de demanda**

---

a. Las funciones de exceso de demanda del consumidor nos informan, para cada vector de precios, del exceso de las cantidades demandadas sobre las cantidades ofertadas (en este caso las dotaciones iniciales). Para obtenerlas debemos determinar las funciones de demanda a través del problema de maximización de la utilidad. Por lo tanto:

El consumidor 1 se enfrenta al problema de maximizar su utilidad dada su restricción presupuestaria (ecuación de balance), esto es:

$$U_1 = x_{11}x_{12} + 2x_{11} + 5x_{12}$$
$$s.a \quad \mathrm{p}_1x_{11} + p_2x_{12} = 78p_1$$

La *CPO* de este problema es: $\dfrac{UMgx_{11}}{UMgx_{12}} = \dfrac{p_1}{p_2} \rightarrow \dfrac{x_{12}+2}{x_{11}+5} = \dfrac{p_1}{p_2}$

Despejando para $x_{12}$ $\quad x_{1\,2} = \dfrac{p_1}{p_2}\left(x_{1\,1} + 5\right) - 2$ Sustituyendo esta ecuación en la restricción tenemos

$$p_1x_{11} + \cancel{p_2}\left[\frac{p_1}{\cancel{p_2}}\left(x_{11}+5\right) - 2\right] = 78p_1$$

Realizando las operaciones correspondientes

$2p_1x_{11} = 73p_1 + 2p_2 \cdots \rightarrow x_{11} = \dfrac{73}{2} + \dfrac{p_2}{p_1}$ Función de demanda del consumidor 1 por el bien 1

y sustituyendo en $x_{12} = \dfrac{p_1}{p_2}\left(x_{11}+5\right) - 2$ para obtener su función de demanda

$x_{12} = \dfrac{p_1}{p_2}\left[\dfrac{73}{2} + \dfrac{p_2}{p_1} + 5\right] - 2 \quad \rightarrow x_{12} = \dfrac{83}{2}\dfrac{p_1}{p_2} - 1$ Función de demanda del consumidor 1 por el bien 2

Con estos resultados, las funciones de exceso de demanda serán:

$$E_{11} = x_{11}^D - x_{11}^S \qquad E_{11} = \frac{73}{2} + \frac{p_2}{p_1} - 78 \rightarrow E_{11} = \frac{p_2}{p_1} - \frac{83}{2}$$

$$E_{12} = x_{12}^D - x_{12}^S \qquad E_{12} = \frac{83}{2}\frac{p_1}{p_2} - 1 - 0 \rightarrow E_{11} = \frac{83}{2}\frac{p_1}{p_2} - 1$$

Por su parte, el consumidor 2 se enfrenta a un problema similar de maximización condicionada, el cual es:

$$U_1 = x_{21}x_{22} + 4x_{21} + 2x_{22}$$
$$s.a \quad p_1x_{21} + p_2x_{22} = 164p_2$$

La *CPO* de este problema es: $\dfrac{UMgx_{11}}{UMgx_{12}} = \dfrac{p_1}{p_2} \rightarrow \dfrac{x_{22}+4}{x_{21}+2} = \dfrac{p_1}{p_2}$

Realizando las operaciones correspondientes y despejando para $x_{12}$

$$x_{22} = \frac{p_1}{p_2}\left(x_{21}+2\right) - 4$$

Sustituyendo esta ecuación en la restricción tenemos

$$p_1 x_{11} + \cancel{p_2}\left[\frac{p_1}{\cancel{p_2}}\left(x_{21}+2\right)-4\right]=164 p_2$$

Realizando las operaciones correspondientes llegamos a:

$x_{21} = \dfrac{84 p_2}{p_1} - 1$ Función de demanda del consumidor 2 por el bien 1

y sustituyendo en $x_{22} = \dfrac{p_1}{p_2}\left(x_{21}+2\right)-4$ para obtener su función

$x_{22} = \dfrac{p_1}{p_2}\left(\dfrac{84 p_2}{p_1} - 1\right) - 4 \;\rightarrow x_{22} = 80 + \dfrac{p_1}{p_2}$ Función de demanda del consumidor 2 por el bien 2

Las funciones de exceso de demanda serán:

$$E_{11} = x_{11}^{D} - x_{11}^{S} \qquad E_{21} = \frac{84 p_2}{p_1} - 1 - 0 \rightarrow E_{21} = \frac{84 p_2}{p_1} - 1$$

$$E_{12} = x_{12}^{D} - x_{12}^{S} \qquad E_{22} = 80 + \frac{p_1}{p_2} - 164 \rightarrow E_{22} = \frac{p_1}{p_2} - 84$$

b. Para calcular el equilibrio de esta economía basta con saber que el equilibrio puede definirse como aquella situación en la que todos los excesos de demanda de cada bien son nulos. Para calcular el precio de equilibrio sólo es necesaria esta condición para uno de los bienes. Por ejemplo, para el bien 1

$$z_1\left(p\right) = \sum_{i=1}^{2} z_1^{i}\left(p\right) = E_{11} + E_{11} = 0$$

$$\frac{p_2}{p_1} - \frac{83}{2} + 84\frac{p_2}{p_1} - 1 = 0$$

$$85\frac{p_2}{p_1} = \frac{85}{2} \rightarrow \frac{p_2}{p_1} = \frac{\cancel{85}}{2\times \cancel{85}}$$

por lo que $\left(\dfrac{p_2}{p_1}\right)^{*} = \dfrac{1}{2}$

c. Una vez obtenidos los precios relativos, podemos calcular las cantidades de demanda, sustituyendo estos en las funciones correspondientes

$$x_{11} = \frac{73}{2} + \frac{p_2}{p_1} = \frac{73}{2} + \frac{1}{2} = 37$$

$$x_{12} = \frac{83}{2}\frac{p_1}{p_2} - 1 = \frac{83}{2} \times 2 = 82$$

$$x_{21} = 84\frac{p_2}{p_1} - 1 = \left(84 \times \frac{1}{2}\right) - 1 = 41$$

$$x_{22} = 80 + \frac{p_1}{p_2} = 80 + 2 = 82$$

**8. Sea una economía de intercambio puro con dos consumidores y dos bienes, Las funciones de utilidad de los consumidores son:**

$$U_1 = x_{11}x_{12} + 2x_{11} + 5x_{12} \qquad U_2 = x_{21}x_{22} + 4x_{21} + 2x_{22}$$

**El consumidor 1 tiene una dotación inicial de 78 y 0 unidades de $x_1$ y $x_2$ respectivamente, y el consumidor 2 de 0 y 164 unidades de cada bien.**

**a. Calcular la curva de contrato**
**b. Las funciones de demanda de cada consumidor**
**c. El núcleo de la economía.**
**d. Las curvas de disposición**

---

a. La curva de contrato es el lugar geométrico de los puntos donde se produce la tangencia de las curvas de indiferencia de ambos consumidores, es decir:

$$TMgS_1 = \frac{\partial U_1 / \partial x_{11}}{\partial U_1 / \partial x_{12}} = \frac{\partial U_2 / \partial x_{21}}{\partial U_2 / \partial x_{22}} = TMgS_2 \cdots \rightarrow \frac{x_{12}+2}{x_{11}+5} = \frac{x_{22}+4}{x_{21}+2}$$

Para calcular los puntos interiores de la caja de Edgeworth de la curva de contrato tomamos en cuenta las dotaciones iniciales de ambos bienes:

$$x_{11} + x_{21} = 78 \rightarrow x_{21} = 78 - x_{11}$$

$$x_{12} + x_{22} = 164 \rightarrow x_{22} = 164 - x_{12}$$

Sustituyendo estas expresiones en la ecuación anterior, obtenemos la expresión de la curva de contrato,

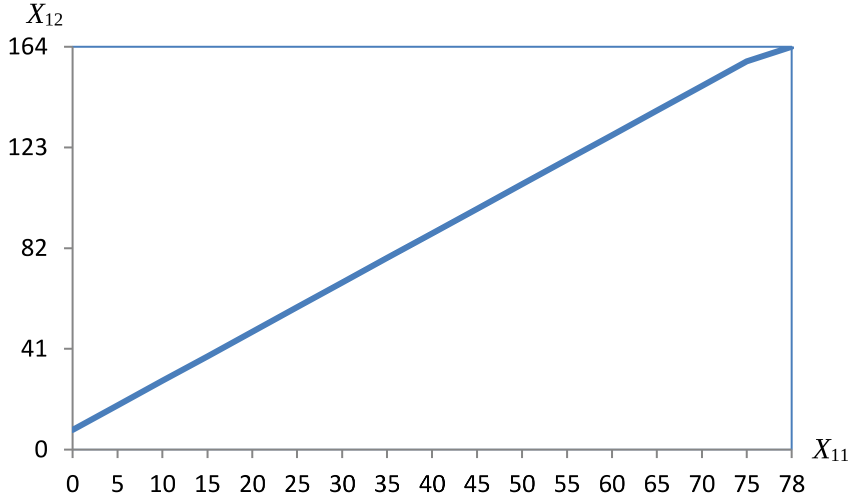
$$\frac{x_{12}+2}{x_{11}+5} = \frac{164 - x_{12} + 4}{78 - x_{11} + 2}$$

Que resolviendo las operaciones correspondientes

$$(x_{12}+2)(80 - x_{11}) = (168 - x_{12})(x_{11}+5)$$

$$x_{12} = \frac{170\,x_{11} + 680}{85} \qquad x_{12} = 2x_{11} + 8 \qquad \text{Curva de contrato}$$

Su Gráfica correspondiente es:



b. Las funciones de demanda de cada consumidor se obtienen a partir de la solución del problema de maximización de su utilidad.

Así, el consumidor 1 se enfrenta al problema de maximizar su utilidad dada su restricción presupuestaria, esto es

$$Max\,U_1 = x_{11}x_{12} + 2x_{11} + 5x_{12}$$

$$s.a. \;\; p_1 x_{11} + x_{12} = 78\,p_1$$

$$p_2 = 1$$

La condición establece que $\frac{UMgx_{11}}{UMgx_{12}} = p_1 \qquad \frac{x_{12}+2}{x_{11}+5} = p_1$

Realizando las operaciones correspondientes:

$$x_{12} = p_1(x_{11}+5) - 2$$

$x_{12} = p_1x_{11} + 5p_1 - 2$

Sustituyendo esta ecuación en la restricción tenemos

$p_1x_{11} + p_1x_{11} + 5p_1 - 2 = 78p_1$

$2p_1x_{11} + 5p_1 - 2 = 78p_1$

$x_{11} = \frac{73p_1 + 2}{2p_1}$ Función de demanda del consumidor 1 por el bien 1

y sustituyendo en $x_{12} = p_1x_{11} + 5p_1 - 2$

$x_{12} = p_1\left(\frac{73p_1 + 2}{2p_1}\right) + 5p_1 - 2$

$x_{12} = \frac{73p_1 + 2 + 10p_1 - 4}{2}$

$x_{12} = \frac{83p_1 - 2}{2}$ Función de demanda del consumidor 1 por el bien 2

Por su parte, el consumidor 2 se enfrenta a un problema similar de maximización condicionada, el cual es:

$Max\,U_2 = x_{21}x_{22} + 4x_{21} + 2x_{22}$

$s.a.\ \ p_1x_{11} + x_{12} = 164$

$p_2 = 1$

La condición establece que $\frac{UMgx_{11}}{UMgx_{12}} = p_1$ $\qquad \frac{x_{22} + 4}{x_{21} + 2} = p_1$

Realizando las operaciones correspondientes:

$x_{22} = p_1(x_{21} + 2) - 4$

$x_{22} = p_1x_{21} + 2p_1 - 4$

Sustituyendo esta ecuación en la restricción tenemos

$p_1x_{21} + p_1x_{21} + 2p_1 - 4 = 164$

$2p_1x_{21} = 168 - 2p_1$

$x_{21} = \frac{168 - 2p_1}{2p_1}$ Función de demanda del consumidor 1 por el bien 1

y sustituyendo en $x_{22} = p_1x_{21} + 2p_1 - 4$

$x_{22} = p_1\left(\frac{168 - 2p_1}{2p_1}\right) + 2p_1 - 4$

$x_{22} = \frac{168 - 2p_1 + 4p_1 - 8}{2}$

$x_{22} = \frac{2p_1 + 160}{2}$ Función de demanda del consumidor 1 por el bien 2

Precio relativo de equilibrio de esta economía.

$x_{11} + x_{21} = 78$

$\frac{73p_1 + 2}{2p_1} + \frac{168 - 2p_1}{2p_1} = 78$

$71p_1 + 170 = 156p_1$

$85p_1 = 170$

$p_1 = 2$

$p_1 = 2$ y $p_2 = 1$

Determinando las cantidades de demanda

$x_{11} = \frac{73p_1 + 2}{2p_1} = \frac{73(2) + 2}{2(2)} = 37$

$x_{12} = \frac{83p_1 - 2}{2} = \frac{83(2) - 2}{2} = 82$

$x_{21} = \frac{168 - 2p_1}{2p_1} = \frac{168 - 2(2)}{2(2)} = 41$

$x_{22} = \frac{2p_1 + 160}{2} = \frac{2(2) + 160}{2} = 82$

Nivel de bienestar

Antes del intercambio

$$U_1 = (78)(0) + 2(78) + 5(0) = 156$$

$$U_2 = (0)(164) + 4(0) + 2(164) = 328$$

**Después del intercambio**

$$U_1 = (37)(82) + 2(37) + 5(82) = 3{,}518$$

$$U_2 = (41)(82) + 4(41) + 2(82) = 3{,}690$$

**Curvas de indiferencia iníciales**

$$156 = x_{11}x_{12} + 2x_{11} + 5x_{12} \qquad 328 = x_{21}x_{22} + 4x_{21} + 2x_{22}$$

$$x_{12}(x_{11} + 5) = 156 - 2x_{11} \qquad x_{22}(x_{21} + 2) = 328 - 4x_{21}$$

$$x_{12} = \frac{156 - 2x_{11}}{x_{11} + 5} \qquad x_{22} = \frac{328 - 4x_{21}}{x_{21} + 2}$$

Expresando la curva de indiferencia del consumidor 2, desde el punto de vista del consumidor 1

$$x_{22} = \frac{328 - 4x_{21}}{x_{21} + 2} \rightarrow 164 - x_{12} = \frac{328 - 4(78 - x_{11})}{78 - x_{11} + 2}$$

$$164 - x_{12} = \frac{328 - 4(78 - x_{11})}{78 - x_{11} + 2} \rightarrow x_{12} = 164 - \frac{4x_{11} + 216}{80 - x_{11}}$$

$$x_{12} = \frac{13{,}120 - 164x_{11} - 4x_{11} - 16}{80 - x_{11}}$$

$$x_{12} = \frac{13{,}104 - 168x_{11}}{80 - x_{11}}$$

Curvas de indiferencia finales

$$3{,}518 = x_{11}x_{12} + 2x_{11} + 5x_{12} \qquad 3{,}690 = x_{21}x_{22} + 4x_{21} + 2x_{22}$$

$$x_{12}(x_{11} + 5) = 3{,}518 - 2x_{11} \qquad x_{22}(x_{21} + 2) = 3{,}690 - 4x_{21}$$

$$x_{12} = \frac{3{,}518 - 2x_{11}}{x_{11} + 5} \qquad x_{22} = \frac{3{,}690 - 4x_{21}}{x_{21} + 2}$$

c. El núcleo de Economía se obtiene en la intersección de la curva de contrato con la curva de indiferencia inicial

$$2x_{11} + 8 = \frac{156 - 2x_{11}}{x_{11} + 5} \rightarrow (2x_{11} + 8)(x_{11} + 5) = 156 - 2x_{11}$$

$$2x_{11}^2 + 20x_{11} - 116 = 0$$

Resolviendo la ecuación $x_{11} = 4.1$
Sustituyendo este valor ya sea en la curva de contrato obtenemos $x_{12} = 16.2$
Con lo cual:
$x_{11} = 4.1$ y $x_{12} = 16.2$ Punto A

Para la determinación del otro límite igualamos la curva de contrato con la curva de indiferencia inicial del consumidor 2

$$2x_{11} + 8 = \frac{13{,}104 - 168x_{11}}{80 - x_{11}}$$

$$(2x_{11} + 8)(80 - x_{11}) = 13{,}104 - 168x_{11}$$

Resolviendo la ecuación obtenemos $x_{11} = 67.04$
Sustituyendo este valor en la curva de contrato $x_{12} = 142.08$

Con lo cual:
$x_{11} = 67.04$ y $x_{12} = 142.08$ Punto B

d. Las curvas de disposición nos muestran el camino que siguen los consumidores hacia el equilibrio cuando los precios se van modificando hasta alcanzar el vector precios de equilibrio.

Estas curvas se obtienen del problema de maximización de la utilidad, de tal forma que:

Consumidor 1

$$Max\,U_1 = x_{11}x_{12} + 2x_{11} + 5x_{12}$$

$$s.a.\; p_1x_{11} + x_{12} = 78\,p_1$$

$$p_2 = 1$$

La condición establece que $\frac{UMgx_{11}}{UMgx_{12}} = p_1$ $\quad \frac{x_{12}+2}{x_{11}+5} = p_1$

Realizando las operaciones correspondientes:

$$x_{12} = p_1(x_{11}+5) - 2$$

$$x_{12} = p_1x_{11} + 5p_1 - 2$$

Sustituyendo esta ecuación en la restricción tenemos

$$p_1x_{11} + p_1x_{11} + 5p_1 - 2 = 78p_1$$

$$2p_1x_{11} - 73p_1 = 2 \rightarrow p_1(2x_{11} - 73) = 2$$

$$p_1 = \frac{2}{2x_{11} - 73}$$

sustituyendo en la $CPO$

$$\frac{x_{12}+2}{x_{11}+5} = \frac{2}{2x_{11}-73}$$

$$(x_{12}+2)(2x_{11}-73) = 2(x_{11}+5)$$

$$2x_{11}x_{12} + 4x_{11} + 73x_{12} - 146 = 2x_{11} + 10$$

$$x_{12}(2x_{11} - 73) = 156 - 2x_{11}$$

$x_{12} = \frac{156 - 2x_{11}}{2x_{11} - 73}$ Curca de disposición consumidor 1

Para el consumidor 2

$$Max\,U_2 = x_{21}x_{22} + 4x_{21} + 2x_{22}$$

$$s.a.\; p_1x_{11} + x_{12} = 164$$

$$p_2 = 1$$

La condición establece que $\frac{UMgx_{11}}{UMgx_{12}} = p_1$ $\quad \frac{x_{22}+4}{x_{21}+2} = p_1$

Realizando las operaciones correspondientes:

$$x_{22} = p_1(x_{21}+2) - 4$$

$$x_{22} = p_1x_{21} + 2p_1 - 4$$

Sustituyendo esta ecuación en la restricción tenemos

$$p_1x_{21} + p_1x_{21} + 2p_1 - 4 = 164$$

$$2p_1x_{21} + 2p_1 = 168$$

$$p_1(2x_{21} + 2) = 168$$

$$p_1 = \frac{168}{2x_{21} + 2}$$

sustituyendo en la $CPO$

$$\frac{x_{22}+4}{x_{21}+2} = \frac{168}{2x_{21}+2}$$

$$(x_{22}+4)(2x_{21}+2) = 168(x_{21}+2)$$

$$2x_{21}x_{22} + 2x_{22} + 8x_{21} + 8 = 168\,x_{21} + 336$$

$$x_{22}(2x_{21} + 2) = 328 + 160\,x_{21}$$

$x_{12} = \frac{164 + 80x_{21}}{x_{21} + 1}$ Curva de disposición consumidor 2

**9. Sea una economía de intercambio puro con dos consumidores y dos bienes, Las funciones de utilidad de los consumidores son:**

$$U_1\left(x^1\right)= x_1^1 x_2^1 + 12x_1^1 + 3x_2^1 \qquad U_2\left(x^2\right)= x_1^2 x_2^2 + 8x_1^2 + 9x_2^2$$

**El consumidor 1 tiene una dotación inicial de $w^1$ =(8, 30) de $x_1$ y $x_2$ respectivamente, y el consumidor 2 de $w^2$ = (10, 10) de cada bien.**

**a. Calcular las funciones de demanda de cada consumidor**
**b. Calcular las funciones de excesos de demanda de cada consumidor**
**c. Calcular el precio relativo de equilibrio de esta economía.**

---

a. Las funciones de demanda de cada consumidor se obtienen a partir de la solución del problema de maximización de su utilidad.

Así, el consumidor 1 se enfrenta al problema de maximizar su utilidad dada su restricción presupuestaria, esto es:

$$\left.\begin{aligned} &Max \;\; U_1\left(x^1\right) = x_1^1 x_2^1 + 12x_1^1 + 3x_2^1 \\ &s.a \quad \mathrm{p}_1 x_1^1 + p_2 x_2^1 = 8p_1 + 30p_2 \end{aligned}\right\}$$

$$L(.) = x_1^1 x_2^1 + 12x_1^1 + 3x_2^1 - \lambda\left[\mathrm{p}_1 x_1^1 + p_2 x_2^1 - 8\mathrm{p}_1 - 30p_2\right]$$

Las *CPO* de este problema son:

$$\frac{\partial L}{\partial x_1^1} = x_2^1 + 12 - \lambda p_1 = 0 \qquad (1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2^1} = x_1^1 + 3 - \lambda p_2 = 0 \qquad (2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = \mathrm{p}_1 x_1^1 + \mathrm{p}_2 x_2^1 - 8\mathrm{p}_1 - 30\mathrm{p}_2 = 0 \qquad (3)$$

Despejando λ de (1) y (2) e igualando

$$x_2^1 + 12 - \lambda p_1 = 0 \rightarrow \lambda = \frac{x_2^1 + 12}{p_1}$$

$$x_1^1 + 3 - \lambda p_2 = 0 \rightarrow \lambda = \frac{x_1^1 + 3}{p_2}$$

$$p_2 x_2^1 = p_1 x_1^1 + 3p_1 - 12p_2 \qquad (4)$$

Sustituyendo esta ecuación ( 4 ) en la *CPO* (3)

$$p_1 x_1^1 + p_1 x_1^1 + 3p_1 - 12p_2 - 8p_1 - 30p_2 = 0$$

Realizando las operaciones correspondientes obtenemos

$$2\mathrm{p}_1 x_1^1 = 5\mathrm{p}_1 + 42\mathrm{p}_2 \cdots \rightarrow x_1^1 = \frac{5}{2} + 21\frac{p_2}{p_1}$$ Función de demanda del consumidor 1 por el bien 1

y sustituyendo esta expresión en ( 4 )

$$x_2^1 = \frac{p_1\left(\frac{5}{2} + 21\frac{p_2}{p_1}\right)x_1^1 + 3p_1 - 12p_2}{p_2}$$

En la cual realizando las operaciones correspondientes y simplificando

$$x_2^1 = \frac{11}{2}\frac{p_1}{p_2} + 9$$ Función de demanda del consumidor 1 por el bien 2

Por su parte, el consumidor 2 se enfrenta a un problema similar de maximización condicionada, el cual es:

$$\left.\begin{aligned} &Max \;\; U_2\left(x^2\right) = x_1^2 x_2^2 + 8x_1^2 + 9x_2^2 \\ &s.a \quad \mathrm{p}_1 x_1^2 + p_2 x_2^2 = 10p_1 + 10p_2 \end{aligned}\right\}$$

$$L(.) = x_1^2 x_2^2 + 8x_1^2 + 9x_2^2 - \lambda\left[\mathrm{p}_1 x_1^2 + p_2 x_2^2 - 10\mathrm{p}_1 - 10p_2\right]$$

Las *CPO* son:

$$\frac{\partial L}{\partial x_1^2} = x_2^2 + 8 - \lambda p_1 = 0 \qquad (5)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2^2} = x_1^2 + 9 - \lambda p_2 = 0 \qquad (6)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = p_1 x_1^2 + p_2 x_2^2 - 10 p_1 - 10 p_2 = 0 \qquad (7)$$

Despejando λ de (5) y (6) e igualando

$p_2 x_2^2 = p_1 x_1^2 + 9 p_1 - 8 p_2$ ( 8 )

Sustituyendo esta ecuación (8) en la cpo (7) tenemos

$x_1^2 = \frac{1}{2} + 9 \frac{p_2}{p_1}$ Función de demanda del consumidor 2 por el bien 1

y sustituyendo en ( 8 ) $x_2^2 = \frac{19}{2} \frac{p_1}{p_2} + 1$ Función de demanda del consumidor 2 por el bien 2

b. Las funciones de exceso de demanda nos informan, para cada vector de precios, del exceso de las cantidades demandadas sobre las cantidades ofertadas (en este caso las dotaciones iniciales). Por lo tanto:

$$z_1^1(p) = x_1^1 - w_1^1 = \frac{5}{2} + 21 \frac{p_2}{p_1} - 8 = 21 \frac{p_2}{p_1} - \frac{11}{2}$$

$$z_2^1(p) = x_2^1 - w_2^1 = \frac{11}{2} \frac{p_1}{p_2} - 21$$

$$z_1^2(p) = x_1^2 - w_1^2 = \frac{1}{2} + 9 \frac{p_2}{p_1} - 10 = 9 \frac{p_2}{p_1} - \frac{19}{2}$$

$$z_2^2(p) = x_2^2 - w_2^2 = \frac{19}{2} \frac{p_1}{p_2} - 9$$

c. Para calcular el equilibrio de esta economía basta con saber que el equilibrio puede definirse como aquella situación en la que todos los excesos de demanda de cada bien son nulos. Para calcular el precio de equilibrio sólo es necesaria esta condición para uno de los bienes. Por ejemplo, para el bien 1

$$z_1(p) = \sum_{i=1}^{2} z_1^i(p) = 21 \frac{p_2}{p_1} - \frac{11}{2} + 9 \frac{p_2}{p_1} - \frac{19}{2} = 0$$

Factorizando los términos

$30 \frac{p_2}{p_1} = 15$ por lo que $\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^* = \frac{1}{2}$

10. **Sea una economía de intercambio puro con dos consumidores y dos bienes. Las funciones de utilidad de los consumidores son:**

$$U_1\left(x^1\right)=x_1^1x_2^1+12x_1^1+3x_2^1 \quad \textbf{y} \quad U_2\left(x^2\right)=x_1^2x_2^2+8x_1^2+9x_2^2$$

**El consumidor 1 tiene una dotación inicial de 38 unidades de $x_1$ y 0 de $x_2$, y el consumidor 2 de 0 unidades del bien $x_1$ y 20 de $x_2$.**

**Calcular:**

a. **Las funciones de demanda de cada consumidor**
b. **El precio relativo de equilibrio de esta economía**
c. **Los niveles de utilidad, así como las curvas de indiferencia antes y después del intercambio**
d. **El núcleo de la economía**
e. **Las curvas de disposición**

---

a. Para la determinación de las funciones de demanda de cada consumidor se debe plantear un problema de maximización de la utilidad sujeta a su ecuación de balance o restricción presupuestaria

De tal forma, el consumidor 1 se enfrenta al problema de maximizar su utilidad dada su restricción presupuestaria, esto es:

$$\left.\begin{array}{l} Max \;\; U^1\left(x^1\right)=x_{11}x_{12}+12x_{11}+3x_{12} \\ s.a \quad p_1x_{11}+p_2x_{12}=38p_1 \end{array}\right\}$$

$$L(.)=x_{11}x_{12}+12x_{11}+3x_{12}-\lambda\left[p_1x_{11}+p_2x_{12}-38p_1\right]$$

La cpo a cumplir es que la Tasa marginal de Sustitución sea igual a la relación de precios de los bienes en el mercado:

$TMgS^1=\left.\dfrac{UMgX_1}{UMgX_2}\right|_1=\dfrac{p_1}{p_2}$ Por lo que

Despejando $x_{12}=\dfrac{p_1}{p_2}\left(x_{11}+3\right)-12=\dfrac{p_1x_{11}+3p_1-12p_2}{p_2}$

Sustituyendo esta expresión en la restricción presupuestaria y realizando la simplificación correspondiente

$$p_1x_{11}+\cancel{p_2}\left(\frac{p_1x_{11}+3p_1-12p_2}{\cancel{p_2}}\right)=38p_1$$

$$2p_1x_{11}+3p_1-12p_2=38p_1$$

Despejando para determinar la función de demanda

$x_{11}=\dfrac{35p_1+12p_2}{2p_1}$ Función de demanda del consumidor 1 por el bien 1

Para $x_{12}$ se sustituye $x_{11}=\dfrac{35p_1+12p_2}{2p_1}$ en

$x_{12}=\dfrac{p_1}{p_2}\left(x_{11}+3\right)-12=\dfrac{p_1x_{11}+3p_1-12p_2}{p_2}$, de tal forma que

$$x_{12}=\frac{p_1x_{11}}{p_2}+\frac{3p_1}{p_2}-12=\frac{\cancel{p_1}}{p_2}\left(\frac{35p_1+12p_2}{2\cancel{p_1}}\right)+\frac{3p_1-12p_2}{p_2}$$

Realizando las operaciones correspondientes

$$x_{12}=\frac{35p_1+12p_2}{2p_2}+\frac{3p_1-12p_2}{p_2}=\frac{35p_1+12p_2+6p_1-24p_2}{2p_2}$$

simplificando

$x_{12}=\dfrac{41p_1-12p_2}{2p_2}$ Función de demanda del consumidor 1 por el bien 2

Por su parte, el consumidor 2 se enfrenta a un problema similar de maximización condicionada, el cual es:

$$\left.\begin{array}{l} Max\ \ U^2\left(x^2\right)=x_{21}x_{22}+8x_{21}+9x_{22} \\ s.a\quad p_1x_{21}+p_2x_{22}=20p_2 \end{array}\right\}$$

$$L(.)=x_{21}x_{22}+8x_{21}+9x_{22}-\lambda\left[p_1x_{21}+p_2x_{22}-20p_2\right]$$

La cpo es: $TMgS^2=\left.\frac{UMgX_1}{UMgX_2}\right|_2=\frac{p_1}{p_2}$ Por lo que $\frac{x_{22}+8}{x_{21}+9}=\frac{p_1}{p_2}$

Despejando para una de las variables

$$x_{22}=\frac{p_1}{p_2}\left(x_{21}+9\right)-8=\frac{p_1x_{21}+9p_1-8p_2}{p_2}$$

Sustituyendo en la restricción

$$p_1x_{21}+\cancel{p_2}\left(\frac{p_1x_{21}+9p_1-8p_2}{\cancel{p_2}}\right)=20p_2$$

$$2p_1x_{21}+9p_1-8p_2=20p_2$$

despejando para determinar la función de demanda

$$x_{21}=\frac{28p_2-9p_1}{2p_1}$$ Función de demanda del consumidor 2 por el bien 1

Para $x_{22}$ sustituimos $x_{21}=\frac{28p_2-9p_1}{2p_1}$ en

$$x_{22}=\frac{p_1}{p_2}\left(x_{21}+9\right)-8=\frac{p_1x_{21}+9p_1-8p_2}{p_2}$$

De tal forma que

$$x_{22}=\frac{p_1x_{21}}{p_2}+\frac{9p_1}{p_2}-8=\frac{\cancel{p_1}}{p_2}\left(\frac{28p_2-9p_1}{2\cancel{p_1}}\right)+\frac{9p_1-8p_2}{p_2}$$

$$x_{22}=\frac{28p_2-9p_1}{2p_2}+\frac{9p_1-8p_2}{p_2}=\frac{28p_2-9p_1+18p_1-16p_2}{2p_2}$$

simplificando

$$x_{22}=\frac{12p_2+9p_1}{2p_2}$$ Función de demanda del consumidor 1 por el bien 2

b. La determinación del Precio relativo de equilibrio de esta economía se realiza a través de la ley de Walras, la cual nos establece que $x_{11}+x_{21}=w_{11}+w_{21}$, por lo que sustituyendo las funciones correspondientes, en este caso tomamos como referencia al bien.

$\frac{35p_1+12p_2}{2p_1}+\frac{28p_2-9p_1}{2p_1}=38$ Realizando las operaciones que correrspondan $\Rightarrow=35p_1+12p_2+28p_2-9p_1=76p_1$

Factorizando los términos $\frac{p_1}{p_2}=\frac{4}{5}$

Para determinar las cantidades demandadas, sustituimos el valor de los precios en las funciones de demanda obtenidas con anterioridad

$$x_{11}=\frac{35p_1+12p_2}{2p_1}=\frac{35(4)+12(5)}{2(4)}=25\quad x_{21}=\frac{28p_2-9p_1}{2p_1}=\frac{28(5)-9(4)}{2(4)}=13$$

$$x_{12}=\frac{41p_1-12p_2}{2p_2}=\frac{41(4)-12(5)}{2(5)}=10.4\quad x_{22}=\frac{12p_2+9p_1}{2p_2}=\frac{12(5)+9(4)}{2(5)}=9.6$$

c. Dadas las funciones de utilidad y el valor de las dotaciones iníciales tendremos el valor de la utilidad inicial

$$U_1\left(x^1\right)=x_{11}x_{12}+12x_{11}+3x_{12}=(38)(0)+12(38)+3(0)=456$$

$$U_2\left(x^2\right)=x_{21}x_{22}+8x_{21}+9x_{22}=(0)(20)+8(0)+9(20)=180$$

Para el caso de las demandas posteriores al intercambio

$$U_1\left(x^1\right)=x_{11}x_{12}+12x_{11}+3x_{12}=(25)(10.4)+12(25)+3(10.4)=591.2$$

$$U_2\left(x^2\right) = x_{21}x_{22} + 8x_{21} + 9x_{22} = (13)(9.6) + 8(13) + 9(9.6) = 315.2$$

Con lo cual las curvas de indiferencia serán:

iníciales

$$x_{12} = \frac{456 - 12x_{11}}{x_{11} + 3}$$

$$x_{12} = \frac{591.2 - 12x_{11}}{x_{11} + 3}$$

finales

$$x_{12} = \frac{180 - 8x_{21}}{x_{11} + 9}$$

$$x_{12} = \frac{315.2 - 8x_{21}}{x_{11} + 9}$$

d. Para determinar el núcleo de la economía, el cual nos indica el limite o los límites al intercambio, es necesario partir de la curva de contrato y las curvas de indiferencia iníciales, de esta forma

Tomando en consideración que la curva de contrato es

$$x_{12} = \frac{40x_{11} - 480}{50}$$

y la curva de indiferencia inicial $x_{12} = \frac{456 - 12x_{11}}{x_{11} + 3}$

Igualando las dos expresiones $\frac{456 - 12x_{11}}{x_{11} + 3} = \frac{40x_{11} - 480}{50}$

Realizando las operaciones correspondientes tenemos

$$x_{11}^2 + 6x_{11} - 606 = 0$$

Resolviendo la ecuación obtenemos $x_{11} = 21.8$

Para obtener el valor de $x_{12}$

$$x_{12} = \frac{40(21.8) - 480}{50} = \frac{872 - 480}{50} = 7.8$$

De tal forma que el Punto inicial del núcleo de la economía $A = (21.8, 7.8)$

e. Las curvas de disposición nos muestran el camino que siguen los consumidores hacia el equilibrio cuando los precios se van modificando hasta alcanzar el vector precios de equilibrio.

Estas curvas se obtienen del problema de maximización de la utilidad, de tal forma que:

El consumidor 1:

$$\left.\begin{array}{l} Max\ \ U^1\left(x^1\right) = x_{11}x_{12} + 12x_{11} + 3x_{12} \\ s.a\ \ \ p_1x_{11} + p_2x_{12} = 38p_1 \end{array}\right\}$$

$$L(.) = x_{11}x_{12} + 12x_{11} + 3x_{12} - \lambda\left[p_1x_{11} + p_2x_{12} - 38p_1\right]$$

La $CPO$ es: $TMgS^1 = \left.\frac{UMgX_1}{UMgX_2}\right|_1 = \frac{p_1}{p_2} \quad \rightarrow \quad \frac{x_{12} + 12}{x_{11} + 3} = \frac{p_1}{p_2}$

Despejando para una de las variables

$$x_{12} = \frac{p_1}{p_2}\left(x_{11} + 3\right) - 12 = \frac{p_1x_{11} + 3p_1 - 12p_2}{p_2}$$

Sustituyendo en la restricción

$$p_1x_{11} + \cancel{p_2}\left(\frac{p_1x_{11} + 3p_1 - 12p_2}{\cancel{p_2}}\right) = 38p_1$$

$$2p_1x_{11} + 3p_1 - 12p_2 = 38p_1$$

Ordenando los términos y factorizando

$$2p_1x_{11} - 35p_1 = 12p_2 \cdots \rightarrow p_1\left(2x_{11} - 35\right) = 12p_2$$

Despejando para la relación de precios

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{12}{2x_{11} - 35}$$

Sustituyendo en la cpo $\frac{x_{12} + 12}{x_{11} + 3} = \frac{p_1}{p_2} \cdots \rightarrow \frac{x_{12} + 12}{x_{11} + 3} = \frac{12}{2x_{11} - 35}$

Realizando las operaciones correspondientes buscando despejar para una de las variables:

$$x_{12}=\frac{12\left(x_{11}+3\right)}{2x_{11}-35}-12=\frac{12x_{11}+36-24x_{11}+420}{2x_{11}-35}$$

Simplificando obtendremos

$x_{12}=\dfrac{456-12x_{11}}{2x_{11}-35}$ Curva de disposición del consumidor 1

El consumidor 2:

$$\left.\begin{array}{l} Max\ \ U^{2}\left(x^{2}\right)=x_{21}x_{22}+8x_{21}+9x_{22} \\ s.a\quad p_{1}x_{21}+p_{2}x_{22}=20p_{2} \end{array}\right\}$$

$$L\left(.\right)=x_{21}x_{22}+8x_{21}+9x_{22}-\lambda\left[p_{1}x_{21}+p_{2}x_{22}-20p_{2}\right]$$

Si la $CPO$ es: $TMgS^{2}=\left.\dfrac{UMgX_{1}}{UMgX_{2}}\right|_{2}=\dfrac{p_{1}}{p_{2}}$ $\qquad \dfrac{x_{22}+8}{x_{21}+9}=\dfrac{p_{1}}{p_{2}}$

Despejando para una de las variables

$$x_{22}=\frac{p_{1}}{p_{2}}\left(x_{21}+9\right)-8=\frac{p_{1}x_{21}+9p_{1}-8p_{2}}{p_{2}}$$

Sustituyendo en la restricción presupuestaria

$$p_{1}x_{21}+\cancel{p_{2}}\left(\frac{p_{1}x_{21}+9p_{1}-8p_{2}}{\cancel{p_{2}}}\right)=20p_{2}$$

$$2p_{1}x_{21}+9p_{1}-8p_{2}=20p_{2}$$

Ordenando los términos y factorizando $p_{1}\left(2x_{21}+9\right)=28p_{2}$

Obtendremos la relación de precios

$$\frac{p_{1}}{p_{2}}=\frac{28}{2x_{21}+9}$$

Sustituyendo en la cpo $\dfrac{x_{22}+8}{x_{21}+9}=\dfrac{p_{1}}{p_{2}}\cdots\rightarrow\dfrac{x_{22}+8}{x_{21}+9}=\dfrac{28}{2x_{21}+9}$

Realizando las operaciones correspondientes y despejando una de las variables:

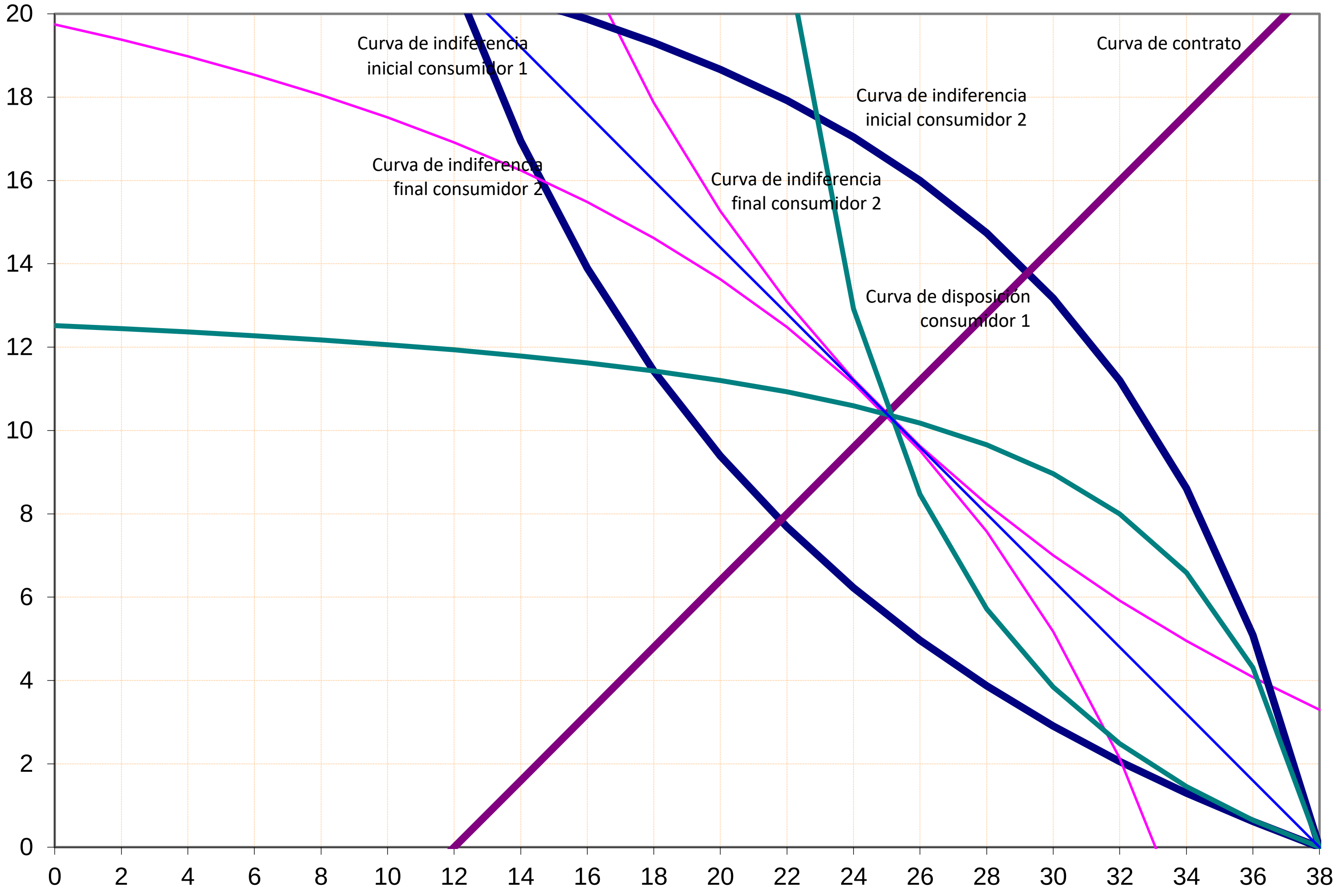
$$x_{22}=\frac{28\left(x_{21}+9\right)}{2x_{21}+9}-8=\frac{28x_{21}+252-16x_{21}-72}{2x_{21}+9}$$

Con lo cual obtendremos

$x_{22}=\dfrac{180+12x_{21}}{2x_{21}+9}$ Curva de disposición del consumidor 2

**Para mostrar la gráfica que nos representa todos los cálculos y por consiguiente equilibrios se transforman todos las variables en términos del consumidor 1**

| | Curvas de indiferencia | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Iniciales | | Finales | | | Curvas de disposición | | Relación de precios |
| | Consumidor 1 | Consumidor 2 | Consumidor 1 | Consumidor 2 | Curva de Contrato | Consumidor 1 | Consumidor 2 | |
| x11 | $x_2^1 = \frac{456-12x_1^1}{x_1^1+3}$ | $x_2^1 = \frac{1,064-28x_1^1}{47-x_1^1}$ | $x_2^1 = \frac{591.2-12x_1^1}{x_1^1+3}$ | $x_2^1 = \frac{928.8-28x_1^1}{47-x_1^1}$ | $x_2^1 = \frac{40x_1^1-480}{50}$ | $x_2^1 = \frac{45-12x_1^1}{2x_1^1-35}$ | $x_2^1 = \frac{1,064-28x_1^1}{85-2x_1^1}$ | $\frac{P_X}{P_Y}$ |
| 0 | 152.0 | 20.0 | 197.1 | 35.0 | -10 | | 20.0 | |
| 2 | 86.4 | 14.9 | 113.4 | 27.2 | -8 | | 15.7 | |
| 4 | 58.3 | 11.4 | 77.6 | 21.8 | -6 | | 13.4 | |
| 6 | 42.7 | 8.8 | 57.7 | 17.8 | -5 | | 12.0 | |
| 8 | 32.7 | 6.8 | 45.0 | 14.8 | -3 | | 11.0 | |
| 10 | 25.8 | 5.3 | 36.2 | 12.4 | -2 | | 10.3 | |
| 12 | 20.8 | 4.0 | 29.8 | 10.4 | 0 | | 9.8 | 20.8 |
| 14 | 16.9 | 3.0 | 24.9 | 8.8 | 2 | | 9.4 | 19.2 |
| 16 | 13.9 | 2.1 | 21.0 | 7.5 | 3 | | 9.1 | 17.6 |
| 18 | 11.4 | 1.3 | 17.9 | 6.3 | 5 | 240.0 | 8.8 | 16.0 |
| 20 | 9.4 | 0.7 | 15.3 | 5.4 | 6 | 43.2 | 8.6 | 14.4 |
| 22 | 7.7 | 0.1 | 13.1 | 4.5 | 8 | 21.3 | 8.4 | 12.8 |
| 24 | 6.2 | -0.4 | 11.2 | 3.7 | 10 | 12.9 | 8.2 | 11.2 |
| 26 | 5.0 | -0.8 | 9.6 | 3.1 | 11 | 8.5 | 8.1 | 9.6 |
| 28 | 3.9 | -1.2 | 8.2 | 2.5 | 13 | 5.7 | 7.9 | 8.0 |
| 30 | 2.9 | -1.5 | 7.0 | 1.9 | 14 | 3.8 | 7.8 | 6.4 |
| 32 | 2.1 | -1.9 | 5.9 | 1.4 | 16 | 2.5 | 7.7 | 4.8 |
| 34 | 1.3 | -2.1 | 5.0 | 1.0 | 18 | 1.5 | 7.6 | 3.2 |
| 36 | 0.6 | -2.4 | 4.1 | 0.6 | 19 | 0.6 | 7.6 | 1.6 |
| 38 | 0.0 | -2.6 | 3.3 | 0.2 | 21 | 0.0 | 7.5 | 0.0 |


Curva de indiferencia inicial consumidor 1
Curva de indiferencia inicial consumidor 2
Curva de indiferencia final consumidor 2
Curva de indiferencia final consumidor 2
Curva de disposición consumidor 1
Curva de contrato
0
2
4
6
8
10
12
14
16
18
20
0
2
4
6
8
10
12
14
16
18
20
22
24
26
28
30
32
34
36
38

# UNIDAD DE COMPETENCIA 3.

# EQUILIBRIO GENERAL COMPETITIVO EN UNA ECONOMÍA DE INTERCAMBIO Y PRODUCCIÓN

1. **Supongamos una economía en la cual se producen dos bienes: Carbón $x_1$ y Maíz $x_2$. Los cuales utilizan un único factor trabajo $L$. Existiendo una dotación de 100 unidades de ese factor cada uno de los factores es producido según su función de producción $X_1 = 2L_1^{1/2}$ y $X_2 = L_2^{1/2}$. Obtener la frontera de posibilidades de la producción y graficar.**

Sabemos que la totalidad de los recursos en esta economía viene dado por la expresión $L_1 + L_2 = 100$

De la función de producción $X_1 = 2L_1^{1/2}$ despejamos al factor trabajo $L_1 = \frac{X_1^2}{4}$

Para la función de producción $X_2 = L_2^{1/2}$ realizamos la misma operación que la anterior $L_2 = X_2^2$

Una vez realizadas las operaciones, sustituimos en la restricción $L_1 + L_2 = 100$

De tal forma que

$$\frac{X_1^2}{4} + X_2^2 = 100$$

Despejando para $X_2$

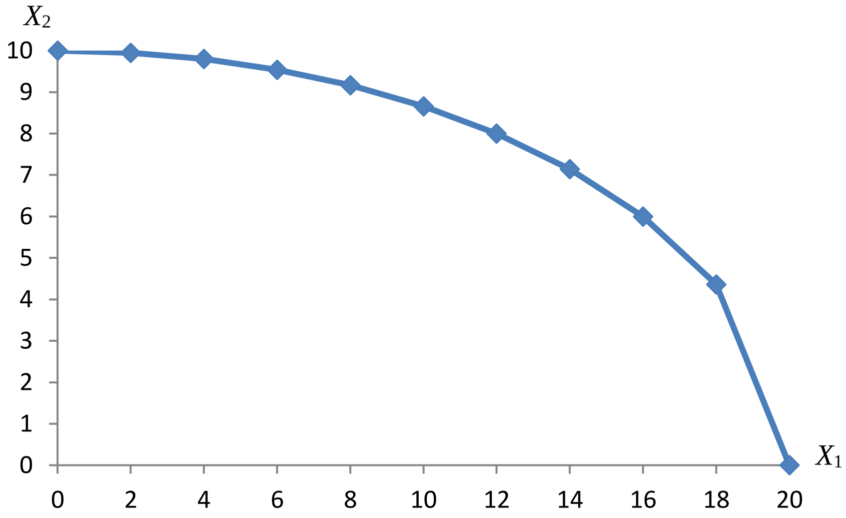
$$X_2^2 = 100 - \frac{X_1^2}{4}$$

$$X_2^2 = \frac{400 - X_1^2}{4}$$

$$X_2 = \frac{\sqrt{400 - X_1^2}}{2}$$

La gráfica correspondiente será:

| $X_1$ | $X_2$ |
|---|---|
| 0 | 10.0 |
| 2 | 9.9 |
| 4 | 9.8 |
| 6 | 9.5 |
| 8 | 9.2 |
| 10 | 8.7 |
| 12 | 8.0 |
| 14 | 7.1 |
| 16 | 6.0 |
| 18 | 4.4 |
| 20 | 0.0 |



2. **Suponga una economía en la cual se producen dos bienes: $X_1$ y $X_2$ Los cuales Utilizan un único factor trabajo ($L$) existiendo una dotación de 20 unidades de este factor. Cada uno de los Factores es producido Según su función de producción $X_1 = \sqrt{L_1}$ y $X_2 = 2L_2$ Obtener frontera de posibilidades de la producción.**

Sabemos que la totalidad de los recursos en esta economía viene dado por la expresión $L_1 + L_2 = 20$

De la función de producción $X_1 = \sqrt{L_1}$ despejamos al factor trabajo $L_1 = X_1^2$

Para la función de producción $X_2 = 2L_2$ realizamos la misma operación que la anterior $L_2 = \frac{X_2}{2}$

Una vez realizadas las operaciones, sustituimos en la restricción $L_1 + L_2 = 20$

$$X_1^2 + \frac{X_2}{2} = 20$$

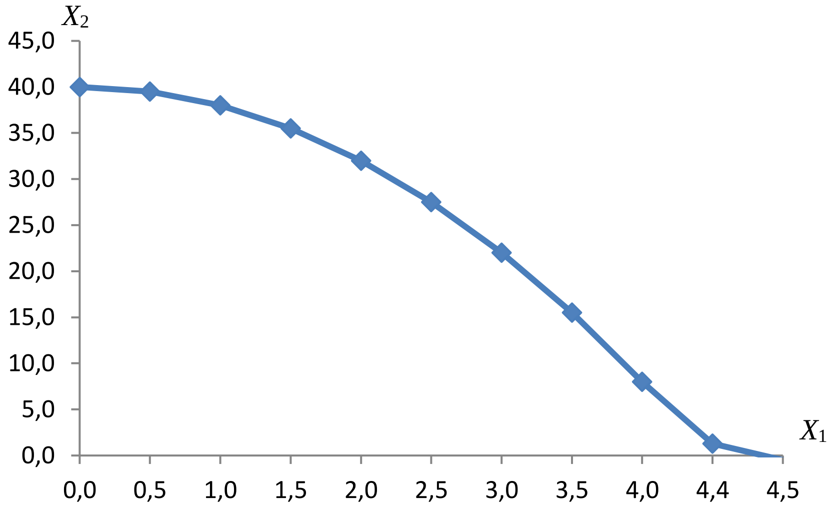
Despejando para $X_2$

$$\frac{X_2}{2} = 20 - X_1^2$$

$$X_2 = 40 - 2X_1^2$$

La gráfica correspondiente será:

| $X_1$ | $X_2$ |
|---|---|
| 0.0 | 40.0 |
| 0.5 | 39.5 |
| 1.0 | 38.0 |
| 1.5 | 35.5 |
| 2.0 | 32.0 |
| 2.5 | 27.5 |
| 3.0 | 22.0 |
| 3.5 | 15.5 |
| 4.0 | 8.0 |
| 4.4 | 1.3 |
| 4.5 | 0 |



3. **Una economía utiliza un único factor productivo (y) para producir dos bienes ($x_1$ y $x_2$). La tecnología disponible para ello viene representada por las siguientes funciones de producción.**

$$x_1 = f^1(y_1) = 2(y_1)^{0.6} \qquad\qquad x_2 = f^2(y_2) = 6(y_2)^{0.3}$$

**donde $y_1$ e $y_2$ son las cantidades de factor productivo utilizadas para producir $x_1$ y $x_2$ respectivamente. En dicha economía hay 100 unidades de factor productivo como dotaciones iniciales.**

- **a. Derivar las condiciones de eficiencia de la producción**
- **b. Calcular la curva de transformación o frontera de posibilidades de la producción**

---

a. Para derivar las condiciones de eficiencia de la producción se plantea el problema de maximización de los beneficios de cada uno de los productos.

Para el producto 1 resolvemos:

$$\left.\begin{array}{l} Max\ \Pi^1 = p_1 x_1 - q y_1 \\ s.a \quad x_1 = 2(y_1)^{0.6} \end{array}\right\} Max \quad p_1\left[2(y_1)^{0.6}\right] - q y_1$$

cuya cpo es:

$$\frac{\partial \Pi^1}{\partial y_1} = 1.2 p_1 (y_1)^{-0.4} - q = 0 \cdots \rightarrow (y_1)^{-0.4} = \frac{q}{1.2 p_1} \qquad (1)$$

Para el producto 2 resolvemos:

$$\left.\begin{array}{l} Max\ \Pi^2 = p_2 x_2 - q y_2 \\ s.a \quad x_2 = 6(y_2)^{0.3} \end{array}\right\} Max \quad p_2\left[6(y_2)^{0.3}\right] - q y_2$$

cuya *CPO* es:

$$\frac{\partial \Pi^2}{\partial y_2} = 1.8 p_2 (y_1)^{-0.7} - q = 0 \cdots \rightarrow (y_2)^{-0.7} = \frac{q}{1.8 p_2} \qquad (2)$$

Relacionando estas dos ecuaciones dada la condición de eficiencia de la producción

$$\frac{(y_1)^{-0.4}}{(y_2)^{-0.7}} = \frac{\dfrac{q}{1.2 p_1}}{\dfrac{q}{1.8 p_2}} \cdots \rightarrow \frac{(y_2)^{0.7}}{(y_1)^{0.4}} = 1.5 \frac{p_2}{p_1}$$

Condición de eficiencia de la producción

b. Curva de transformación o frontera de posibilidades de la producción se obtiene expresando las funciones de producción como funciones de demanda del factor: De tal forma que

$$x_1 = 2(y_1)^{0.6} \rightarrow y^1 = \left(\frac{x_1}{2}\right)^{1/0.6} \qquad x_2 = 6(y_2)^{0.3} \rightarrow y_2 = \left(\frac{x_2}{6}\right)^{1/0.3}$$

Como el factor productivo se tiene que utilizar en su totalidad, sabemos que $y^1 + y^2 = 100$. Por lo que:

$$\left(\frac{x_1}{2}\right)^{1/0.6} + \left(\frac{x_2}{6}\right)^{1/0.3} = 100 \cdots \rightarrow x_2 = 6\left[100 - \left(\frac{x_1}{2}\right)^{1/0.6}\right]^{0.3}$$

**4. Suponga que dos individuos (Smith y Jones) tiene cada uno 10 horas de trabajo para producir helado ($X$) o sopa de pollo ($Y$). La demanda de Smith de $X$ y de $Y$ está dada por:**

$$X_S = \frac{0.3M_S}{P_X} \qquad Y_S = \frac{0.7M_S}{P_Y}$$

**Mientras que la demanda de Jones está dada por:**

$$X_J = \frac{0.5M_J}{P_X} \qquad Y_J = \frac{0.5M_J}{P_Y}$$

**Donde $M_S$ y $M_J$ representan los ingresos de Smith y de Jones, respectivamente (que provienen únicamente del trabajo).**

**A los individuos no les importa si producen $X$ o $Y$ y la función de producción de cada bien está dada por:**

$$X = 2Lx$$
$$Y = 3Ly$$

**Donde L es el trabajo total dedicado a la producción de cada bien.**

- **a. Cuál debe ser la relación de precios $P_X$ y $P_Y$**
- **b. Dada esta relación de precios, qué cantidad de $X$ y $Y$ demandarán**
- **c. ¿Cómo se debe asignar el trabajo entre $X$ y $Y$ para satisfacer la demanda.**

---

**a. Relación de precios $P_X$ y $P_Y$**

La determinación del equilibrio exige que la Relación Técnica de Transformación ($RTT$) debe ser igual a la Tasa Marginal de Sustitución ($TMgS$) y por ende a la relación de precios, esto es:

$RTT = \frac{\partial Y}{\partial X} = \frac{UMgX}{UMgY} = TMgS$ pero, como el equilibrio del consumidor establece $\frac{UMgX}{UMgY} = \frac{P_X}{P_Y}$, entonces:

$RTT = \frac{\Delta Y}{\Delta X} = \frac{\partial Y}{\partial X} = \frac{P_X}{P_Y}$. De esta forma, partiendo de las funciones de producción: $X = 2L, Y = 3L$

Aplicando la ecuación anterior, y dado que los incrementos de $X$ e $Y$ solo dependen de $L$

$\frac{P_X}{P_Y} = \frac{\Delta Y}{\Delta X} = \frac{\partial Y / \partial L}{\partial X / \partial L} = \frac{3}{2}$ o lo que es lo mismo: $\frac{P_X}{P_Y} = \frac{3}{2} = \frac{1/2}{1/3}$

Con lo que concluimos que los precios son $P_X$ = ½, $P_Y$ = ⅓.

**b. Dada esta relación de precios, qué cantidad de $X$ y $Y$ demandarán Smith y Jones**

Para obtener las demandas se requiere el ingreso de cada uno, y dado que éste depende única y exclusivamente del factor trabajo:

$M_S = wL_S$ $\qquad$ $M_J = wL_J$

Si $w = 1$, y $L_S = 10$ $\qquad$ Si $w = 1$, y $L_J = 10$

$M_S = 10$ $\qquad$ $M_J = 10$

Por lo tanto, las demandas serán:

$$X_S = \frac{0.3M_S}{P_X} = \frac{0.3(10)}{0.5} = 6 \qquad X_J = \frac{0.5M_J}{P_X} = \frac{0.5(10)}{0.5} = 10$$

$$Y_S = \frac{0.7M_S}{P_Y} = \frac{0.7(10)}{0.33} = 21 \qquad Y_J = \frac{0.5M_J}{P_Y} = \frac{0.5(10)}{0.33} = 15$$

De esta forma:

$X = 6 + 10 = 16$

$Y = 21 + 15 = 36$

**c. ¿Cómo se debe asignar el trabajo entre *X* y *Y* para satisfacer la demanda.**

Para determinar el número de horas destinado a cada

producto se parte de las funciones de producción:

$X = 2L$ $L_X = {}^{X}/_{2} = {}^{16}/_{2} = 8$ Hrs destinado a la producción de X

$Y = 3L$ $L_Y = {}^{Y}/_{3} = {}^{36}/_{3} = 12$ Hrs destinado a la producción de Y

5. **Suponga que Robinson Crusoe utiliza únicamente trabajo para producir Cocos y Peces. La función de producción de los Peces es:** $F = 6L_F$

**La función de producción de los cocos está dada por:** $C = 5Lc^{½}$

**Su función de utilidad es** $U = F^2C$

**Recolectando alimentos seis horas por día.**

**Determinar:**

- **a. La frontera de Posibilidades de la Producción a la que se enfrenta**
- **b. La maximización de la utilidad combinada de los cocos y peces por día**
- **c. El tiempo destinado a cada una de las actividades**
- **d. Mostrar que la relación o tasa marginal de sustitución es igual a la tasa marginal de Transformación**

---

a. La frontera de Posibilidades de la Producción a la que se enfrenta se obtiene partiendo del hecho de que $L_F + L_C = 6$

Para esto despejamos $L_C$ y $L_F$ en su respectiva función de producción

$$L_F = \frac{F}{6} \quad \text{y} \quad L_C = \frac{C^2}{25}$$

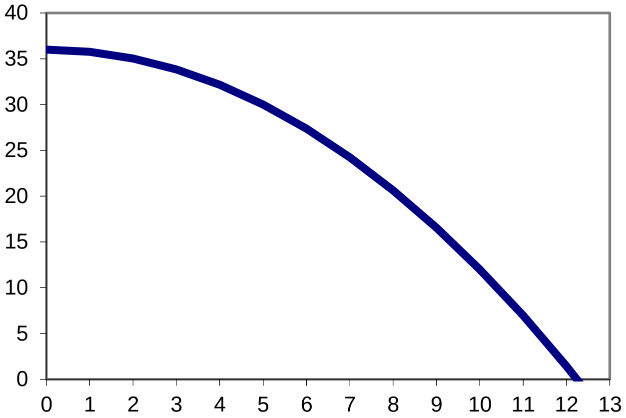
Las cuales sustituimos en la condición $L_F + L_C = 6$

$$\frac{F}{6} + \frac{C^2}{25} = 6 \rightarrow \frac{F}{6} = 6 - \frac{C^2}{25}$$

Con lo que despejando llegaremos a

$$F = 36 - \frac{6C^2}{25}$$ Frontera de Posibilidades de la Producción

| C | $F = 36 - \frac{6C^2}{25}$ |
|---|---|
| 0 | 36.0 |
| 1 | 35.8 |
| 2 | 35.0 |
| 3 | 33.8 |
| 4 | 32.2 |
| 5 | 30.0 |
| 6 | 27.4 |
| 7 | 24.2 |
| 8 | 20.6 |
| 9 | 16.6 |
| 10 | 12.0 |
| 11 | 7.0 |
| 12 | 1.4 |
| 13 | -4.6 |



b. La maximización de la utilidad combinada de los cocos y peces por día

Para ello se debe resolver el problema Maximizando la utilidad, sujeta a la Frontera de Posibilidades de la Producción:

El problema a plantear es

$$\max \quad U = F^2C$$

$$s.a \quad 36 - \frac{6C^2}{25}$$

Formando el lagrangiano

$$L = F^2C - \lambda\left(F - 36 + 0.24C^2\right)$$

Derivando con respecto a $F$ y $C$ y despejando λ

$$\frac{\partial L}{\partial C} = F^2 - \lambda 0.48C = 0 \qquad \lambda = \frac{F^2}{0.48C}$$

$$\frac{\partial L}{\partial F} = 2FC - \lambda = 0 \qquad \lambda = 2FC$$

Igualando λ = λ y despejando para alguna de las variables

$$\frac{F^2}{0.48C} = 2FC$$

$$F = 0.96C^2$$

Sustituyendo este valor en la restricción

$$F = 36 - \frac{6C^2}{25} = 36 - 0.24C^2$$

Que al momento de realizar las operaciones

$$0.96C^2 = 36 - 0.24C^2$$

$$1.2C^2 = 36$$

$$C^2 = 30 \cdots \rightarrow C = \sqrt{30}$$

$C = 5.5 \cong 6$ Cocos que maximizarían su utilidad

Para obtener el número de peces que maximizará su utilidad, sustituimos el valor de C en $F = 0.96C^2$
De esta forma:

$$F = 0.96(5.5)^2$$

$F = 29$ Peces.

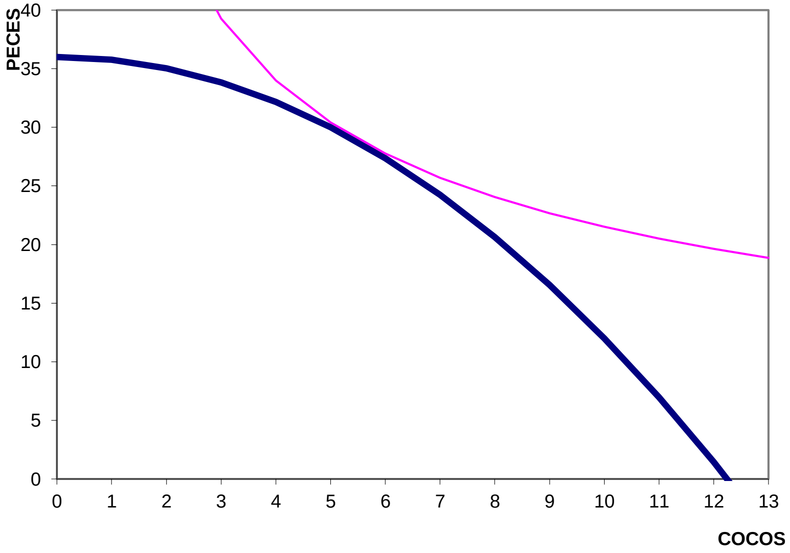
Lo que nos da una utilidad máxima de $U = F^2C = (29)^2(5.5) = 4,625.5$

c. Para calcular el tiempo destinado a cada una de las actividades sustituimos los valores de $C$ y $F$

$$L_F = \frac{F}{6} = \frac{29}{6} = 4.8\ Hrs \quad \text{y} \quad L_C = \frac{C^2}{25} = \frac{(5.5)^2}{25} = 1.2\ Hrs$$

d. Mostrar que la relación o tasa marginal de sustitución es igual a la tasa marginal de Transformación

$$TMgS = \frac{F}{2C} = \frac{29}{2(5.5)} = 2.64 \qquad TMgT = \frac{12C}{25} = \frac{12(5.5)}{25} = 2.64$$



6. **Considere una economía en la que la producción y el consumo son realizados por un único agente esquizofrénico: Robinson Crusoe. Robinson-consumidor vende su tiempo de trabajo h (en horas) a Robinson-empresario, quién produce cocos (x), que luego vende a Robinson-consumidor. Todos los beneficios de la venta de cocos son para Robinson-consumidor. Robinson-empresario tiene una función de producción**

   **$x = a\,h$, donde $a > 0$.**

   **Robinson-consumidor tiene una función de utilidad**

   **u(ocio, coco) = min{ocio, coco}.**

**Suponga que la dotación inicial de horas de trabajo es $T > 0$.**

**Determine el salario real de equilibrio y la demanda de trabajo de la empresa en el Equilibrio General Competitivo.**

Dado que la empresa muestra Rendimientos Constantes a Escala, sus beneficios serán cero.

Así, $\pi = pah - wh = 0$,
de donde $(w/p)^* = a$.

Para el consumidor, ambos bienes son complementarios.
Así, su demanda de ocio será:

$$o^* = \frac{m}{p+w} = \frac{wT}{p+w} = \frac{T}{\frac{1}{a}+1}$$

Finalmente, su oferta de trabajo será $T$ - $o^*$.

Esta coincidirá en equilibrio con la demanda de trabajo de la empresa

**7. Robinson Crusoe es el único ser viviente en su isla del Atlántico Sur. Produce cocos (*C*) usando como insumo su trabajo *(L)*. Su función de utilidad es: $U(L,C)=(24-L)C$ . Puede producir cocos de acuerdo a la siguiente función de producción:** $C=\sqrt{L}$ .

**Halle el óptimo y el Halle el equilibrio.**

---

Para obtener el óptimo se toma en cuenta la condición de equilibrio la cual establece $TMgS=TMgT$ .

Dado que Robinson Crusoe cuenta con 24 hrs al día, este tiempo lo puede destinar a ocio ($R$) o a trabajo ($L$), es decir $24 = R + C$, de esta forma: $R = 24 – C$, por lo que la función de utilidad puede transformarse en $U(L,C)=RC$

De esta forma sí:

$$TMgS=\frac{UMgR}{UMgC}=\frac{dU/dR}{dU/dC}=\frac{C}{R} \quad \text{y} \quad TMgT=\frac{dC}{dL}=\frac{1}{2\sqrt{L}}$$

Entonces

$$TMgS=\frac{C}{R}=\frac{1}{2\sqrt{L}}=TMgT \quad \text{Pero } C=\sqrt{L} \quad \text{y} \quad R = 24 – C$$

$$TMgS=\frac{\sqrt{L}}{24-C}=\frac{1}{2\sqrt{L}}=TMgT$$

Resolviendo la ecuación

$2L=24-L\cdots\rightarrow L=8$ Destina 8 hrs de las que dispone a producir cocos para su consumo, con las cuales obtiene $C=\sqrt{8}=2.828\approx 3$ cocos. Y una utilidad de

$$U(L,C)=(24-8)3=48$$

El equilibrio se da cuando destina 8 hrs a trabajar, 16 hrs a ocio y produce 3 cocos.

**8. Suponga que Robinson Crusoe utiliza únicamente trabajo para recolectar alimentos para su consumo. La función de producción de la recolección de alimentos es:** $C = AL^{\gamma}$ **Su función de utilidad es** $U = C^{\alpha}(T-L)^{\beta}$

**Determinar los niveles de consumo y trabajo óptimos**

El problema al cual se enfrenta robinsón es el de

$$\underbrace{\max}_{C,L}\ C^{\alpha}\left(T-L\right)^{\beta}$$

$$s.a.\ \ C = AL^{\gamma}$$

Formando el lagrangeano

$$\Gamma = C^{\alpha}\left(T-L\right)^{\beta} + \lambda\left(AL^{\gamma} - C\right)$$

Las condiciones de primer orden serán:

$$\frac{\partial\Gamma}{\partial C} = \alpha C^{\alpha-1}\left(T-L\right)^{\beta} - \lambda = 0$$

$$\frac{\partial\Gamma}{\partial L} = -\beta C^{\alpha}\left(T-L\right)^{\beta-1} + \lambda\gamma AL^{\gamma-1} = 0$$

$$\frac{\partial\Gamma}{\partial\lambda} = AL^{\gamma} - C = 0$$

De la primera ecuación tendremos:

$$\lambda = \alpha C^{\alpha-1}\left(T-L\right)^{\beta}$$

De la segunda

$$\lambda = \frac{\beta C^{\alpha}\left(T-L\right)^{\beta-1}}{\gamma AL^{\gamma-1}}$$

Igualando estas dos expresiones

$$\alpha C^{\alpha-1}\left(T-L\right)^{\beta} = \lambda = \frac{\beta C^{\alpha}\left(T-L\right)^{\beta-1}}{\gamma AL^{\gamma-1}}$$

$$\gamma AL^{\gamma-1}\left[\alpha C^{\alpha-1}\left(T-L\right)^{\beta}\right] = \beta C^{\alpha}\left(T-L\right)^{\beta-1}$$

Eliminando términos

$$\frac{\gamma AL^{\gamma-1}\left[\alpha C^{\alpha-1}\right]}{C^{\alpha}} = \frac{\beta\left(T-L\right)^{\beta-1}}{\left(T-L\right)^{\beta}} = \frac{\beta\cancel{\left(T-L\right)^{\beta}}\left(T-L\right)^{-1}}{\cancel{\left(T-L\right)^{\beta}}}$$

$\frac{\alpha\gamma AL^{\gamma-1}}{C} = \frac{\beta}{T-L}$ o lo que es lo mismo $\frac{\beta C}{\alpha\left(T-L\right)} = \gamma AL^{\gamma-1}$ lo cual nos expresa la condición $TMgS = RMgT = TMgT$

**Recordando que la función de producción** $C = AL^{\gamma}$ establece que se debe consumir todo lo producido

$$\frac{\beta AL^{\gamma}}{\alpha\left(T-L\right)} = \gamma AL^{\gamma-1}$$

Eliminado los términos semejantes

$$\frac{\beta AL^{\gamma}}{\alpha\left(T-L\right)AL^{\gamma-1}} = \gamma \rightarrow \frac{\beta L}{\alpha\left(T-L\right)} = \gamma$$

$$\beta L = \alpha\gamma\left(T-L\right) \rightarrow \beta L = \alpha\gamma T - \alpha\gamma L$$

$$\beta L + \alpha\gamma L = \alpha\gamma T \rightarrow L\left(\beta + \alpha\gamma\right) = \alpha\gamma T$$

$L = \frac{\alpha\gamma T}{\beta + \alpha\gamma}$ Número de horas destinadas a la recolección de alimentos

A no tiene efecto, el efecto sustitución se cancela con el efecto ingreso.

Determinando el nivel de consumo:

$$C = AL^{\lambda} = A\left(\frac{\alpha\gamma T}{\beta + \alpha\gamma}\right)^{\gamma}$$

9. **Suponga una economía que produce cañones (x) y mantequilla (y) con trabajo únicamente, de acuerdo con las siguientes funciones de producción:**

$$x = \sqrt{L_X} \qquad y = \frac{1}{2}\sqrt{L_Y}$$

**Donde *L***

**Donde $L_X$ y $L_Y$ representan el trabajo dedicado a la producción de *X* e *Y* respectivamente. El trabajo es fijo e igual a 100, además de las preferencias de esa comunidad vienen representadas por la función:**

$$U(x, y) = \sqrt{xy}$$

**Obtener**

**a. La Frontera de Posibilidades de la producción**
**b. Las cantidades y precios de equilibrio del consumidor.**

---

### a. La Frontera de Posibilidades de la producción

Partiendo de las funciones de producción obtenemos el valor de L tanto para *x* como para *y*

$$x = \sqrt{L_X} \qquad y = \frac{1}{2}\sqrt{L_Y}$$

$$L_X = x^2 \qquad L_Y = 4y^2$$

Sustituyendo dichos valores en la condición $L_X + L_Y = 100$

$$L_X + L_Y = 100$$

$$x^2 + 4y^2 = 100$$

Despejando y factorizando para y

$$y = \frac{\left(100 - x^2\right)^{1/2}}{2} = \left(25 - \frac{x^2}{4}\right)^{1/2}$$ Frontera de Posibilidades de la Producción.

### b. Las cantidades y precios de equilibrio del consumidor.

Para obtener las cantidades de equilibrio, la condición exige que

$$TMgST = TMgS = \frac{P_X}{P_Y}$$

De esta forma:

Obteniendo la $TMgST$ (a través de diferenciales)

$$x^2 + 4y^2 = 100$$

$$\frac{\partial x^2}{\partial x}dx + \frac{\partial 4y^2}{\partial y}dy = 0$$

$$2xdx + 8ydy = 0$$

$$-\frac{dy}{dx} = \frac{x}{4y}$$

Obteniendo la $TMgS$

$$TMgS = \frac{UMg_X}{UMg_Y}$$

$$TMgS = \frac{1/2\,x^{-1/2}y^{1/2}}{1/2\,x^{1/2}y^{-1/2}}$$

$$TMgS = \frac{y}{x}$$

Aplicando la condición de optimización: $TMgST = TMgS$

$$\frac{x}{4y} = \frac{y}{x} \cdots \rightarrow x^2 = 4y^2$$

Sustituyendo en la frontera de posibilidades de la producción: $x^2 + 4y^2 = 100$ Obtenemos las cantidades óptimas a producir y/o consumir..

$$4y^2 + 4y^2 = 100 \qquad x^2 + x^2 = 100$$

$$y = \sqrt{\frac{100}{8}} \qquad x = \sqrt{\frac{100}{2}}$$

$$y = 3.54 \qquad x = 7.07$$

Determinando los precios de equilibrio: Partiendo de la misma condición de equilibrio

$$TMgS = \frac{UMg_X}{UMg_Y} = \frac{y}{x} = \frac{P_X}{P_Y} \qquad \frac{P_X}{P_Y} = \frac{3.54}{7.07} = \frac{1}{2}$$

10. **Considere dos bienes ($X$ e $Y$) y dos agentes económicos ($A$ y $B$) dentro de la economía, producen con sus respectivas funciones de producción $X = K_X^{1/2}L_X^{1/2}$ y $Y = 4K_Y^{1/2}L_Y^{1/2}$. Demandan de acuerdo con las funciones de utilidad:**

$$U_A = X_A Y_A^2 \quad \text{y} \quad U_B = X_B^2 Y_B$$

**y las siguientes dotaciones iniciales:**

$$L_A = 100 \quad L_B = 200 \quad L = 300$$
$$K_A = 800 \quad K_B = 400 \quad K = 1{,}200$$

**Obtener el equilibrio general competitivo (La producción por empresa, los precios de los productos, las cantidades óptimas de demanda).**

---

Determinando el equilibrio en la producción

Primero se determina la Función de eficiencia de la producción

La eficiencia de la producción requiere que las Relaciones Técnicas de Sustitución de los dos productores sean iguales:

$$RTS^X = RTS^Y \quad \Rightarrow \quad \frac{K_X}{L_X} = \frac{K_Y}{L_Y}$$

De las dotaciones iniciales sabemos que $L = 300$ y $K = 1{,}200$, por lo que:

$L_X + L_Y = 300 \quad \rightarrow \quad L_Y = 300 - L_X$

$K_X + K_Y = 1{,}200 \quad \rightarrow \quad K_Y = 1{,}200 - K_X$

Sustituyendo en la condición $\frac{K_X}{L_X} = \frac{K_Y}{L_Y}$ obtenemos

$$\frac{K_X}{L_X} = \frac{1200 - K_X}{300 - L_X}$$

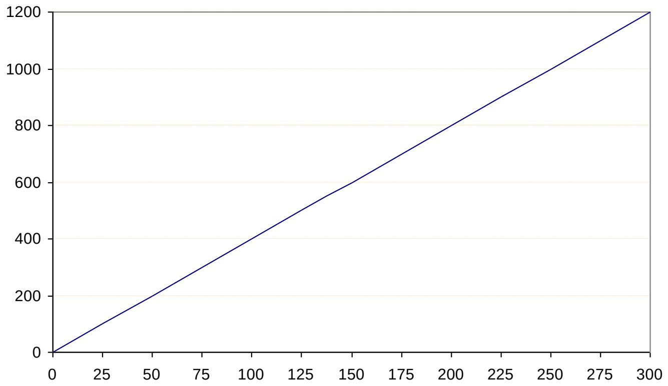
Realizando las operaciones correspondientes y despejando para $K_X$

$$300K_X - K_X L_X = 1200L_X - K_X L_X$$

$$80K_X = 1200L_X$$

$$K_X = \frac{1200L_X}{300} = 4L_X$$ Función de Eficiencia de la producción

La gráfica correspondiente será



| $L$ | $K$ |
|---|---|
| 0 | 0 |
| 25 | 100 |
| 50 | 200 |
| 75 | 300 |
| 100 | 400 |
| 125 | 500 |
| 150 | 600 |
| 175 | 700 |
| 200 | 800 |
| 225 | 900 |
| 250 | 1000 |
| 275 | 1100 |
| 300 | 1200 |

Para obtener la Frontera de Posibilidades de la producción se sustituye la función de eficiencia de la producción en la función de producción $X = K_X^{1/2}L_X^{1/2}$ Para obtener las funciones de demanda de $L$ y $K$ en función de su respectiva producción

$$X = (4L_X)^{1/2} L_X^{1/2} \Rightarrow X = 2L_X$$

$L_X = \dfrac{X}{2}$ Función de demanda del factor $L_X$

para $K_X$, se sustituye en la curva de eficiencia de la producción

$K_X = 4\left(\dfrac{X}{2}\right) = K_X = 2X$ Función de demanda de capital por el productor 1

Para el productor 2 (bien Y), es necesario transformar la función de eficiencia de la producción

Si $L_X + L_Y = 300$ $L_X = 300 - L_Y$
$K_X + K_Y = 1{,}200$ $K_X = 1{,}200 - K_Y$

Sustituyendo los valores en la Función de eficiencia de la producción $K_X = 4L_X$

$$1{,}200 - K_Y = 4(300 - L_Y)$$

Realizando las operaciones correspondientes obtenemos

$K_Y = 4L_Y$ Función de eficiencia de la producción para el productor 2

Sustituyendo en la función de producción $Y = 4K_Y^{1/2} L_Y^{1/2}$

$$Y = 4K_Y^{1/2} (4L_Y)^{1/2} = 8L_Y$$

$L_Y = \dfrac{Y}{8}$ Función de demanda del factor $L_Y$

para $K_Y$, se sustituye en la curva de eficiencia de la producción

$K_Y = 4\left(\dfrac{Y}{8}\right) = K_Y = \dfrac{Y}{2}$ Función de demanda de capital por el productor 1

Para obtener la Frontera de Posibilidades de la Producción sustituimos $L_X$ y $L_Y$

$$L_X + L_Y = 300 \Rightarrow \frac{X}{2} + \frac{Y}{8} = 300 = \frac{4X + Y}{8}$$

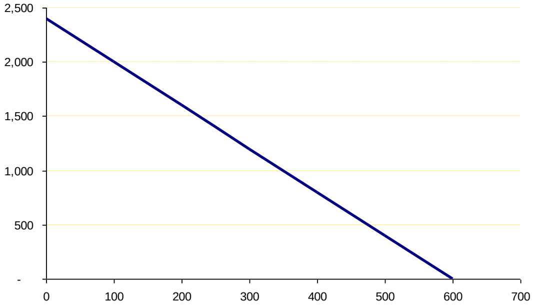
$$4X + Y = 2{,}400$$

Con lo que si ordenamos los términos obtendremos

$Y = 2{,}400 - 4X$ Frontera de Posibilidades de la Producción

La gráfica correspondiente será

| X | Y |
|---|---|
| 0 | 2,400 |
| 100 | 2,000 |
| 200 | 1,600 |
| 300 | 1,200 |
| 400 | 800 |
| 500 | 400 |
| 600 | 0 |



Para obtener las funciones de demanda de capital y trabajo para determinar los niveles de producción óptimos se requiere el plantear un problema de maximización de la producción de esta forma

Productor $X$

$$Max \quad X = K_X^{1/2} L_X^{1/2}$$
$$s.a. \quad rK + wL = 800r + 100w$$
$$r = 1$$

Condición a cumplir: $TMgS = w$

$\dfrac{K_X}{L_X} = w$ despejando para $K_X$ $K_X = wL_X$

Sustituyendo esta expresión en la restricción, realizando las operaciones y despejando para $L_X$

$$wL_X + wL_X = 800 + 100w$$

$$2wL_X = 800 + 100w \quad \Rightarrow \quad L_X = \frac{800+100w}{2w}$$

$L_X = \frac{400}{w} + 50$ Función de demanda por $L_X$

Para $K_X$ se sustituye la demanda por $L_X$ en $K_X = wL_X$

$K_X = w\left(\frac{800+100w}{2w}\right)$ Factorizando

$K_X = 400 + 50w$ Función de demanda por $K_X$

Para el Productor $Y$

$$Max \quad Y = 4K_Y^{1/4}L_Y^{1/2}$$
$$s.a. \quad rK + wL = 400r + 200w$$
$$r = 1$$

La condición a cumplir: $\frac{K_Y}{L_Y} = w$, de esta forma, despejando para $K_Y$ $K_Y = wL_Y$

Sustituyendo esta expresión en la restricción, realizando las operaciones y despejando para $L_X$ $\frac{wL_Y}{3} + wL_Y = 400 + 200w$

$$wL_Y + wL_Y = 400 + 200w \quad \Rightarrow \quad 2wL_Y = 400 + 200w$$

Con lo cual

$L_Y = \frac{400+200w}{2w} \Rightarrow L_Y = \frac{200}{w} + 100$ Función de demanda por $L_Y$

Para $K_Y$ sustituyendo demanda por $L_Y$ $K_Y = w\left(\frac{400+200w}{2w}\right)$

Factorizando

$K_Y = 200 + 100w$ Función de demanda por $K_Y$

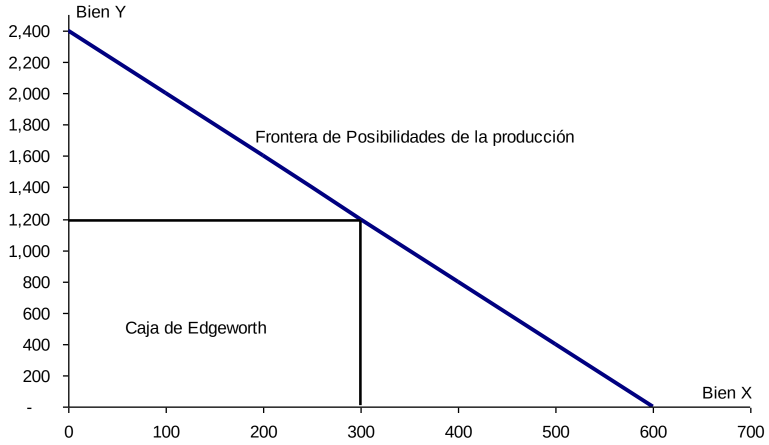
Determinado el valor de $w$ en el equilibrio a través de la ley de walras

$K_X + K_Y = 1200$  
$400 + 50w + 200 + 100w$  
$150w = 1200 - 600$  
$150w = 600$  
$w = 4 \quad r = 1$ precios de equilibrio

Para determinar los valores de equilibrio se sustituyen estos precios de equilibrio, en las funciones de demanda correspondientes

$$L_X = \frac{400}{w} + 50 = \frac{400}{4} + 50 = 150$$
$$K_X = 400 + 50w = 400 + 50(4) = 600$$
$$L_Y = \frac{200}{w} + 100 = \frac{200}{4} + 100 = 150$$
$$K_Y = 200 + 100w = 200 + 100(4) = 600$$
$$X = K_X^{1/2}L_X^{1/2} = (150)^{1/2}(600)^{1/2} = 300$$
$$Y = 4K_Y^{1/2}L_Y^{1/2} = 4(150)^{1/2}(600)^{1/2} = 1,200$$

Con lo cual obtenemos las dimensiones de la caja de Edgeworth



Para determinar el equilibrio del consumidor se plantea un problema de maximización de la utilidad

Consumidor 1

$$\begin{aligned} &\max \quad X_A Y_A^2 \\ &s.a. \quad P_X X_A + P_Y Y_A = wL_A + rK_A \\ &\qquad\quad P_Y = 1 \end{aligned}$$

Tomando en consideración el valor de las dotaciones iniciales $L_A = 100$, $K_A = 800$ y $P_X = 4$ dado que el equilibrio exige que por un lado $TMgS = \frac{P_X}{P_Y}$ y por el otro $TMgST = \frac{w}{r}$ además de que $TMgS = TMgT = \frac{P_X}{P_Y}$ nos da como consecuencia que $TMgS = \frac{P_X}{P_Y} = TMgT = \frac{w}{r} \rightarrow \frac{P_X}{P_Y} = \frac{w}{r}$

De esta forma el problema establecido será

$$\begin{aligned} &\max \quad X_A Y_A^2 \\ &s.a. \quad 4X_A + Y_A = 4(100) + 800 = 1,200 \\ &\qquad P_Y = 1 \end{aligned}$$

Lo que se convierte en un problema de equilibrio parcial

Condición de optimización $\frac{UMgX_A}{UMgY_A} = P_X$

$$\frac{Y_A^{\cancel{2}}}{2X_A \cancel{Y_A}} = \frac{Y_A}{2X_A} = 4 \quad \rightarrow \quad Y_A = 8X_A$$

Sustituyendo en la restricción

$$4X_A + 8X_A = 1,200 = 12X_A$$

$X_A = \frac{1,200}{12} = 100$ Cantidad demandada del bien $X$ por el consumidor A

Para la cantidad de demanda de $Y_A$

$Y_A = 8X_A = 8(100) = 800$ Cantidad demandada del bien $Y$ por el consumidor A

Consumidor 2

$$\begin{aligned} &\max \quad X_B^2 Y_B \\ &s.a. \quad P_X X_B + P_Y Y_B = wL_B + rK_B \\ &\qquad\quad P_Y = 1 \end{aligned}$$

Tomando en consideración el valor de las dotaciones iniciales $L_B = 200$, $K_B = 400$ y $P_X = 4$

De esta forma el problema establecido será

$$\begin{aligned} &\max \quad X_B^2 Y_B \\ &s.a. \quad 4X_B + Y_B = 4(200) + 400 = 1,200 \\ &\qquad P_Y = 1 \end{aligned}$$

Lo que se convierte en un problema de equilibrio parcial

Condición de optimización $\frac{UMgX_B}{UMgY_B} = P_X$

$$\frac{2\cancel{X_B}Y_B}{X_B^{\cancel{2}}} = \frac{2Y_B}{X_B} = 4 \quad \rightarrow \quad Y_B = 2X_B$$

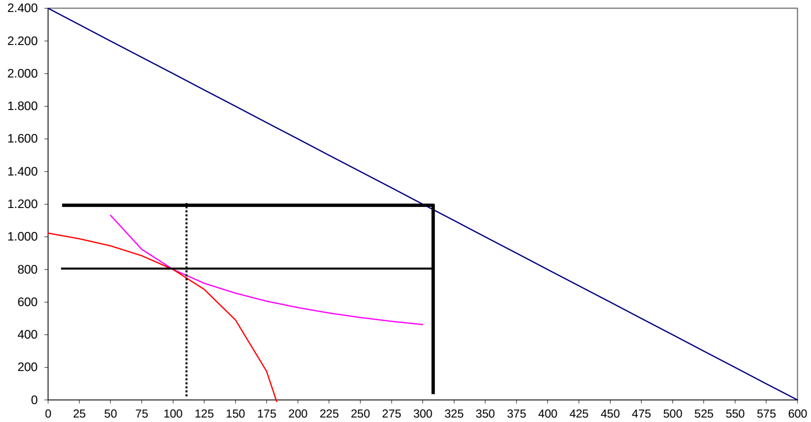
Sustituyendo en la restricción $4X_B + 2X_B = 1,200 = 6X_B$

$X_B = \frac{1,200}{6} = 200$ Cantidad demandada del bien $X$ por el consumidor B

Para la cantidad de demanda de $Y_B$

$Y_B = 2X_B = 2(200) = 400$ Cantidad demandada del bien $Y$ por el consumidor B

La representación de la gráfica que muestra el equilibrio será



# UNIDAD DE COMPETENCIA 4.
# ECONOMIA DEL BIENESTAR SOCIAL

1. **Una planificadora social ha decidido que quiere distribuir el ingreso entre dos personas de modo que se maximice la función $\sqrt{Y_1}+\sqrt{Y_2}$, donde $Y_i$ es la cantidad de ingreso de que dispone la persona i. Supongamos que la planificadora dispone de una cantidad fija de dinero para distribuir y que ella puede decidir cualquier distribución del ingreso tal que $Y_1+Y_2 = W$, donde $W$ es esa cantidad fija. ¿Cómo distribuiría este ingreso?**

Esta planificadora tendría curvas de indiferencia convexas corrientes entre $Y_1$ e $Y_2$ y una "restricción presupuestaria" donde el "precio" del ingreso de cada persona es igual a 1.

Por lo tanto su relación marginal de sustitución entre los ingresos de las dos personas será igual al precio relativo, que es 1.

Cuando resolvemos este problema, la planificadora establece que $Y_1 = Y_2 = {}^{W}/_{2}$. Supongamos que en lugar de esto le resulta "más costoso" a la planificadora distribuir dinero a la persona 1 que a la persona 2. (Quizás la persona 1 *es* más distraída y pierde parte del dinero, o quizás a la persona 1 le roban con más frecuencia.)

Supongamos por ejemplo, que el presupuesto de la planificadora es $2Y_1 + Y_2 = W$. Entonces, la planificadora intenta maximizar la función

$$\sqrt{Y_1}+\sqrt{Y_2}$$

dado el presupuesto $7Y_1 + Y_2 = W$.

Si igualamos su relación marginal de sustitución con la relación entre los precios, obtenemos que

$$\frac{\sqrt{Y_2}}{\sqrt{Y_1}} = 2,$$

y por lo tanto $Y_2 = 4Y_1$. Por consiguiente, la planificadora decidirá que $Y_1 = {}^{W}/_{5}$ y $Y_2 = {}^{4W}/_{5}$.

**2. Suponiendo una asamblea de 60 votantes que deben elegir entre tres propuestas *a*, *b* y *c*. Las preferencias se manifiestan de este modo (entendiendo que *a* > *b* representa el hecho de que se prefiere *a* a *b*):**

**23 votantes prefieren: *a* > *c* > *b***
**19 votantes prefieren: *b* > *c* > *a***
**16 votantes prefieren: *c* > *b* > *a***
**2 votantes prefieren: *c* > *a* > *b***
**Cuál será la propuesta ganadora?**

En un proceso de voto pluralista, *a* gana con 23 votos, sobre *b* con 19 votos y sobre *c* con 18, por lo que *a* > *b* > *c*.

A través del ganador de Condorcet , en las comparaciones por pares obtenemos:

35 prefieren *b* > *a* contra 25 para *a* > *b*
41 prefieren *c* > *b* contra 19 para *b* > *c*
37 prefieren *c* > *a* contra 23 para *a* > *c*

Lo que nos lleva a la preferencia mayoritaria *c* > *b* > *a*, exactamente contraria a la elección pluralista.

3. **Imaginemos que hay una elección entre 4 candidatos: Ana, Juan, Pedro y María. Supongamos que un votante rellena la papeleta de la siguiente manera:**

| | |
|---|---|
| **Ana** | 3 |
| **Juan** | 1 |
| **Pedro** | 2 |
| **María** | 4 |

**Utilizando el método de Conteo de votos mediante matrices para determinar al candidato ganador**

Normalmente en una elección de Condorcet, los votos se cuentan, y los resultados se muestran, en forma matricial. En estas matrices, cada fila representa cada candidato como contendiente y cada columna representa cada candidato como oponente. Cada elemento de la matriz muestran el número de veces que el contendiente gana al oponente. La diagonal principal queda en blanco porque no se puede comparar a un candidato consigo mismo.

En este caso el candidato preferido es Juan, Pedro no le disgusta, Ana le parece peor y María es la peor opción. Ese voto se convierte en matriz, de manera que un 1 quiere decir que prefiere al contendiente y un 0 que prefiere al oponente:

| | **Oponente** | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | **Ana** | **Juan** | **Pedro** | **María** | |
| Contendiente | **Ana** | — | 0 | 0 | 1 |
| | **Juan** | 1 | — | 1 | 1 |
| | **Pedro** | 1 | 0 | — | 1 |
| | **María** | 0 | 0 | 0 | — |

Estas matrices son muy útiles porque para obtener el resultado general de las votaciones sólo hay que sumar todas las matrices de cada voto. Supongamos que hay otros dos votantes, cuyas preferencias son: (María, Alicia, Pedro, Juan) y (Alicia, Pedro, Juan, María). Si convertimos a matriz los tres votos y los sumamos obtenemos la siguiente matriz:

| | **Oponente** | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | **Ana** | **Juan** | **Pedro** | **María** | |
| Contendiente | **Ana** | — | 2 | 2 | 2 |
| | **Juan** | 1 | — | 1 | 2 |
| | **Pedro** | 1 | 2 | — | 2 |
| | **María** | 1 | 1 | 1 | — |

Se ha resaltado quién gana más encuentros de los contendientes. Como Ana tiene toda la fila resaltada (es decir, en todos los casos hay dos votantes que la prefieren al resto de candidatos cuando lo miramos candidato a candidato) ella es la ganadora de Condorcet.

Podría haberse dado el caso de que no hubiera ganador de Condorcet, en cuyo caso se usa un método alternativo que complete la elección. Por ejemplo, el método Schulze usa la información en esa matriz para decidir el ganador. En términos matemáticos estrictos, en lugar de guiones (—) deberíamos haber escrito '0', pero para estos ejemplos un guión es mucho más claro.

4. **Imaginemos que los habitantes de Tennessee, un estado de Estados Unidos quiere elegir su capital. Las cuatro ciudades más grandes de Tennessee son las candidatas. Imaginemos que todo el electorado quiere que la capital sea la ciudad en la que viven, o que esté lo más cerca posible a su ciudad. Las ciudades candidatas son:**
   - **Memphis La ciudad más grande, con el 42% de los votantes pero muy lejana del resto de las ciudades.**
   - **Nashville con el 26% de los votantes.**
   - **Knoxville con el 17% de los votantes.**
   - **Chattanooga con el 15% restante.**

**Las preferencias de los votantes son las siguientes:**

| **42% de los votantes (cercanos a Memphis)** | **26% de los votantes (cercanos a Nashville)** | **15% de los votantes (cercanos a Chattanooga)** | **17% de los votantes (cercanos a Knoxville)** |
|---|---|---|---|
| • **Memphis**<br>• **Nashville**<br>• **Chattanooga**<br>• **Knoxville** | • **Nashville**<br>• **Chattanooga**<br>• **Knoxville**<br>• **Memphis** | • **Chattanooga**<br>• **Knoxville**<br>• **Nashville**<br>• **Memphis** | • **Knoxville**<br>• **Chattanooga**<br>• **Nashville**<br>• **Memphis** |

### ¿Cuál será la ciudad ganadora desde el punto de vista de Condorcet?

Para encontrar el ganador de Condorcet, cada ciudad candidato ha de ser enfrentada con el resto de candidatos en batallas imaginarias uno a uno. En cada emparejamiento, la ciudad ganadora es la candidata preferida por la mayoría de los votantes. Los resultados de cada emparejamiento son los siguientes:

| **Pareja** | **Ganador** |
|---|---|
| Memphis (42%) vs. Nashville (58%) | Nashville |
| Memphis (42%) vs. Chattanooga (58%) | Chattanooga |
| Memphis (42%) vs. Knoxville (58%) | Knoxville |
| Nashville (68%) vs. Chattanooga (32%) | Nashville |
| Nashville (68%) vs. Knoxville (32%) | Nashville |
| Chattanooga (83%) vs. Knoxville (17%) | Chattanooga |

Los matriz de resultados es la siguiente:

| | | A | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | Memphis | Nashville | Chattanooga | Knoxville |
| B | Memphis | | [A] 58%<br>[B] 42% | [A] 58%<br>[B] 42% | [A] 58%<br>[B] 42% |
| | Nashville | [A] 42%<br>[B] 58% | | [A] 32%<br>[B] 68% | [A] 32%<br>[B] 68% |
| | Chattanooga | [A] 42%<br>[B] 58% | [A] 68%<br>[B] 32% | | [A] 17%<br>[B] 83% |
| | Knoxville | [A] 42%<br>[B] 58% | [A] 68%<br>[B] 32% | [A] 83%<br>[B] 17% | |
| Resultado final: | | 4ª | 1ª | 2ª | 3ª |

- [A] indica votantes que prefieren a la candidata de la columna a la de la fila.
- [B] indica votantes que prefieren a la candidata de la fila a la de la columna.

Como vemos en las dos tablas anteriores, Nashville gana cualquier otro candidato cuando se les enfrenta uno a uno. Por tanto, Nashville es la ganadora de Condorcet. Cualquier método de Condorcet daría a Nasville como ganadora. Si hubieramos usado el sistema de voto por mayoría simple hubiera ganado Memphis, aunque el 58% de los votantes cree que es la peor opción. Instant run-off hubiera dado como ganador a Knoxville.

**5. Consideremos tres países, con cinco habitantes cada uno. En el primero, las rentas de sus habitantes, ordenadas de más a menos, son (4,4,5,6,6), en el segundo son (3,4,5,6,7) mientras que en el tercero son (4,4,4,4,9). ¿Cuál es más igualitario?**

Parece obvio que el primero es más igualitario que el segundo, puesto que el más pobre en el primero es más rico que el más pobre del segundo, y el más rico del primero es menos rico que el más rico del segundo, mientras que los demás están igual.
No es inmediato comparar el primero con el tercero. Por un lado, hay menos dispersión en el primero, pero en el segundo todos menos el más rico ganan exactamente lo mismo

según Rawls, el criterio del más desfavorecido, las sociedades primera y tercera serían preferibles a la segunda.

Según el criterio del velo de la ignorancia necesitamos una estimación de lo que preferirían los individuos antes de saber quiénes serán en cada sociedad. Si sólo les interesa la renta media, estarán indiferentes entre las tres, pues en todas, la renta media es de 5. Si, en cambio, tienen preferencias del tipo “más dinero es mejor, pero cantidades adicionales incrementan la felicidad cada vez menos” podrían elegir sociedades más igualitarias.

Por ejemplo, si la felicidad es proporcional, no a la riqueza, sino a su logaritmo, tendríamos que, en una sociedad con rentas (a,b,c,d,e) los individuos tendrían una felicidad media calculada así:

Felicidad media = 1/5 x log(a) + 1/5 x log(b) + 1/5 x log(c) +1/5 x log(d) + 1/5 x log(e)

Como todas las sociedades tienen 5 individuos, en lugar de la felicidad media, podemos trabajar con la felicidad total, que es más fácil:

Felicidad total = log(a) + log(b) + log(c) + log(d) + log(e)

Si repasamos nuestras matemáticas y recordamos que el logaritmo del producto es la suma de logaritmos, podremos reescribir la fórmula así:

Felicidad total = log(a x b x c x d x e)

Si seguimos repasando nuestras matemáticas, recordaremos que el logaritmo de un número es mayor cuanto mayor sea ese número, así que para encontrar la sociedad que tiene una mayor felicidad basta encontrar cuál tiene un producto de las rentas mayor. En nuestros ejemplos, los productos son:

Sociedad 1: 4 x 4 x 5 x 6 x 6 = 2,880
Sociedad 2: 3 x 4 x 5 x 6 x 7 = 2,520
Sociedad 3: 4 x 4 x 4 x 4 x 9 = 2,304

Según el criterio del velo de la ignorancia, la sociedad primera es mejor que la segunda y ésta mejor que la tercera. Este ordenamiento es distinto al que hace el criterio rawlsiano.

**6. Existen 200 kg de alimentos en una isla y se deben distribuir entre dos marineros abandonados. La función de utilidad del primer marinero está dada por $U_1 = \sqrt{F_1}$ donde** $F_1$ **es la cantidad de alimentos consumidos por el primer marinero. Para el segundo marinero, la utilidad (como función del consumo de alimentos) está dada por:** $U_2 = \frac{1}{2}\sqrt{F_2}$

**a. Si los alimentos se distribuyen por igual entre los marineros ¿Cuánta utilidad recibirá cada uno?**
**b. ¿Cómo se deben distribuir los alimentos entre los marineros para garantizar una igualdad de utilidad?**
**c. ¿Cómo deben repartirse los alimentos desde el punto de vista del criterio utilitarista?**

**a. Si los alimentos se distribuyen por igual entre los marineros**

$$U_1 = \sqrt{F_1} = \sqrt{100} = 10$$

$$U_2 = \frac{1}{2}\sqrt{F_2} = \frac{1}{2}\sqrt{100} = 5$$

$$U_2 = \frac{1}{2}\sqrt{F_2} = \frac{1}{2}\sqrt{100} = 5$$

Obtiene mayor utilidad el primer marinero.

**b. ¿Cómo se deben distribuir los alimentos entre los marineros para garantizar una igualdad de utilidad?**

Para que se tenga igualdad de utilidades

$$U_1 = U_2 \to \sqrt{F_1} = \frac{1}{2}\sqrt{F_2} \cdots \to 4F_1 = F_2$$

Por lo que la distribución será:

$F_1 + F_2 = 200$

$F_1 + 4F_1 = 200$

$5F_1 = 200$

$F_1 = 40 \cdots \to F_2 = 160$

**c. ¿Cómo deben repartirse los alimentos desde el punto de vista del criterio utilitarista?**

Se debe maximizar la suma de las utilidades sujeto a la restricción de la dotación de bienes

$$\max U_1 + U_2 = F_1 + 1/2\, F_2$$

$$s.a.\ F_1 + F_2 = 200$$

Condición

$UMgF_1 = UMgF_2$

$$\tfrac{1}{2}F_1^{-1/2} = \tfrac{1}{4}F_2^{-1/2} \to F_1 = 4F_2$$

Sustituyendo en la restricción

$F_1 + F_2 = 200$

$4F_2 + F_2 = 5$     $F_2 = 200$

$F_2 = 40$ y $F_2 = 160$

7. **Suponga que la demanda de brécol es: Q = 1,000 – 5P donde Q es la cantidad anual expresada en cientos de quintales y P es el precio en pesos por cada 100 quintales. La curva de oferta a largo plazo de brécol es: Q = 4P – 80**

**Determinar:**

- **a. El precio y la cantidad de equilibrio.**
- **b. Gasto total en brécol**
- **c. ¿Cuál es el excedente del consumidor en este equilibrio? ¿Y el excedente del productor?**
- **d. ¿Cuánto excedente total del consumidor y del productor se perdería si *Q* = 300 en lugar de *Q* = 400?**

---

a. El precio y la cantidad de equilibrio.

El equilibrio de da en donde la oferta es igual a la demanda, de esta forma:

| | |
|---|---|
| $1{,}000 - 5P = 4P - 80$ | $Q = 4P - 80$ |
| $9P = 1{,}080$ | $Q = 4(120) - 80$ |
| $P = 120$ | $Q = 400$ |
| Precio de equilibrio | Cantidad de equilibrio |

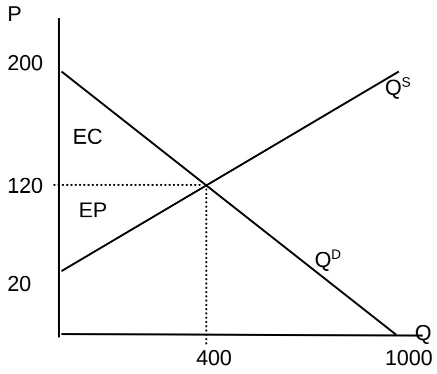
b. Gasto total en brécol

El gasto total viene dado por la multiplicación de la cantidad y su precio $G = (120)\ (400) = 48{,}000$

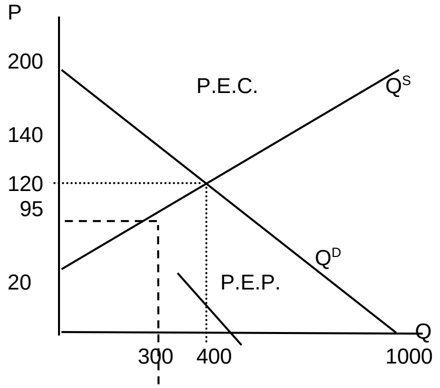
c. Excedente del consumidor y del productor en este equilibrio

Para determinar los niveles, primero graficamos las funciones y el equilibrio

Para obtener el valor de los excedentes, poder hacer uso de la obtención del área de un triangulo



$$A = \frac{b \times h}{2}$$



$$EC = \frac{(400)\times(200-120)}{2} = 16{,}000$$

$$EC = \frac{(120-20)\times(400)}{2} = 20{,}000$$

d. Como la cantidad de producción es menor a la de equilibrio, el precio se verá modificado. De esta forma, los precios de oferta y de demanda serán diferentes:

Demanda $P = 200 - {}^{300}/_{5} = 140$

Oferta $P = 20 + {}^{300}/_{4} = 95$

La cantidad disminuyo $100$ unidades. Con respecto al equilibrio: El Precio de demanda disminuyo $25$ unidades, El precio de la oferta aumento $20$ unidades

De esta forma la perdida de excedente, tanto de consumidor y de productor será:

Consumidor $\frac{(100)(200)}{2} = 1{,}000$

Productor $\frac{(25)(100)}{2} = 1{,}250$

Por lo que en forma conjunta se perdió $2{,}250$ unidades.

***8.*** **La función indirecta de un consumidor es:**

$$V(P,M)=\frac{M}{P_Y}+\frac{P_Y}{4P_X}$$

**a. Derivar la demanda Marshalliana del bien $X$.**

**b. A partir del Teorema de Hotelling derivar la demanda hicksiana del bien $X$.**

**c. A partir de una situación inicial de equilibrio con una ingreso $M$ = 100 y unos precios $P_X^0=P_Y^0=1$ si se duplica el precio de $X$, determinar la variación del bienestar del consumidor.**

---

a. Para derivar la demanda marshalliana tendremos que aplicar la identidad de Roy:

$$-\frac{\partial V/\partial P_X}{\partial V/\partial M}=X^*(P,M)\cdots\to X^*=-\frac{-4P_Y/16P_X^2}{1/P_Y}=\left(\frac{P_Y}{2P_X}\right)^2$$

Esta demanda marshalliana no depende de la ingreso monetario, eso significa que la elasticidad ingreso es nula, que el efecto ingreso es nulo y que por tanto coinciden el efecto total y el efecto sustitución.

A su vez esto significa que la demanda compensada del bien ha de ser igual a su demanda marshalliana.

Aprovechemos para obtener la demanda marshalliana del bien Y combinando con la ecuación de balance o recta presupuestaria: $M = P_XX + P_YY$

$$M=P_X\left(\frac{P_Y^2}{4P_X^2}\right)+P_YY\cdots\to Y=\frac{M}{P_Y}-\frac{P_Y}{4P_X}$$

b. Derivando la demanda hicksiana del bien $X$ a través del lema de Hotelling

Para ello Invertimos la Función Indirecta de Utilidad obteniendo la ecuación de gasto y luego aplicaremos el lema de Hotelling:

$$V(P,M)=\frac{E}{P_Y}+\frac{P_Y}{4P_X}\cdots\to E=P_Y\left(U-\frac{P_Y}{4P_X}\right)$$

$$\frac{\partial E}{\partial P_X}=h_X(P,U)\cdots\to h_X=-\left(\frac{-4P_Y^2}{16P_X^2}\right)=\left(\frac{P_Y}{2P_X}\right)^2$$

En este caso la demanda compensada coincide con la demanda Marshalliana.

Si obtenemos la demanda compensada del bien Y:

$$\frac{\partial E}{\partial P_Y}=h_Y(P,U)\cdots\to h_Y=U-\frac{P_Y}{2P_X}$$

c. A partir de una situación inicial de equilibrio con una ingreso $M$ = 100 y unos precios $P_X^0=P_Y^0=1$ se duplica el precio de $X$.

Para evaluar el empeoramiento del consumidor en términos de la variación de su bienestar utilizaremos el criterio de la Variación Compensada.
De esta forma, si sustituimos los valores correspondientes

$$VC=E_1(P^1,U^0)=P_Y^0\left(U^0-\frac{P_Y^0}{4P_X^1}\right)-P_Y^0\left(U^0-\frac{P_Y^0}{4P_X^0}\right)$$

$$VC=1\left(U^0-\frac{1}{4(2)}\right)-1\left(U^0-\frac{1}{4(1)}\right)=\frac{1}{8}$$

Ahora el de la Variación Equivalente:

$$VE = E_1\left(P^1, U^1\right) - E_0\left(P^0, U^0\right) = P_Y^0\left(U^1 - \frac{P_Y^0}{4P_X^1}\right) - P_Y^0\left(U^1 - \frac{P_Y^0}{4P_X^0}\right)$$

$$VE = 1\left(U^1 - \frac{1}{4(2)}\right) - 1\left(U^1 - \frac{1}{4(1)}\right) = \frac{1}{8}$$

Si, utilizando la demanda ordinaria, empleáramos como medida la variación del excedente del consumidor:

$$VeC = \int_1^2 \frac{1}{4P_X^2}\,dx = \left[-\frac{1}{4P_X}\right]_1^2 = -\frac{1}{8} + \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$$

Hay coincidencia entre los tres casos porque en las dos demandas, la ordinaria y la compensada (que coinciden) no entran ni la ingreso monetario, en el primer caso, ni la utilidad, en el segundo.

**9. Considere un consumidor con función de utilidad indirecta dada por:**

$$V(P_1, P_2, M) = \frac{M}{P_2} - 2\left(\frac{P_1}{P_2}\right)^{1/2} \quad ; \; M \succ (P_1, P_2)^{1/2}$$

**Inicialmente M = 16, $P_1$ = 1 y $P_2$ = 1. Suponga que debido a un impuesto $P_2$ aumenta hasta 4. Calcular**

**a. La variación compensada y la variación equivalente asociadas al aumento del precio, usando:**

- **La función indirecta de utilidad.**
- **La función de gasto.**
- **Las funciones de demanda compensadas.**

**b. La variación experimentada del excedente del consumidor.**

**c. La pérdida de eficiencia (deadweight loss) y el exceso de carga del impuesto. ¿Cómo procedería si sólo conociese las funciones de demanda marshallianas?**

---

Para dar respuesta es necesario hacer **operaciones previas:** Calculemos los niveles de **utilidad anterior y posterior** a la variación del precio:

$$U^0 = V^0 = \frac{16}{1} - 2\left(\frac{1}{1}\right)^{1/2} = 14$$

$$U^1 = V^1 = \frac{16}{4} - 2\left(\frac{1}{4}\right)^{1/2} = 3$$

Por inversión de la Función Indirecta de Utilidad obtendremos la función de Gasto**:**

$$E = \left[U + 2\left(\frac{P_1}{P_2}\right)^{1/2}\right] P_2 = 4P_2 + 2(P_1 P_2)^{1/2}$$

Las funciones de demanda compensada**,** utilizando Hotelling:

$$\frac{\partial E}{\partial P_1} = h_{X_1}(P, U) \;\; ; \; h_{X_1} = \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{1/2}$$

$$\frac{\partial E}{\partial P_2} = h_{X_2}(P, U) \;\; ; \; h_{X_2} = U + \left(\frac{P_1}{P_2}\right)^{1/2}$$

Las funciones de demanda ordinarias**,** utilizando el teorema de Roy:

$$-\frac{\partial V / \partial P_1}{\partial V / \partial M} = X_1(P, M) \cdots \rightarrow X_1 = -\frac{-2\left(1/2\right)\left(P_1/P_2\right)^{-1/2}\left(1/P_2\right)}{1/P_2} \quad ; \; X_1 = \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{1/2}$$

$$-\frac{\partial V / \partial P_2}{\partial V / \partial M} = X_2(P, M) \cdots \rightarrow X_2 = -\left[\frac{-M/P_2^2 - 2\left(1/2\right)\left(P_1/P_2\right)^{-1/2}\left(-P_1/P_2^2\right)}{1/P_2}\right]$$

$$X_2(P, M) = P_2\left[\frac{M}{P_2^2} - \frac{P_1^{1/2}}{P_2^{3/2}}\right] \quad ; \quad X_2 = \frac{M}{P_2} - \left(\frac{P_1}{P_2}\right)^{1/2}$$

*a.* Calculando las variaciones compensada y equivalente.

Mediante la FIU

Variación Compensada:
Sabemos que: $U^0 = V^0\left(P_1^1, P_2^1, M + VC\right)$

$$U^0 = \frac{M + VC}{P_2^1} - 2\left(\frac{P_1^1}{P_2^2}\right)^{1/2} \cdots \rightarrow 14 = \frac{16 + VC}{4} - 2\left(\frac{1}{4}\right)^{1/2} \quad VC = 44$$

Variación Equivalente:

Sabemos que: $U^1 = V^1\left(P_1^0, P_2^0, M - VE\right)$

$$U^1 = \frac{M - VE}{P_2^0} - 2\left(\frac{P_1^0}{P_2^0}\right)^{1/2} \cdots\rightarrow 3 = \frac{16 - VE}{1} - 2\left(\frac{1}{1}\right)^{1/2} \qquad VE = 11$$

Mediante la Función de Gasto

Variación Compensada:

$$VC\left(U^0\right) = E\left(P^1, U^0\right) - E\left(P^0, U^0\right)$$
$$VC\left(U^0\right) = \left[(14)(4) + (2)\left(1^{1/2}\right)\left(4^{1/2}\right)\right] - \left[(14)(1) + (2)\left(1^{1/2}\right)\left(1^{1/2}\right)\right] = 60 - 16 = 44$$

Variación Equivalente:

$$VE\left(U^1\right) = E\left(P^1, U^1\right) - E\left(P^0, U^1\right)$$
$$VE\left(U^1\right) = \left[(3)(4) + (2)\left(1^{1/2}\right)\left(4^{1/2}\right)\right] - \left[(3)(1) + (2)\left(1^{1/2}\right)\left(1^{1/2}\right)\right] = 16 - 5 = 11$$

**Mediante las funciones de demanda compensadas:**

$$VE = \int_1^4 \left[U^1 + \left(\frac{P_1}{P_2}\right)^{1/2}\right] dP_2 = \int_1^4 \left[3 + \left(\frac{1}{P_2}\right)^{1/2}\right] dP_2 = 3P_2 + 2P_2^{1/2}\Big|_1^4$$

$$VC = \int_1^4 \left[U^0 + \left(\frac{P_1}{P_2}\right)^{1/2}\right] dP_2 = \int_1^4 \left[14 + \left(\frac{1}{P_2}\right)^{1/2}\right] dP_2 = 14P_2 + 2P_2^{1/2}\Big|_1^4$$

*b.* Calculando la variación experimentada por el excedente del consumidor tendremos:

$$Ve \times C = \int_1^4 X_2(P, M) dP_2 = \int_1^4 \left[\frac{M}{P_2} - \left(\frac{P_1}{P_2}\right)^{1/2}\right] dP_2 = \int_1^4 \left[\frac{16}{P_2} - \left(\frac{1}{P_2}\right)^{1/2}\right] dP_2$$

c. Determinando la pérdida de eficiencia (deadweight loss) y Exceso de carga

Para ello se utiliza la función de demanda ordinaria de $X_2$ podemos calcular las cantidades demandadas inicialmente (antes del impuesto) y finalmente (después del impuesto), así como la recaudación del estado como consecuencia del impuesto.

inicialmente: $X_2 = 15$; finalmente $X_2 = 3.5$

Recaudación = (3)(3.5) = 10.5

Pérdida de eficiencia**:** *VE – Recaudación* = 11 – 10.5 = 0.5

Exceso de carga: *VC – Recaudación*: = 44 – 10.5 = 33.5

Si sólo conociéramos las funciones de demanda Marshallianas actuaríamos por aproximación de la siguiente manera:

*VC = cantidad inicial x tipo impositivo* = 15 x 3 = 45
*VE = cantidad final x tipo impositivo* = 3.5 x 3 = 10.5

10. **Suponiendo una economía en la cual existen dos factores de la producción, Capital (*K*) y Trabajo (*L*), los cuales se destinan a la producción de dos bienes (*X*) y (*Y*).**

$$\bar{K} = K_X + K_Y \qquad \bar{L} = L_X + L_Y$$

**La función de producción de cada uno de los bienes viene representada por**

$$X = X(K_X, L_X) \qquad Y = Y(K_Y, L_Y)$$

**La producción es distribuida entre dos consumidores (*A* y *B*)**

$$X = X_A + X_B \qquad Y = Y_A + Y_B$$

**La cantidad que demanden de cada uno de los bienes va a depender de la utilidad que le brinde o proporcione cada uno de ellos.**

$$U_A = U_A(X_A, Y_A) \qquad U_B = U_B(X_B, Y_B)$$

**Obtener las condiciones de eficiencia del bienestar**

Combinando estas funciones obtenemos la función de bienestar.

$$W = W(U_A, U_B)$$

El problema del bienestar será:

$$\max \quad W = W(U_A, U_B)$$

$$s.a \quad \bar{K} = K_X + K_Y$$
$$\bar{L} = L_X + L_Y$$
$$X(K_X, L_X) = X_A + X_B$$
$$Y(K_Y, L_Y) = Y_A + Y_B$$
$$U_A = U_A(X_A, Y_A)$$
$$U_B = U_B(X_B, Y_B)$$

La determinación de las condiciones óptimas será:

$$\max W = w\left[U_A(X_A, Y_A), U_B(X_B, Y_B)\right] + \lambda_1\left(\bar{K} - K_X - K_Y\right) +$$
$$+\lambda_2\left(\bar{L} - L_X - L_Y\right) + \lambda_3\left[X_A + X_B - X(K_X, L_X)\right] +$$
$$+\lambda_4\left[Y_A + Y_B - Y(K_Y, L_Y)\right]$$

Derivando Con respecto a cada una de las variables

$$\frac{dW}{dK_X} = -\lambda_1 - \lambda_3 \frac{dX(K_X, L_X)}{dK_X} = -\lambda_1 - \lambda_3 PMgK_X = 0 \quad (1)$$

$$\frac{dW}{dK_Y} = -\lambda_1 - \lambda_4 \frac{dY(K_Y, L_Y)}{dK_Y} = -\lambda_1 - \lambda_4 PMgK_Y = 0 \quad (2)$$

$$\frac{dW}{dL_X} = -\lambda_2 - \lambda_3 \frac{dX(K_X, L_X)}{dL_X} = -\lambda_2 - \lambda_3 PMgL_X = 0 \quad (3)$$

$$\frac{dW}{dL_Y} = -\lambda_2 - \lambda_4 \frac{dY(K_Y, L_Y)}{dL_Y} = -\lambda_2 - \lambda_4 PMgL_Y = 0 \quad (4)$$

$$\frac{dW}{dX_A} = W_A \frac{dU_A(X_A, Y_A)}{dX_A} + \lambda_3 = W_A \times UMgX_A + \lambda_3 = 0 \quad (5)$$

$$\frac{dW}{dX_B} = W_B \frac{dU_B(X_B, Y_B)}{dX_B} + \lambda_3 = W_B \times UMgX_B + \lambda_3 = 0 \quad (6)$$

$$\frac{dW}{dY_A} = W_A \frac{dU_A(X_A, Y_A)}{dY_A} + \lambda_4 = W_A \times UMgY_A + \lambda_4 = 0 \quad (7)$$

$$\frac{dW}{dY_B} = W_B \frac{dU_B(X_B, Y_B)}{dY_B} + \lambda_4 = W_B \times UMgY_B + \lambda_4 = 0 \quad (8)$$

Obteniendo las condiciones de primer orden: de la ecuación

(1) $-\lambda_1 = \lambda_3 PMgK_X$ Igualando $-\lambda_1$

(2) $-\lambda_1 = \lambda_4 PMgK_Y$ $\lambda_3 PMgK_X = \lambda_4 PMgK_Y$

(3) $-\lambda_2 = \lambda_3 PMgL_X$ Igualando $-\lambda_2$

(4) $-\lambda_2 = \lambda_4 PMgL_Y$ $\lambda_3 PMgL_X = \lambda_4 PMgL_Y$

De ambas ecuaciones $\frac{\lambda_4}{\lambda_3} = \frac{PMgK_X}{PMgK_Y}$

$$\frac{\lambda_4}{\lambda_3} = \frac{PMgL_X}{PMgL_Y}$$

Igualando $\frac{\lambda_4}{\lambda_3} = \frac{PMgK_X}{PMgK_Y} = \frac{PMgL_X}{PMgL_Y} \rightarrow \frac{PMgL_X}{PMgK_X} = \frac{PMgL_Y}{PMgK_Y}$

$TMgST_X = TMgST_Y$ Eficiencia en la producción

de la ecuación

(5) $-\lambda_3 = W_A \times UMgX_A$

(6) $-\lambda_3 = W_B \times UMgX_B$

(7) $-\lambda_4 = W_A \times UMgY_A$

(8) $-\lambda_4 = W_B \times UMgY_B$

Igualando $-\lambda_3$

$$W_A \times UMgX_A = W_B \times UMgX_B$$

Igualando $-\lambda_4$

$$W_A \times UMgY_A = W_B \times UMgY_B$$

De ambas ecuaciones $\frac{W_B}{W_A} = \frac{UMgX_A}{UMgX_B}$

$$\frac{W_B}{W_A} = \frac{UMgY_A}{UMgY_B}$$

Igualando $\frac{W_B}{W_A} = \frac{UMgX_A}{UMgX_B} = \frac{UMgY_A}{UMgY_B} \rightarrow \frac{UMgX_A}{UMgY_A} = \frac{UMgX_B}{UMgY_B}$

$TMgS_A = TMgS_B$ Eficiencia en el consumo

de la ecuación

(1) $-\lambda_1 = \lambda_3 PMgK_X$

(2) $-\lambda_1 = \lambda_4 PMgK_Y$

(5) $-\lambda_3 = W_A \times UMgX_A$

(7) $-\lambda_4 = W_A \times UMgY_A$

De (1) y (2)

$$\lambda_3 PMgK_X = \lambda_4 PMgK_Y$$

De (5) y (7)

$$-W_A = \frac{\lambda_3}{UMgX_A} = \frac{\lambda_4}{UMgY_A}$$

De ambas ecuaciones $\frac{\lambda_3}{\lambda_4} = \frac{PMgK_Y}{PMgK_X}$

$$\frac{\lambda_3}{\lambda_4} = \frac{UMgX_A}{UMgY_A}$$

Igualando $\frac{PMgK_Y}{PMgK_X} = \frac{UMgX_A}{UMgY_A}$ Producción mixta eficiente

# UNIDAD DE COMPETENCIA 5.

# FALLOS EN EL MERCADO: EXTERNALIDADES Y BIENES PÚBLICOS

**1. Como ilustración de la externalidad manzana-abeja, suponga que un apicultor está ubicado cerca de un huerto de 20 hectáreas de extensión. Cada colmena de abejas poliniza ¼ de hectárea de manzanos, aumentando así el valor de la producción de manzanas en $25.**

**a. Suponga que el valor de mercado de la miel de una colmena es de $50 y que los costos marginales del apicultor es $CMg = 30 + 0.5Q$, donde $Q$ es el número de colmenas empleadas. En ausencia de negociación ¿Cuántas colmenas tendrá el apicultor y qué porción del huerto será polinizada?**

**b. ¿Cuál es la cantidad máxima por colmena que el propietario del cultivo pagaría al apicultor para inducirlo a instalar más colmenas?**

---

a. Para determinar cuántas colmenas tendrá el apicultor y qué porción del huerto será polinizada.

Se trabaja bajo el supuesto de competencia perfecta, por lo cual la condición para obtener el número óptimo es $P = Cmg$,

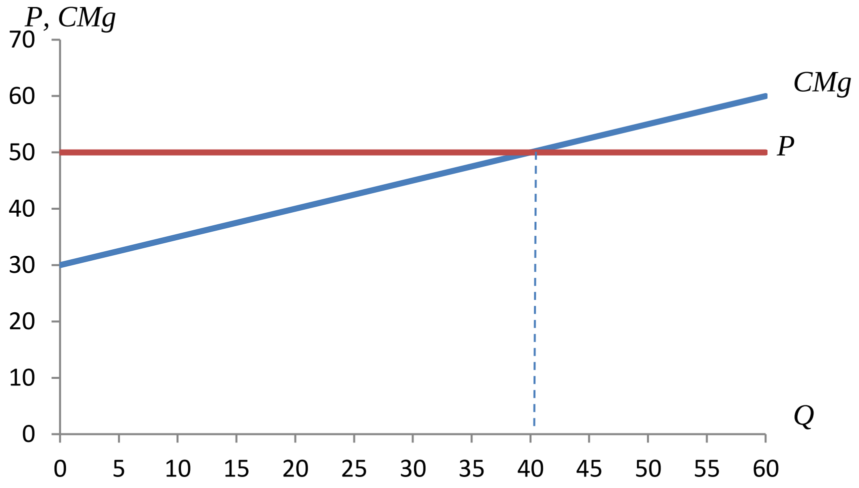
De esta forma:
$50 = 30 + 0.5Q \Rightarrow Q = 40$ abejas se requerirán

y la cantidad del huerto que será polinizada: Como cada abeja poliniza 1/4 y el número de abejas que se requerirán es de 40:
¼Q = ¼(40) = 10 hectáreas

b. En referencia a cuál es la cantidad máxima por colmena que el propietario del cultivo pagaría como subsidio al apicultor para inducirlo a instalar más colmenas
Dado que el propietario del huerto pagaría hasta $25 por colmena, ya que esto es el aumentando del valor de la producción de manzanas por cada colmena.

La gráfica correspondiente será:

| *Q* | *CMg* | *P* |
|---|---|---|
| 0 | 30.0 | 50 |
| 5 | 32.5 | 50 |
| 10 | 35.0 | 50 |
| 15 | 37.5 | 50 |
| 20 | 40.0 | 50 |
| 25 | 42.5 | 50 |
| 30 | 45.0 | 50 |
| 35 | 47.5 | 50 |
| 40 | 50.0 | 50 |
| 45 | 52.5 | 50 |
| 50 | 55.0 | 50 |
| 55 | 57.5 | 50 |
| 60 | 60.0 | 50 |



**2. Una empresa de una industria perfectamente competitiva ha patentado un nuevo proceso para fabricar ciertos artefactos. El nuevo proceso disminuye los costos medios de la empresa, lo que significa que sólo esta compañía (así sea tomadora de precios) puede recibir beneficios económicos reales a largo plazo.**

**a. Si el precio de mercado es de $\$20$ por artefacto y la curva de costo marginal de la empresa está dada por $CMg = 0.4q$, donde q es la producción diaria de artefactos de la empresa, ¿Cuántos dispositivos producirá la empresa?**

**b. Suponga que un estudio del gobierno ha encontrado que el nuevo proceso de la empresa contamina el aire y se estima que el costo marginal social de la producción de artefactos de esta empresa es $CMgS = 0.5q$. Si el precio de mercado sigue siendo $\$20$, ¿Cuál es el nivel de producción socialmente óptimo de la empresa? Para lograr este nivel de producción óptimo, ¿Cuál debería ser el monto de un impuesto específico que fije el gobierno?**

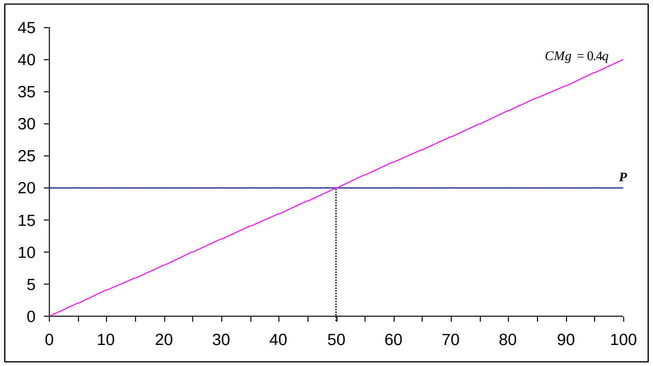
---

a. Si los datos proporcionados en el ejercicio son p = $\$20$ y $CMg = 0.4q$

Además de que la empresa pertenece a un mercado perfectamente competitivo

La condición de equilibrio establece que $P = CMg$, por lo que
$20 = 0.4q$
$q = 50$

La gráfica que muestra este equilibrio será



b. Si suponemos que un estudio del gobierno ha encontrado que el nuevo proceso de la empresa contamina el aire y se estima que el costo marginal social de la producción de artefactos de esta empresa es $CMgS = 0.5q$. Si el precio de mercado sigue siendo $\$20$, el nivel de producción socialmente óptimo de la empresa se obtiene de la siguiente forma:

Si $p = \$20$ y $CMgS = 0.5q$

La condición de equilibrio establece que $P = CMgS$, por lo que
$20 = 0.5q \Rightarrow q^* = 40$

Para lograr este nivel de producción óptimo, se debería establecer un impuesto específico por parte del gobierno, el cual debe ser de:

Con este nivel de producción
$CMg = 0.4(40) = 16$
$CMgS = 0.5(40) = 20$

El monto del impuesto que debe establecer el gobierno es:
$T = 20 – 16 = 4$

**3. La red de transporte terrestre es una industria competitiva, cuya función de costos totales es**

$$CT = 5Q^2 + 50Q + 1{,}400$$

**Dicha industria contamina el aire, pero a la red de transporte no le importa, pues no ha de pagar nada por dicha contaminación, sabiendo que la valoración marginal de los consumidores de la red de transporte viene dada por la función de demanda**

$$P = 150 - Q$$

**a. Qué combinación de cantidad y precio debe venderse los boletos para encontrarse en equilibrio?**
**b. ¿Está incluido en el precio del boleto el costo social?.**

---

a. Qué combinación de cantidad y precio debe venderse los boletos para encontrarse en equilibrio?

El equilibrio dentro de la competencia perfecta exige que $P = CMg$.

De esta forma, $CMg = \frac{\partial CT}{\partial Q} = 10Q + 50$

Por lo tanto

$$150 - Q = 10Q + 50$$

$$11Q = 100$$

$$Q = \frac{100}{11} = 9.09 \approx 9$$

Con lo que el precio será:

$$P = 150 - 9$$
$$P = 141$$

b. ¿Está incluido en el precio del boleto el costo social?.

Como la industria no paga daños, el costo social no esta incluido dentro del costo privado.

El precio del billete es inferior a su precio real.

**4. Un apicultor vive al lado de un manzanar, cuyo dueño se beneficia, porque cada colmena poliniza alrededor de una hectárea. Sin embargo, el dueño del manzanar no paga nada por este servicio, porque las abejas acuden al manzanar sin que tenga que hacer nada. No hay suficientes abejas para polinizar todo el manzano, por lo que su dueño debe completar la polinización por medios artificiales con un costo de 10 pesos por hectárea de árboles.**

**La apicultura tiene un costo marginal de $CMg = 10 + 2Q$, donde $Q$ es el número de colmenas. Cada colmena produce miel por valor de $20.**

**a. ¿Cuántas colmenas mantendrá el apicultor?**

**b. ¿Es económicamente eficiente este número de colmenas?**

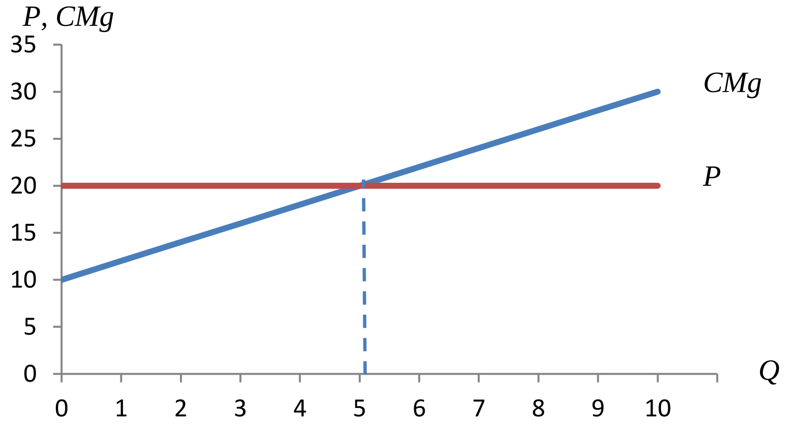
**c. ¿Qué cambios harían que esta actividad fuera más eficiente?**

---

a. Para determinar cuántas colmenas mantendrá el apicultor, se considerá la condición $Img = CMg$

Con un $IMg$ constante e igual a $20$ y un costo marginal $CMg = 10 + 2Q$, tendremos que $Q = 5$.

La gráfica correspondiente será:



b. Para determinar si es económicamente eficiente este número de colmenas, se debe considerar que si las abejas no acuden al manzanar, el agricultor debe pagar $10 por hectárea por la polinización artificial. Como estaría dispuesto a pagar hasta $10 al apicultor para que mantuviera cada colmena adicional, el beneficio social marginal de cada abeja es

$10 + $20 = $30 ($20 del valor de la producción) que es mayor que el beneficio privado marginal de $20. De esta forma, igualando el beneficio social marginal y el costo marginal:

$30 = 10 + 2Q \quad Q = 10$ abejas necesarias, por lo que el número de la parte a es insuficiente.

c. Dentro de los cambios harían que esta actividad fuera más eficiente está el cambio más radical que haría que esta actividad fuera más eficiente sería la fusión del negocio del agricultor y el apicultor.

Esta fusión internalizaría la externalidad positiva de la polinización de las abejas. Si no se produce la fusión, el agricultor y el apicultor deberían firmar un contrato por los servicios de polinización.

**5. La demanda de osos de peluche está dada por $Q = 200 – 100P$ y estos se pueden fabricar con un $CMg = 0.50$**

**a. Cuánto estaría dispuesto a pagar en sobornos la empresa para que el gobierno le otorgué una concesión de monopolio**

**b. Este soborno representa un costo para el bienestar.**

---

a. Dado que es una empresa que busca la concesión de monopolio, debe calcular los beneficios bajo esta modalidad, dado que este será el monto que estará dispuesto a pagar.

La condición es la de $Img = CMg$
Partiendo de la función de demanda
$Q = 200 – 100P$
$P = 2 – 0.01Q$

De esta forma: $IT = (2 – 0.01Q)Q$
$Img = 2 – 0.02Q$

Que trasladándola a la condición de optimización
$2 – 0.02Q = 0.50$
$Q = 75$

Y el precio de equilibrio
$P = 2 – 0.01(75)$
$P = 125$

Con este nivel de producción de 75 y el precio de 125, el nivel de los beneficios obtenido será:

$\Pi = (125)(75) – 0.5(75)$
$\Pi = 93.75 – 37.5$
$\Pi = 56.25$ Monto a pagar como soborno

b. Este soborno representa un costo para el bienestar, el soborno solo es una transferencia de beneficios de la empresa al empleado oficial. Este no es un costo de bienestar

El verdadero costo de beneficio es la pérdida del excedente del consumidor debido al monopolio.

El valor de esta pérdida es $0.5(1.25 – 0.5)(75) = 28.125$
La restricción de producción del monopolio es de 75, cantidad menor a la de competencia perfecta la cual es de 150.

**6. En una economía existe un bien público ($x_1$) y otro privado ($x_2$), dos consumidores ($A$ y $B$ con dos funciones de utilidad $U^A$ y $U^B$) y una función de transformación $F(x_1, x_2) = 0$**

**a. Plantear el problema cuya solución proporcione la asignación óptima paretiana.**

**b. Proporcione, para este caso, la condición de eficiencia paretiana**

**c. ¿Qué igualdad cumplirían las relaciones marginales de sustitución en un equilibrio competitivo con precios $p_1$ y $p_2$?**

---

a. El Planteamiento del problema consiste en maximizar la función de utilidad de uno de los consumidores teniendo como restricción la función de utilidad del otro consumidor y la función de transformación, es decir

$$\left.\begin{array}{l} Max\ U^A\left(x_1, x_2^A\right) \\ s.a \quad U^B\left(x_1, x_2^B\right) = \overline{U} \\ F\left(x_1, x_2\right) = 0 \end{array}\right\}$$

o lo que es lo mismo

$$\left.\begin{array}{l} Max\ U^B\left(x_1, x_2^B\right) \\ s.a \quad U^A\left(x_1, x_2^A\right) = \overline{U} \\ F\left(x_1, x_2\right) = 0 \end{array}\right\}$$

b. La Condición de eficiencia paretiana se da mediante las tasas marginales de sustitución de ambos consumidores y la relación marginal de transformación

De esta forma:

$$TMgS^A + TMgS^B = \frac{\dfrac{\partial U^A}{\partial x_1}}{\dfrac{\partial U^A}{\partial x_2^A}} + \frac{\dfrac{\partial U^B}{\partial x_1}}{\dfrac{\partial U^B}{\partial x_2^B}} = \frac{\dfrac{\partial F}{\partial x_1}}{\dfrac{\partial F}{\partial x_2}} = RMgT$$

c. Dada la condición anterior y considerando que los consumidores deben estar en equilibrio con el mercado y el mercado con la eficiencia de la producción, la condición de igualdad se cumplirían para las relaciones marginales de sustitución en un equilibrio competitivo.

Es decir

$$TMgS^A = TMgS^B = \frac{p_1}{p_2} = RMgT$$

7. **Las funciones de demanda de un bien público que consumen dos individuos $A$ y $B$ son $Q^D = 40 - 2P_A$ y $Q^D = 30 - \frac{1}{2}P_B$**

**Determinar:**

a. **La demanda conjunta del bien público**
b. **Cuál será la valoración social (Precio) de cada unidad del bien, si la provisión óptima es de 10 unidades**
c. **El precio máximo que estaría dispuesto a pagar cada individuo cuando se suministra el nivel óptimo del bien público**

---

a. La demanda conjunta del bien público se obtiene mediante la suma vertical de las demandas individuales.

La cantidad del bien es la misma para ambos individuos (el total disponible para el mercado) por que la cantidad disponible para cada uno no se ve afectada por la utilización del bien por parte de los demás.

De esta forma, despejando el precio de cada función de demanda

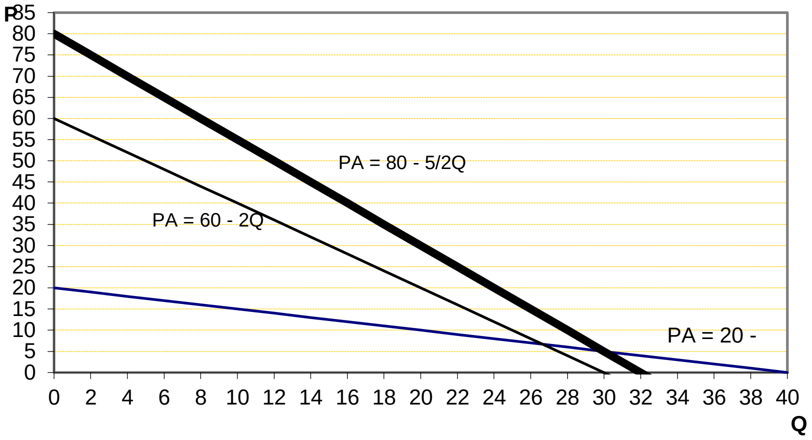
$Q^D = 40 - 2P_A$ $\qquad$ $Q^D = 30 - \frac{1}{2}P_B$
$P_A = 20 - \frac{1}{2}Q^D$ $\qquad$ $P_B = 60 - 2Q^D$

Realizando la suma correspondiente

$P = P_A + P_B = 20 - \frac{1}{2}Q^D + 60 - 2Q^D$
$P = 80 - {}^5/_2 Q^D$

$\therefore\ Q^D = 32 - {}^2/_5 P$ Función de demanda conjunta

La gráfica de este comportamiento será:



b. Cuál será la valoración social (Precio) de cada unidad del bien, si la provisión óptima es de 10 unidades

Si $Q = 10$, sustituyendo en la función de demanda conjunta tenemos:
$Q^D = 32 - {}^2/_5 P \ \rightarrow\ P = 80 - {}^5/_2(10) = 55$

$\therefore$ 55 sería el precio o valoración social del bien público si la provisión óptima es 10

c. El precio máximo que estaría dispuesto a pagar cada individuo cuando se suministra el nivel óptimo del bien público

Si el nivel óptimo es 10 unidades, el precio máximo que estarían dispuestos a pagar cada individuo se obtiene al sustituir dicho nivel óptimo en cada una de las funciones de demanda.

$Q^D = 40 - 2P_A \rightarrow P_A = 20 - \frac{1}{2}Q^D \rightarrow P_A = 20 - \frac{1}{2}(10) = 15$
$Q^D = 30 - \frac{1}{2}P_B \rightarrow P_B = 60 - 2Q^D \rightarrow P_B = 60 - 2(10) = 40$

**8. Diez consumidores homogéneos tienen todos ello unas curvas individuales de disposición a pagar $P = 12 - {}^{1}/_{5}q$ por el bien público: un concierto en un parque, donde $P$ esta expresado en Pesos y q representa el número de minutos que dura el concierto,**

**a. Hallar y representar gráficamente la curva agregada de disposición a pagar**

**b. En el caso de un concierto de 30 minutos, ¿Cuál es la cantidad máxima que estaría dispuesto a pagar cada uno?**

**c. Suponiendo que el costo marginal de proporcionar el concierto es $CMg = 2q$. Hallar la duración óptima del concierto.**

---

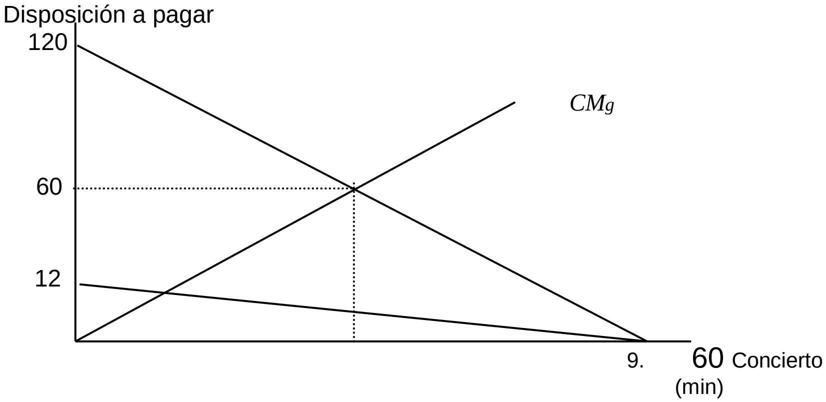
a. La curva agregada de disposición a pagar sería la suma vertical de las curvas individuales de disposición a pagar: $P = 120 - 2q$

b. En el caso de un concierto durara 30 minutos, cada persona estaría dispuesto a pagar: $P = 12 - {}^{1}/_{5}q = 12 - {}^{1}/_{5}(30) = 6$, lo que da un total de $60 en el caso de los 10 consumidores.

c. Suponiendo que el costo marginal de proporcionar el concierto es $CMg = 2q$.

Para hallar la duración óptima del concierto, se tiene que igualar la disposición agregada a pagar $P = 120 - 2q$ y el costo marginal $CMg = 2q$, de donde se obtiene que $q = 30$ minutos.

La gráfica que muestra el equilibrio sería la siguiente:



9. **Suponga que la Frontera de Posibilidades de la producción de una economía que produce un bien público (*P*) y un bien privad (*G*) viene dada por**

$$FPP \qquad G^2 + 100P^2 = 5{,}000$$

**Esta economía está formada por 100 personas idénticas, cada una de las cuales tiene una función de utilidad de la forma**

$$U = \sqrt{G_i P}$$

**donde $G_i$ es la proporción de la producción de un bien privado correspondiente al individuo ($G_i$ = $^{G}/_{100}$). Obsérvese que el bien público no es exclusivo y que todo el mundo se benefició por igual de su nivel de producción**

a. **Si el mercado de *G* y *P* fueran perfectamente competitivos, ¿Qué niveles de esos bienes se producirían? ¿Cuál sería la utilidad del individuo representativo de esa situación?**
b. **¿Cuáles son los niveles óptimos de producción de *G* y *P*? ¿Cuál sería el nivel de utilidad del individuo representativo? ¿Cómo debería gravarse el consumo del bien G para obtener ese resultado?**

a. Si el mercado de *G* y *P* fueran perfectamente competitivos, ¿Qué niveles de esos bienes se producirían? ¿Cuál sería la utilidad del individuo representativo de esa situación?

Si cada persona se comporta como parásito, la utilidad es cero, dado que cada quien esperaría obtener una utilidad de otra persona.

b. Para determinar los niveles óptimos de producción de *G* y *P*, el nivel de utilidad del individuo representativo y la forma en cómo debería gravarse el consumo del bien G para obtener ese resultado se debe plantear un problema a través del cual se de solución mediante a condición de optimización establece

$$TMgS = \frac{UMgP}{UMgG_i} = \frac{d/dP}{d/dG_i} = TMgT$$

Con lo cual, y tomando como base el planteamiento original

$$\frac{G_i}{P} = \frac{100P}{G_i} \rightarrow G_i^2 = 100P^2$$

Sustituyendo esta última expresión en la restricción $(FPP)$

$$G^2 + G^2 = 5{,}000$$

$$2G^2 = 5{,}000$$

$$G = \sqrt{2{,}500} = 50 \qquad G_i = \frac{50}{100} = 0.5$$

Nivel de producción con el cual el $P$ es $G_i^2 = 100P^2$

$$P = \sqrt{\frac{(50)^2}{100}} = 5$$

Con estos niveles de producción, la utilidad será de

$$U = \sqrt{(0.5)(5)} = \sqrt{2.5}$$

10. **Suponga una economía donde existen dos consumidores, un bien privado ($x_1$) y un bien público ($x_2$). Las preferencias de los consumidores son idénticas y vienen representadas por la función de utilidad $U^i\left(x_1^i, x_2\right) = x_1^i x_2$ para $i$ = 1, 2. Cada consumidor dispone de 45 unidades de $x_1$ como dotaciones iniciales que se utilizan para su consumo directo y para la producción del bien público $x_2$ de acuerdo con la siguiente función de producción $y_2$= ½ $y_1$, donde $y_2$ es la cantidad producida del bien público (es obvio que $y_2 = x_2$) e $y_1$ es la cantidad del bien $x_1$ utilizada como factor en la producción del bien público. Calcular:**

a. **La curva de transformación o frontera de posibilidades de la producción**

b. **Las cantidades de los bienes $x_1$ y $x_2$ óptimas**

c. **Las cantidades de los bienes de equilibrio general**

---

a. Para calcular la curva de transformación (*CT*) partimos de que la suma de las cantidades consumidas de $x_1$ más las cantidades utilizadas del mismo como factor de producción deben ser igual a las dotaciones iniciales.

Esto es $\sum_i x_1^i + y_1 = 90$

Sustituyendo $y_1$ por su expresión en la *FPP* se llega a $CT = x_1^1 + x_1^2 + 2y_2 = 90$, o, expresada en función de $x_1$ y $x_2$: $x_1^1 + x_1^2 + 2x_2 = 90$

b. La obtención de las cantidades de los bienes $x_1$ y $x_2$ óptimas se da mediante el problema a resolver:

$$\left.\begin{array}{l} Max\ \ U^1 = x_1^1 x_2 \\ s.a\ \ \ U^2 = x_1^2 x_2 \\ x_1^1 + x_1^2 + 2y_2 = 90 \\ x_2 = y_2 \end{array}\right\}$$

$$L(.) = x_1^1 x_2 - \lambda_1\left[\bar{U}^2 - x_1^2 x_2\right] - \lambda_2\left[x_1^1 + x_1^2 + 2y_2 - 90\right] - \lambda_3\left[x_2 - y_2\right]$$

Las *CPO* de este problema son:

$$\frac{\partial L}{\partial x_1^1} = x_2 - \lambda_2 = 0 \qquad (1) \qquad \lambda_2 = x_2$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_1^2} = \lambda_1 x_2 - \lambda_2 = 0 \qquad (2) \qquad \lambda_1 x_2 = x_2 \quad \lambda_1 = 1 \text{ Por (1)}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = x_1^1 + \lambda_1 x_1^2 - \lambda_3 = 0 \qquad (3)$$

$$\frac{\partial L}{\partial y_2} = -2\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \qquad (4) \quad \lambda_3 = 2\lambda_2 \qquad \lambda_3 = 2x_2 \text{ por (1)}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = \bar{U}^2 - x_1^2 x_2 = 0 \qquad (5)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = x_1^1 + x_1^2 + 2y_2 - 90 = 0 \ (6)$$

en términos de x $\quad x_1^1 + x_1^2 + 2x_2 - 90 = 0$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_3} = x_2 - y_2 = 0 \qquad (7)$$

Sustituyendo ( 2 ) y ( 4 ) en ( 3 )

$$x_1^1 + x_1^2 - 2x_2 = 0 \cdots \rightarrow 2x_2 = x_1^1 + x_1^2 \qquad (8)$$

Sustituyendo ( 7 ) en ( 6 )

$$x_1^1 + x_1^2 + 2x_2 = 90 \xrightarrow{por\ (8)} x_1^1 + x_1^2 + x_1^1 + x_1^2 = 90$$

Factorizando

$2\left(x_1^1 + x_1^2\right) = 90$ pero como $x_1 = x_1^1 + x_1^2$

$\rightarrow 2x_1 = 90 \cdots \Rightarrow x_1^* = 45$

A partir de este valor y sustituyendo en ( 8 ) $2x_2 = x_1^1 + x_1^2$

$$x_2^* = \frac{x_1^1 + x_1^2}{2} = \frac{45}{2} = 22.5$$

Que para comprobar sustituimos en la FPP

$$CT = x_1^1 + x_1^2 + 2y_2 = 90 = \frac{45}{2} + \frac{45}{2} + 2\left(22.5\right)$$

c. La cantidad de bienes de equilibrio general se obtienen mediante el establecimiento de un problema:

El problema de la producción del bien público es:

$$\left.\begin{array}{l} Max \quad \pi^2 = p_2 y_2 - p_1 y_1 \\ s.a \quad y_2 = \frac{1}{2} y_1 \end{array}\right\} Max \quad \pi^2 = p_2 y_2 - p_1 2 y_2$$

La *CPO* es $\frac{\partial \pi^2}{\partial y_2} = p_2 - 2p_1 = 0 \cdots \rightarrow \frac{p_1}{p_2} = \frac{1}{2}$

Lo cual nos indica que el precio relativo del *EGC* es 0.5 y los beneficios generados en la producción del bien son nulos.

El consumidor i-ésimo maximizará su nivel de utilidad a través del problema:

$$\left.\begin{array}{l} Max \quad U^i = x_1^i x_2 \\ s.a \quad p_1 x_1^i + p_2 x_2 = 45 p_1 \end{array}\right\} L(.) = x_1^i x_2 - \lambda\left[p_1 x_1^i + p_2 x_2 - 45 p_1\right]$$

Las dos primeras *CPO* son:

$$\frac{\partial L}{\partial x_1^i} = x_2 - \lambda p_1 = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda = \frac{x_2}{p_1}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = x_1^i - \lambda p_2 = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda = \frac{x_1^i}{p_2}$$

De donde $x_2 = \frac{p_1}{p_2} x_1^i$ y sustituyendo esta expresión en la tercera *CPO* (restricción):

$$p_1 x_1^i + \cancel{p_2}\left(\frac{p_1}{\cancel{p_2}} x_1^i\right) = 45 p_1 \cdots \rightarrow \left(x_1^i\right)^* = \frac{45}{2}$$

Esta es la demanda de equilibrio del bien privado. Sustituyendo:

$$x_2 = \frac{p_1}{p_2} x_1^i \cdots \rightarrow x_2^* = \frac{45}{4} = 11.25$$

Y como $x_1 = x_1^1 + x_1^2 = \frac{45}{2} + \frac{45}{2} = 45$

La asignación del equilibrio general del consumidor no es una asignación óptima. La oferta del bien público del *EGC* es insuficiente en términos de optimalidad.

# BIBLIOGRAFÍA

Básica

- Carrasco, Amparo, et. al. Microeconomía Intermedia, problemas y cuestiones, McGraw Hill, Madrid España, 2003.
- Gravelle, Hugh y Ray Rees, Microeconomía, Pearson, Prentice Hall, Madrid, España, 2006.
- Henderson J.M y Quandt R.E. Teoría Microeconómica, Ariel, 1991.
- Koutzoyanis, Ana. Microeconomía Intermedia, Amorrortu Editores, Argentina, Buenos Aires, 1987.
- Maté García, Jorge Julio y Carlos Pérez Domínguez, Microeconomía avanzada: cuestiones y ejercicios resueltos, Pearson Prentice Hall, Madrid España, 2007.
- R. Binger Brian, Microeconomics with calculus, Harper Collins Publisher, 1988.
- Tugores Juan, Microeconomía: cuestiones y problemas, McGraw Hill.
- Varian R, Hal, Microeconomía Intermedia, Antoni Bosch, 3a ed. 1994.
- Varian R, Hal, Análisis Microeconómico, Antoni Bosch, 3a. ed.1992.

**COMPLEMENTARIA**

- Leftwich, Richard H. Eckert Ross. Sistema de Precios y asignación de recursos. 9ª Ed. Mc Graw Hill México.
- D. Blair, Roger y W. Kenny, Lawrence. Microeconomía con aplicaciones a la empresa, McGraw Hill, 1990.
- Jorge A. Ludlow – Wiechers. Economía Matemática I y II .Edit. LIMUSA. México 1987
- Dominick Salvatore. Economía y Empresa, Mc Graw Hill. Colombia 1992.
- C.E. Ferguson, J.P. Gould. Teoría Microeconómica, Fondo de Cultura Económica, México 1975.
- Layard y Walters. Microeconomics Theory, Mc Graw Hill. Nueva York, 1978.
- Nicholson, Walter. Microeconomics Theory. 5ª Ed.

# ANEXO: PROGRAMA DE LA UNIDAD DE APRENDIZAJE

## I. Datos de identificación

| | |
|---|---|
| Espacio educativo donde se imparte | **Facultad de Economía** |
| Licenciatura | **Negocios Internacionales, Bilingüe** |
| Unidad de aprendizaje | **Microeconomía 2** |
| Clave | **L44109** |

Carga académica

| | | | |
|---|---|---|---|
| 4 | 2 | 6 | 10 |
| Horas teóricas | Horas prácticas | Total de horas | Créditos |

Período escolar en que se ubica

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | **3** | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |

Seriación

| | |
|---|---|
| Microeconomía 1 | Macroeconomía 1 |
| UA Antecedente | UA Consecuente |

Tipo de UA

| | | | |
|---|---|---|---|
| Curso | ☐ | Curso taller | X |
| Seminario | ☐ | Taller | ☐ |
| Laboratorio | ☐ | Práctica profesional | ☐ |
| Otro tipo (especificar) | | | |

Modalidad educativa

| | |
|---|---|
| Escolarizada. Sistema rígido | ☐ |
| Escolarizada. Sistema flexible | X |
| No escolarizada. Sistema virtual | ☐ |
| No escolarizada. Sistema a distancia | ☐ |
| No escolarizada. Sistema abierto | ☐ |
| Mixta (especificar). | |

Formación común

| | |
|---|---|
| Actuaría 2004 | X |
| Economía 2004 | X |
| Relaciones Económicas Internacionales | X |
| Negocios Internacionales 2010 | X |
| Negocios Internacionales, Bilingüe 2010 | X |

Formación equivalente

## II. Ubicación de la unidad de aprendizaje en el mapa curricular

| | |
|---|---|
| Núcleo de formación | Básico |
| Área curricular | Economía |
| Carácter de la UA | Obligatoria X Optativa ☐ |

Elaboró

| UAP Cuautitlán Izcalli | Facultad de Economía |
|---|---|
| M. en E. David Ortega Pineda | M. en E Joel Martínez Bello |
| M. en A. Gloria Piloni Flores | M. en E Juvenal Rojas Merced |
| M. en A. Jenny Alvares Botello | L. en E. Octavio C. Bernal Ramos |
| M.A. N Silvia Magdalena Aguilar Pérez | |

## III. Objetivos de la formación profesional.

**Objetivos del programa educativo:**

- Analizar el contexto de los Negocios Internacionales, los factores determinantes de su práctica y los mercados de oportunidad para invertir.
- Fomentar acciones de inversión extranjera directa de negocios nacionales mediante un adecuado estudio de los mercados internacionales.
- Promover operaciones de intercambio internacional de bienes y servicios en las organizaciones, procurando la optimización de recursos.
- Implementar proyectos de negociaciones internacionales socialmente sostenibles y sustentables en beneficio de las organizaciones.
- Guiar los procesos empresariales y diversificar sus opciones de inversión con apoyo de instrumentos financieros.
- Orientar estratégicamente Negocios Internacionales para aprovechar oportunidades que contribuyan al progreso del país y a la organización.
- Desarrollar programas de comercialización en ámbitos de los mercados internacionales, incorporando aspectos normativos aduaneros, logísticos, bancarios y financieros. Facilitar las transacciones internacionales con apoyo de las nuevas tecnologías de comunicación y uso de capacidades lingüísticas e interculturales.
- Colaborar en el diseño de estrategias relacionados con la producción, el financiamiento y la comercialización de la empresa con el exterior.
- Investigar los principales problemas que enfrenta la gestión internacional de las organizaciones e identificar estrategias apropiadas para la inserción internacional de las mismas.

**Objetivos del núcleo de formación:**
Promover en el alumno/a el aprendizaje de las bases contextuales, teóricas y filosóficas de sus estudios, la adquisición de una cultura universitaria en las ciencias y las humanidades, y el desarrollo de las capacidades intelectuales indispensables para la preparación y ejercicio profesional, o para diversas situaciones de la vida personal y social.

**Objetivos del área curricular o disciplinaria:**
Comprender, analizar y aplicar conceptos, métodos y variables económicas indispensables en el desenvolvimiento adecuado de los Negocios Internacionales, así como su importancia en la conducta agregada de la economía, la balanza de pagos, el Estado, la globalización y la integración económica.

Analizar el comportamiento de los consumidores y los productores en las diferentes estructuras de mercado, los procesos de intercambio y la manera en que son afectados por los sucesos económicos mundiales, así como su repercusión en sus utilidades, precio y producción. Identificar, conocer y analizar las alianzas estratégicas que se suscitan bajo el contexto de la economía industrial, así como los mecanismos operantes de propiedad intelectual e industrial a nivel mundial, los tipos de sociedades, los requisitos legales de apertura y la operación de patentes, marcas y franquicias.

Analizar las implicaciones de la Política Monetaria y Fiscal en las empresas nacionales, además de identificar los recursos económicos, fiscales, geográficos, culturales y sociales que brinden a México ventajas de inversión para empresas de carácter internacional.

## IV. Objetivos de la unidad de aprendizaje.

Comprender los principios del equilibrio general de una economía, mediante el análisis de los procesos de intercambio en el consumo y producción, y la manera en que éstos son afectados por las principales fallas del mercado que condicionan la eficiencia.

## V. Contenidos de la unidad de aprendizaje y su organización.

1. Equilibrio del Mercado 1.1 Equilibrio del consumidor
   1.2 Equilibrio del Productor.
2. Equilibrio General en una Economía de Intercambio Puro
   2.1. Dotaciones iniciales e intercambio.
   2.2. La caja de Edgeworth
   2.3. La curva de contrato
   2.4. La asignación eficiente en el sentido de Pareto
   2.5. La curva de posibilidades de utilidad.
   2.6. Equilibrio y eficiencia
3. Equilibrio General Competitivo en una Economía de Intercambio y Producción
   3.1. La producción en la Caja de Edgewoth. 3.2. La eficiencia en la producción
   3.3. Equilibrio en la producción.
   3.4. La frontera de posibilidades de producción.
   3.5. Eficiencia en la combinación de productos.
   3.6. Equilibrio y la eficiencia en el mercado de productos.
4. Economía del Bienestar
   4.1. El bienestar social
   4.2. Funciones de bienestar social
   4.3. Frontera de utilidad y función de bienestar social: maximización del bienestar.

5. Fallos en el Mercado: Externalidades y Bienes Públicos
   5.1. Dotaciones iniciales e intercambio.
   5.2. La Caja de Edgeworth
   5.3. La Curva de Contrato
   5.4. La Asignación Eficiente en el Sentido de Pareto
   5.5. La Curva de Posibilidades de Utilidad.
   5.6. Equilibrio y eficiencia

## VI. Acervo bibliográfico

### BASICA

Carrasco, Amparo, et. al. Microeconomía Intermedia, problemas y cuestiones, McGraw Hill, Madrid España, 2003.
Gravelle, Hugh y Ray Rees, Microeconomía, Pearson, Prentice Hall, Madrid, España, 2006.
Henderson J.M y Quandt R.E. Teoría Microeconómica, Ariel, 1991.
Koutzoyanis, Ana. Microeconomía Intermedia, Amorrortu Editores, Argentina, Buenos Aires, 1987.
Maté García, Jorge Julio y Carlos Pérez Domínguez, Microeconomía avanzada: cuestiones y ejercicios resueltos, Pearson Prentice Hall, Madrid España, 2007. R.
Binger Brian, Microeconomics with calculus, Harper Collins Publisher, 1988.
Tugores Juan, Microeconomía: cuestiones y problemas, McGraw Hill.
Varian R, Hal, Microeconomía Intermedia, Antoni Bosch, 3a ed. 1994.
Varian R,Hal, Análisis Microeconómico, Antoni Bosch, 3a. ed.1992.

## COMPLEMENTARIA

Leftwich, Richard H. Eckert Ross. Sistema de Precios y asignación de recursos. 9ª Ed. Mc Graw Hill. México.
D.Blair,Roger y W.Kenny, Lawrence. Microeconomía con aplicaciones a la empresa, McGraw Hill, 1990.
Jorge A. Ludlow – Wiechers. Economía Matemática I y II .Edit. LIMUSA. México 1987
Dominick Salvatore. Economía y Empresa, Mc Graw Hill. Colombia 1992.
C.E. Ferguson, J.P. Gould. Teoría Microeconómica, Fondo de Cultura Económica, México 1975.
Layard y Walters. Microeconomics Theory, Mc Graw Hill. Nueva York, 1978.
Nicholson, Walter. Microeconomics Theory. 5ª Ed.