UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE MÉXICO

FACULTAD DE ECONOMÍA

“UN COMPARATIVO ENTRE LAS METODOLOGÍAS DE OPTIMIZACIÓN DE PORTAFOLIOS DE INVERSIÓN ENTRE EL MODELO DE MARKOWITZ Y EL MÉTODO DE SIMULACIÓN MONTE CARLO CON ACCIONES PERTENECIENTES AL IPC: 2007 – 2012”

PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

LICENCIADO EN ACTUARIA

PRESENTAN:

EMILIO DAVID OLVERA REBOLLEDO

JOSHUA ZENTENO JIMÉNEZ

ASESOR:

M.A. E. OSWALDO GARCÍA SALGADO

TOLUCA, MEXICO, SEPTIEMBRE 2013

Contenido

INTRODUCCIÓN

Los entornos cambiantes hacen que los modelos actuales de diseño y construcción de portafolios de inversión no sean tan certeros, esto se debe a todos los grandes cambios a los que la economía se ve expuesta. El panorama económico actual hace que las exigencias en cuanto a resultados y asertividad en estos modelos cada vez sean mayores, es por eso que para la construcción de un portafolio se plantean la necesidad de implementar nuevos estudios y herramientas a los modelos que ya se conocen para que se ajusten y permitan obtener conclusiones confiables en un entorno totalmente cambiante.

Las crisis financieras han provocado que se especialicen los financieros en nuevas disciplinas como son la administración y medición de riesgo. La medición y gestión (manejo) del riesgo es una disciplina relativamente nueva, que ha surgido con gran dinamismo después de episodios de inestabilidad y crisis financieras que se presentaron en las décadas del ochenta y noventa (como por ejemplo: la crisis de la deuda externa en la mayoría de países latinoamericanos en los ochenta, la caída de la Bolsa de Nueva York en 1987, la explosión de las burbujas financieras e inmobiliarias en Japón en los noventa y la de las empresas ".com" a finales de los noventa, el "tequilazo" en México durante 1994, la crisis financiera en el sudeste asiático en 1997, y las de Rusia y Argentina en 1997 y en 1998, respectivamente).

Estos acontecimientos, que son claros ejemplos de los riesgos existentes, han puesto de manifiesto la necesidad de la medición y el manejo de riesgo en un mundo cada vez más interconectado. Así, hoy en día la medición y la gestión del riesgo se han convertido en rutina.

La gran cantidad de información a la que se está expuesto actualmente, los medios para procesarla y emplearla, son distintos a los que se utilizaban anteriormente, han creado la necesidad y despertado el interés de la comunidad interesada en el tema en la búsqueda de nuevas metodologías y procesos que permitan ser más acertado cuando se toma una decisión que implica un desarrollo de herramientas más rápidas para obtener resultados eficientes y confiables.

Las hipótesis que el presente estudio pretende probar son las siguientes:

H_o: Los modelos de simulación basados en el Método de Monte Carlo para los portafolios de inversión y los modelos basados en la teoría de portafolios del Modelo de Markowitz son igualmente útiles para medir el riesgo en la selección de un portafolio de inversión.

H_a: Los modelos de simulación basados en el Método de Monte Carlo para los portafolios de inversión tienen mayor ventaja en información de riesgo que los modelos basados en la teoría de portafolios de Markowitz.

Los objetivos que se desean alcanzar en la investigación son uno general y otro secundario que se describen a mayor detalle en las líneas siguientes:

Objetivo General: Comparar el Modelo de Markowitz con el Método de Simulación de Monte Carlo, para saber cual tiene mayor precisión en los resultados de la construcción de modelos para Portafolios de Inversión con acciones del IPC que cotizan en la Bolsa Mexicana de Valores.

Objetivo Específico: Estudiar la Teoría de Harry Markowitz así como el Modelo de Simulación de Monte Carlo, presentando características, y principales aspectos de cada uno, para la muestra de datos seleccionados del Índice de Precios y Cotizaciones de la Bolsa Mexicana de Valores.

La razón por la que se decide realizar este estudio es la existencia de un panorama económico actual necesitado de herramientas que permitan tomar las mejores decisiones en un entorno tan cambiante, se cuentan con pocos estudios sobre “Teoría de carteras” basándose en curvas de distribución y simulación, sobre todo en aspectos relacionados con la Bolsa Mexicana de Valores.

En la última década varios estudiosos en diversos países han dedicado esfuerzo al estudio de técnicas, y herramientas que utilizando la teoría clásica junto con sus aportaciones puedan ser empleadas para dar solución a los problemas actuales.

La evolución de los mercados financieros, las nuevas potencias económicas, los países en vías de desarrollo, así como las recesiones económicas representan una gran fuente de información, ya que las distintas bolsas del mundo día a día se convierten en fuente de valiosa información, en nuestro caso de estudio la Bolsa Mexicana de Valores no es la excepción.

"La incertidumbre existe siempre que no se sabe con seguridad lo que ocurrirá en el futuro. El riesgo es la incertidumbre que "importa" porque incide en el bienestar de la gente… Toda situación riesgosa es incierta, pero puede haber incertidumbre sin riesgo". (Zwi & Robert, 1999).

Este tema y la problemática actual plantean la necesidad de hacer uso de metodologías y herramientas reciente que apoyen a los tomadores de decisiones, analistas, e inversionistas que permitan tener un panorama más claro y acertado de las ventajas y el riesgo al que se enfrentan, que permita un grado de certidumbre al momento de realizar la elección sobre los instrumentos que se deben utilizar y la forma de hacerlo.

El método con el que se llevará a cabo esta investigación está diseñado de la siguiente forma:

- Recopilar información sobre el Modelo de Markowitz, sus fundamentos alcances, aplicaciones y limitaciones.
- Conocer sobre los procesos existentes en la Teoría de Simulación de Monte Carlo, las técnicas más utilizadas y aspectos de fortaleza sobre otras metodologías.
- Revisión a la literatura.

- Conformación de los portafolios al con las acciones del IPC que se hayan mantenido cotizando de forma continua de noviembre de 2007 a noviembre de 2012.
- Obtener el portafolio basado en el Modelo de Markowitz.
- Obtener el portafolio basado en la Simulación de Monte Carlo.
- Realizar la comparación de ambos modelos.
- Obtención de Resultados.
- Conclusiones obtenidas de los resultados del trabajo.

El marco teórico y conceptual de la investigación del Modelo de Markowitz y el método de simulación Monte Carlo, para su aplicación, requiere que se analice un problema desde dos ópticas con enfoques distintos.

El Modelo de Markowitz propone que el inversor debe de tomar la cartera como un todo estudiando las características de riesgo y rentabilidad global, en lugar de escoger valores individuales en virtud de la rentabilidad esperada de cada valor en particular, toma en cuenta datos estadísticos para minimizar la covarianza entre cada una de las acciones que conforman el portafolio de inversión para de esta forma minimizar el riesgo en dicho portafolio, mediante un modelo determinístico.

La volatilidad se trata como un factor de riesgo, y la cartera se conforma en virtud de la tolerancia al riesgo de cada inversor en particular, buscando el máximo nivel de rentabilidad disponible para el nivel de riesgo escogido.

La simulación Monte Carlo permite ver todos los resultados posibles de las decisiones a tomar y evaluar el impacto del riesgo, lo cual permite tomar mejores alternativas en condiciones de incertidumbre.

La simulación Monte Carlo ofrece a la persona responsable de tomar las decisiones una serie de posibles resultados, así como la probabilidad de que se produzcan según las medidas tomadas. Muestra las posibilidades extremas, los resultados de tomar la medida más arriesgada y la más conservadora, así como todas las posibles consecuencias de las decisiones intermedias.

En el caso del modelo de Markowitz uno de los aspectos que lo ponen en desventaja es que no considera entornos ni comportamientos de las acciones solo se limita a los estadísticos μ, σ^2, S_{xy} (media, varianza y covarianza), ya que estos datos están basados en el pasado y su principal objetivo es la minimización del riesgo, sin tomar en cuenta si es la cartera con mayor rentabilidad o no.

Por otra parte, el modelo de Simulación de Monte Carlo implica que realizar una buena simulación pueda resultar muy complicado y se requiera de un gran número de variables, cada simulación es única e interviene el azar. La simulación no genera soluciones óptimas globales, sino que resuelve el problema mediante aproximación para unas condiciones iniciales.

El contenido de esta investigación se encuentra dividido en cuatro capítulos y finalmente conclusiones, el contenido se describe a continuación:

Capitulo I. Marco Teórico y Referencial sobre el modelo de Markowitz y sus estudios recientes. En el primer capítulo se hará referencia a la Teoría Moderna de la Selección de Cartera (Markowitz H. , 1952)

La teoría de Markowitz es una técnica para determinar las proporciones y pesos óptimos que deben ser asignados para obtener un cierto nivel de rendimiento para un nivel de riesgo determinado, en este capítulo se pretenderá analizar parte de la teoría de este autor y sus recientes estudios, investigaciones y nuevos desarrollos.

Capitulo II. Una introducción al método de Simulación de Monte Carlo. El segundo capítulo consistirá en la explicación del Modelo de Simulación de Monte Carlo, técnica desarrollada por Stan Ulam y John Von Neumann a finales de los 40's.

Capitulo III. La Bolsa Mexicana de Valores y el Mercado Bursátil. En este capítulo se explica cómo se compone el mercado bursátil mexicano, organismos reguladores siendo el contexto de nuestro estudio algunos activos del Índice de Precios y Cotizaciones de la Bolsa Mexicana de Valores.

Capitulo IV. Comparación de Modelos.Para la presente investigación se tomaran Acciones del Mercado Bursátil pertenecientes a la Bolsa Mexicana de Valores.

Se estudiaran los datos pertenecientes a las acciones de las empresas emisoras seleccionadas que cotizan en la Bolsa Mexicana de Valores en el periodo comprendido del 1/11/07 al 1/11/12 de forma diaria.

Finalmente, se realizará la comparación de los modelos, haciendo el planteamiento de dos portafolios de inversión calculados por el Modelo de Markowitz y el Modelo de Simulación de Monte Carlo; presentando así las características, ventajas y desventajas de cada uno de estos dos modelos.

Conclusiones. En esta parte se mencionan los resultados, recomendaciones y aspectos de interés sobre los puntos que se consideran de mayor relevancia en la experiencia de la elaboración de esta investigación.

CAPÍTULO 1

MARCO TEÓRICO Y REFERENCIAL DEL MODELO DE MARKOWITZ

1.1. Introducción

Un Portafolio de Inversión también llamado Cartera de Inversión, es una selección de documentos o valores que se cotizan en el mercado bursátil y en los que una persona o empresa deciden colocar o invertir su dinero.

Los portafolios de inversión se integran con los diferentes instrumentos que el inversionista haya seleccionado. Para hacer su elección se debe tomar en cuenta aspectos básicos como el nivel de riesgo que está dispuesto a correr y los objetivos que busca alcanzar con su inversión. Por supuesto, antes de decidir cómo se integrará el portafolio, será necesario conocer muy bien los instrumentos disponibles en el mercado de valores para elegir las opciones más convenientes, de acuerdo a sus expectativas.

La administración de riesgos financieros es una rama especializada de las finanzas corporativas, que se dedica al manejo o cobertura de los riesgos financieros, por esta razón, un administrador de riesgos financieros se encarga del asesoramiento y manejo de la exposición ante el riesgo de corporativos o empresas a través del uso de instrumentos financieros derivados. Para brindar un panorama más particular sobre la administración de riesgos, se debe determinar el nivel de tolerancia o aversión al riesgo.

En la actualidad, una de las herramientas más utilizadas para conocer las proporciones adecuadas al realizar una inversión, seleccionando diversos activos minimizando el riesgo al que se ve expuesto el inversionista, es el Modelo planteado por Harry Markowitz. En este capítulo se van a tratar aspectos generales de la teoría de portafolios de Markowitz, así como algunos textos que se consideran interesantes de acuerdo al criterio del director y de las partes involucradas en la elaboración de esta investigación, ya que los artículos contienen desarrollos y mejoras siendo los estudios más recientes sobre este tema, este capítulo será desarrollado en tres partes.

En la primera de estas partes se busca introducir al lector en el modelo planteado por Markowitz para el estudio de la teoría de portafolios, la segunda parte de la investigación está enfocada en artículos o publicaciones actuales que estudian el tema desde distintas perspectivas, con aplicaciones y herramientas que fueron desarrolladas por la comunidad científica en diversas partes del mundo, ya que este tema es vigente y continúa siendo de gran interés por inversionistas, académicos, y público en general. La última parte de este capítulo estará compuesta por el anexo 1 de términos que resultaron de interés sobre las lecturas realizadas.

1.2. Marco teórico sobre la teoría del portafolio de Markowitz

El Modelo que planteo Markowitz en 1952 ha sido desde entonces y hasta ahora, un punto de referencia en la selección de carteras gracias a su gran éxito teórico, pero en la práctica es un panorama muy diferente entre los gestores de carteras y analistas de inversión.

En el presente capítulo se dará un recorrido al planteamiento básico del Modelo de Markowitz exponiendo cada una de sus características, planteamientos y metodología utilizada, más adelante se hace referencia a varios y recientes ejemplos e investigaciones alrededor del mundo sobre los desarrollos y derivaciones, basados en el Modelo de Markowitz en el área de optimización de portafolios de Inversión.

1.2.1. Teoría de Portafolio de Inversión

El economista Harry Markowitz, establece las bases de la selección y construcción de portafolios que le permiten al inversionista acceder a rendimientos minimizando el nivel de riesgo al que se verá expuesto, con la presentación de un modelo matemático y estadístico.

En el año de 1990 recibe el premio Nobel de economía pos sus contribuciones teóricas a las finanzas y la economía, en su trabajo realizado en 1952 "*Portafolio Selection*", ensayo publicado en "The Journal of Finance" así como su libro "*Portafolio*

Selection: Efficient diversification" (Markowitz , 1959) en el que autor planteaba una forma de tomar decisiones en la selección de carteras y títulos de una manera totalmente racional. Sus estudios han tenido un gran éxito a nivel teórico, lo que permitió el desarrollo y sustento de lo que hoy se conoce como "*Teoría Moderna de portafolios*" (M.P.T.)[1], cuyos sustentos fueron ampliados posteriormente por William Sharpe con estudios enfocados a los precios de los activos financieros.

Uno de los aspectos más importantes del modelo de Markowitz es la descripción del impacto de la diversificación de los activos, y las relaciones que se mantienen entre ellos.

La teoría moderna de los portafolios, ofrece un marco para la selección y construcción de carteras de inversión que buscan maximizar los rendimientos esperados de una cartera, minimizando el riesgo de forma simultánea en la inversión.

Inicialmente, el sustento matemático de su teoría y cálculos complejos eran factores que complicaban su utilización, y el éxito teórico de este modelo no era similar al uso práctico por los inversionistas , hoy en día se dispone de programas de cómputo capaces de resolver este tipo de problemas. William M. Sharpe[2] realizo estudios sobre la relación entre los rendimientos de los títulos, y el de las carteras, definiendo el riesgo sin utilizar covarianzas, lo cual simplificaba en gran proporción el cálculo.

El modelo de Markowitz posee ciertas restricciones, como por ejemplo el que no considera los impuestos, o costos de transacción, o el que considera siempre la amplia divisibilidad de los instrumentos seleccionados, dichas restricciones pueden ser solucionadas con nuevas restricciones, por ejemplo agregar los costos por operación en el modelo con un límite definido.

El modelo de Markowitz, nos permite tener un uso eficiente de la información disponible, la satisfacción de los objetivos del inversionista, un control de la exposición de la cartera al riesgo, y un establecimiento de un estilo para invertir.

---

[1]Por sus siglas en inglés "Modern Portafolio Theory"

[2] William M. Sharpe fue reconocido por su trabajo en la evaluación de activos financieros en 1964.

La selección de carteras de acuerdo a Markowitz, se basa en seleccionar riesgos con los que se obtengan ciertos beneficios, el marco para la construcción del modelo incluye las suposiciones siguientes según Mangram (2013):

1) La racionalidad de los inversionistas, que consiste en que estos buscan maximizar el rendimiento y minimizar el riesgo.
2) Los inversionistas están dispuestos a ser compensados con rendimientos mayores, aceptando estar expuestos a una proporción mayor de riesgo.
3) Poseer la mayor cantidad de información sobre los resultados de la decisión que será tomada para su inversión.
4) El inversionista puede acceder a un préstamo, o financiar a otro con una cantidad ilimitada de capital a una tasa libre de riesgo.
5) Existe una eficiencia perfecta en los mercados.
6) No existen costos de transacción o impuestos en los mercados.
7) Es posible seleccionar cierto tipo de valores cuyos rendimientos de forma individual sean independientes de las inversiones del portafolio.

1.3. Conceptos Fundamentales para el análisis de portafolio

A continuación se mencionaran algunos conceptos fundamentales para el presente trabajo de investigación basados en Mangram (2013).

Rendimiento de un activo:

$$R_{t+1} = Ln(P_{t+1}) - Ln(P_t) \tag{1.1}$$

Rentabilidad y riesgo: Los conceptos de rentabilidad y riesgo están estrechamente ligados, el riesgo puede ser definirlo como la desviación de los rendimientos históricos en un periodo determinado de tiempo, la teoría de Markowitz no se enfoca totalmente en el riesgo de cada uno de los activos que conforma la cartera, sino en la contribución agregada de todos los activos a una cartera.

El riesgo puede ser analizado de dos formas, una de forma independiente, que se basa en el estudio de un activo de forma aislada, la otra forma consiste en realizar un estudio con base a una cartera asignando una proporción distinta a cada uno de los activos que conforman el portafolio.

El riesgo total de un título puede ser sistemático o no sistemático. La teoría moderna de portafolios asume estos dos tipos de riesgo, ya que son comunes en todo tipo de carteras a analizar.

El riesgo sistemático afecta a un gran número de activos en distinta proporción, pueden ser ejemplos: la inflación, las tasas de interés, la tasa de desempleo, y los movimientos en los tipo de cambio, por otra parte el riesgo no sistémico, solamente afecta a ciertos activos que quizás sufran cambios en el precio de sus acciones en caso de que exista alguna modificación en elementos, materia prima, o aspectos relevantes para su operación. Este tipo de riesgo puede ser controlado o minimizado a través de la diversificación de los activos en un portafolio, no se podrá eliminar completamente.

Riesgo y rendimiento : El principio de riesgo y rendimiento consiste en que el inversionista va a mantener una postura arriesgada, siempre y cuando su rendimiento esperado sea suficientemente grande para que asuma esa posición. El riesgo estará representado por la variación que se origina de las diferencias existentes en los rendimientos esperados, que está técnicamente representado por la desviación estándar.

En la teoría creada por Markowitz para la selección de activos, considera que existe una relación directa entre el riesgo al que ese expone un inversionista y la volatilidad asociada al mismo. Para medir la volatilidad a la que se verá expuesto el capital invertido es necesario el uso de herramientas como las siguientes:

- Cálculo de los rendimientos esperados
- Varianza de los rendimientos esperados

- Desviación estándar del rendimiento esperado
- Covarianzas de los activos del portafolio
- Correlaciones entre los activos que componen al portfolio

Rendimiento esperado: El proceso para aproximar el cálculo de los rendimientos esperados para algún valor o conjunto de estos, está relacionado con el desempeño histórico y comportamiento de los rendimientos. Los rendimientos esperados pueden ser definidos como “el promedio de la distribución de probabilidad de los posibles rendimientos”. El realizar el cálculo del rendimiento constituye una parte inicial del modelo. Se hace referencia a los rendimientos esperados como la media de los rendimientos de un una acción en un periodo de tiempo determinado (Benninga, 2006).

Un inconveniente en particular es que al querer realizar una proyección de los rendimientos históricos promedio, existe una incertidumbre en el periodo de tiempo a considerar para la muestra (Fabozzi et al., 2006).

Al buscar elegir un periodo de tiempo adecuado para la obtención de dichos rendimientos no se conoce con exactitud cuál es el periodo adecuado debido a la incertidumbre, y la volatilidad que existe en los mercados. Por otra parte, es muy razonable el tomar en cuenta la experiencia que se ha tenido con esa acción y si su desempeño a través del tiempo se muestra sano a pesar de las variaciones económicas, políticas, los factores anteriores pueden ser de gran ayuda para tener indicios de los rendimientos que se esperan en un futuro.

La ecuación siguiente (Navidad, 1998) muestra la como calcular el rendimiento esperado para un activo i:

$$\overline{R_\iota} = \sum_{i=1}^{n} \frac{R_{ij}}{N} \tag{1.2}$$

Donde:

$\overline{R_i}$: denota el rendimiento esperado para un solo activo asignando la misma probabilidad a todos.

R_{ij}: denota cada uno de los rendimientos estudiados

N: es el número total de rendimientos estudiados

A continuación se muestra, en la ecuación siguiente, como calcular de forma genera el rendimiento esperado para una cartera compuesta de varios activos.

$$\overline{R_p} = \sum_{j=1}^{n} X_j \overline{R_J} \tag{1.3}$$

Donde:

$\overline{R_p}$: es el rendimiento esperado de una cartera

X_j: es la proporción destinada a invertir al activo i, del total del capital.

$\overline{R_J}$: es el rendimiento esperado del activo i.

Varianza de los rendimientos: Los dos términos relacionadas a la volatilidad y el riesgo son la varianza y la desviación estándar. La varianza nos proporciona las diferencias que existe entre los rendimientos actuales, y los rendimientos promedio, en un portafolio la varianza miden la volatilidad de un grupo de activos. Varianzas con valores altos, indican mayor volatilidad en los activos. La expresión que se utilizará en esta investigación para el cálculo de la varianza es la siguiente:

$$\sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{N} (y_i - \bar{y})^2 \tag{1.4}$$

Donde:

σ^2: es la varianza de un activo

y_i: denota la observación i del activo estudiado

$\bar{y}$: Valor promedio de las observaciones del activo

n: es el número total de observaciones que se va a estudiar

En trabajos recientes de Frantz et al., (2011) se ha demostrado que al incrementar el número de activos, mejora significativamente la frontera de eficiencia, ya que el riesgo puede ser diversificado en distinta proporción de acuerdo a los activos que la componen.

Desviación Estándar: Otra medida para la volatilidad es la desviación estándar de un activo. El modelo de Markowitz hace la suposición de que las decisiones de los inversionistas están fundamentadas en los rendimientos y riesgo relacionados a un activo, la desviación estándar equivale a la raíz cuadrada de la varianza (Bradford & Miller, 2009).

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} \tag{1.5}$$

Covarianza de los rendimientos: La desviación estándar y la varianza permiten conocer la volatilidad de un activo, por otra parte, si se desea conocer cómo se relacionan los rendimientos de un activo, y algún otro, es necesario conocer la covarianza existente, para posteriormente analizar la correlación, dichos términos son necesarios para conocer el comportamiento de los rendimientos que se pretende estudiar. La covarianza se encarga de ubicar la relación existente entre los rendimientos de dos activos, en el caso de que esta tenga un valor positivo hay una dependencia directa entre las observaciones, existirá una dependencia inversa si la covarianza es negativa, en el caso de que no exista ningún tipo de relación la covarianza será de cero.

La covarianza puede ser expresada de la siguiente manera[3] en caso de una distribución discreta:

$$S_{xy=}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x_\iota})(y_i-\overline{y_\iota})=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_{i*}y_i-\bar{x}*\bar{y} \tag{1.6}$$

Donde:

x_i, y_i: denotan la observación i del activo estudiado

$\overline{x}, \overline{y}$: Valor promedio de las observaciones del activo

n: es el número total de observaciones que se va a estudiar

Por otra parte, la covarianza de dos variables aleatorias X e Y se puede definir de la siguiente forma:

$$S_{xy=}E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\} \tag{1.7}$$

La matriz de covarianza que se debe de construir para estudiar el modelo de Markowitz se diseña de la siguiente manera:

$$Matriz\ de\ Covarianza = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & S_{1,2} & S_{1,3} & S_{1,4} & \cdots & \cdots & S_{1,n-1} & S_{1,n} \\ S_{2,1} & \sigma_2^2 & S_{2,3} & S_{2,4} & \cdots & \cdots & S_{2,n-1} & S_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ S_{n-1,1} & S_{n-1,2} & S_{n-1,3} & S_{n-1,4} & \cdots & \cdots & \sigma_{n-1}^2 & S_{n-1,n} \\ S_{n,1} & S_{n,2} & S_{n,3} & S_{n,4} & \cdots & \cdots & S_{n,n-1} & \sigma_n^2 \end{bmatrix} \tag{1.8}$$

Donde:

σ_i^2 : es la varianza del activo i

[3] La covarianza puede ser denotada por $S_{xy,}\sigma_{xy}$ y Cov_{xy}

$S_{i,j}$: es la covarianza existente del activo i, con el activo j.

Coeficiente de correlación de los rendimientos: El coeficiente de correlación, es una medida de gran utilidad para poder conocer el riesgo o volatilidad estudiada, ya que a través de esta información se puede conocer la proporción en la que dos variables se relacionan, cabe destacar que el signo resultante de la correlación es el mismo que el de la covarianza. La expresión con la que se puede calcular es la siguiente:

$$\rho_{x,y} = \frac{S_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} \tag{1.9}$$

Su Interpretación es la siguiente:

Cuando el coeficiente de correlación se encuentra entre los siguientes parámetros: 0 < $\rho_{x,y}$< 1, existe una correlación positiva.

En caso de que $\rho_{x,y} = 1$ Existe una correlación positiva perfecta, por lo que hay una total dependencia entre las dos variables analizadas

En el caso contrario de si -1 < $\rho_{x,y}$ < 0, existe una correlación negativa.

Si $\rho_{x,y} = -1$ Existe una correlación negativa perfecta, por lo que hay una relación de dependencia inversa entre las dos variables analizadas.

Por último si $\rho_{x,y}$ tiene un resultado igual a cero, no existe una relación lineal entre las variables.

El enfoque de la teoría moderna de portafolios estudia la relación entre los distintos componentes con el fin de conocer el efecto de la diversificación en el desempeño de los rendimientos y resultados de grupo de acciones.

El grado en el que se puede ver reducido el riesgo depende de la varianza de los distintos activos que componen el portafolio, y entre mayor sea la existencia de activos no correlacionados, mayor será el grado en el que disminuye el riesgo.

Diversificación del portafolio: la diversificación es una manera de disminuir el riesgo de un portafolio, y esta se consigue invirtiendo en distintos activos, o distintas clases de instrumentos.

El objetivo de diversificar es maximizar el rendimiento obtenido, disminuyendo el riesgo al que se enfrenta el inversionista, ya que los activos van a tener actividades y comportamientos distintos para eventos que podrían afectarlos a todos, es recomendable que se incluyan activos de sectores económicos distintos, así como distintas clases de activos.

Frontera de eficiencia: La frontera de eficiencia es la representación de la mejor combinación de activos, aquellos con los que el inversionista puede obtener los mayores rendimientos posibles para cierto nivel de riesgo. La frontera de eficiencia muestra la relación existente entre los rendimientos esperados y la volatilidad del mismo.

1.4. Modelo básico de Markowitz

El Modelo planteado por Markowitz está basado en el sentido común y racional del inversionista, está claro que todo inversionista desea un gran rendimiento, pero los grandes rendimientos están ligados a un gran riesgo y por lo tanto, para que un portafolio sea eficiente, es necesario encontrar la máxima rentabilidad posible, a un nivel de riesgo dado, o de forma análoga, lo que el modelo busca es encontrar el menor riesgo posible dado un nivel de rentabilidad (Mendizabal et al., 2002). La Teoría Moderna de Portafolio plantea lo siguiente para que una cartera sea eficiente:

$$Min\ \sigma^2(R_p) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \sigma_i{}^2 + 2\sum_{i=j}^{n}\sum_{j\geq 1}^{n} x_i * x_j \sigma_{ij} \tag{1.10}$$

Sujeto a:

$$E(R_p) = \sum_{i=1}^{n} x_i * E(R_i) \tag{1.11}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \tag{1.12}$$

$$x_i \geq 0 \quad (i = 1, \dots, n) \tag{1.13}$$

Donde:

x_i = Proporción de la inversión destinada al activo financiero i

σ^2 =Varianza del portafolio p

$\sigma(R_p)$ = Desviacion estándar del portafolio o riesgo

S = Covarianza entre los rendimientos de los activos financieros i, j

$E(R_p)$ = Valor esperado de la rentabilidad del portafolio p dado por el inversionista

Como se puede observar en la función objetivo, se va a resolver un problema en el que se minimiza la varianza total de un portafolio, de acuerdo a restricciones establecidas, como una rentabilidad requerida, y el que la suma de las proporciones, los pesos destinados a cada uno de los activos sea en total igual a la unidad, y la proporción destinada a cada uno de los activos debe ser mayor o igual a cero.

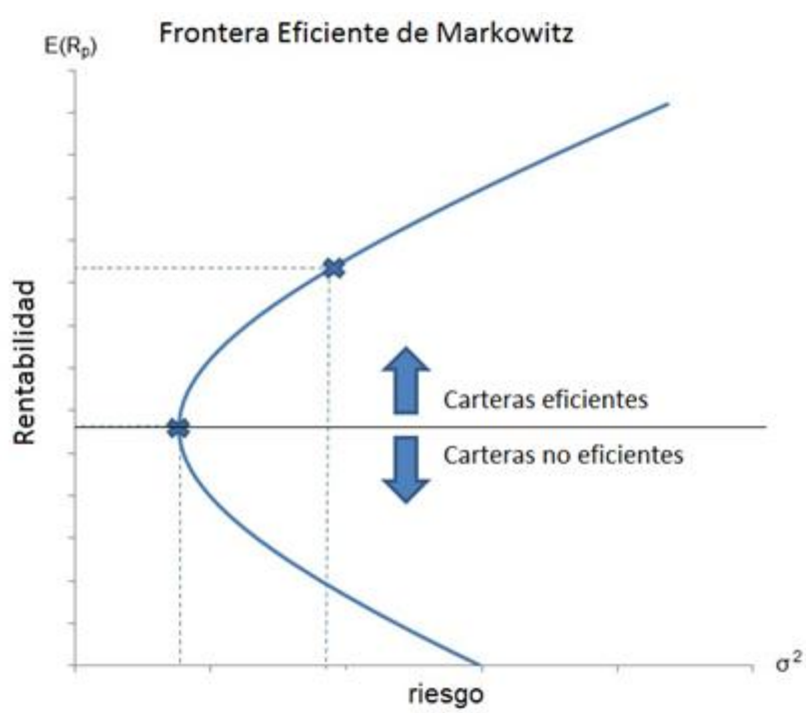
Es importante mencionar que el problema que se resolverá no es lineal, lo que complica la resolución de este, en la actualidad se pueden utilizar algunas herramientas de Excel, o Matlab para la resolución de estos.

De lo anterior se puede deducir que al variar el parámetro $E(R_p)$, al resolver el modelo de programación, se obtiene para cada caso las proporciones de x_i que minimizan la covarianza entre cada uno de los activos financieros que componen el portafolio y por tanto, la minimización del riesgo en el portafolio.

Para cada nivel dado de $E(R_p)$ le corresponde un nivel de $\sigma(R_p)$, al conjunto de pares de rentabilidad esperada y riesgo del portafolio se llama “Frontera Eficiente de Markowitz”. Se pueden graficar todos los pares de resultados obtenidos y se obtendrá una gráfica como se presenta en la figura 1.1.

La mezcla obtenida de todas las posibilidades de las acciones produce un elevado número de combinaciones, que se transforman en oportunidades para el inversionista, y al poner restricciones o limitarlas, se obtiene un conjunto de posibilidades que se encuentran dentro una frontera (Rojas, 2002).

Figura 1.1 Frontera de Eficiencia de Markowitz.



Fuente: Elaboración propia basada en Mendizabal et al. (2002)

Posteriormente se puede proceder al cálculo del portafolio óptimo propuesto por Black (1972), Merton (1973), y finalmente mediante estudios más recientes Levy & Sarnat(1982) , Elton & Gruber(1995), Benninga (1997) se puede realizar el análisis en el que se maximiza la pendiente de una recta que une un punto en común entre el rendimiento de un instrumento libre de riesgo (Instrumentos emitidos por el gobierno, en este caso Certificados de la Tesorería CETES) y un punto de la frontera de eficiencia.

Para encontrar este portafolio óptimo es necesario resolver nuevamente un problema en el que se requiere la optimización de la expresión que se muestra a continuación con las restricciones especificadas:

$$Max\ \tan\theta = \frac{R_m - r}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i x_j \sigma_{ij}}} \tag{1.14}$$

Sujeto a:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \tag{1.15}$$

$$x_i \geq 0 \quad (i = 1, \dots, n) \tag{1.16}$$

Donde:

R_m: es la rentabilidad esperada del portafolio

r: es el rendimiento del instrumento libre de riesgo

x_i: es la proporción a invertir en el activo i

σ_{ij}: es la covarianza del activo i con el activo j

Con la solución del modelo anterior se obtienen las proporciones a invertir en cada acción necesaria para obtener el portafolio óptimo existente en la frontera eficiente, el cual es tangente a la línea de mercado de capitales (LMC), que es la línea que une el punto de la rentabilidad de un instrumento libre de riesgo con el portafolio obtenido por el inversionista (Black, 1972).

1.5. Marco referencial sobre algunas investigaciones recientes sobre la temática de portafolio de inversiones basadas en Markowitz

El estudio de la teoría de portafolios desde su aparición es fundamental para la toma de decisiones de los inversionistas y su estrategia para hacer que los rendimientos aumenten, por lo que se han desarrollado estudios y derivaciones basadas en el modelo clásico de Markowitz.

Los cambios en las últimas décadas principalmente tecnológicos, computacionales, y el acceso a mayor información, han sido de gran importancia para que científicos y estudiosos valiéndose de estas herramientas continúen estudiando la teoría de portafolios. En la última década se han planteado nuevos procedimientos y métodos para ofrecer resultados más acertados, ya que el mercado, y las condiciones económicas han sufrido grandes cambios y el panorama actual de incertidumbre en el que los sectores económicos se desenvuelven.

En esta apartado se realizará un análisis de las principales investigaciones que se consideraron importantes en la materia. El propósito es ver sus aportaciones en el área de portafolios. Algunos de los trabajos que mencionan a continuación son ejemplos de estudios realizados por la comunidad científica en la última década.

Un estudio llamado *"Fast Algorithm For the Markowitz Critical Line Method"*[4] de los autores Babaistev et al.(2012) se propone una metodología llamada "Frontier", que utiliza un algoritmo eficaz y más rápido en comparación al clásico que permite la construcción de la frontera de varianza mínima con la condición de no negatividad para un portafolio óptimo.

Los autores utilizaron una técnica de análisis geométrico del modelo de Markowitz para simplificar los cálculos basándose en la línea de la frontera eficiente, donde se minimiza la varianza y se maximiza el rendimiento esperado, formulando el problema de

[4] Algoritmo rápido para el método de línea crítica de Markowitz

Markowitz sin restricciones sujeto a ciertas condiciones generales en las que se puede aplicar el modelo siguiente:

Sea *n* el número de activos expuestos al riesgo, para los cuales el vector que representará los rendimientos está dado por:

$$\mu^T = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n\ ) donde\ \mu_1 < \mu_2 < \mu_n \qquad (1.17)$$

La matriz de covarianza **V** de los rendimientos son datos que serán obtenidos por el investigador utilizando las herramientas que crea conveniente, por ejemplo: una hoja de cálculo de Microsoft Excel.

Se utiliza un vector columna compuesto de unos para que al ser multiplicado por la matriz de covarianza correspondiente se proceda a continuar con el algoritmo propuesto por el autor.

$$I = (1, \dots 1)^T. \qquad (1.18)$$

Sea: $$X=(x_1+x_{2+}\dots+X_n)^T \qquad (1.19)$$

El vector columna compuesto por las acciones de los activos considerados para el ejercicio.

Los autores pretenden buscar el portafolio X con el que minimizan el riesgo σ y proporcionará un valor específico para el rendimiento esperado μ.

$$\frac{\sigma^2}{2} = \frac{X^T V X}{2} \to min \qquad (1.20)$$

$$\mu^T X = \mu x \qquad (1.21)$$

$$I^T X = 1 \qquad (1.22)$$

La ecuación 1.22 asegura la normalidad del vector de las acciones, es decir que la suma de las acciones es igual a la unidad, por otra parte el coeficiente de ½ es parte de una de las consideraciones técnicas del autor.

La solución obtenida puede ser descrita bajo los siguientes supuestos:

1) La matriz de covarianza V esta positivamente definida, por lo que para cualquier subconjunto de los activos seleccionados esta propiedad se conservará.
2) Los rendimientos de los activos están en orden ascendente, y no hay valores iguales entre ellos.

Con este modelo se puede construir la frontera de varianza mínima que ofrezca un portafolio óptimo, reduciendo considerablemente las iteraciones realizadas a través del método "Frontier", permitiendo construir portafolios eficientes con una menor carga computacional.

Los investigadores Dani et al., (2012) publicaron un artículo llamado *"Portfolio Selection using Min-Max Approach"* [5] el cual está enfocado a la teoría de portafolios de Markowitz, buscando proponer un modelo para una mejor selección de los activos o valores que componen una cartera, ofreciendo al inversionista una herramienta para obtener mayores rendimientos diversificando el riesgo seleccionando un número fijo de activos.

Se utiliza la varianza de los rendimientos con base a información histórica para determinar un nivel de riesgo, se utiliza una técnica de programación matemática para la construcción de carteras seleccionando un número fijo de activos a partir de los disponibles, con el objeto de buscar una estrategia en la que se asignen los recursos

[5] Selección de cartera con el método de aproximación Min-Max

del inversionista y le permita diversificar con un buen nivel de rentabilidad, obteniendo así una cartera óptima y eficiente.

Los autores describen a la eficiencia a través de dos enfoques, el primero de ellos como una cartera con la que se obtiene el mayor rendimiento esperado para un nivel dado de riesgo, el otro enfoque consiste en estar expuesto al menor nivel de riesgo para un determinado nivel de rentabilidad.

Antes de implementar el modelo se deben tomar en cuenta los siguientes supuestos:

- El inversionista tiene un monto A para invertir en el comienzo del período.
- Después de invertir en acciones seleccionadas, el inversionista tendrá estos valores por un período determinado de tiempo *t*.
- La asignación obtenida al comienzo del período es la asignación de varianza mínima (modelo estándar de Markowitz).
- Debido a un error en la estimación de los rendimientos, la cartera calculada utilizando el modelo de Markowitz puede ser óptima en menor grado, este problema se aborda para obtener periódicamente la asignación de la cartera óptima. Este proceso continúa hasta el final del periodo de inversión.
- Hay N valores en el mercado bursátil y se invierte en k (k ≤ N) acciones, se poseen estas acciones por un período de tiempo determinado. El principal problema es la asignación de la cartera y la estrategia para decidir qué acciones de K se deben seleccionar.

El modelo consta de los siguientes pasos:

1) Decidir el número de valores K, para invertir.
2) Decidir los valores a invertir.
3) Realizar la asignación inicial según el modelo de riesgo mínimo de Markowitz.
4) Calcular periódicamente la asignación del Paso 3. La asignación se basa en los datos históricos disponibles hasta el período.

5) Al inicio de cada año, se repiten los pasos 2 a 4.

El método utilizado por los autores permite construir un portafolio en el que se pueden administrar los activos, este método permite obtener periódicamente la forma en la que los activos deben seleccionarse, pudiendo obtener rendimientos mayores a los que ofrece el mercado. El método de aproximación Min-Max permite tener cierto nivel de certeza sobe los rendimientos, para mejorarlos y administrarlos.

Se ha demostrado que la cartera construida por este enfoque puede proporcionar consistentemente un mayor nivel de rendimiento. Además, de que la cartera construida es lo suficientemente diversificada.

El siguiente trabajo es un estudio elaborado por Egouzcu et al., (2011) llamado *"Do investors like to diversify? A study of Markowitz preferences"*[6]. El análisis realizado por estos autores busca conocer la conducta que toman los inversionistas frente al riesgo.

Los inversionistas del tipo Markowitz, que es como lo denominan, son aquellos que presentan funciones de utilidad convexa para las ganancias y cóncavas para las pérdidas, este tipo de inversionistas tiende a invertir en un número reducido de activos en lugar de optar por una completa diversificación. Los autores desarrollan un nuevo criterio llamado "Dominancia estocástica Markowitz".

Los autores desarrollaron un en su estudio las posturas que se tienen al momento de invertir de acuerdo al modelo de Markowitz, así como la forma en la que diversifican su portafolio. Independientemente de la postura que tome el inversionista en muchas ocasiones, este prefiere invertir en un solo activo en lugar de diversificar su cartera. Los inversionistas que se encuentran en una postura arriesgada prefieren portafolios enfocados a un grupo de activos especializados en lugar de portafolios diversificados,

[6] ¿A los inversionistas les gusta diversificar? Un estudio de las preferencias del modelo de Markowitz

por otra parte los inversionistas que no gustan del riesgo, prefieren diversificar su portafolio de una forma completa.

Los inversionistas van a modificar su estrategia dependiendo de qué tan sensible es su función de utilidad frente a las ganancias o pérdidas a las que pueden exponerse.

Cuando se tienen activos idéntica e independientemente distribuidos, los inversores prefieren no diversificar en la situación de tener rendimientos medios positivos en activos subyacentes, cuando los rendimientos medios son negativos y prefieren diversificar.

El modelo de los autores toma en cuenta los puntos siguientes:

1) Los inversionistas con inclinación al riesgo prefieren carteras especializadas que parcialmente diversificadas, y prefieren estas últimas a las carteras diversificadas completamente.
2) Los inversionistas con aversión al riesgo prefieren carteras diversificadas completamente a las parcialmente diversificadas, y prefieren estas últimas a las carteras especializadas.

$$E\left[u\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{n}\right)\right] \leq E\left[u\left(\sum_{i=1}^{n}\propto_i x_i\right)\right] \leq E\left[u\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)\right] \qquad (1.23)$$

$$para\ cada\ i \in \{1, \dots, n\}$$

$$E\left[u\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{x_j}{n}\right)\right] \geq E\left[u\left(\sum_{j=1}^{n}\propto_j\, x_j\right)\right] \geq E\left[u\left(\sum_{j=1}^{n}x_j\right)\right] \quad (1.24)$$

$$para\ cada\ j \in \{1, \ldots, n\}$$

Los principales resultados muestran que a diferencia del caso de los inversionistas con aversión al riesgo y los que tienen inclinación al riesgo los inversionistas del tipo Markowitz pueden preferir invertir su fortuna entera en un solo activo ya que los rendimientos serán altamente rentables en caso de tomar una decisión acertada.

La publicación *"An improve destination to make Markowitz's portfolio optimization theory users friendly and estimation accurate with application on the US stock market investment"* [7] (Leung et al., 2011) demuestran que en el uso de la teoría de la optimización de la cartera de Markowitz, el rendimiento estimado tradicional sobre estima en gran medida el rendimiento óptimo teórico, y por tanto se propone un estimador para corregir la sobre estimación.

Los autores estudian el modelo de Markowitz para proporcionar estimadores que mejoren el rendimiento de una cartera y que permitan optimizarla, asignando la proporción correcta para cada uno de los activos, utilizan las evidencias de otros estudios para mejorar el proceso. Se realizaron simulaciones para verificar que los estimadores propuestos superaran a los estimadores obtenidos por métodos tradicionales para obtener los rendimientos, así como para una eficiente asignación de los activos.

El modelo que proponen es el siguiente:

Suponga que el portafolio está constituido por un número p de activos y sus rendimientos son los siguientes:

[7] Una estimación mejorada para hacer la teoría de optimización de portafolio de Markowitz más accesible para el usuario y una estimación precisa con aplicación en el mercado de valores de EE.UU.

$$X = (x_1, \dots x_p)^T \tag{1.25}$$

Donde:

X=Portafolio construido con los activos existentes

x_i= Rendimientos de cada uno de los activos que componen el portafolio

Con una distribución normal multivariada con media μ y covarianza dada por la matriz ∑ denotada de la siguiente forma:

$$N_p(\mu, \Sigma) \tag{1.26}$$

Los autores proponen realizar las consideraciones siguientes:

Las ponderaciones del portafolio están dadas por:

$$w = (w_1, \dots w_p) \tag{1.27}$$

Donde:

w= Vector compuesto por los pesos de cada activo que compone la cartera

w_i=Porcentaje que se invertirá y será asignado al activo i

Los rendimientos del portafolio estarán dados por:

$$R = \mu w^T \tag{1.28}$$

Donde:

R= Rendimiento calculado

μ=Promedio de los rendimientos de los activos que componen el portafolio

w^T=Vector de pesos transpuesto

El riesgo estará denotado por:

$$w^T \Sigma w_i \tag{1.29}$$

La ponderación total de la cartera es la siguiente:

$$\sum_{i=1}^{p} w_i = 1 \tag{1.30}$$

El conjunto de variables identicas e independientemente distribuidas con media µ y varianza σ^2 esta dado por:

$$\{x_{jk}\} \text{ con } j = 1, \dots, p \text{ y } K= 1, \dots, n \tag{1.31}$$

Sea x_k una muestra de la matriz de covarianza S que está definida y cuyas dimensiones son pxp:

$$x_k = (x_{ik}, \dots x_{pk})^T \text{ y } X = (X_1, \dots X_n) \tag{1.32}$$

Donde:

x_{ik}= es el conjunto de variables aleatorias idénticamente distribuidas contenidas en dos matrices con media μ y varianza σ^2 , la matriz x_k estará definida de esta manera:

$$S = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^{n} (X_k - \bar{X})(X_k - \bar{X})^T \tag{1.33}$$

Donde:

$$\bar{X} = \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{n} \tag{1.34}$$

$\bar{X}$y S son utilizadas para el cálculo estimado de los rendimientos, así como la asignación.

Con base al modelo de Markowitz se han buscado formas para obtener la proporción óptima para maximizar los rendimientos del portafolio, manteniendo los niveles de riesgo por debajo de σ_0^2 , el problema anterior puede ser reformulado como sigue:

$$maxR = w^T\mu \text{ Sujeto a: } w^T \sum w \leq \sigma_0^2 \text{ y } w^T 1 \leq 1 \qquad (1.35)$$

Donde:

σ_0^2 Es el nivel dado de riesgo y 1 es el vector p-dimensional de con valores de uno.

Los resultados de simulación obtenidos por Leung et al., (2011) muestran que los estimadores propuesto superan de manera considerable a los estimadores tradicionales, tanto para el rendimiento óptimo y su asignación correspondiente de activos.

Otra de las ventajas de la estimación mejorada de los rendimientos es que también se puede obtener una fórmula explícita para la desviación estándar de la estimación del rendimiento mejorado y es más pequeña que el de la estimación tradicional.

La investigación *"Mean-Varíance-Skewness-Kurtosis Approach to Portfolio Optimization: An Application in Stanbul Stock Exchange"*[8] Aracioglu et al., (2011) explica un modelo basado en la hipótesis de que los inversionistas tienen una función de utilidad cuadrática y el rendimiento de los valores se distribuye de manera normal.

El análisis realizado está enfocado a la optimización de un portafolio que se basa en buscar obtener la mejor combinación de instrumentos de inversión que le permita al inversionista satisfacer sus expectativas sujeto a restricciones, para lo que se analiza la media, varianza, sesgo, y curtosis, ya que en estudios recientes los investigadores consideran el tercer y cuarto momento para la selección de portafolios.

[8] Media-varianza-sesgo-curtosis enfocada a la optimización de cartera: una aplicación para la Bolsa de Estambul

La media, la varianza, el sesgo y la curtosis, entran en conflicto con los objetivos de la cartera como maximizar el rendimiento esperado y el sesgo, y minimizar el riesgo y la curtosis al mismo tiempo. Lo que implica resolver un problema con varias funciones objetivo utilizando una técnica llamada Programación Polinomial por Metas (PGP).

El PGP es utilizado con el fin de encontrar soluciones al problema de optimización de un portafolio con múltiples objetivos y restricciones de forma simultánea. Los objetivos de este método son maximizar el rendimiento esperado y los sesgos del rendimiento, así como minimizar la varianza y la curtosis del rendimiento.

$$Max\ \ R(x) = X^T\bar{R} \tag{1.36}$$

$$Min\ \ V(x) = X^T V X \tag{1.37}$$

$$Max\ \ S(x) = E(X^T(R-\bar{R}))^3 \tag{1.38}$$

$$Min\ \ K(x) = E(X^T(R-\bar{R}))^4 \tag{1.39}$$

Sujeto a:

$$X^T I = 1 \tag{1.40}$$

$$X_i \geq 0 \tag{1.41}$$

Donde:

$R(x)$ =Rendimiento esperado del portafolio

$\bar{R}$ =Vector que indica el rendimiento promedio de los instrumentos

$X^T = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ = Matriz transpuesta del vector de pesos

x_i =Porcentaje invertido en el activo i

V =Varianza del portafolio

$S(x)$ =Sesgo y cosesgo de los rendimientos

K = Curtosis y cocurtosis de los rendimientos

Se utiliza el PGP para combinar todos estos objetivos en uno solo que cumple con todas las funciones, los autores proponen d_1, d_2, d_3, d_4 variables conocidas como objetivo de R, V, S, K respectivamente, dichas variables son de gran utilidad para obtener los valores óptimos R^*, V^*, S^*, K^* ya que con estos se puede dar solución de una forma óptima al problema.

Para obtener los resultados óptimos con el modelo dado por el conjunto de fórmulas anteriores, se divide en cuatro partes el problema y se resuelven de forma individual. Después de la obtención del óptimo para cada momento se utiliza el modelo de PGP para conocer las distintas formas en las que se puede realizar una asignación de los activos de acuerdo a las preferencias del inversionista:

$$Minimizar\ Z = \left|\frac{d_1}{R^*}\right| \ell_1 + \left|\frac{d_2}{V^*}\right| \ell_2 + \left|\frac{d_3}{S^*}\right| \ell_3 + \left|\frac{d_4}{K^*}\right| \ell_4 \tag{1.42}$$

Sujeto a:

$$X^T \bar{R} + d_1 = R^* \tag{1.43}$$

$$X^T V X - d_2 = V^* \tag{1.44}$$

$$E(X^T(R - \bar{R}))^3 + d_3 = S^* \tag{1.45}$$

$$E(X^T(R - \bar{R}))^4 + d_4 = K^* \tag{1.46}$$

$$X^T I = 1, X \geq 0, d_i \geq 0\ i = 1, \ldots, 4 \tag{1.47}$$

Donde:

$d1, d_2, d_3, d_4$ Representan las variables objetivo para los rendimientos, varianza, sesgo y curtosis respectivamente para cada uno de los valores óptimos.

Markowitz et al., (2013) publicaron un artículo llamado *"Does Portfolio Theory Work During Financial Crises?"*[9], en el cual tomaron en cuenta las fluctuaciones de las crisis económicas y como esto repercute en el mercado accionario y se dieron cuenta que la teoría de portafolio falla durante las crisis financieras debido a que:

[9] ¿Funciona la Teoría de Portafolio durante las crisis financieras?

- Todas las clases de activos bajan.
- Todas las correlaciones aumentan.

Los autores se dieron cuenta de que estas declaraciones son verdaderas. En concreto, el "modelo de un solo factor" supone que cada acción se correlaciona con cada acción, porque todas están relacionadas con "el mercado", el modelo simplificado se basa en que el rendimiento de una acción puede ser visto como: una constante "alfa" de la acción, mas, otra constante, "beta" de la acción, multiplicado por, un factor subyacente al azar a llamado “el rendimiento del mercado”, más, un término aleatorio e independiente.

Los autores declaran que los últimos dos términos son las fuentes de fluctuaciones de un periodo a otro periodo. El modelo de un solo factor de Sharpe supone que el término aleatorio al azar de una acción no está correlacionado con la de cualquier otra acción, ni con el factor subyacente. Así, en este modelo una acción se correlaciona con otra sólo porque ambas están correlacionadas con "el mercado".

Entonces el rendimiento de la cartera, como un todo, está dado por: El "alfa" de la cartera más la "beta" de la cartera, multiplicado por el factor subyacente, más el término “aleatorio” de la cartera.

A continuación se describe cada uno de estos términos:

- El término aleatorio de la cartera no está correlacionado con el factor subyacente.
- El alfa de la cartera es un promedio ponderado de las alfas de las acciones individuales, ponderados por participaciones en la cartera.
- La beta de la cartera es igualmente un promedio ponderado de las betas de las acciones individuales, de nuevo con el mismo peso de las participaciones en la cartera.
- Durante cualquier periodo de tiempo (día, mes, año) el término aleatorio de la cartera durante este período es el promedio ponderado de los términos aleatorios de las acciones individuales.
- La varianza de los términos no es la suma ponderada de las varianzas de las acciones.

En dicha publicación se dice que en términos del modelo una crisis, es un período de tiempo durante el cual hay un gran movimiento descendente del factor subyacente (Sharpe, 1963).

Para la creación de este modelo de se tomó en cuenta que el futuro es incierto. En todo momento se deben buscar las mejores estimaciones para el siguiente periodo, y luego elegir un punto adecuado entre la curva de riesgo y rendimiento. Dependiendo de la capacidad de riesgo, tal vez se seleccionará una cartera más cautelosa, cargada de acciones con betas bajas, o por el contrario, se elegirá un punto más alto en la frontera, con un mayor rendimiento pero con acciones con betas más altas. Si el mercado sube, los que tengan carteras con betas altas tendrán buenos rendimientos, y por el contrario si cae el mercado.

Otra de las publicaciones"*Portfolio Analysis of investments in Risk Managment*"[10] (Hooda & Sthehlik, 2011) expone la situación a la que se enfrenta el inversionista cuando desea recopilar información, ya que la cantidad de datos es muy grande, por lo que muchos inversionistas deciden trabajar y tomar decisiones basándose en la información que tengan más reciente o disponible en ese momento. Es por eso que recomiendan utilizar el modelo de Markowitz para conocer la frontera de eficiencia, para encontrar la combinación eficiente de activos que les permita maximizar los rendimientos esperados reduciendo el riesgo.

Los autores deciden investigar sobre los niveles de aversión al riesgo, así como la distribución de este, uno de los parámetros principales con los que se mide el riesgo es la varianza de los rendimientos y a través de la frontera de eficiencia se puede conocer que carteras pueden maximizar los rendimientos, otra de las medidas que se toman en cuenta para la selección de elementos para un portafolio implica que los inversionistas estén envueltos en toda la información disponible de los activos, rendimientos, entre otros, lo que requiere que los inversionistas mantengan actualizadas y al día sus bases de datos, labor que se vuelve complicada, ya que estas son de gran tamaño.

[10] Análisis de un portafolio de inversión en la administración de riesgos

Es por eso que los autores buscan reducir las dimensiones del problema que implica encontrar el óptimo para invertir, desde el enfoque de la teoría de la información auxiliada de los principios de optimización de la entropía para minimizar el riesgo, en este caso la entropía le permite al investigador medir la incertidumbre de una fuente de información, a través de ella cualquier proceso se puede acotar, reducir, o eliminar incertidumbre.

El modelo que proponen lo llaman "Principio de entropía máxima en la distribución del riesgo" ya que la frontera de Pareto óptima ofrece diversas soluciones y se requiere un criterio que ofrezca una solución única, se va a maximizar la medida de entropía:

$$H *= -\sum_{i=1}^{n} p_i \sum_{j=1}^{m} \frac{x_{ij}}{x_i} \log \frac{x_{ij}}{x_i} = -\sum_{i=1}^{n} \frac{p_i}{x_i} \sum_{j=1}^{m} x_{ij} \log x_{ij} + \sum_{j=1}^{m} p_i \log x_i \qquad (1.48)$$

$$= -\sum_{i=1}^{n} \frac{p_i}{x_i} \sum_{j=1}^{m} x_{ij} \log x_{ij} + (constante)$$

Donde:

$H *$= Solución óptima del Problema

p_i= Probabilidades de riesgo asignadas a los activos

x_{ij} = utilidad esperada asociada al j ésimo caso asociado a un nivel de riesgo

x_i = estados de riesgo para cada nivel de riesgo

Así, de todas las soluciones óptimas se elige la que maximice H*, la solución óptima es obtenida de la siguiente forma:

$$\sum_{j=1}^{m} \lambda \bar{u}_j = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \sum_{j=1}^{m} \mathrm{p}_i \mathrm{u}_j(\mathrm{x}_{ij}) = \sum_{i=1}^{n} p_i \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \mathrm{u}_j\ (\mathrm{x}_{ij}) \qquad (1.49)$$

Sujeto a:

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = \sum_{j=1}^{m} \lambda_i = 1 \quad (1.50)$$

Lo anterior va a determinar a x_{ij} en términos de $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_m$.

Donde:

u_j= Función de utilidad

λ_j=Plano lineal en el que se obtiene el punto óptimo

De esta forma el inversionista puede cumplir el objetivo de diversificar su portafolio en el punto en el que minimiza el riesgo, si el investigador elije algún x_{ij} entonces la entropía es maximizada.

Otro de los autores que se interesa por estudios relacionados con la curtosis es Stacey (2008) quién publica un artículo publicado llamado "*Multidimensional Risk and Mean-kurtosis Portfolio Optimization*"[11].

Su trabajo muestra que los rendimientos de las acciones son descritos de mejor forma por distribuciones de probabilidad que tengan curtosis mayor a cero, ya que en el modelo de media varianza de Markowitz se asume que los rendimientos de las acciones están descritos por funciones de densidad con distribuciones normales.

Las acciones con distribuciones leptocúrticas son consideradas mayormente riesgosas en comparación a activos con distribuciones normales.

El autor expone en su trabajo la optimización del portafolio tomando como parámetro de medida de riesgo a la curtosis. La media geométrica de los rendimientos es una medida usual en el estudio de los portafolios, y se pretende maximizarla, en este

[11] Riesgo multi-dimensional y optimización de un portafolio a través de media y curtosis

caso la combinación de activos que conformen el portafolio que maximice la riqueza conduce a la selección de una cartera del conjunto de las eficientes.

El modelo propuesto por el autor para la optimización del portafolio con el criterio de media- curtosis, con curtosis como medida de riesgo, es equivalente a maximizar la probabilidad de amplias variaciones en la media de los rendimientos estudiados.

Para su cálculo es necesario obtener la matriz de varianza-covarianza de dimensiones $N^{2,}$ donde N es el número de activos, es importante conocer el comportamiento de los rendimientos de los activos, para lo se va a requerir el cálculo del cuarto momento con N^4 entradas, distintas todas ellas, así como E, que representa el tensor de cuarto grado.

La función objetivo para maximizar la curtosis es minimizar:

$$\Omega = \left(\sum_{r,s=1}^{N} w_r w_s \sigma_{rs}^2 \right)^2 / \left(\sum_{r,s,t,u=1}^{N} w_r w_s w_t w_u E_{rstu} \right) = (\sigma_p \lambda_p)^4 \quad (1.51)$$

Donde: E representa el valor esperado del cuarto momento de los rendimientos del portafolio *r*, los pesos o proporciones están dadas por w para cada uno de los activos.

Los parámetros σ y λ son utilizados como medidas de riesgo, cuando el parámetro λ se acerca a cero, la distribución de los rendimientos de los activos tiende a ser leptocúrticas.

La ecuación anterior estará sujeta a las restricciones de rendimientos del portafolio, dada por los rendimientos R*

$$R^* = \sum_{i=1}^{N} w_i E(R_i) \quad (1.52)$$

La suma de las proporciones asignadas para obtener el óptimo portafolio es igual a la unidad, y todos los pesos son positivos, ya que la condición de no negatividad es empleada para resolver este problema de optimización.
El autor concluye que la percepción del riesgo es más complicada de interpretar cuando las distribuciones son leptocúrticas, distribuciones con colas más gruesas implican mayores niveles de riesgo.

Los investigadores Levy & Duchin(2009) publicaron un artículo llamado *"Markowitz Versus the Talmudic Portfolio Diversification Strategies"*[12] en el cual hablaron sobre la teoría de la diversificación defendida donde afirman que la estrategia de diversificación óptima es una función de las medias, varianzas y correlaciones de las acciones con riesgo.

Hace unos 1,500 años, en el Talmud babilónico se propone la siguiente recomendación de diversificación: "Un hombre siempre debe colocar un tercio de su dinero en la tierra, un terció una mercancía, y ahorrar el otro tercio", a esta estrategia de diversificación ingenua le llamaron la regla de 1/3, para esta investigación cuando hay n activos disponibles, le llamarón la regla de 1/n. A pesar de que los autores no dudaron de que Markowitz sea teóricamente correcto, les pareció interesante probar empíricamente el consejo talmúdico, y tomaron en cuenta los siguientes dos factores que pueden proporcionar un punto de comparación entre estas dos estrategias de diversificación de cartera:

1) Número de activos incluidos en la cartera.
2) Estabilidad de los parámetros de los activos a través del tiempo.

Los autores llegaron a la conclusión de que empleando la regla de 1/n para fines de inversión, tienen la desventaja de no utilizar la información sobre los distintos

[12] La teoría de Markowitz Versus las Estrategias de diversificación de cartera Talmúdicos

parámetros, pero por la misma razón, tienen la ventaja de no tener prejuicios al basarse en parámetros históricos que pueden ser muy diferentes de los futuros parámetros de los activos, y esto es especialmente cierto debido a que la estrategia de diversificación de media y varianza (M-V) es muy sensible a los errores de muestreo. Con análisis de muestreo, la estrategia de M-V, por definición, es superior, sin embargo, sin análisis de muestreo, se demuestra que la sabiduría Talmúdica es correcta para portafolios pequeños y la teoría de Markowitz es mejor para carteras relativamente grande.

La investigación "*Markowitz Versus Regime Switching: An Empirical Approach*"[13] (Seidl,2012), analiza un modelo de régimen ajustado de conmutación para la optimización de un portafolio y se comparan los pesos y el rendimiento alcanzado por la cartera con un modelo clásico de media-varianza (Markowitz H., 1952).

Markowitz asume que los rendimientos de los activos siguen una distribución normal estacionaria con matriz de correlación constante. La correlación de los rendimientos de los activos durante período estable en el mercado será mucho mayor que en un periodo de inestabilidad, de modo que la diversificación del portafolio basado únicamente en Markowitz ya no será satisfactoria. Además, la hipótesis de que los rendimientos de los activos siguen una distribución normal no es apoyada por los datos de mercado observados.

La función objetivo para ambos métodos es el criterio de media- varianza que será consistente con la maximización de una función de utilidad cuadrática

El autor encontró que con el algoritmo de selección de cartera de régimen de conmutación ajustado, el rendimiento de la cartera óptima fue altamente mejorado para ambos para un inversionista riesgoso y para un inversionista adverso al riesgo, incluso cuando la asignación de pesos de activos en la cartera estaba limitada a valores reales.

[13] La teoría de Markowitz Versus el Régimen de conmutación: Una aproximación empírica

CAPÍTULO 2

UNA INTRODUCCIÓN AL MÉTODO DE SIMULACIÓN MONTECARLO

2.1. Introducción

El concepto de simulación es muy amplio, dada la gran gama de aplicaciones que posee, en un aspecto general es la representación de la realidad a través de modelos que describen un sistema, involucrando las bases de la simulación a través de una computadora.

Muchos de estos avances en la ciencia fueron motivados por el armamentismo, ya que los conflictos bélicos de esa época y que los principales países del mundo estaban interesados en armamento, John Von Neumann realizo estudios para diversas ramas del conocimiento, entre las que se pueden mencionar se encuentran el análisis numérico, modelación matemática, teoría de conjuntos, ciencias de la computación, economía.

Neuman es uno de los precursores más importantes de la computación y aplicaciones de esta, influyo notablemente en el estudio de algoritmos numéricos y modelos matemáticos, herramientas que actualmente permanecen en desarrollo, su trabajo teórico y experimental en este campo permitió desarrollar la capacidad de herramientas como las computadoras.

La herramienta que utilizaron en el año de 1945 fue la computadora llamada E.N.I.A.C. una computadora utilizada por laboratorios de investigación el ejército de Estados Unidos, era un aparato de grandes dimensiones, pesaba aproximadamente 27 toneladas y ocupaba alrededor de 167 metros cuadrados fue la primer maquina en poder realizar operaciones en periodos tan cortos de tiempo, demoraba aproximadamente un segundo en realizar 5,000 sumas y 300 multiplicaciones. Una de las funciones principales de esta computadora era el calcular las trayectorias de proyectiles

Los primero estudios de simulación que realizo fueron con el objeto de mejorar los métodos analíticos de la época, buscando resolver problemas numéricos a través de experimentos. La importancia de la computación en la ciencia es vital, ya que muchos estudios experimentales y teóricos son generados y resueltos con esta herramienta. Llevando a Von Neumann a ocuparse del problema de la generación de números aleatorios a través de una computadora.

La simulación fue una herramienta comenzada a utilizar por Stanislaw Ulam y John Von Neumann, dos de los principales investigadores que dieron origen al Método de Monte Carlo, el uso real que se le pretendía proporcionar a esta investigación era aplicarlo para crear una bomba atómica durante la segunda guerra mundial. Posteriormente se continúa con estudios en el tema realizados por Herman Khan, Fermi, en 1948 para obtener los valores característicos de la ecuación de Schrödinger.

A través del modelo de Monte Carlo, que es un modelo estadístico se pueden realizar aproximaciones y experimentos matemáticos de situaciones reales, las aplicaciones de esta herramienta pueden ser destinados a una gran variedad de problemas. Los escenarios que pueden ser estudiados pueden ser controlados, con número aleatorios. El método de Monte-Carlo permite elegir de forma aleatoria los puntos en los que se evalúan funciones, y resolver así diversos problemas matemáticos.

2.2. Conceptos de Simulación

"La simulación es una técnica cuantitativa que se emplea para evaluar cursos alternativos de acción basada en hechos e hipótesis con un modelo matemático de ordenador a fin de representar la toma real de decisiones en condiciones de incertidumbre" (Thierauf & Groose, 1976).

"La simulación es un proceso numérico diseñado para experimentar el comportamiento de cualquier sistema en un ordenador a lo largo de la dimensión del tiempo" (Prawda, 1980).

“*Simulación es el proceso de diseñar y desarrollar un modelo de un sistema o proceso real y conducir experimentos con el propósito de entender el comportamiento del sistema o evaluar varias estrategias para la operación del sistema”* (Shanon, 1988).

De acuerdo al Diccionario de Economía Planeta “*La utilización de técnicas de programación, con exclusión de cualquier otro método o recurso, para duplicar en un sistema de proceso de datos el funcionamiento de otro. Representación de sistemas y fenómenos físicos por medio de ordenadores, de modelos o de cualquier otro tipo de equipo*”.

La simulación es una herramienta que en las últimas décadas ha sido de gran interés, ya que permite representar el comportamiento de un sistema a través de un modelo. Al realizar una simulación se podrán extraer conclusiones sobre posibles comportamientos en dicho sistema. Cuando se habla de un sistema se hace referencia a un grupo de conceptos, ideas, así como elementos que forman parte de un todo cuyos componentes se relacionan entre sí para conseguir un fin.

Un modelo representa de forma simplificada y breve del funcionamiento de un sistema de una forma abstracta.

La simulación le permite al investigador posicionarse en un contexto que funcione o esté integrado por los mismos componentes que el evento que requiere estudiar imitando un aspecto o situación de la realidad que en este caso es el modelo con el que se va a estar trabajando, ofreciendo el experimentar una situación que podría suceder sin exponerse a ningún tipo de riesgo. El uso de la simulación permite extraer resultados de un aprendizaje basado en la propia experiencia. Las consecuencias de tomar una decisión, y su impacto pueden ser descritas en una simulación sin riesgo alguno.

Es necesario que para realizar una simulación se tenga en claro y se defina el sistema que se planea estudiar, identificar los componentes clave y objetivos a lograr en el proyecto, ya que las empresas y entidades financieras están expuestas a un entorno dinámico, y es por eso que se necesitan nuevas técnicas y metodologías para un aprendizaje que permita al inversionista estar expuesto y activo a un escenario controlado, de esta forma el sujeto o investigador puede interactuar, con todo el entorno de elementos que integran el sistema, su experiencia se verá alimentada y podrá tener resultados más precisos en cuanto mayor sea el detalle y los datos utilizados en la construcción del modelo.

El riesgo al que se ve expuesto el inversionista será representado por una herramienta dinámica que le permite tomar decisiones, conociendo de manera práctica el sistema con el que se pretende trabajar.

Los grandes avances tecnológicos han permitido definir cada vez con mayor exactitud los resultados que se espera obtener, formular modelos con variables relacionadas de forma lógica y diagramas que ilustren el funcionamiento completo del modelo.

Las herramientas de computo actuales permiten definir con exactitud y fiabilidad los datos con los que se va a modelar el experimento, los lenguajes de cómputo y software especializado hacen que esta tarea se vuelva más accesible, y sin duda las bondades de llevar a cabo este análisis se ven reflejadas en la oportunidad de predecir comportamientos o datos históricos con mayor precisión.

En el año de 1961 se desarrolla el lenguaje de simulación GPSS por G. Gordon gracias a los avances computacionales, actualmente los nuevos sistemas de cómputo permiten un proceso de simulación más accesible para el investigador.

2.3. Conceptos elementales de un Sistema bajo el enfoque de simulación

McClelland (1973) explica a un sistema como un grupo de objetos y componentes con propiedades específicas que permite identificarlos, dichos componentes mantienen relaciones existentes y observables.

Para el estudio de la simulación de sistemas Gordon (1989) se mencionarán los términos siguientes:

- El primer término a mencionar es el de “atributo”, que con esto se hace referencia a las propiedades de un objeto de estudio del sistema, son sus características más sobresalientes o elementos que lo diferencian de los otros componentes del sistema.
- El siguiente término que utiliza es de “entidad”, haciendo referencia al objeto de importancia, interés y relevancia del sistema, dicha entidad puede poseer varios atributos que la describan.
- En cuanto a los cambios que existan en el sistema o sus componentes utiliza el término de “actividad”.
- Un sistema puede sufrir cambios a través del tiempo, es por eso que para indicar la descripción de todas las entidades y sus atributos correspondientes utiliza el término de “estados del sistema” para hacer referencia a los cambios, y comportamientos del sistema en momentos de tiempo específicos.

El Sistema va a estar compuesto por los agentes, elementos, objetos e ideas, y es una representación aislada de una parte en especial del universo de estudio. Dicho sistema posee elementos que interactúan entre sí con un fin establecido, McClelland(1973).

Es importante mencionar que para la existencia de un sistema y, por consiguiente, un modelo se requiere de elementos con características que los identifiquen y vínculos que los relacionen en un todo. Todo sistema puede ser modelado y a su vez se pueden realizar experimentos, los modelos en algunos casos son físicos, pero para nuestro estudio será matemático, con lo que se obtendrá una solución analítica a través de la simulación. La necesidad de la simulación surge de poder representar un sistema real que existe pero es muy costoso el realizar dicho experimento, puede requerir mucho tiempo, y bien puede ser imposible de construir o experimentar.

Muchos de los sistemas que se pretende representar están compuestos de variables aleatorias relacionadas, y controlar esas condiciones en un mundo real así como la dinámica en la que conviven es muy complicado.

2.4. Concepto de Modelo

"Los modelos son considerados herramientas de representación teórica del mundo, auxiliares para explicarlo, predecirlo y transformarlo" (Galagosky & Aduríz, 2001).

"Un modelo es un objeto, concepto o conjunto de relaciones que se utiliza para representar y estudiar de forma simple y comprensible, una porción de la realidad empírica" (Ríos, 2009).

El modelado es una técnica en la cual se va a construir un esquema del comportamiento de un sistema real, puede ser ejemplificado como una maqueta que utiliza reglas matemáticas y lógicas para representar de forma simple un sistema en un momento del tiempo en un instante definido, que pretende comprender la realidad.

El modelo va a ser de gran importancia, ya que su significado y representatividad del sistema dependen de la similitud con sistema que se pretende estudiar.

Dicha similitud puede darse de tres formas, puede ser física, probabilística, y conceptual (Whicker & Sigelman, 1991):

- Por similitud en lo físico es representar y plasmar la relación, concretamente en una realidad virtual controlada con componentes con los que se integra el sistema, por ejemplo factores químicos, visuales, geográficos, climáticos, biológicos.
- La siguiente forma y similitud que debe cumplir es la probabilística, que va a regirse por el comportamiento original del fenómeno o sistema modelado, y buscará que el evento suceda en la misma proporción en la que se da en la realidad, es decir que dicho fenómeno se origine con la misma frecuencia.
- Por último, la similitud conceptual engloba el concepto de representar los componentes internos y estructuras del sistema, su organización,

funcionamiento, y componentes, para que la esencia del sistema se mantenga en el modelo.

En algún momento dado se podría llegar a la confusión entre el concepto de modelo y simulación, para lo cual se cita lo siguiente:

"*Un modelo es una representación de la estructura a simular. Es decir, una definición estática que define estructuras, parámetros y funciones o algoritmos. Una simulación, en cambio, es una representación de la estructura en acción. Es decir, cuando se hace evolucionar el modelo a lo largo del tiempo, partiendo de un estado nicial, alimentándolo con una información de entrada y obteniendo una información de salida que serán los resultados a analizar*" (Whicker & Sigelman, 1991).

2.4.1. Tipos de Modelos de Simulación

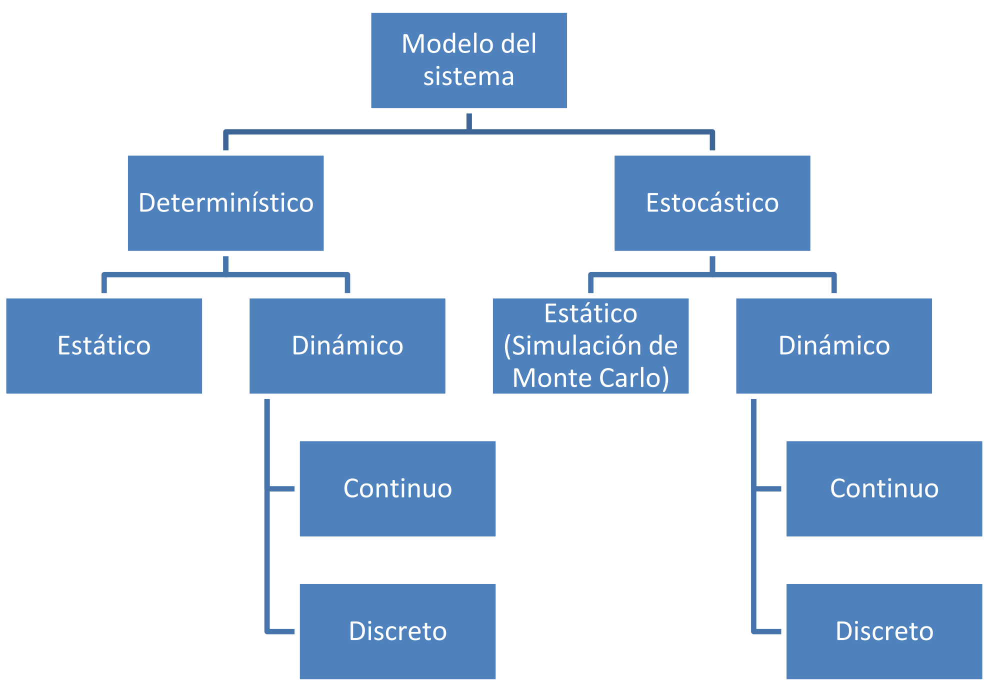
De acuerdo a un compendio de estudios de Whicker & Sigelman (1991), McClelland (1973), Poole & Szymankiewicz (1977) , se propone la siguiente clasificación de modelos de simulación de acuerdo a las variables y funciones que intervienen en la definición del sistema o problema:

- Estático: Son modelos para sistemas que no sufren cambios ni variaciones en un periodo de tiempo definido, o invariablemente no cambian.
- Dinámico: Estos modelos se usan para sistemas cuyos componentes y estado sufren variaciones en el tiempo.
- Continuo: Los modelos continuos representan a sistemas con cambios paulatinos o graduales, las variables se comportan de forma continua.
- Discreto: Representa sistemas en los que se experimentan modificaciones solamente en ciertas ocasiones.

- Estocástico: Los modelos de este tipo se eligen para sistemas cuyos eventos suceden de forma azarosa y no son repetitivos, la probabilidad de ocurrencia de dicho evento puede ser calculada, así como su distribución.
- Determinístico: son aquellos con una solución única, y constante.
- Analítico: El modelado del sistema se realiza a través de expresiones matemáticas que representan el comportamiento de la realidad.
- Numérico: Se tiene el comportamiento numérico de las variables intervinientes. No se obtiene ninguna solución analítica.
- Físico: A través de este tipo de modelos se puede simplificar un sistema de forma tangible.
- Matemático: Proyectan la realidad de forma abstracta de diferentes maneras

A continuación, se muestra la figura 2.1 que muestra de forma clara la estructura conforme a la cual los modelos se clasifican.

Figura 2.1 Diagrama de clasificación de Modelos



Fuente: Elaboración propia basado en Ross, (1980).

Es importante aclarar, que actualmente con los avances en software existen diversas formas de desarrollar Modelos matemáticos, y estos han permitido diferentes lenguajes que son herramientas para construir estos modelos. El propósito de este trabajo no es abundar sobre estos lenguajes, pero se puede decir que algunos de los principales lenguajes de simulación actualmente utilizados son R, MATLAB, SIMULINK, SIMFACTORY, STARCEL, GPSS, SIMAN, GASP, ARENA, y DYNAMO entre otros. Por otro lado existen plataformas o software especializado para la simulación como son Crystal Ball, @Risk, XLSAT, etc.

2.4.2. Aspectos que ponen en ventaja o desventaja a la simulación

De acuerdo a un compendio de estudios sobre el tema de simulación Ross(1980), Azarag & Garcia (1996) y McHaney (1991) se pueden concluir las ventajas y desventajas sobre la simulación.

2.4.2.1 Ventajas de la Simulación:

- Las modificaciones y cambios pueden ser incluidos en el modelo del sistema mientras este siga siendo válido y eficaz para la representación del evento, dichas condiciones serán evaluadas por el investigador para mantener la fiabilidad del modelo.
- Al realizar simulaciones se pueden recrear sistemas reales a bajos costos, ya que no se requiere de la operación del sistema, de igual forma permite conocer los elementos relevantes que podrían ocasionar cambios en situaciones específicas.
- El tiempo destinado a una simulación será menor al que se podría invertir en recrear el fenómeno en la realidad.

- En muchos casos el tratar de recrear el fenómeno resulta poco probable, ya que esto implica destruir recursos, es por eso que la simulación nos permite analizar sistemas que no existen, o sería muy costos recrearlos.
- La forma de representar un método de simulación es más sencilla que el representar un método totalmente analítico.
- En algunos casos los modelos de simulación permiten dar solución a sistemas complejos o muy detallados.
- La simulación nos permite representar y estudiar el pasado, presente o una perspectiva del futuro en tiempo real.
- La simulación nos permite analizar fenómenos que duran periodos de tiempo muy largos de forma comprimida, y viceversa.

2.4.2.2. Desventajas de la simulación:

- Las soluciones obtenidas a través de un modelo de simulación pueden proporcionar al investigador resultados, que en caso de dar solución al fenómeno investigado se deben implementar en la realidad, lo que resulta complejo.
- La simulación ofrece resultados variables, no una solución óptima.
- Para analizar un fenómeno, se requiere una gran cantidad de iteraciones y carga computacional para poder encontrar posibles soluciones lógicas.
- En ciertos casos la falta de abstracción al momento de realizar y construir el modelo, no permiten visualizar soluciones que representen mejores resultados.
- El proceso para validar los resultados obtenidos en una simulación puede ser complejo, incluso más que la simulación misma.
- La simulación en una etapa inicial puede requerir una demanda de tiempo considerable, ya que implica sintetizar la realidad en un modelo, una programación, y diversas etapas antes de obtener resultados.
- No existe un Modelo Perfecto.
- El Modelo nunca se debe confundir con el fenómeno original.

2.5. Método de Monte Carlo

Para poder explicar el método de Monte Carlo es importante hacer una revisión histórica para ver los hechos que dieron lugar a la concepción de este método para poder comprenderlo mejor, Metropolis(1987).

En el año de 1945, dos hechos importantes tuvieron lugar: la exitosa prueba en Alamogordo[14] y la construcción de la primera computadora electrónica, estos dos hechos combinados llevaron a hacer estudios de las interacciones entre Rusia y occidente, esto produjo cambios en la investigación académica y la ciencia aplicada, provocando el renacimiento de una técnica matemática conocida como muestreo estadístico, en ese momento y debido a su naturaleza, se le renombro como Método de Monte Carlo.

Durante este período de tiempo de guerra, en la Universidad de Pensilvania en Filadelfia, un grupo de científicos e ingenieros construyeron la primera computadora, la ENIAC, entre ellos, el físico John Mauchly y el ingeniero Presper Eckert. Mauchly se dio cuenta de que si los circuitos electrónicos podrían contar, entonces podrían hacer operaciones aritméticas y, por lo tanto, resolver ecuaciones a velocidades casi increíbles. Entonces propuso al Laboratorio de Investigación Balística en Aberdeen que la ENIAC realizara sus cálculos.

John von Neumann, profesor de matemáticas en el Instituto de Estudios Avanzados, fue asesor de Aberdeen y en Los Álamos. Se interesó enormemente en el problema termonuclear que se generó en ese momento en Los Álamos por un compañero científico húngaro, Edward Teller, y se interesó en la preparación de un modelo preliminar de cómputo de una reacción termonuclear para la ENIAC. Los argumentos heurísticos de von Neumann fueron aceptados por las autoridades en Aberdeen. La guerra terminó antes de que von Neumann y Frankel terminaran el

[14] Ciudad estadounidense en Nuevo México, y primer lugar donde se probó la bomba atómica.

modelo, pero se acordó seguir trabajando. Anthony Turkevich se unió al equipo y contribuyó sustancialmente a todos los aspectos de la obra.

La revisión de los resultados de la ENIAC se llevó a cabo en la primavera de 1946 en Los Álamos. Además de Edward Teller, Stanley Frankel, Anthony Turkevich, incluidos los directores Enrico Fermi, John von Neumann, Norris Bradbury, entre los asistentes se encontraba Stanislaw Ulam.

La amplia base matemática de Ulam le hizo saber que habían caído en una técnicas de muestreo estadístico que ya no se usaba debido a que los cálculos eran demasiado largos y tediosos. Pero con el desarrollo de la ENIAC, Ulam pensó que las técnicas de muestreo estadísticas deberían ser resucitadas, y discutió esta idea con von Neumann. Así se empezó el desarrollo del método de Monte Carlo.

El método era coherente con los intereses de Ulam en procesos aleatorios a partir de lo simple a lo complicado.

Se relajó jugando solitario y fue estimulado por jugar al póquer, y entonces creó el concepto de "números de la suerte", cuya distribución fue muy similar a la de los números primos, estaba muy interesado en la teoría de procesos de ramificación y contribuyó mucho a su desarrollo, incluida su aplicación durante la guerra a la multiplicación de neutrones en la fisión nuclear.

Durante mucho tiempo, se interesó en la investigación de desarrollo de modelos de juegos en dos dimensiones con reglas muy sencillas, conocidos ahora como autómatas celulares. John von Neumann vio la importancia de la sugerencia de Ulam y el 11 de marzo de 1947, envió una carta a Robert Richtmyer, el líder de la División Teórica. Su carta incluye una descripción detallada de un posible enfoque estadístico para resolver el problema de la difusión de neutrones en material fisionable.

Se le dio el nombre de Monte Carlo gracias a que Ulam viajo a la ciudad de Monte Carlo en Mónaco, famoso porque se juega la ruleta, un juego de azar que genera números aleatorios. El método de Monte Carlo se describe mejor en la carta de von Neumann a Richtmyer, Donde dice considere un núcleo esférico de material fisionable rodeado por una cubierta de material indebida. Y ahora suponga una distribución inicial de los neutrones en el espacio y en velocidad, pero ignore los efectos radiactivos e hidrodinámicos. La idea es el desarrollo de un gran número de cadenas de neutrones individuales como consecuencia de la dispersión, absorción, la fisión, y escape.

Cada etapa de una secuencia de decisiones ha de estar basada en las probabilidades estadísticas apropiadas a los factores físicos y geométricos. Las dos primeras decisiones se producen en el tiempo $t=0$, cuando un neutrón se selecciona para que tenga una cierta velocidad y una posición espacial determinada. Las próximas decisiones son la posición de la primera colisión y la naturaleza de esa colisión. Si se determina que una fisión se produce, el número de neutrones emergentes deberá ser calculado, y cada uno de estos neutrones, eventualmente deberán ser seguidos de la misma manera que el primero. Si la colisión se declara como una dispersión, se utilizan las estadísticas apropiadas para determinar el nuevo momento del neutrón. Cuando un neutrón cruza una frontera de material, los parámetros y las características del nuevo medio se deben tomar en cuenta. Por lo tanto, un árbol genealógico de un neutrón individual se desarrolla. El proceso se repite para todos los neutrones hasta que un modelo estadísticamente válido es generado.

Las decisiones fueron hechas basándose en un algoritmo para generar números pseudoaleatorios uniformemente distribuidos, llamado von Neumann o “Método del Cuadrado Medio”, como se puede observar en la tabla 2.1.

Sin embargo, el mismo Método del Cuadrado Medio propuesto por John von Neumann más tarde reflejó que en cierto momento la secuencia de los números aleatorios generados puede caer en un ciclo repetitivo de resultados que se denomina periodo, lo cual le resta el pretendido carácter aleatorio e impredecible a los números generados por ese método. H. Lamer sugirió un esquema basado en el teorema de Kronecker-Weyl que genera todos los números posibles de n dígitos antes de que se repitan. Estos números generados deben superar pruebas de aleatoriedad, estas pruebas son de carácter empírico, y de carácter teórico basándose en métodos numéricos. Por lo general los números aleatorios uniformemente distribuidos son los que se utilizan para generar los valores de otras variables aleatorias.

Tabla 2.1.

Forma de realizar números pseudoaleatorios propuesta por Von Neumann

MÉTODO DEL CUADRADO MEDIO PARA GENERAR NÚMEROS PSEUDOALEATORIOS:			
Número semilla	**Resultado al ser elevado al cuadrado el número semilla**	**Selección de los 10 dígitos del medio**	**Nuevo número aleatorio generado:**
3425947566	11737116724981300000	11737**1167249813**00000	**1167249813**
7594357293	57674262693742300000	57674**2626937423**00000	**2626937423**
5949315020	35394349207197600000	35394**3492071976**00000	**3492071976**

Fuente: Elaboración propia basada en ejemplo de McHaaney, 1991

Una vez que se tiene un algoritmo para generar un conjunto de números aleatorios uniformemente distribuidos, estos números deben ser transformados en una distribución *g* no uniforme con las propiedades de interés deseadas. Se puede demostrar que la función *f* necesaria para lograr esta transformación es simplemente la inversa de la función de distribución no uniforme, que se presenta a continuación con las mismas propiedades.

$$f = g^{-1} \tag{2.1}$$

Por ejemplo, un espectro de la velocidad de los neutrones con varios picos y valles es difícil de manejar matemáticamente. Para Monte Carlo solo se necesita reflejar el espectro de la velocidad en la distribución de probabilidad. Además, el método de Monte Carlo es lo suficientemente flexible para tener en cuenta los efectos hidrodinámicos de una manera coherente. En un modelo aún más elaborado, los efectos de la radiación pueden ser tratados siguiendo los fotones y sus interacciones. Las aplicaciones del método de Monte Carlo son muy amplias. El método de Monte Carlo nos permite resolver problemas matemáticos, mediante un sistema de simulación con variables aleatorias descritas por con funciones de probabilidad y, con momentos generados con secuencias de números aleatorios.

La idea principal detrás del método de Monte Carlo (Saavedra & Ibarra, 2008) propuesta por Ulam y Von Neumann está basada en el valor esperado de una variable aleatoria continua *X* con distribución *F* que es la media aritmética de una muestra finita de v.a. independientes, e idénticamente distribuidas con primer y segundo momento finitos tal que:

$$\tilde{X}_M = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M} X_i \tag{2.2}$$

Entonces para cualquier $\varepsilon > 0$ y $0 < \delta < 1$, existe un natural *M* tal que para toda m se tiene que:

$$P\left(\left|E(X) - \tilde{X}_m\right| < \varepsilon\right) > 1 - \delta \tag{2.3}$$

Esta es la idea principal del método de Monte Carlo que sirve para estimar el valor estimado de una función *g* continua con argumentos de v.a. con distribución *F*. Entonces:

$$E(g(X)) \approx \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M} g(X_i) \tag{2.4}$$

El Dr. Thomas N.K. Godfrey durante los años 1975-1989 fue el principal programador del código MCNP (Monte Carlo N-Particle), desarrollado en el laboratorio de Los Álamos es el programa de computadora más completo basado en este método. Hoy en día el software MCNP se utiliza en desarrollo de reactores nucleares, Cromo dinámica Cuántica, Radioterapia, comportamiento de radiación en la atmósfera terrestre, flujos de tráfico, evolución estelar, cálculos y predicciones económicas, búsqueda de petróleo, entre otros.

Las posibles soluciones numéricas de un sistema físico se pueden obtener mediante un modelo matemático del cual se obtienen y resuelven ecuaciones integrales o diferenciales que describen el comportamiento o estado de dicho sistema. Existen problemas tan complejos, como las interacciones nucleares, que no pueden ser resueltos mediante modelos determinísticos. Con el método de Monte Carlo, los procesos físicos son simulados sin necesidad de resolver completamente las ecuaciones del sistema. Más sin embargo, es necesario conocer las funciones de densidad de probabilidad (fdp) que describen el comportamiento o estado del sistema. Se pueden estimar resultados incluso si el problema no tiene un contexto probabilístico.

Un modelo estocástico se construye a través del código MCNP basándose en las funciones de densidad, así entonces, puede modelar secuencialmente eventos individuales de una variable aleatoria. De este modo, teóricamente se siguen todos los eventos o interacciones que sufre cada partícula desde su origen, hasta que alcanza una condición terminal. Lo mismo se aplica para todas las partículas creadas en el proceso. Para todos los eventos, el MCNP genera números aleatorios fundamentándose en las fdp´s, que definirán luego el tipo de interacción y otros parámetros. Eventualmente, se calcula el valor esperado de todos los eventos simulados. El valor esperado de las variables aleatorias es equivalente al valor de una cantidad física del sistema estudiado.

Existen dos tipos de problemas en los cuales se puede emplear esta técnica:

1) Los problemas en los cuales existe algún tipo de proceso estocástico, como la demanda del consumidor y la prioridad en la producción e inversión en un portafolio de activos financieros, son algunos ejemplos de variables económicas que por naturaleza se pueden considerar estocásticas. Se han desarrollado métodos de Monte Carlo para simular la mayoría de las distribuciones de probabilidad más conocidas.

2) Algunos problemas matemáticos completamente determinísticos, de difícil solución (sí es que admiten solución), por métodos estrictamente determinísticos. Pero no obstante, se pueden encontrar aproximaciones a soluciones de estos problemas, haciendo una simulación de un proceso estocástico con las propiedades requeridas del problema determinístico original como momentos, funciones de densidad o de distribución acumulada.

2.5.1 Distribuciones de probabilidad continuas

Al estar realizando un proceso de simulación, es necesario mencionar las principales distribuciones de probabilidad continuas., ya que los datos con los que se estará trabajando (rendimientos históricos de los activos) serán ajustados a una distribución de probabilidad que describa de mejor forma su comportamiento.

Una variable aleatoria X será llamada continua, "si su conjunto de valores posibles es un intervalo completo de números, es decir, si para alguna $A < B$ cualquier número x entre A y B es posible" (Wackerly et al.,2002).

A continuación se van a mencionar algunos aspectos generales de las distribuciones de probabilidad con las que se trabajó en la presente investigación, por otra parte en el anexo 2 se presentan otras distribuciones continuas igualmente importantes las cuales no se utilizaron en esta investigación, pero pueden ser igualmente útiles para otro tipo de estudio.

2.5.1.1. Distribución t de Student

La distribución t de Student surge por la necesidad de dar solución a la estimación de la media de una población con distribución normal, en el caso de que la muestra que se utilice es muy reducido, (Wackerly et al.,2002).

La distribución t de Student está conformada por una variable aleatoria Z con distribución normal estándar, y una variable aleatoria Y de tipo Ji-cuadrada con v grados de libertad.

Siendo Y, y Z variables aleatorias independientes, con v grados de libertad:

$$T = \frac{Z}{\sqrt{Y/v}} \tag{2.36}$$

Se dice que la función de densidad de la expresión anterior es de tipo t, con v grados de libertad.

La distribución t de Student es empleada cuando en condiciones prácticas se desconoce la desviación estándar de una determinada población, cuando el parámetro v es mayor o igual a 30, las probabilidades resultantes de la distribución t, se aproximan a los resultados obtenidos a través de una distribución normal.

$$f(t) = \frac{\boldsymbol{\Gamma}\left(\frac{\boldsymbol{v}+\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\right)}{\sqrt{\pi v \boldsymbol{\Gamma}\left(\frac{\boldsymbol{v}}{\mathbf{2}}\right)}} . (1 + \frac{t^2}{v})^{-\frac{v+1}{2}} \qquad para: \quad -\infty < t < \infty \tag{2.37}$$

Donde:

$\boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{\alpha}) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx$

$\boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{\alpha}) = (\boldsymbol{\alpha} - \mathbf{1})!$ Para cualquier entero positivo

$\boldsymbol{v}$ Representa los grados de libertad de la variable aleatoria Y, de tipo ji-cuadrada

La media y varianza de la distribución t con v grados de libertad, con $v > 3$, son las siguientes:

$$E(x) = 0 \tag{2.38}$$

$$V(X) = \frac{v}{v-2} \tag{2.39}$$

Algunas de las propiedades que se pueden mencionar de esta distribución son:

- Las curvas de una distribución t son muy similares a una campana, con centro en 0.
- Las curvas de la distribución t, se encontrarán más dispersas que las resultantes de una distribución normal estándar.
- Cuando el parámetro $v \rightarrow \infty$ las curvas resultantes se aproximarán a las de una distribución normal.
- Cuando el parámetro v crece, la dispersión existente en la curva de la distribución disminuye, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Antioquia(2012).

2.5.1.2. Distribución Logística

La distribución logística tiene forma muy parecida a la distribución normal, pero con la diferencia que la distribución logística posee colas más pesadas, presentando una mayor curtosis.

La función de densidad de probabilidad, la función de distribución, y momentos respectivamente se muestran a continuación:

$$f(x;\ \mu, s) = \frac{e^{-(x-\mu)/s}}{s(1+e^{-(x-\mu)/s})^2} \tag{2.44}$$

$$F(x;\ \mu, s) = \frac{1}{1+e^{-(x-\mu)/s}} \tag{2.45}$$

$$Media = Mediana = Moda = \mu \tag{2.46}$$

$$V(x) = \frac{\pi^2}{3} s^2 \tag{2.47}$$

La distribución logística tiene distintas aplicaciones para diversas ramas de estudio, como las siguientes:

- En el área de la biología es útil para modelar el comportamiento de especies en un medio ambiente competitivo, así como para describir la propagación de virus o epidemias.
- La distribución logística tiene aplicaciones en áreas en las que se requiere modelar la propagación de elementos como pueden ser en el caso de la sociología, el proceso en el que se va adquiriendo conocimiento en el aprendizaje, en el área de la tecnología, el proceso en el que se van dando a conocer dentro de una población y un ambiente de competencia.

En términos generales la distribución logística se emplea para estudiar fenómenos en los que existe un crecimiento temporal de variables de tipo demográficas (Xunta de Galicia Consellería De Sanidade, 2012).

2.5.2. Prueba de Ajuste de Anderson-Darling

Aunque existen otras pruebas que permiten ajustar una serie de datos a una distribución de probabilidad, en este apartado se considerara únicamente la pruebe Anderson-Darling, ya que fue la que se consideró dentro de los análisis del presente estudio.

La prueba de Anderson-Darling (AD) es utilizada para poder probar que un conjunto de datos de una muestra tienen un comportamiento que puede ser descrito por una distribución de probabilidad en específico, se fundamenta en realizar una comparación de la distribución de probabilidades acumulada teórica, con la distribución acumulada de tipo empírica resultante de los datos, (Marqués, 2004).

La prueba de AD permite conocer si los datos de una muestra tienen un origen en una distribución específica, en la estadística se utiliza como una prueba no paramétrica aplicada a datos para conocer su origen.

La prueba AD está definida por:

H_o: Los datos siguen una distribución especificada, y de acuerdo a cada distribución se buscara obtener los parámetros adecuados a la misma.

H_a: los datos no siguen la distribución especificada, las variables aleatorias no siguen la distribución.

Las fórmulas que se utilizan para obtener el estadístico de AD son las que se muestran a continuación.

El estadístico de AD está definido por:

$$A^2 = -N - S \tag{2.48}$$

Donde:

N : es el número de datos utilizados, y S se obtiene de la ecuación siguiente:

La expresión [15] es utilizada para realizar la prueba de AD:

$$S_n^2 = -\sum_{i=1}^{n} \frac{(2i-1)}{n} \left[lnF(Y_i) + \ln\left(1 - F(Y_{n+1-i})\right)\right] - n \tag{2.49}$$

Por último se debe cumplir la condición siguiente:

$$S = \sum_{i=1}^{n} S_i \tag{2.50}$$

Donde:

[15] La ecuación es obtenida de resolver la ecuación $A_n^2 = n\int_{-\infty}^{\infty} \frac{[F_n(x) - F(x)]^2}{F(x)[1-F(x)]} f(x)dx$

F: es una función de distribución acumulada, de una distribución de probabilidad específica, es importante mencionar que los datos deben estar ordenados.

n: es el número de datos

$f(x)$: es la función de distribución de probabilidad teórica

$F_n(x)$: es la función de distribución empírica

Los valores críticos de la prueba AD dependen, como ya se ha mencionado, de una distribución, de probabilidad en específica que se esté probando. Para poder conocer si hay un rechazo para esta prueba es importante obtener el valor estadístico ajustado a una distribución para posteriormente compararlo con los valores críticos de la tabla de AD, SEMATECH, NIST, (2012).

Por último, al obtener el valor estadístico $A^2 < A^2_{Crítico}$, la hipótesis nula no es rechazada, y los datos se comportarán de acuerdo a la distribución seleccionada.

2.5.3. Generador de Números Aleatorios

Otro de los fundamentos del Método de Monte Carlo y de la Simulación es el uso de números aleatorios o pseudoaleatorios, los métodos más utilizados para la generación de números de este tipo según Rodríguez (2011) y Shanon (1988)es la siguiente:

- Método del Cuadrado Medio de Von Neumann: consiste en el uso de un algoritmo en el cual al inicio se introduce un número cualquiera o número semilla γ_0, conformado por n dígitos, n>3, luego se calcula el cuadrado de ese número inicial γ_0^2 conformado por 2n dígitos, a continuación se toman exactamente los n dígitos ubicados en la mitad del número resultante, y ese número conformado por los n dígitos se toma como un nuevo número aleatorio γ_1 que sirve para engrosar la secuencia aleatoria generada, al cual posteriormente se le puede aplicar de nuevo el algoritmo del cuadrado medio para así obtener sucesivamente más números pseudoaleatorios (Véase Tabla 2.1).

- Método congruencial: se dice que dos números ” x” y “y” son congruentes con modulo m si:

$$x \equiv y \; mod \; (m) \tag{2.51}$$

Esto es lo mismo que “ x” y “y” producen el mismo resto al ser divididos por m.
La expresión para generar números pseudoaleatorios está dado por:

$$\gamma_n = (\gamma_{n-1}) * a + b \; mod \; (m) \tag{2.52}$$

Donde:
a y *b* = multiplicadores elegidos a conveniencia
γ_0 = número semilla.

- Congruencial Multiplicativo: es una modificación al método anterior, en el cual se toma a *b=0*, la expresión para generar números pseudoaleatorios es la siguiente:

$$\gamma_n = (\gamma_{n-1}) * a \; mod \; (m) \tag{2.53}$$

Donde:
Normalmente $m = c^p$
c= número de dígitos diferentes del sistema usado (binario, 2)
p=tamaño de la una palabra
El tamaño máximo de repetición está dado por *m*/4 con $m = 2^p$ y tomando a γ_0 como numero semilla impar.

- Congruencial Mixto es un método utilizado para generar número pseudoaleatorios con m números posibles distintos que serán generados

$$\gamma_n = (a\gamma_{n-1} + c) mod\ (m) \qquad (2.54)$$

Donde:

γ_0 = Semilla, $\gamma_0 > 0$

a= Constante multiplicativa

c =Constante aditiva

m =El módulo, o número posible de valores que pueden ser generados

2.5.4. Metodología del proceso de simulación de Monte Carlo para el análisis de Riesgo

Ahora se describirá el proceso del Método de Simulación Monte Carlo aplicado al análisis de riesgo. De acuerdo al trabajo realizado por algunos investigadores en trabajos recientes, el proceso de análisis de riesgo por el método de Simulación Monte Carlo es el siguiente (Tamošiūnienė & Petravičius, 2006):

1) Previsión del modelo, creación de un modelo de predicción, donde se definen las relaciones matemáticas entre las variables numéricas y las previsiones del futuro. Se trata de un conjunto de fórmulas que procesan un número de variables de entrada para llegar a un resultado. Un buen modelo es tal que incluye todas las variables relevantes (y excluye todas las irrelevantes) y determina las relaciones correctas entre ellas.
2) Las variables de riesgo, seleccionar las variables de riesgo que pueden dificultar la viabilidad del proyecto, en el sentido de que una pequeña desviación de su valor previsto es probable y potencialmente perjudicial para el valor del proyecto.
3) Distribuciones de probabilidad, después que se hayan identificado las variables de riesgo se tendrá que elegir las mejores distribuciones que se ajusten a ellas.
4) Ajuste de los límites del rango, a través del establecimiento de límites (valores mínimo y máximo) se especifica el nivel de variación posible para cada variable

de riesgo identificada. Por lo tanto, se define una gama de valores posibles para cada variable de riesgo.

5) Correlacionar variables, la correlación es importante para el método de Monte Carlo, se debe determinar la correlación entre las variables, haciendo la estimación de los coeficientes de correlación entre cada par de variables independientes, usando métodos estadísticos.
6) Ejecución de la Simulación, en cada ejecución se genera un resultado diferente, ya que los valores de entrada para las variables de riesgo son seleccionados al azar a partir de su distribución de probabilidad asignada. El resultado de cada ejecución se calcula y se almacena para su análisis estadístico.
7) Análisis de los resultados, es la etapa final en el proceso de análisis de riesgo, se analizan y se interpretan los resultados obtenidos durante la etapa de simulación.

Para realizar el análisis del riesgo se debe tener en cuenta lo siguiente:

Se puede calcular el grado de probabilidad de que los resultados estén por encima o por debajo de un valor esperado, por lo tanto, la probabilidad de que los resultados del proyecto sean inferiores a un determinado valor es simplemente el número de veces que los resultados tienen un valor más bajo de todas las ejecuciones.

Al clasificar los datos en un orden ascendente, es posible trazar la distribución de probabilidad acumulada de todos los resultados posibles. A través de este, se puede observar el grado de probabilidad que se puede esperar para el resultado del proyecto.

Tamošiūnienė & Petravičius (2006) mencionan:

- El valor esperado: explicado como una media ponderada de los valores de todos los resultados probables, así como se explica este concepto a continuación se mostrarán otros igualmente importantes.

- El siguiente término que es resaltado es el costo de la incertidumbre, los autores mencionan su gran utilidad ya que ayuda a determinar la cantidad máxima de dinero que uno debe estar dispuesto a pagar para obtener información con el fin de reducir la incertidumbre del proyecto. Esto puede ser definido como el valor esperado de los posibles beneficios no percibidos por la decisión de haber rechazado un proyecto, o el valor esperado de las pérdidas que puedan surgir a raíz de haber aceptado un proyecto.

- La razón de pérdida esperada (el)[16], es una medida que indica la magnitud de la pérdida esperada con respecto al valor presente neto total esperado del proyecto. Esto se expresa en la fórmula del valor absoluto de la pérdida esperada dividido por la suma de la ganancia esperada y el valor absoluto de la pérdida esperada:

$$el = \frac{|Perdida\ esperada|}{\text{Ganancia esperada} + |Perdida\ esperada|} \tag{2.55}$$

El resultado se podrá encontrar entre 0 y 1, para el caso de 0 significa que no hay pérdida esperada, y para 1, significa que no hay ganancia esperada.

- Coeficiente de variación: es la desviación estándar del rendimiento proyectado dividido por el valor esperado. Suponiendo que el valor esperado es positivo, menor será el coeficiente de variación, y menor será el riesgo del proyecto.

2.6. Estudios recientes sobre Simulación Monte Carlo en el área de Finanzas

La simulación utilizando el método de Monte Carlo es actualmente utilizada para diversos fines, en nuestro caso mencionarán dos estudios enfocados al sector financiero, en el que la comunidad científica se mantiene interesada en este tipo de procedimientos.

[16] Por su traducción del inglés *"Expected Loss"*

La publicación “*Holistic Investment Assesment Optimization, Risk Appraisal and Decision Making*”[17], Tziralis et al.,(2009) exponen su interés por tomar la decisión más apropiada para cuando se tienen restricciones en cuanto a capital, ya que los inversionistas generalmente se encuentran sujetos a cierta cantidad de activos que deciden reinvertir, los inversionistas están expuestos diversas alternativas y es recomendable que sea analizada cada una de ellas, este proceso ellos lo clasifican como una definición del problema, una evaluación y por último un análisis para proceder a tomar dicha decisión.

El método utilizado por los autores está basado en observar los escenarios, para poder crear algoritmos para la optimización. Los autores recomiendan que los inversionistas se den a la tarea de identificar cada una de las inversiones para evaluar la cantidad de recursos correcta para ser destinada a cada instrumento ya que el aplicar recursos de forma inadecuada equivale a la destrucción de los activos, a través de la simulación pueden ser creados dichos escenarios y condiciones.

Los autores proponen los siguientes pasos para poder realizar una evaluación más precisa de la inversión:

- Selección del criterio para evaluar los activos, como etapa inicial.
- Posteriormente proponen un enfoque integrador para los siguientes aspectos: Realizar un análisis de riesgo completo a través del método de simulación Monte Carlo, para poder crear escenarios de la volatilidad de los activos seleccionados por los inversionistas.
- Finalmente, decidir si se va a realizar la inversión o no.

Los autores al realizar la evaluación usan el criterio del valor presente neto de un activo, la tasa de retorno, y algunos métodos contables, utilizan el criterio del valor presente neto, ya que es el más utilizado para evaluación de proyectos.

[17] “Evaluación integral de inversión, optimización, evaluación de riesgos y toma de decisiones”.

Los rendimientos, según los autores, se ven afectados en primera instancia respecto a las decisiones de los inversores, mientras que la segunda es relacionada con variables externas, como por ejemplo las tasas de inflación o las tasas de interés.

A través de este proceso el primero objetivo estratégico del inversionista es el obtener las acciones óptimas de la inversión. Según los autores la función estará definida por:

$$VPN = f(P_{Probable}, V_{óptimo}) \tag{2.56}$$

Donde VPN es el valor presente neto, y estará en función del parámetro P que es aquel que establece el modelo de la distribución probabilística para la maximización de los rendimientos, el parámetro V estará compuesto por las variables cuyos valores estarán definidos por las decisiones del inversionista.

El análisis con el método de Monte Carlo busca observar el riesgo existente en cierto escenario determinado por factores externos. Dicha información no será suficiente, ya que las diferencias entre los resultados del modelado y la realidad pueden tener sesgos. Es por eso que el modelo adoptado de parámetros externos proporciona la cantidad necesaria de información para la asignación de los activos. El método de Montecarlo es un proceso estocástico que será utilizado para proporcionar una solución a las situaciones no determinísticas, basándose en valores probables que pueden tomar los parámetros, así como los valores siguientes obtenidos de forma aleatoria, dentro de un rango de resultados que podrán estar en el grupo de los más probables o los que tienen menor ocurrencia.

En el caso de este estudio, el modelo de Monte Carlo es aplicado con *K=1,…,q* iteraciones , donde *q* es mayor a 1,000 buscando valores aleatorios de la distribución estadística X_j tal que:

$$\forall\, i, k: P_{ik} \sim X_{i(x_i)} \tag{2.57}$$

La siguiente parte del proceso que recomienda el autor es que el inversionista interprete los resultados obtenidos para poder tomar la mejor decisión.

Los resultados obtenidos les permiten a los inversionistas evaluar las operaciones, así como cuando deben decidir sobre proceder con una nueva inversión en el caso de que esta sea la mejor opción, con este método se logra obtener la optimización y análisis de los escenarios de riesgo a los que se está expuesto.

El artículo *"The Use Of Monte Carlo Simulation Technique To Support Investment Decisions"*[18] Tamošiūnienė & Petravičius (2006) , utiliza la metodología y la técnica de simulación de Monte Carlo para conocer el desempeño de proyectos de inversión analizando y evaluando el riesgo.

Los autores declaran que en todas las situaciones económicas y en la realización de un proyecto de inversión o un plan de negocios, existe un riesgo de fracaso, y como se sabe es imposible eliminar las variables que dan razón a eventos indeseables, lo cual si se hiciera nos llevaría a un resultado irreal y muy lejos del objetivo. Sin embargo siempre es posible llegar al objetivo mediante una estrategia que consiste en nivelar el beneficio esperado y la posible pérdida asociada a un nivel de riesgo, mediante un análisis de los posibles métodos a utilizar para la reducción del riesgo, y todo lo que se necesita para determinar los diferentes factores de riesgo, por lo cual se debe realizar un análisis del riesgo. El propósito principal del análisis de riesgos es la obtención de todos los datos necesarios para presentarlos a los potenciales socios del proyecto.

El análisis del riesgo se realizó mediante una simulación probabilística basada en la técnica de simulación de Monte Carlo, en el que las variables principales se proyectan con el fin de estimar el impacto del riesgo sobre los resultados del proyecto. Para la técnica de simulación de Monte Carlo se introdujo un modelo matemático para un número de ejecuciones de simulación. Durante el proceso de simulación, se construyen escenarios sucesivamente, utilizando los valores de entrada para las

[18] El uso de la técnica de Simulación Monte Carlo para apoyar las decisiones de inversión

variables de incertidumbre clave del proyecto, que son seleccionadas a partir de múltiples distribuciones de probabilidad.

La simulación es controlada de tal manera que las distribuciones de probabilidad especificadas no afectan la correlación conocida entre las variables del proyecto. Los resultados son analizados estadísticamente con el fin de construir una distribución de probabilidad de los resultados del proyecto y así estimar los distintos niveles de riesgo del proyecto.

Después de realizar la simulación Monte Carlo y hacer el análisis de riesgo los autores tuvieron las siguientes conclusiones:

1. El uso de la técnica de Simulación Monte Carlo, aumenta la potencialidad de tomar decisiones sobre los proyectos menos atractivos. Un proyecto donde el Valor Presente Neto es pequeño puede ser aceptado siguiendo el análisis de riesgo, si un rendimiento satisfactorio es mayor que la probabilidad de tener una pérdida inaceptable.
2. Un proyecto puede ser rediseñado para tener en cuenta las predisposiciones particulares de riesgo del inversionista.
3. El análisis de riesgo, aumenta la comunicación entre el analista y el tomador de decisiones. La realización del análisis de riesgo en la evaluación del proyecto consiste en la recopilación de la información que en gran parte refleja los conocimientos adquiridos y la experiencia de los altos ejecutivos de una organización.
4. La exactitud de las predicciones tiene que ser tan buena como la capacidad predictiva del modelo utilizado.

CAPÍTULO 3

EL MERCADO BURSÁTIL Y LA BOLSA MEXICANA DE VALORES

3.1. Introducción

Existen diversos tipos de instrumentos de inversión en México, el público inversionista puede acceder a ellos a través de dos de los principales mercados: el Mercado Mexicano de Derivados (MEXDER) y la Bolsa Mexicana de Valores (BMV) [19], esta última será analizada de manera más detallada en este capítulo.

En el presente estudio se van a mencionar aspectos generales del funcionamiento de la BMV. Por medio de la BMV y el MEXDER a través de las casas de bolsa se le permite al público inversionista disponer de diversos instrumentos, para llevar a cabo la compra o venta de valores, ya que el objetivo y finalidad principal es que exista un contacto entre inversionistas y emisoras de valores.

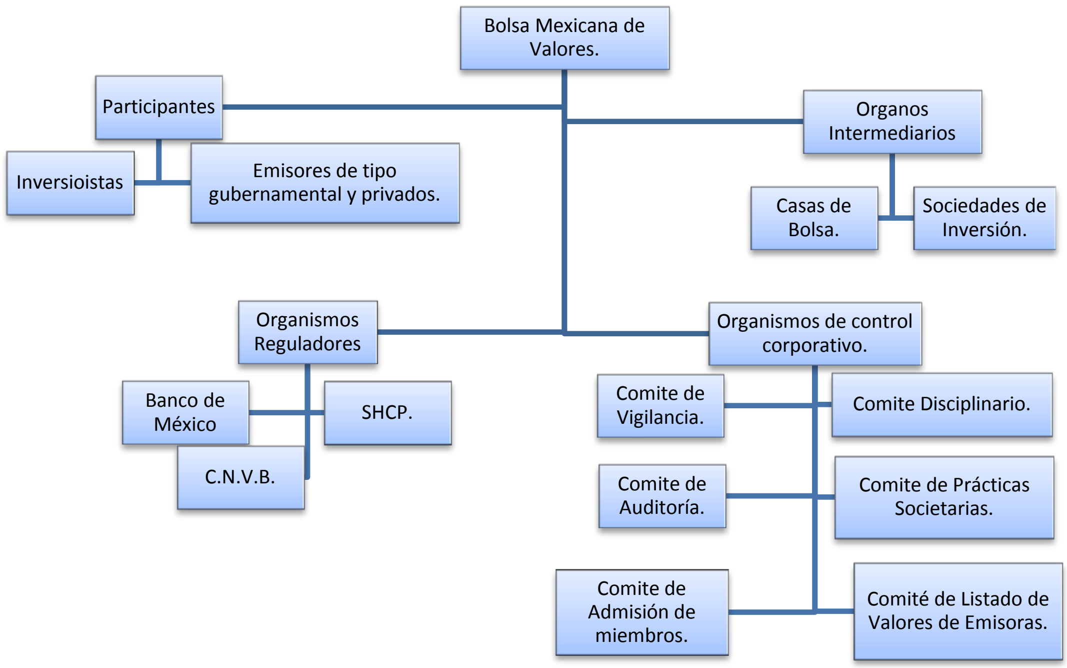
Los inversionistas tienen derecho a poder llevar a cabo sus actividades, a través de estas instituciones las operaciones se efectúan de forma justa, transparente y equitativa a través de reglas acordadas por los participantes

3.2. La Bolsa Mexicana de Valores

Es una entidad financiera, que opera por concesión de la Secretaría de Hacienda y Crédito Público (SHCP), con apego a la Ley del Mercado de Valores (LMV). En la figura 3.1 se pueden observar los organismos que intervienen en el funcionamiento de la BMV.

[19] La fuente principal de información para fundamentar este capítulo es el sitio web de la BMV (http://bit.ly/3fVavv), más la estructura que se presenta en este trabajo de investigación es propia.

Figura 3.1 BMV



Fuente: Elaboración propia basado en la BMV.

3.2.1. Importancia de la Bolsa Mexicana de Valores

La importancia de las bolsas de valores radica en que a través de ellas las sociedades que las establecen reciben beneficios económicos , son puntos a los que acuden inversionistas con el firme propósito de mejorar su situación económica, mantener su ahorro y salvaguardarlo para acrecentar sus ingresos colocando recursos en la economía que benefician a empresas, y a los proyectos gubernamentales que deciden financiar, lo que se convierte en fuentes de riqueza, empleo, y reactivación de la economía.

Las empresas que deciden poner en oferta pública valores, colocan los valores a través de la BMV, así los inversionistas pueden comprar y vender los distintos tipos de instrumentos a través de casas de bolsa, en la BMV se lleva a cabo las operaciones y se registran las operaciones realizadas en las casas de bolsa.

El público inversionista adquiere o vende acciones través de promotores de casas de bolsa, los promotores se especializan en este tipo de actividades, son capacitados, y autorizados por la CNVB. Finalmente, cuando se compra o vende se informa sobre esta actividad por lo que las casas de bolsa envían esta información a través del Sistema Electrónico de Negociación, Transacción, Registro y Asignación (SENTRA).

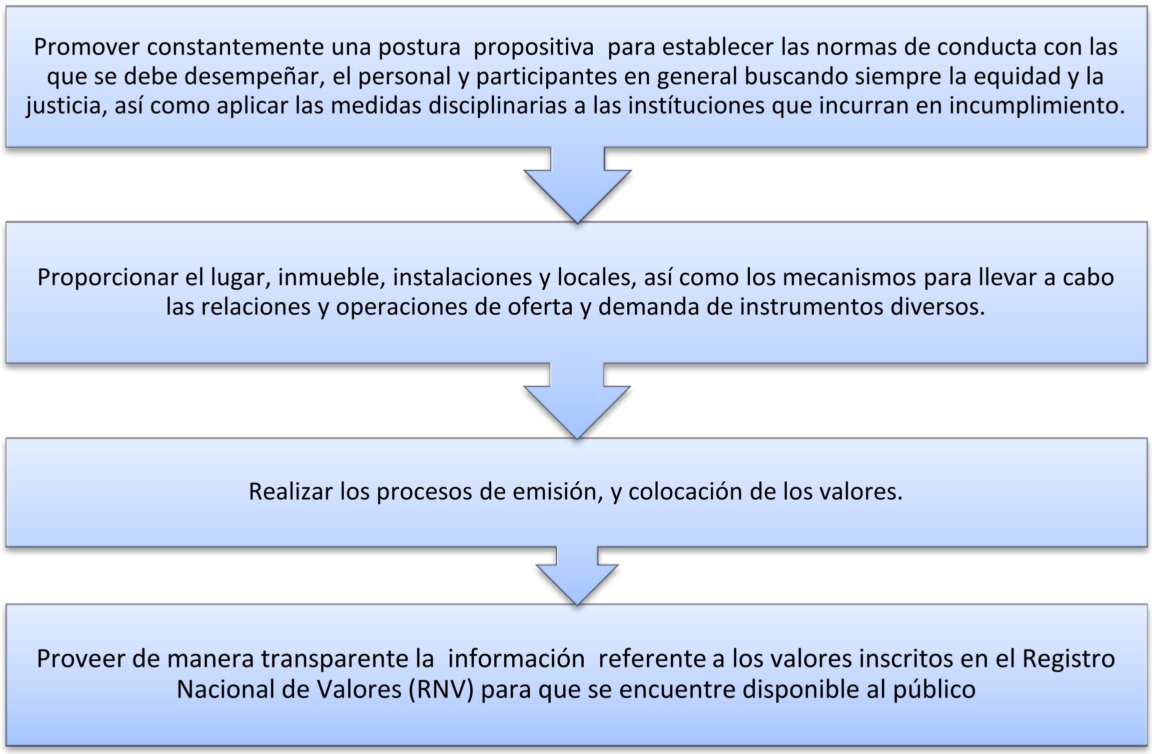
Las empresas al poder emitir valores en la BMV pueden acceder a beneficios como son el adquirir liquidez de manera rápida, impulsar y mejorar su infraestructura, modernizarse, hacerse cargo de obligaciones o pasivos, así como el financiamiento de proyectos a largo plazo ,Carreto(2009).

A diferencia del ahorro, en una inversión se destinan recursos a cierto instrumento esperando rendimientos expuesto a cierto nivel de riesgo, lo que convierte esta tarea en un conjunto de acciones y decisiones que el inversionista debe considerar antes de decidir si realizar la inversión o no hacerlo.

3.2.2. Funciones de la Bolsa Mexicana de Valores

La BMV al ser el lugar en el que de una manera eficiente se simplifica el proceso de compra o venta de valores y se llevan a cabo las operaciones del mercado de valores, a continuación se presentan brevemente las funciones que desempeña.

Figura 3.2 Funciones de la BMV



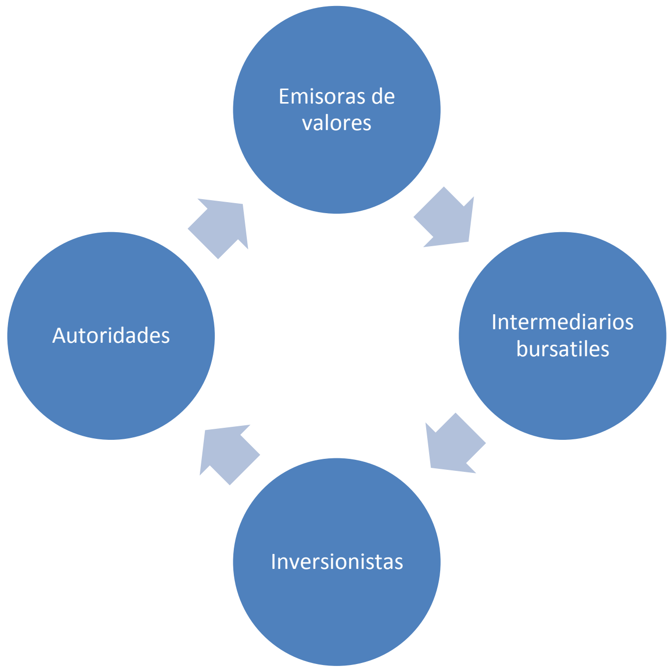
Fuente: Elaboración propia basada en la BMV.

Las empresas que requieren financiamiento para su operación y desarrollo pueden obtenerlo a través de la emisión de acciones cuyo intercambio se busca que suceda de una forma equitativa, justa y de libre competencia en a través de la BMV.

3.3. Participantes en la Bolsa Mexicana de Valores

Las actividades que se llevan a cabo en la BMV requieren de la oferta y demanda de los valores, los participantes principales son las entidades emisoras, los intermediarios bursátiles, inversionistas, y autoridades para supervisar el correcto funcionamiento de la BMV.

Figura 3.3 Participantes de actividades de la BMV



Fuente: Elaboración propia basada en la BMV.

Dichos participantes se describen de manera general a continuación (BMV, 2007):

- Las entidades emisoras son aquellas, entidades federativas, municipios, sociedades anónimas, así como entidades financieras que ofrecen al público valores como títulos de deuda, obligaciones, acciones a través de casas de bolsa bajo los requisitos establecidos por la BMV. Toda aquella empresa que busque emitir instrumentos para la oferta pública debe de cumplir con ciertos requisitos, así como estar sujeta a disposiciones legales definidas en circulares de la CNVB.

- Los intermediarios Bursátiles o casas de Bolsa son aquellos que permiten realizar las operaciones de compraventa de valores, ofrecer seguridad y asesoría a las empresas para ofrecer sus valores, y a los inversionistas apoyo para la construcción de sus carteras, es importante mencionar que también tiene la facultad de realizar transacciones y recibir fondos por su carácter al realizar las operaciones, utilizando el sistema SENTRA de la BMV.

- Los inversionistas son aquellas entidades, personas físicas o morales de origen nacional o extranjeros que mediante los intermediarios, como casas de bolsa o corredores, transfieren sus recursos comprando o vendiendo, buscando siempre rendimientos con bajos niveles de riesgo para proteger y acrecentar sus rendimientos.

- Todas las operaciones deben ser realizadas y supervisadas de acuerdo a las regulaciones, y la normatividad vigente, en la República Mexicana las instituciones encargadas de verificar que todo esté funcionando bajo el marco legal establecido son: la SHCP, la CNBV, BANXICO, y la misma BMV.

3.4. Sectores y sub sectores productivos de acciones que cotizan en la Bolsa Mexicana de Valores

De acuerdo al tipo de empresa emisora de acciones que cotizan en la BMV estas se dividen de acuerdo a sectores, subsectores, ramos y sub ramos, a continuación se mencionarán los sectores y se explicará brevemente la composición que mantienen en la BMV. Los subsectores, ramos y sub ramos no serán mencionados en esta investigación por razones de no profundizar en esta temática ya que no es objetivo del presente trabajo.

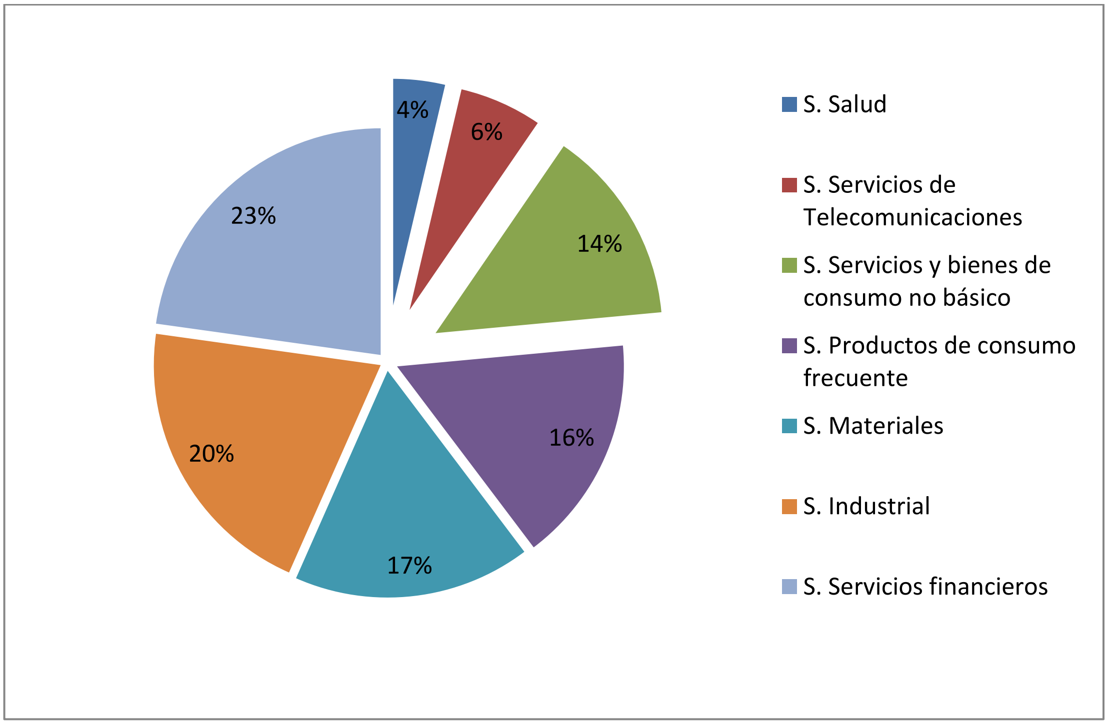
Los 10 sectores que existen en la BMV son los que se mencionan a continuación: Salud, Servicios de Telecomunicaciones, Servicios y bienes de consumo no básico, Productos de consumo frecuente, Materiales, Industrial, Servicios financieros. Existen sectores que no poseen presencia dentro de la BMV como el de energía, tecnología de la información, y servicios públicos, por lo que pueden ser reducidos a 7 sectores activos.

El sector que mayor importancia por el número de acciones que lo integran dentro de la BMV es el de Servicios Financieros con 22.79%, seguido del industrial con

20.59%, el tercer sector de mayor importancia es el de Materiales con un 16.91%, los Productos de Consumo Frecuente con 16.18%, se puede apreciar que en estos cuatro sectores de los 7 existentes, se concentran poco más de ¾ de la actividad económica.

En la figura 3.5 se puede observar la composición de los sectores productivos de la BMV, el sector de menor proporción es el de Servicios de Salud, y el de mayor proporción es el de Servicios Financieros.

Figura 3.5 Participación por sector en la BMV



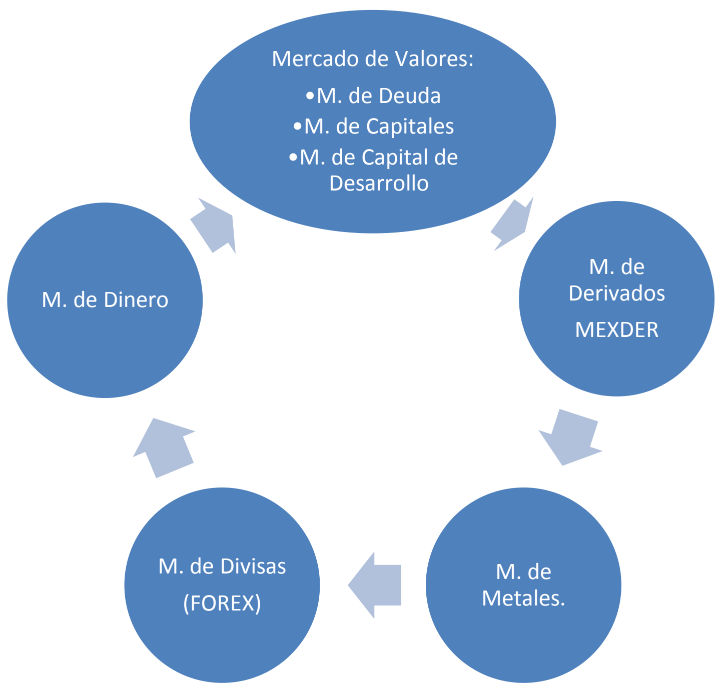
Fuente: Elaboración propia basado en la BMV.

Las empresas emisoras son aquellas que pueden ofrecer al público inversionista, a través de la BMV acciones o títulos de deuda, dichas empresas deben de cumplir con ciertas disposiciones y regulaciones que son emitidas por la CNBV a través de circulares, así como el reglamento de la LMV, en total se tienen 136 empresas emisoras, que pueden ser consultadas en el Apéndice A.

3.5. Organización de los Mercados

La situación económica del país se ve reflejada a través del comportamiento de los precios que marca el mercado, las condiciones del entorno económico permiten conocer el comportamiento de los títulos o valores en los que se invierte, para la presente investigación se dividirán los mercados como se muestra en la figura 3.6 y se explicará brevemente el mercado de valores:

Figura 3.6 Organización de los mercados.



Fuente: Elaboración propia basado en la BMV.

3.5.1. Mercado de Valores

Dentro del mercado de valores se van a encontrar los emisores, intermediarios e inversionistas interactuando de forma conjunta, llevando a cabo sus actividades de acuerdo a la normatividad impuesta por la LMV para el funcionamiento eficiente. El mercado de valores a su vez puede ser clasificado de acuerdo a los instrumentos en Mercado de Deuda y mercado de Capitales.

A. El mercado de Deuda: está compuesto por Instrumentos emitidos de tipo Gubernamental: Deuda a corto, mediano y largo plazo.

B. El mercado de capitales está constituido por instrumentos como las acciones y las fibras, este tipo de instrumentos que tienen como propósito el proveer de liquidez y financiamiento a las empresas privadas o entidades emisoras.

  - Las acciones: Son títulos que forman parte y representan capital social de una empresa, estos se colocan en el público inversionista con el fin de obtener capitalización y financiamiento.
  - Los rendimientos para los accionistas funcionan a través de dividendos, que son el producto de las ganancias de la empresa, ya que la empresa se beneficia del financiamiento recibido de los inversionistas , las ganancias de capital se darán cuando el precio en el que se vende la acción sea menor al precio en el que se compró originalmente.
  - Las fibras: Son fideicomisos enfocados a construir, o adquirir bienes inmuebles para ser arrendados y obtener ingresos, así como otorgar financiamiento para los mismos, estos instrumentos se ve beneficiados de la plusvalía.

C. El mercado de Capital de desarrollo

- Está compuesto por instrumentos llamados CKDes: estos instrumentos son títulos emitidos con el objeto de recibir financiamiento en uno o varios proyectos a través del sectores de diversos giros, como el inmobiliario, minero, tecnológico, etc. Los beneficios son obtenidos a través de las ganancias que sean generadas por los proyectos que han sido financiados a determinado plazo.

3.6. Precio, Bursatilidad y Rendimiento de una acción

El precio de una acción es definida por la BMV como el valor monetario asignado a cierto activo financiero, BMV (2007).

La razón de conocer el rendimiento de una acción reside en el poder conocer si la compra de una acción nos proporciona un beneficio, o ninguno. Las acciones que proporcionan buenos niveles de rendimiento y bajos niveles de riesgo a los inversionistas son acciones que están generalmente en el grupo de las más bursátiles. La bursatilidad de una acción es definida como la "Facilidad de comprar o vender la acción de una emisora en particular" (BMV, 2007), siendo las acciones más bursátiles las que se desplazan más fácilmente en el mercado de valores, ya que gran cantidad de oferentes o demandantes realizan transacciones con ella.

El termino de Rendimiento de una acción (BMV, 2007) se explica como el resultado o beneficio después de llevar a cabo una inversión. Cuando se refiere a una tasa de rendimiento significa el rendimiento anualizado expresado de una forma porcentual con respecto a una inversión. Los beneficios obtenidos por las operaciones se obtienen a través de las ganancias monetarias, de igual forma se reciben beneficios por los niveles de interés que paga un instrumento, o por los dividendos que una empresa decida pagar.

La fórmula que puede ser utilizada para conocer el rendimiento de una acción es la siguiente:

$$R_{t+1} = Ln(P_{t+1}) - Ln(P_t) \qquad (3.1)$$

Donde:

R_{t+1} Es el rendimiento de una acción en el tiempo t+1

P_{t+1} Es el precio al cierre de la acción al tiempo t+1

P_t Es el precio al cierre de la acción al tiempo t

Ln Logaritmo natural.

3.6.1. Series Accionarias en la Bolsa Mexicana de Valores

Las acciones que cotizan en la BMV están clasificadas por series, las series más comunes se detallan a continuación, en el Apéndice B, se pueden consultar todas las series accionarias disponibles.

- Series A, destinada exclusivamente para público inversionista mexicano.
- Series B y C, para inversionistas nacionales o extranjeros (de libre suscripción),
- Serie L, puede ser adquirida tanto por público inversionista nacional como extranjero.
- Serie CPO, dedicada a fideicomisos que excluyen de ciertos beneficios al público que posee dichos títulos, sus siglas significan Certificado de Participación Ordinario y tienen la facultad de otorgar derechos de voto restringido

3.7. Análisis financieros en el mercado de Valores

Los inversionistas al enfrentarse en cada decisión a panoramas de incertidumbre, se ven en la necesidad de poder explicar los fenómenos económicos de una forma racional, es por eso que se requieren de herramientas que les permitan tener conocimientos de como sucederán eventos en un horizonte futuro de tiempo.

El mercado de valores a lo largo de la historia tiene comportamientos que los inversionistas tratan de explicar y comprender a través de dos tipos de análisis, el fundamental y el técnico.

Los mercados financieros se encuentran en constante evolución y cambio, la bolsa, en particular, es uno de los lugares en los que cada vez participan más inversionistas. Los inversionistas se ven afectados directamente por este entorno incierto y cambiante, es por eso que se han desarrollado dos variantes de análisis financieros para poder tomar decisiones más acertadas de acuerdo a lo que busca el inversionista.

A continuación se describirá de forma general el análisis fundamental, y posteriormente de una forma ligeramente más amplia se profundizara en el análisis técnico para los fines del presente trabajo (Scherk, 2007).

3.7.1. Análisis fundamental

El análisis fundamental busca comprender los factores del entorno económico que puedan afectar la oferta o demanda de títulos. La información que se utiliza en este tipo de estudios requiere de conocimientos sobre el sector económico a estudiar, y comprensión de estados y razones financieras para poder evaluar y asignar un valor para un horizonte de tiempo futuro para las empresas (Scherk, 2007).

El análisis fundamental se enfoca en ramas de estudios económicos, empresariales, macro económicos, micro económico, aspectos contables, y asignación de valor a las empresas, a través de estas ramas de estudio se puede tomar una decisión de compra o venta, ya que las acciones en cuestión al encontrarse infravaloradas podría comprarse, en caso contrario, es decir sobre valoradas, lo más recomendable sería venderlas. En el análisis fundamental se llevan a cabo análisis de tipo sectorial y uno bursátil.

3.7.2. El análisis sectorial

Es un estudio aplicado sobre diversos ramos económicos, prestando principal interés en aspectos de los siguientes tipos (Scherk, 2007):

- Globales: todos aquellos que afectan al sector empresarial.
- Patrimoniales: todos los factores que puedan modificar el valor de los activos o sus precios en un mercado.

- Financieros: son todos aquellos relacionados a empresas financieras, por ejemplo la tasa de morosidad de los bancos, márgenes bancarios, volumen de las primas, reseras técnicas.
- Tecnológicos: relacionados al grado de inversión que las empresas de tipo industrial invierten en activos de este tipo.

3.7.3. Análisis Bursátil

El análisis bursátil (Scherk, 2007) consiste en la asignación de un valor a una empresa, dicha valoración se hace en función de sus activos y pasivos, para llevar a cabo este análisis se toman en cuenta:

- El crecimiento de la empresa, para calcular y tratar de predecir los comportamientos futuros de la misma.
- El crecimiento del producto interno bruto

A continuación se hace mención de algunos de los Indicadores fundamentales para realizar un análisis de este tipo:

- Utilidad por acción.
- Valor en libros por acción.
- Ventas por acción.
- Estructura de capital: Deuda Total Neta, Deuda Total Bruta.
- Liquidez: liquidez corriente, liquidez acida, capital de trabajo, etc.
- Ciclos de plazo promedio de cobro en días, ciclo operativo en días.
- Rentabilidad.

3.7.3. Análisis técnico

El análisis técnico es la herramienta que permite el estudio e interpretación de gráficos que describen el comportamiento a lo largo del tiempo de los mercados de divisas, e índices bursátiles (Urraca, 2008).

A través del análisis técnico y el análisis estadístico, se pretende conocer o predecir el comportamiento y tendencias futuras de los precios según una serie histórica de datos, lo anterior permite tomar una decisión correcta en tiempo real, ya que estos gráficos son actualizados constantemente, las principales hipótesis que pueden destacarse de esta herramienta son los siguientes:

- Las tendencias son de vital importancia para los precios, ya que estos se mueven en la dirección que la tendencia apunta.
- El comportamiento de ciertos fenómenos es repetitivo en muchas ocasiones, por lo que este tipo de eventos puede llevar a lo largo del periodo cierto ciclo que posteriormente se repite.
- El mercado con sus oferentes y demandantes provee de suficiente información para tratar de predecir su tendencia, y las cotizaciones actuales son el resultado de un equilibrio entre oferta y demanda de valores.

3.7.4.1. Teoría de Dow

Charles Henry Dow, junto con Edward Jones realizaron una valiosa aportación para el estudio de los índices bursátiles. Juntos crearon un Índice bursátil en el año de 1986 en el que se analizaban 12 activos que cotizaban en la Bolsa de Nueva York, Urraca (2008).

La teoría de Dow Jones puede ser analizada en dos secciones, una parte correspondiente a tendencias y otra a los índices accionarios, gracias a eta aportación se sustentó la base del desarrollo del análisis técnico.

3.7.4.2. Tendencias

Las tendencias según la teoría de Dow sufren de movimientos que pueden ser catalogados en tres tipos (Urraca, 2008):

- Movimientos primarios: que son aquellos que transcurren en periodos largos de actividad económica, por ejemplo una década.
- Movimientos secundarios son aquellos que se dan en periodos de tiempo menores, como pueden ser semanas o meses, y que al mismo tiempo contribuyen a que existe una tendencia contraria a la que podría darse en un movimiento de tipo primario, las llaman también como correcciones.
- Por último, los movimientos diarios o terciarios, son los que pueden sufrir cambios en sus precios en cualquier dirección, estos movimientos carecen de importancia a menos de que pueda ser identificados como una posible tendencia.

3.7.4.3. Índices

Henry Dow creo dos índices, principales para tratar de explicar el comportamiento de un sector industria, y otro de transportes, para así tomar decisiones con base a los movimientos y tendencias, bajo las reglas siguientes:

- Todos los factores externos, como noticias y eventos importantes pueden afectar a los índices, y se verán reflejados en los mismos, por lo que el índice es un reflejo del panorama al que todas las compañías se enfrentan.
- Las tendencias marcan el comportamiento de los mercados, y las tendencias se verán afectadas por ambos índices, por lo que solo podrá existir una tendencia a la alza si ambos índices aumentan, es por eso que la relación es directa.

- Se utiliza una línea de tendencia, la cual será construida de acuerdo a los movimientos registrados a lo largo de varias semanas, cuando los movimientos en el rango de precios no excedan un 5% se dibujara una línea llamada de soporte o resistencia. Así se podrá conocer cuando los precios están a la alza o a la baja, dependiendo si se colocan por encima, o por debajo respectivamente. A estos cambios se les denomina rupturas al alza y ruptura bajista.
- Se clasifica al mercado como sub comprado y sobre vendido; el sub comprado es aquel que presenta fuerza en aumentos de precios, y es activo en las llamadas correcciones a la baja. El sobre vendido es aquel que denota falta de fuerza cuando bajan los precios y es activo en correcciones a la alza.
- Se utilizan para el análisis precios de cierre, ya que en estos se fundamenta el mercado, por lo que los máximos y mínimos no son considerados.
- Los mercados pueden cambiar de fases , a continuación se detalla cada una de ellas:
    - Acumulación: son buenas opciones para inversionistas que deciden comprar, ya que los precios son bajos.
    - Actividad: los precios aumentan y hacen que se suponga una mejoría de la condición económica de las empresas, la actividad con estos valores aumenta considerablemente.
    - Distribución: comienza con un mercado con tendencia bajista, inversionistas poco informados compran valores a precios sobre valorados, con la promesa de rendimientos atractivos.
    - Pánico: aumento en ventas, y grandes pérdidas una vez que son liquidadas las posiciones institucionales.
    - Erosión de precios: fase en la que existen tendencias a la baja a causa de noticias o eventos que afecten al mercado.

En un mercado con tendencia bajista, el volumen confirma la baja, el decremento sirve para avisar el fin de esa tendencia, por otra parte si el mercado está a la alza el incremento del volumen confirma esa tendencia. El volumen se mueve de acuerdo a la dirección del precio.

3.7.4.4. Gráficos utilizados en el análisis técnico

Para poder realizar un gráfico es necesario contar con los siguientes datos:

- Precios de Apertura de un valor
- Precio máximo del valor en un periodo de tiempo determinado
- Precio mínimo del valor
- Precio al cierre de mercado
- Volumen: Número de contratos, o valores que fueron contratados en el periodo de tiempo
- Posición de compra o venta del valor al cierre del periodo de tiempo de la operación.

Los tipos de gráfico que pueden ser trazados se mencionaran a continuación junto con una breve descripción.

- Gráfico de líneas: de acuerdo a Dow el elemento fundamental para este análisis es el precio de cierre, por lo que este dato se utiliza como guía para dibujar la línea.
- Gráfico de barras: este gráfico se conforma por una barra vertical para cada periodo de tiempo, pudiendo representar el máximo y mínimo, es posible incluir una línea horizontal que represente el nivel de cierre.
- Punto y figura: está conformado por símbolos ascendentes en forma de “x”, y descendentes en forma de “o”, lo que permite medir la variación en los valores, sin considerar el tiempo como un factor. Este gráfico es generado por los movimientos de los precios, no en cuanto al comportamiento en un día, un mes o una semana.
- Gráfico de velas[20]: fue inicialmente utilizado en mercados japoneses, y es similar al gráfico de barras, se construye por un rectángulo que incluye precio de apertura y cierre, una barra vertical para mostrar el precio máximo y

[20] Por la traducción al español de *“Candlesticks”*

mínimo. Si el precio de cierre es mayor que el de apertura el rectángulo es blanco, en caso de que el cierre sea menor al precio de apertura el rectángulo será de color negro.

CAPÍTULO 4

COMPARACIÓN DE LAS METODOLOGÍAS ENTRE EL MODELO DE MARKOWITZ Y EL DE SIMULACIÓN MONTE CARLO EN LA OPTIMIZACIÓN DE UN PORTAFOLIO DE INVERSIÓN

4.1 .Introducción

Las herramientas computacionales y su implementación en este tipo de estudios permiten realizar de manera más rápida y eficiente los procesos necesarios para la obtención de soluciones de problemas matemáticos

En este capítulo, se utilizara la teoría mencionada en el capítulo uno, y dos de este estudio, ya que la metodología y los procesos se deben de llevar a cabo para poder obtener resultados satisfactorios que provean de información útil al inversionista o tomador de decisiones.

En el capítulo uno de este trabajo se menciona el Modelo de Markowitz, posteriormente el modelo simulación de Monte Carlo en el capítulo dos, ahora en ese cuarto capítulo se llevaran a cabo los procesos en la práctica, buscado dar solución a un mimo problema desde dos enfoques distintos.

Las acciones con las que se realizara el ejercicio son parte del Índice de Precios y cotizaciones, 21 de las 35 que lo componen. Se realizara el ejercicio aplicando la teoría de Markowitz, y por otra parte se realiza el ejercicio mediante el uso de simulación aplicando el modelo de Monte Carlo, se analizan ambos procesos para la elección del que ofrezca mejores resultados, y alternativas para la toma de decisiones del inversionista, tomando en cuenta el riesgo y rendimiento ofrecido por los instrumentos, así como el perfil del inversionista., pudiendo ser agresivo, moderado o conservador.

El objetivo de este capítulo es construir un portafolio idóneo para invertir asignando la proporción adecuada a cada uno de los instrumentos para maximizar el rendimiento del inversionista

Ambos modelos ofrecen elementos a favor y en contra para su uso, implementación y operación, por lo que a lo largo de este capítulo serán analizados, y posteriormente se mencionaran los resultados obtenidos con cada uno de ellos. Las herramientas computacionales para realizar los ejercicios son los siguientes programas: Microsoft Excel 2010, MATLAB R2012a, y Crystal Ball Versión 11.1.

Ambos modelos en el presente estudio buscaran minimizar el riesgo del portafolio a calcular, tomando un perfil conservador para el inversionista.

En el presente capítulo se utilizaran formulas y ecuaciones correspondientes a capítulos anteriores y para mayor comodidad y facilidad de comprensión del lector serán mencionadas nuevamente.

4.2. El IPC y acciones seleccionadas para el ejercicio

Muchos de los aspectos relacionados a la economía nacional pueden ser expresados por el Índice de Precios y Cotizaciones (IPC), ya que es el principal indicador del Mercado Mexicano de valores, un índice es una medida estadística diseñada y creada para poder conocer las modificaciones que puede sufrir una variable a lo largo de periodos de tiempo (Haro & González, 2008).

Los índices accionarios nos permiten reflejar la forma en la que se comportan un grupo de ciertas acciones, el IPC es el índice de mayor importancia y representatividad en la BMV, está compuesto por el grupo de acciones con mayor bursatilidad en el mercado, dichas acciones son de gran interés para inversionistas extranjeros, así como para nacionales.

Este grupo de acciones que se encuentran conformando el IPC son revisadas una vez cada año en el mes de febrero, para observar si es necesario realizar algún tipo de movimiento, o sustitución de alguno de los integrantes. La importancia del IPC radica en que puede ser estudiado como la base de cierto instrumento en el que se planea realizar una inversión, puede ser de igual forma empelada para conocer el funcionamiento y condiciones de un mercado buscando las condiciones más sanas para la operación.

Actualmente el IPC está compuesto por 35 emisoras de distintos sectores que pueden ser de los siguientes tipos: energía, materiales, industrial, servicios y bienes de consumo no básico, productos del consumo frecuente, salud, servicios financieros, tecnología de la información, servicios de telecomunicaciones y por último, servicios públicos, por lo cual se tomó la decisión de utilizar este índice para el estudio ya que abarca los sectores más importantes de la economía, estas acciones se detallan a continuación.

Tabla 4.1 Acciones[21] que componen el IPC

Sectores Productivos							
Productos de consumo frecuente	**Industrial**	**Materiales**	**Servicios y bienes de consumo no básico**	**Servicios de telecomunicaciones**	**Servicios financieros**	**Materiales**	**Salud**
AC	**ALFA**	ALPEK	ALSE	**AMX**	BOLSA	**CEMEX**	LAB
BIMBO	ASUR	**GMEXICO**	**ELEKTRA**	AZTECA	COMPAR		
CHDRAUI	**GAP**	**ICH**	LIVEPOL	**TLEVISA**	**GFINBUR**		
FEMSA	**GEO**	MEXCHEM			**GFNORTEO**		
GMODELO	**HOMEX**	MFRISCO					
GRUMA	**ICA**	**PEÑOLES**					
KIMBER	OHLMEX						
KOF	**URBI**						
WALMEX							

Fuente: Elaboración propia, con información disponible en el sitio web de la BMV.

Las acciones que se seleccionaron para realizar el ejercicio son aquellas que se han mantenido cotizando en el índice de manera continua del periodo del primero de noviembre de 2007 al primero de noviembre de 2012, resultando 21 de las 35 acciones existentes.

Este estudio utiliza datos históricos de un periodo de 5 años a la fecha en la que se comenzó a realizar este estudio, para así tratar de tener los datos más actuales, y las acciones que se han mantenido cotizando en el índice en este periodo, dichas acciones se describen de manera detallada en la tabla 4.2.

[21] Las acciones en negritas son las que se seleccionaron para realizar el estudio.

Tabla 4.2.

Acciones que componen la muestra y breve descripción.

Acción	Información de la emisora	
ALFAA	**Sector:** **Subsector:** **Actividad económica:**	Industrial Bienes de equipo Controladora de empresas industriales en áreas diversificadas
AMXL	**Sector:** **Subsector:** **Actividad económica:**	Servicios de telecomunicaciones Servicios de telecomunicaciones Proporcionar servicios de telecomunicaciones a nivel nacional o internacional a clientes residenciales y comerciales que operan en una amplia gama de actividades
BIMBOA	**Sector:** **Subsector:** **Actividad económica:**	Productos de consumo frecuente Alimentos, bebidas y tabaco Controladora de empresas dedicadas a la elaboración y distribución de productos alimenticios
CEMEXCPO	**Sector:** **Subsector:** **Actividad económica:**	Materiales Materiales Fabricación y venta de toda clase de cementos
ELEKTRA	**Sector:** **Subsector:** **Actividad económica:**	Servicios y bienes de consumo no básico Venta al por menor Controladora e inmobiliaria dedicada a la adquisición, admón. Arrendamiento de inmuebles a Salinas y Rocha, S.A. para su operación comercial
FEMSAUBD	**Sector:** **Subsector:** **Actividad económica:**	Productos de consumo frecuente Alimentos, bebidas y tabaco La cadena de tiendas de conveniencia más extensa y de mayor crecimiento en américa
GAPB	**Sector:** **Subsector:** **Actividad económica:**	Industrial Transportes Prestación de servicios aeroportuarios a través de los doce aeropuertos que opera la compañía en la región del pacífico
GEOB	**Sector:** **Subsector:** **Actividad económica:**	Industrial Construcción Diseño, desarrollo, construcción y venta de unidades habitacionales
GFINBURO	**Sector:** **Subsector:** **Actividad económica:**	Servicios financieros Entidades financieras Controladora pura de acciones de empresas que prestan servicios financieros

Acción	Información de la emisora	
GFNORTEO	**Sector:** **Subsector:** **Actividad económica:**	Servicios financieros Entidades financieras Controladora de empresas que prestan servicios financieros
GMEXICOB	**Sector:** **Subsector:** **Actividad económica:**	Materiales Materiales Promover, constituir, organizar, explotar, adquirir y tomar participación en el capital social o patrimonio de todo género de sociedades mercantiles o civiles, asociaciones o empresas
GMODELOC	**Sector:** **Subsector:** **Actividad económica:**	Productos de consumo frecuente Alimentos, bebidas y tabaco Producción, distribución, venta, exportación e importación de cerveza
GRUMAB	**Sector:** **Subsector:** **Actividad económica:**	Productos de consumo frecuente Alimentos, bebidas y tabaco Es el productor más grande de harina de maíz y tortillas en el mundo
HOMEX	**Sector:** **Subsector:** **Actividad económica:**	Industrial Construcción Tenedora de acciones
ICA	**Sector:** **Subsector:** **Actividad económica:**	Industrial Construcción Sociedad controladora de empresas dedicadas a la construcción pesada, industrial o urbana así como a diversas obras de ingeniería y servicios
ICHB	**Sector:** **Subsector:** **Actividad económica:**	Materiales Materiales ICH es una empresa mexicana dedicada a la producción de acero la cual cuenta con plantas en México, E.U.A y Canadá
KIMBERA	**Sector:** **Subsector:** **Actividad económica:**	Productos de consumo frecuente Productos domésticos y personales Manufactura y mercadeo de productos para el consumidor y para el cuidado de la salud y para instituciones
PEÑOLES	**Sector:** **Subsector:** **Actividad económica:**	Materiales Materiales Controladora de empresas dedicadas a la explotación minera, fundición, refinación, manufactura de metales no ferrosos y fabricación de productos químicos y refractarios
TLEVISACPO	**Sector:** **Subsector:** **Actividad económica:**	Servicios de telecomunicaciones Medios de comunicación Grupo televisa es la compañía de medios de comunicación más grande en el mundo de

Acción	Información de la emisora	
		habla hispana
URBI	**Sector:** **Subsector:** **Actividad económica:**	Industrial Construcción Construcción, promoción y venta de vivienda
WALMEXV	**Sector:** **Subsector:** **Actividad económica:**	Productos de consumo frecuente Venta de productos de consumo frecuente Controladora de cadenas de tiendas de descuento, ropa y restaurantes

Fuente: Elaboración propia, con información disponible en el sitio web de la BMV.

En la siguientes secciones de este capítulo se aplicaran las técnicas necesarias para construir el Modelo de Markowitz y obtener un portafolio óptimo así como aplicar la técnica de Simulación Monte Carlo, a la serie de precios al cierre de las 21 acciones seleccionadas del periodo 1/11/07 al 1/11/12.[22]

[22] La información referente a los precios al cierre y rendimientos históricos se encuentra disponible en el siguiente link: http://sdrv.ms/10U0prz

4.3. Aplicación del Modelo de Markowitz a las acciones seleccionadas del IPC

Para el presente estudio cada acción estará representada por $i = 1, 2, 3, \ldots, 21$, siendo estos los 21 activos respectivos con los que se realizará el análisis, en algunas tablas se observarán pesos asignados a dichos activos, y esta tabla sirve de referencia para relacionarlo con la emisora correspondiente.

Tabla 4.3: Identificación de las acciones.

Acción	*i*	Acción	*i*	Acción	*i*
AALF	1	GEO	8	ICA	15
AMX	2	GFINBUR	9	ICH	16
BIMBO	3	GFNORTE	10	KIMBER	17
CEMEX	4	GMEXICO	11	PE&OLES	18
ELEKTR	5	GMODELO	12	TLEVISA	19
FEMSA	6	GRUMA	13	URBI	20
GAP	7	HOMEX	14	WALMEX	21

Fuente: Elaboración Propia.

4.3.1. Calculo de los Rendimientos

Para poder realizar el ejercicio con el Modelo de Markowitz es necesario calcular los rendimientos diarios de las 21 acciones tomadas, con base a los precios al cierre[23] de dichas acciones, esto se hace con la siguiente formula:

$$R_{t+1} = Ln(P_{t+1}) - Ln(P_t) \tag{4.1}$$

[23] Los precios al cierre de las 21 acciones tomadas pueden ser consultados en: http://sdrv.ms/10U0prz

Una vez que se hayan calculado los rendimientos diarios por acción se tendrá que calcular el rendimiento promedio diario para cada acción, que es lo mismo que el rendimiento esperado por acción y dicha información se muestra en la tabla 4.4.

Tabla 4.4: Rendimientos Esperados de las acciones seleccionadas

	AALF	AMX	BIMBO	CEMEX	ELEKTRA	FEMSA	GAP
E(Ri)	0.00095009	0.00000047	0.00058592	-0.00071904	0.00060416	0.00089781	0.00008265
	GEO	GFINBUR	GFNORTE	GMEXICO	GMODELO	GRUMA	HOMEX
E(Ri)	-0.00072309	0.00068350	0.00028816	0.00024125	0.00065220	-0.00003769	-0.00095655
	ICA	ICH	KIMBER	PE&OLES	TLEVISA	URBI	WALMEX
E(Ri)	-0.00070829	0.00046588	0.00058247	0.00069847	0.00012875	-0.00124180	0.00046432

Fuente: Elaboración propia utilizando Microsoft Excel[24]

4.3.2. Calculo de la Matriz de Covarianza de los rendimientos

El siguiente paso es calcular la matriz de varianza-covarianza con dichos rendimientos, como se describe a continuación:

$$Matriz\ de\ Covarianza = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & S_{1,2} & S_{1,3} & S_{1,4} & \cdots & \cdots & S_{1,20} & S_{1,21} \\ S_{2,1} & \sigma_2^2 & S_{2,3} & S_{2,4} & \cdots & \cdots & S_{2,20} & S_{2,21} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ S_{20,1} & S_{20,2} & S_{20,3} & S_{20,4} & \cdots & \cdots & \sigma_{20}^2 & S_{20,21} \\ S_{21,1} & S_{21,2} & S_{21,3} & S_{21,4} & \cdots & \cdots & S_{21,20} & \sigma_{21}^2 \end{bmatrix} \qquad (4.2)$$

Para facilitar la creación de dicha matriz se puede utilizar la Herramienta de Análisis de Datos de Excel, seleccionando la opción Covarianza[25].

24 La función utilizada fue: =PROMEDIO

25 La matriz de covarianza de los rendimientos de la muestra se presenta en el anexo 4

4.3.3. Planteamiento del Modelo de Markowitz

Hasta este punto ya se cuenta con todos los datos necesarios para poder emplear el modelo de Markowitz, aplicando el modelo de Markowitz[26], el modelo para las 21 acciones seleccionadas queda de la siguiente manera:

F.O. z

$$Min\ \sigma^2(R_p) = 0.00064214x_1^2 + 0.00039834x_2^2 + \cdots + 0.00102346x_{20}^2 + 0.00040801x_{21}^2 + 2(0.00021173x_1x_2 + 0.000209952x_1x_3 + 0.00038608x_1x_4 + \cdots + 0.00019992x_{21}x_{18} + 0.00014749x_{21}x_{19} + 0.00019922x_{21}x_{20}) \quad (4.3)$$

Sujeto a:

$$E(R_p) = 0.000950087x_1 + 0.000000465x_2 + \cdots + (-0.001241795x_{20}) + 0.000464324x_{21} \quad (4.4)$$

1. $x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_{20} + x_{21} = 1$ (4.5)
2. $x_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, 20, 21)$ (4.6)

Explicación del modelo: La ecuación (4.3) es la función objetivo del modelo la cual nos minimiza la varianza (riesgo) del portafolio dado al nivel de rendimiento esperado del portafolio especificado por el inversionista y por los montos a invertir en cada acción.

La expresión (4.4) indica el nivel o el valor esperado del rendimiento de la cartera especificado por el inversionista.

La ecuación (4.5) indica que la sumatoria de todas las proporciones calculadas destinadas a invertir en cada uno de los activos debe ser igual a 1.

[26] Estructurando y adecuando las ecuaciones , 1.10, 1.11, 1.12 y 1.13 del Modelo de Markowitz

Por último, la expresión (4.6) muestra que el monto a invertir en cada acción debe ser mayor o igual a 0, o la no negatividad de nuestras variables.

4.3.4. Solución al Modelo de Markowitz

Debido a la complejidad del modelo y a la gran cantidad de cálculos necesarios para darle solución a un solo nivel de Rendimiento especificado por el inversionista y dado que se requiere resolver el modelo una vez para cada nivel de Rendimiento especificado, se hará uso de las herramientas de software Microsoft Excel y Matlab.

El procedimiento en Microsoft Excel:

1. El Primer paso es calcular la matriz de covarianza de las acciones como se dijo en el punto 4.3.2.

   La matriz de covarianza obtenida en Microsoft Excel puede ser observada con mayor detalle en el Anexo 4.

2. El siguiente paso se crea un vector de participación para cada acción, que sumadas debe ser igual a 1 o 100%, para este ejemplo se proponen valores iniciales de 1/21, que posteriormente serán nuevamente calculados e irán cambiando de acuerdo al nivel de rentabilidad deseado.
3. Se calcula el vector de rendimientos esperados para cada uno de los activos sobre los rendimientos diarios de los precios históricos, esto es en Microsoft Excel utilizando la función "=promedio" en los rendimientos diarios para cada acción.
4. Calcular la rentabilidad promedio del portafolio utilizando la función en Microsoft Excel "=sumaproducto", que es el producto escalar del vector de rendimiento esperado de los activos multiplicado por el vector de pesos asignados a cada activo.
5. Calcular el vector de participación multiplicado por la matriz de covarianza, en Microsoft Excel se utiliza la función "=mmult".

6. Se calcula la varianza del portafolio a través de la función “=sumaproducto” del vector de pesos por el vector obtenido en el Paso 5.
7. Calcular la desviación estándar del portafolio calculado, que es la raíz cuadrada de la Varianza del portafolio obtenida en el Paso 6, esto es con la función “=raíz”.
8. Se elige un nivel de rendimiento esperado para el portafolio, para el cual se va a calcular el portafolio con mínima varianza de acuerdo a este nivel de rendimiento establecido, lo anterior modificara los pesos asignados a los activos para obtener este rendimiento una vez que se haya minimizado la función objetivo.

El nivel de rendimiento que para este modelo fue seleccionado es de 0.05450%, este valor se encuentra entre el rendimiento máximo de los activos, y el rendimiento medio.

Los rendimientos con los que se realizó la selección antes mencionada son los que se muestran en la tabla:

Tabla 4.5 Rendimiento seleccionado del portafolio.

Rendimiento Mínimo	-0.12418%
Rendimiento Medio	0.01400%
Rendimiento Seleccionado	**0.05450%**
Rendimiento Máximo	0.09501%

Fuente: Elaboración propia

En la captura de pantalla siguiente se puede observar la estructura de la hoja de cálculo. Posteriormente el proceso realizado en Solver para resolver el modelo.

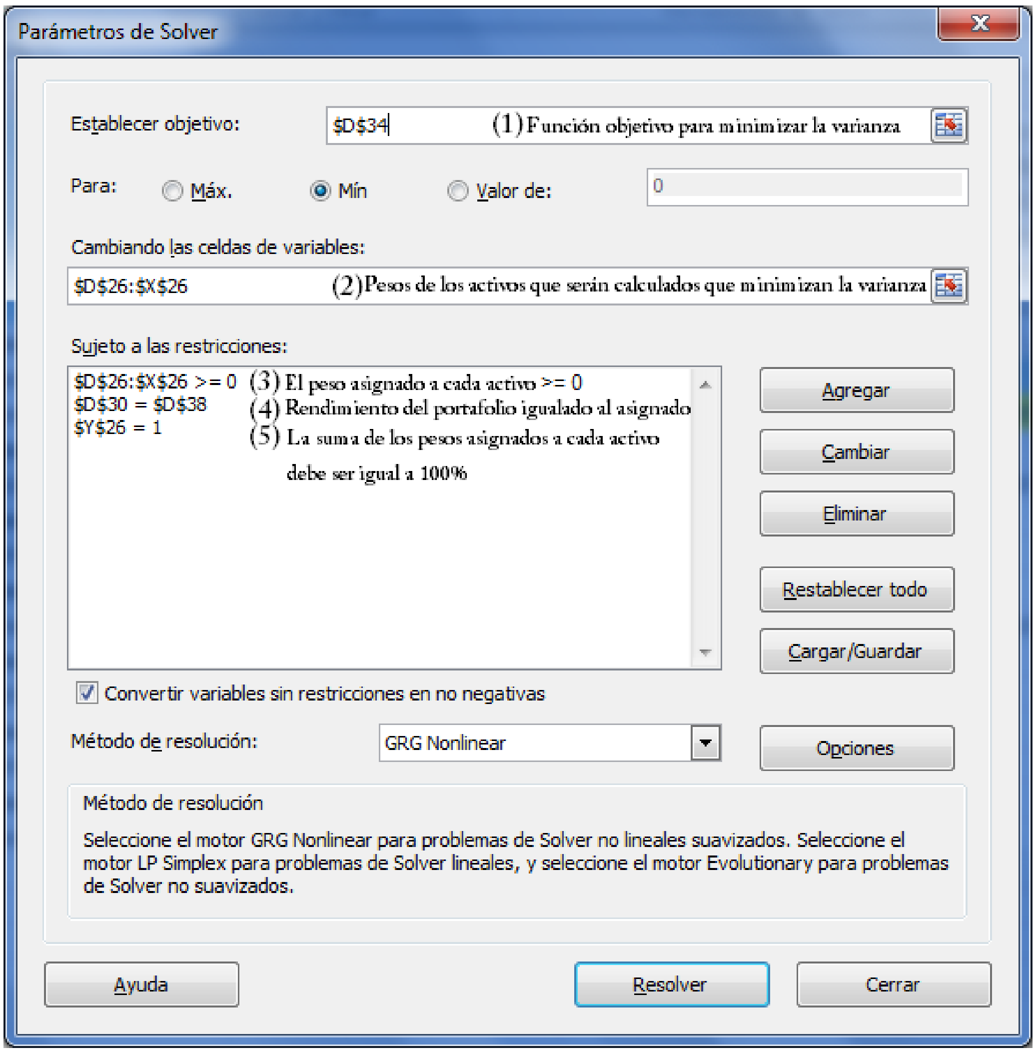
Figura 4.3: Planteamiento del modelo para minimizar la varianza

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1										
2			*i*	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
3			**1**	0.000642	0.000212	0.000210	0.000386	0.000199	0.000206	0.000135
4			**2**	0.000212	0.000398	0.000156	0.000349	0.000136	0.000199	0.000141
5			**3**	0.000210	0.000156	0.000410	0.000285	0.000211	0.000157	0.000123
6			**4**	0.000386	0.000349	0.000285	0.001381	0.000298	0.000368	0.000246
7			**5**	0.000199	0.000136	0.000211	0.000298	0.000782	0.000120	0.000098
8			**6**	0.000206	0.000199	0.000157	0.000368	0.000120	0.000965	0.000132
9			**7**	0.000135	0.000141	0.000123	0.000246	0.000098	0.000132	0.000399
10			**8**	0.000322	0.000295	0.000222	0.000585	0.000226	0.000233	0.000178
11		**Paso 1**	**9**	0.000117	0.000098	0.000151	0.000248	0.000182	0.000102	0.000068
12			**10**	0.000311	0.000280	0.000219	0.000543	0.000189	0.000250	0.000189
13			**11**	0.000321	0.000286	0.000211	0.000522	0.000204	0.000238	0.000174
14			**12**	0.000171	0.000151	0.000128	0.000234	0.000107	0.000160	0.000095
15			**13**	0.000196	0.000193	0.000139	0.000342	0.000151	0.000104	0.000028
16			**14**	0.000309	0.000310	0.000233	0.000597	0.000263	0.000253	0.000201
17			**15**	0.000329	0.000287	0.000225	0.000573	0.000230	0.000270	0.000179
18			**16**	0.000199	0.000149	0.000154	0.000322	0.000156	0.000159	0.000101
19			**17**	0.000169	0.000131	0.000142	0.000229	0.000118	0.000153	0.000115
20			**18**	0.000287	0.000234	0.000229	0.000417	0.000234	0.000233	0.000171
21			**19**	0.000187	0.000196	0.000146	0.000323	0.000146	0.000181	0.000127
22			**20**	0.000309	0.000266	0.000241	0.000549	0.000253	0.000243	0.000205
23			**21**	0.000165	0.000160	0.000141	0.000229	0.000128	0.000126	0.000097
24			**Paso 2**							
25		Ponderacion		**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
26		Vector de pesos		4.761905%	4.761905%	4.761905%	4.761905%	4.761905%	4.761905%	4.761905%
27			**Paso 3**							
28		Rentabilidad Promedio por accion		0.0950087%	0.0000465%	0.0585919%	-0.0719042%	0.0604163%	0.0897807%	0.0082647%
29			**Paso 4**							
30		Rentabilidad esperada del portafolio		0.0140%						
31			**Paso 5**							
32		Vector de participacion x matriz de covarianza		0.00025631	0.00022035	0.0001968	0.00042971	0.000211	0.00023102	0.00015255
33			**Paso 6**							
34		Varianza del Protafolio		0.000254						
35			**Paso 7**							
36		Desviacion Estandar del Portafolio		0.01593597						
37			**Paso 8**							
38	Rentabilidad esperada del portafolio en el punto deseado			0.05450%						

Fuente: Elaboración propia.

9. A continuación se hará uso de la herramienta Solver de Microsoft Excel, para minimizar la varianza del portafolio con los datos anteriores y de acuerdo al Modelo de Markowitz.

Figura 4.4: Introducción de la función objetivo y restricciones en Solver.

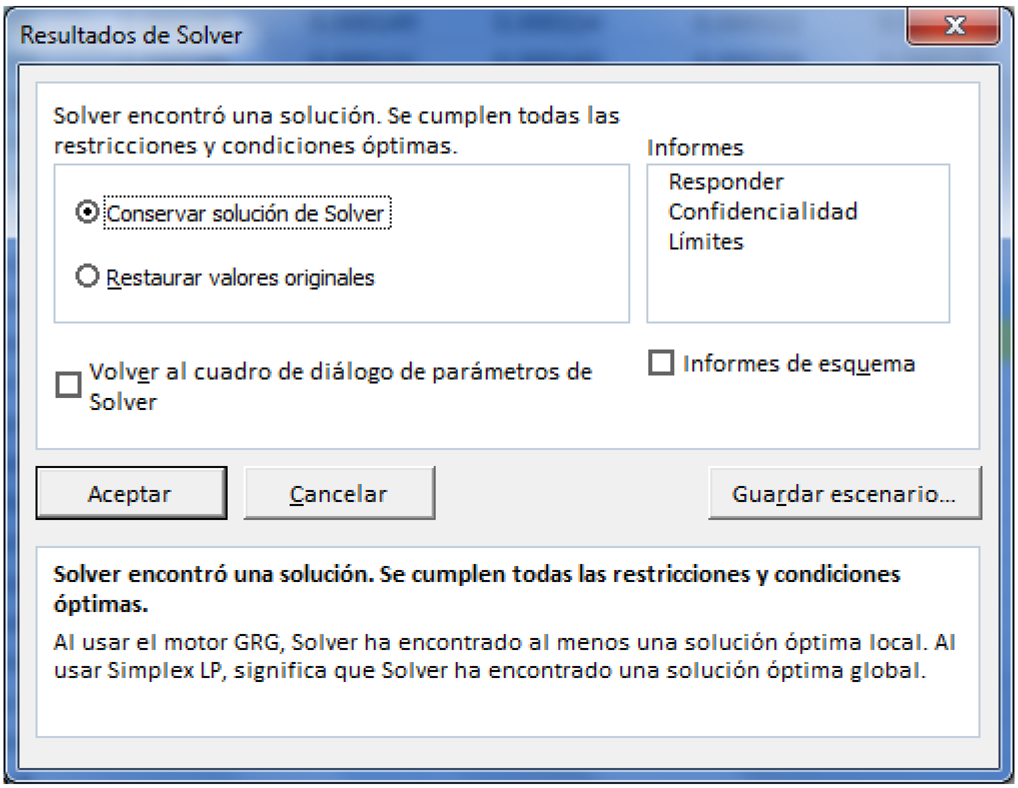


Fuente: Elaboración Propia, con captura de pantalla de Microsoft Excel.

Mediante este proceso se puede calcular la Varianza mínima y la Desviación Estándar del Portafolio con el Rendimiento asignado por el inversionista, con lo que se podrán obtener distintos combinaciones de puntos de Rendimiento y Riesgo con los que se podrá construir la Frontera Eficiente.

La solución obtenida en Solver debe cumplir las condiciones o restricciones antes mencionadas.

Figura 4.5: Prueba de la existencia de una solución óptima.



Fuente: Elaboración Propia, con captura de pantalla de Microsoft Excel.

Los pesos destinados a cada activo después de resolver el problema son los que se muestran a continuación:

Tabla 4.6 Pesos asignados a los activos

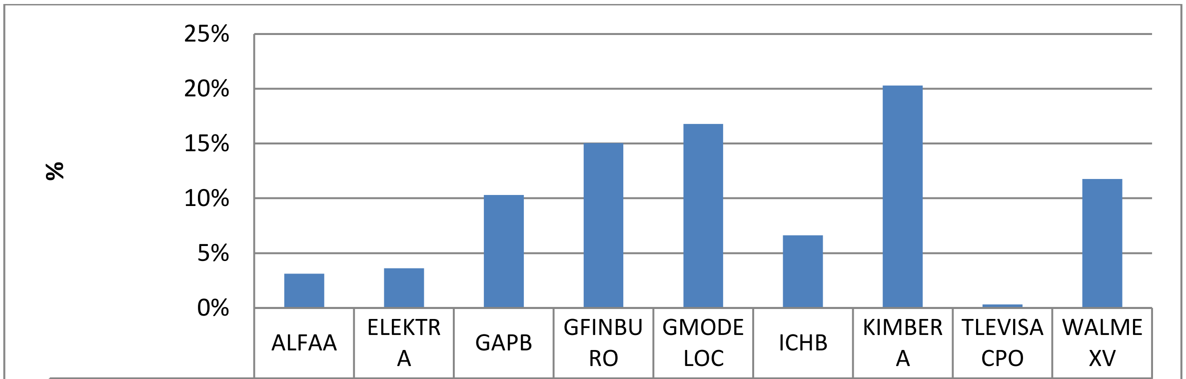
Nombre del Activo	Pesos Asignados
ALFA	**3.12%**
AMX	0.00%
BIMBO	5.21%
CEMEX	0.00%
ELEKTRA	**3.63%**
FEMSA	4.38%
GAP	**10.29%**
GEO	0.00%
GFINBUR	**15.02%**
GFNORTE	0.00%
GMEXICO	0.00%
GMODELO	**16.78%**
GRUMA	2.60%
HOMEX	0.00%
ICA	0.00%
ICH	**6.63%**
KIMBER	**20.29%**
PE&OLES	0.00%
TLEVISA	**0.32%**
URBI	0.00%
WALMEX	**11.75%**
Total	**100.00%**
Rentabilidad del Portafolio	**0.05450%**
Varianza del Portafolio	**0.000156**
Desviación del Portafolio	**1.25076%**

Fuente: Elaboración propia

En el gráfico mostrado a continuación se puede observar el porcentaje destinado a invertir para cada uno de los activos con el que se maximiza el rendimiento y minimiza el riesgo, este es solo un punto sobre la Frontera Eficiente.

Figura 4.6

Pesos para un portafolio con rentabilidad y riesgo tomados de la tabla 4.6



	ALFAA	ELEKTRA	GAPB	GFINBURO	GMODELOC	ICHB	KIMBERA	TLEVISACPO	WALMEXV
Pesos Asignados	3.12%	3.63%	10.29%	15.02%	16.78%	6.63%	20.29%	0.32%	11.75%

Fuente: Elaboración propia, con gráfico elaborado en Microsoft Excel.

A continuación se construirá la Frontera Eficiente con todos los portafolios óptimos para cada nivel de rendimiento con la ayuda del software Matlab, la razón por la cual se hará uso de este software es que reduce notablemente la carga de trabajo, y no se tiene que estar resolviendo el modelo en Solver una vez más para cada uno de los niveles de rentabilidad deseados.

4.3.5. Elaboración de la Frontera Eficiente

A continuación se va a describir el procedimiento y datos necesarios así como la estructura del archivo de Excel para poder extraer los datos de la hoja de cálculo y posteriormente asignar estos datos a variables, e introducir los comandos necesarios para obtener la frontera de eficiencia de 20 portafolios con distintos niveles de rendimiento.

Para trabajar en Matlab se necesita lo siguiente:

1. Un documento creado en Excel, que en la primera hoja de trabajo contenga a la matriz de covarianza de los rendimientos históricos de todos los activos, comenzando en la celda A1, sin encabezados, únicamente los datos obtenidos.
2. En el mismo libro de Excel, una segunda hoja debe contener el rendimiento promedio diario de cada uno de los activos, comenzando en la celda A1 y continuando sobre el mismo reglón para los activos restantes, es importante mencionar que solamente deben estar presentes los datos resultantes, sin encabezados, ni cadenas de texto.

   El nombre del archivo creado en Excel que se utilizara para el presente estudio será “Markowitz.xlsx”.

Los siguientes comandos son las instrucciones necesarias para poder crear la frontera eficiente y poder obtener los pesos asignados a cada activo, para obtener el rendimiento y riesgo asignado de dichos puntos sobre la frontera eficiente, el procedimiento es el siguiente:

1. Abrir Matlab, posteriormente en la barra de dirección de Matlab el usuario debe ubicar el directorio raíz de la carpeta en la cual se encuentra el archivo de Excel con el que se va a trabajar (“Markowitz.xlsx”).

2. Se ingresa en el área de trabajo el comando siguiente :

   ls

   El comando anterior se utiliza para que Matlab muestre los archivos con los que pueda trabajar, y en este caso, extraer los datos de un libro de Excel.

3. Se ingresa el comando siguiente:

   a = xlsread ('Markowitz.xlsx')

   Este comando le indica a Matlab que debe leer todos los datos existentes en la primera hoja del archivo “Markowitz.xlsx” y guardarlos en la variable “a”.

4. A continuación se ingresa el comando :
   ExpCovariance = a
   El comando anterior le indica a Matlab que la matriz de covarianza está asignada a la variable “a”.

5. Posteriormente se ingresa el comando :
   b = xlsread ('Markowitz.xlsx',2)
   El comando anterior le ordena a Matlab que lea los datos existentes de la segunda hoja del libro “Markowitz.xlsx” y posteriormente los asigne a la variable “b”.

6. El comando que se utilizará para continuar es:
   ExpReturn = b
   Este comando, le indica a Matlab que los rendimientos promedio diarios por acción están asignados a la variable “b”.

7. A continuación se utilizará el siguiente comando:
   NumPorts = 20
   La instrucción anterior le ordena a Matlab que solamente calcule 20 portafolios, o 20 puntos sobre la frontera eficiente. Es importante destacar que el número de portafolios es indicado de acuerdo a las necesidades del usuario.

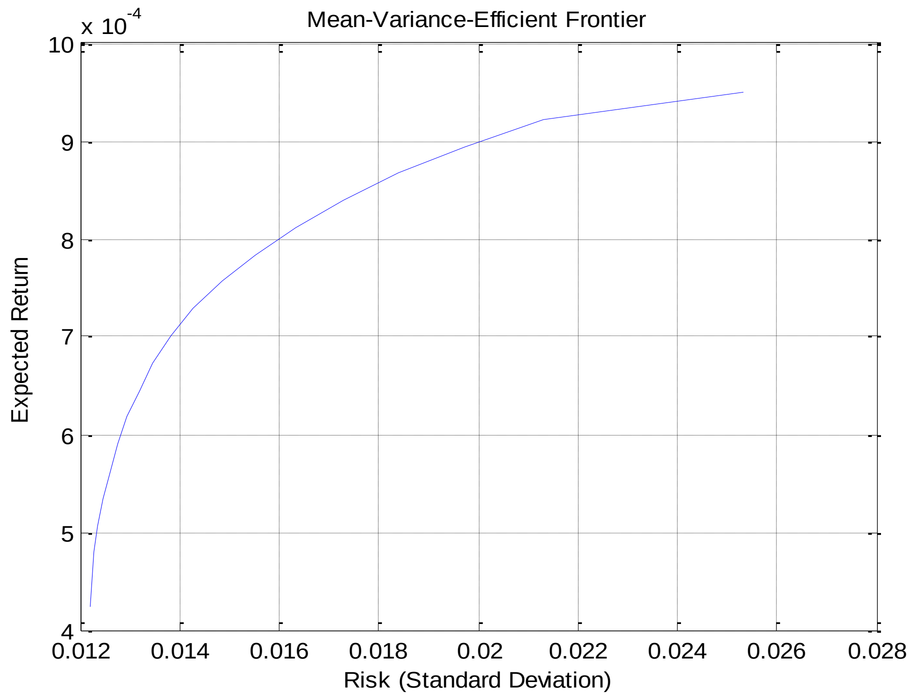
8. El proceso requiere que se ingrese una función compuesta:
   frontcon (ExpReturn,ExpCovariance,NumPorts)
   La instrucción antes mencionada le ordena a Matlab, graficar la frontera eficiente, tomando en cuenta los rendimientos promedio de los activos, la matriz de covarianza, y el número de portafolios deseados.

9. Para concluir, se ingresa este último comando compuesto.
   [PortRisk,PortReturn,PortWts] = frontcon(ExpReturn,ExpCovariance,NumPorts)
   La instrucción anterior le ordena a Matlab que calcule el riesgo del portafolio, el rendimiento del mismo, y los pesos de cada activo, asignados a cada uno de los

20 portafolios calculados sobre la frontera eficiente. Los resultados obtenidos por Matlab se pueden apreciar en la tabla 4.7.

La frontera eficiente calculada con los datos de los 21 activos es la siguiente:

Figura 4.7 Frontera eficiente de Markowitz



Fuente: Elaboración propia con resultados obtenidos de Matlab.

Tabla 4.7 Resultados obtenidos para 20 portafolios sobre la frontera eficiente.

			Pesos asignados a cada activo																				
R(p)	Desviación	Varianza	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
0.04%	0.0122	0.00014884	0.00%	1.20%	3.06%	0.00%	2.60%	0.95%	17.09%	0.00%	12.35%	0.00%	0.00%	13.04%	4.95%	0.00%	0.00%	6.80%	17.99%	0.00%	8.73%	0.00%	11.22%
0.05%	0.0122	0.00014884	0.00%	0.00%	3.75%	0.00%	2.89%	1.83%	15.67%	0.00%	12.94%	0.00%	0.00%	14.09%	4.51%	0.00%	0.00%	6.92%	18.72%	0.00%	7.16%	0.00%	11.51%
0.05%	0.0123	0.00015129	0.00%	0.00%	4.47%	0.00%	3.22%	2.78%	13.80%	0.00%	13.64%	0.00%	0.00%	15.17%	3.89%	0.00%	0.00%	6.97%	19.46%	0.00%	4.90%	0.00%	11.69%
0.05%	0.0124	0.00015376	1.27%	0.00%	4.80%	0.00%	3.40%	3.46%	12.30%	0.00%	14.22%	0.00%	0.00%	15.86%	3.34%	0.00%	0.00%	6.83%	19.82%	0.00%	2.96%	0.00%	11.73%
0.05%	0.0125	0.00015625	2.61%	0.00%	5.10%	0.00%	3.57%	4.13%	10.83%	0.00%	14.79%	0.00%	0.00%	16.53%	2.80%	0.00%	0.00%	6.68%	20.16%	0.00%	1.03%	0.00%	11.77%
0.06%	0.0126	0.00015876	4.08%	0.00%	5.36%	0.00%	3.71%	4.81%	8.93%	0.00%	15.38%	0.00%	0.00%	17.25%	2.12%	0.00%	0.00%	6.39%	20.37%	0.00%	0.00%	0.00%	11.60%
0.06%	0.0128	0.00016384	5.69%	0.00%	5.58%	0.00%	3.82%	5.52%	6.52%	0.00%	15.99%	0.00%	0.00%	18.05%	1.26%	0.00%	0.00%	5.95%	20.43%	0.00%	0.00%	0.00%	11.19%
0.06%	0.013	0.000169	7.30%	0.00%	5.80%	0.00%	3.93%	6.23%	4.11%	0.00%	16.60%	0.00%	0.00%	18.85%	0.41%	0.00%	0.00%	5.50%	20.48%	0.00%	0.00%	0.00%	10.78%
0.06%	0.0132	0.00017424	9.04%	0.00%	5.94%	0.00%	4.00%	7.03%	1.38%	0.00%	17.27%	0.00%	0.00%	19.58%	0.00%	0.00%	0.00%	4.84%	20.67%	0.00%	0.00%	0.00%	10.25%
0.07%	0.0135	0.00018225	12.07%	0.00%	5.44%	0.00%	3.94%	8.31%	0.00%	0.00%	18.32%	0.00%	0.00%	20.18%	0.00%	0.00%	0.00%	2.95%	20.17%	0.00%	0.00%	0.00%	8.61%
0.07%	0.0138	0.00019044	16.09%	0.00%	4.47%	0.00%	3.79%	9.94%	0.00%	0.00%	19.64%	0.00%	0.00%	20.74%	0.00%	0.00%	0.00%	0.20%	18.99%	0.00%	0.00%	0.00%	6.12%
0.07%	0.0143	0.00020449	20.53%	0.00%	2.86%	0.00%	3.41%	11.73%	0.00%	0.00%	20.85%	0.00%	0.00%	21.05%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	17.03%	0.00%	0.00%	0.00%	2.55%
0.08%	0.0148	0.00021904	25.35%	0.00%	0.71%	0.00%	2.86%	13.66%	0.00%	0.00%	21.99%	0.00%	0.00%	20.92%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	14.51%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
0.08%	0.0155	0.00024025	31.10%	0.00%	0.00%	0.00%	1.40%	16.02%	0.00%	0.00%	22.61%	0.00%	0.00%	19.21%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	9.65%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
0.08%	0.0163	0.00026569	36.91%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	18.43%	0.00%	0.00%	23.04%	0.00%	0.00%	17.26%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	4.36%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
0.08%	0.0173	0.00029929	43.14%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	21.02%	0.00%	0.00%	22.26%	0.00%	0.00%	13.59%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
0.09%	0.0184	0.00033856	50.40%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	23.85%	0.00%	0.00%	19.43%	0.00%	0.00%	6.32%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
0.09%	0.0197	0.00038809	57.82%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	26.62%	0.00%	0.00%	15.56%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
0.09%	0.0213	0.00045369	66.34%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	28.95%	0.00%	0.00%	4.71%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
0.10%	0.0253	0.00064009	100.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%

Fuente: Elaboración propia en Excel con datos calculados en Matlab.

Hasta este punto se concluye con la "Teoría de Portafolios" de Markowitz, a continuación se calculara el portafolio óptimo de toda la frontera eficiente basado en el modelo de Markowitz, esto es para que exista un punto de comparación entre el Modelo de Markowiz y el Método de Simulación Monte Carlo que se presentará más adelante.

4.3.6. Obtención del Portafolio Óptimo

Para poder obtener el portafolio óptimo es necesario conocer el rendimiento promedio de los instrumentos libres de riesgo, en este caso a través del promedio de los rendimientos diarios de los CETES a 28 días en el mismo periodo en el que se consideró la muestra de las 21 acciones.

Para la obtención del portafolio óptimo es necesario resolver el siguiente modelo:

$$Max\ \tan\theta = \frac{R_m - r}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i x_j \sigma_{ij}}} \qquad (4.7)$$

Sujeto a:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \qquad (4.8)$$

$$x_i \geq 0 \quad (i = 1, \dots, n) \qquad (4.9)$$

Donde:

R_m: es la rentabilidad esperada del portafolio

r: es el rendimiento del instrumento libre de riesgo

x_i: es la proporción a invertir en el activo i

σ_{ij}: es la covarianza del activo i con el activo j

En la expresión anterior el parámetro $\tan\theta$ indica la pendiente de la recta que es tangente al punto de la frontera de eficiencia en el que se obtiene el óptimo rendimiento.

Se hará uso de la herramienta Solver de Microsoft Excel para resolver el modelo anterior.

Para resolver este modelo es necesario contar con los datos históricos de los rendimientos de los CETES o instrumentos libres de riesgo, para el mismo periodo de tiempo en el que se seleccionaron los datos de los rendimientos históricos de los activos seleccionados para construir la frontera eficiente.

Se requieren los precios de los CETES a 28 días en el mismo periodo en el que se seleccionaron los datos para los 21 activos, posteriormente se calculan los rendimientos diarios de los CETES con la fórmula 3.1.

Para agilizar el siguiente proceso, se puede hacer uso de la misma hoja de cálculo del libro de Excel en la cual se utilizó Solver para calcular un portafolio sobre la frontera de eficiente del punto 4.3.4, modificando y agregando los siguientes puntos:

1. Calcular el promedio de los rendimientos de los instrumentos libres de riesgo, con la función “=promedio”.
2. Plantear la función objetivo a maximizar (Ecuación 4.7).

La estructura del planteamiento del modelo en Excel se puede observar en la figura 4.4.

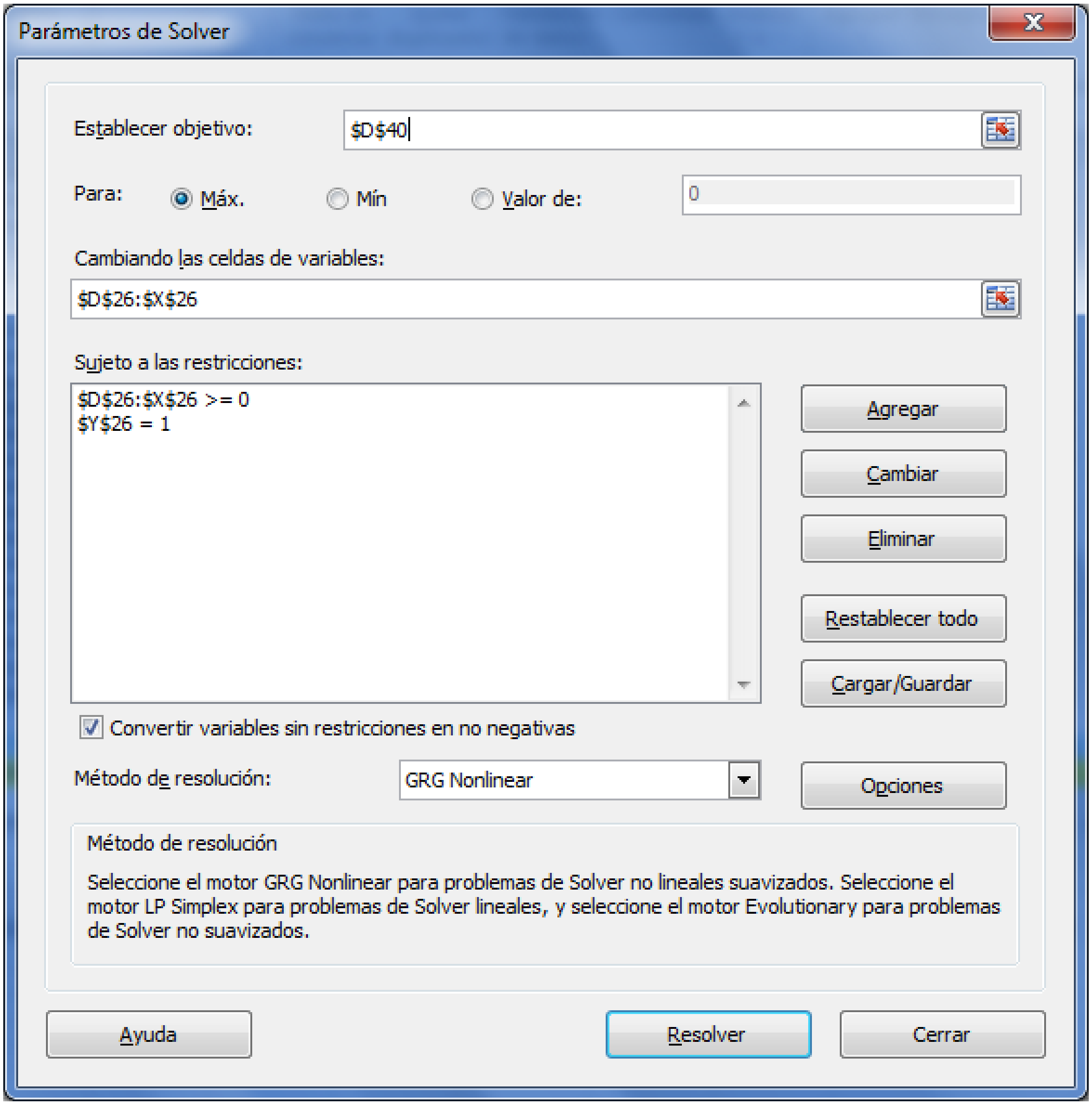
Una vez estructurada la hoja de cálculo de acuerdo a la figura anterior, se procede a hacer uso nuevamente de la herramienta Solver de Microsoft Excel, se ingresan las restricciones correspondientes del modelo (Formula 4.8, 4.9).

Figura 4.8 Planteamiento del modelo.

3	0.000210	0.000156	0.000410	0.000285	0.000211	0.000157	0.000123	0.000222	0.000151	0.0
4	0.000386	0.000349	0.000285	0.001381	0.000298	0.000368	0.000246	0.000585	0.000248	0.0
5	0.000199	0.000136	0.000211	0.000298	0.000782	0.000120	0.000098	0.000226	0.000182	0.0
6	0.000206	0.000199	0.000157	0.000368	0.000120	0.000965	0.000132	0.000233	0.000102	0.0
7	0.000135	0.000141	0.000123	0.000246	0.000098	0.000132	0.000399	0.000178	0.000068	0.0
8	0.000322	0.000295	0.000222	0.000585	0.000226	0.000233	0.000178	0.000911	0.000177	0.0
9	0.000117	0.000098	0.000151	0.000248	0.000182	0.000102	0.000068	0.000177	0.000525	0.0
10	0.000311	0.000280	0.000219	0.000543	0.000189	0.000250	0.000189	0.000481	0.000177	0.0
11	0.000321	0.000286	0.000211	0.000522	0.000204	0.000238	0.000174	0.000473	0.000178	0.0
12	0.000171	0.000151	0.000128	0.000234	0.000107	0.000160	0.000095	0.000210	0.000076	0.0
13	0.000196	0.000193	0.000139	0.000342	0.000151	0.000104	0.000028	0.000266	0.000065	0.0
14	0.000309	0.000310	0.000233	0.000597	0.000263	0.000253	0.000201	0.000553	0.000202	0.0
15	0.000329	0.000287	0.000225	0.000573	0.000230	0.000270	0.000179	0.000488	0.000173	0.0
16	0.000199	0.000149	0.000154	0.000322	0.000156	0.000159	0.000101	0.000278	0.000128	0.0
17	0.000169	0.000131	0.000142	0.000229	0.000118	0.000153	0.000115	0.000210	0.000104	0.0
18	0.000287	0.000234	0.000229	0.000417	0.000234	0.000233	0.000171	0.000368	0.000182	0.0
19	0.000187	0.000196	0.000146	0.000323	0.000146	0.000181	0.000127	0.000240	0.000109	0.0
20	0.000309	0.000266	0.000241	0.000549	0.000253	0.000243	0.000205	0.000547	0.000165	0.0
21	0.000165	0.000160	0.000141	0.000229	0.000128	0.000126	0.000097	0.000221	0.000099	0.0
Ponderacion	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
Vector de pesos	26.807523%	0.000000%	0.000000%	0.000000%	2.618982%	14.251717%	0.000000%	0.000000%	22.190274%	0.000
Rentabilidad Promedio por accion	0.0950087%	0.0000465%	0.0585919%	-0.0719042%	0.0604163%	0.0897807%	0.0082647%	-0.0723094%	0.0683499%	0.028
Rentabilidad esperada del portafolio	0.0763%									
Vector de participacion x matriz de covarianza	0.00029067	0.0001591	0.0001633	0.000298	0.0001693	0.00027227	0.00010792	0.000236222	0.00019688	0.00
Varianza del Protafolio	0.000225									
Desviacion Estandar del Portafolio	0.01500205									
Paso 1										
Tasa libre de riesgo	0.01225%									
Paso 2										
Funcion objetivo a maximizar	0.0427128									

Fuente: Elaboración propia en Microsoft Excel.

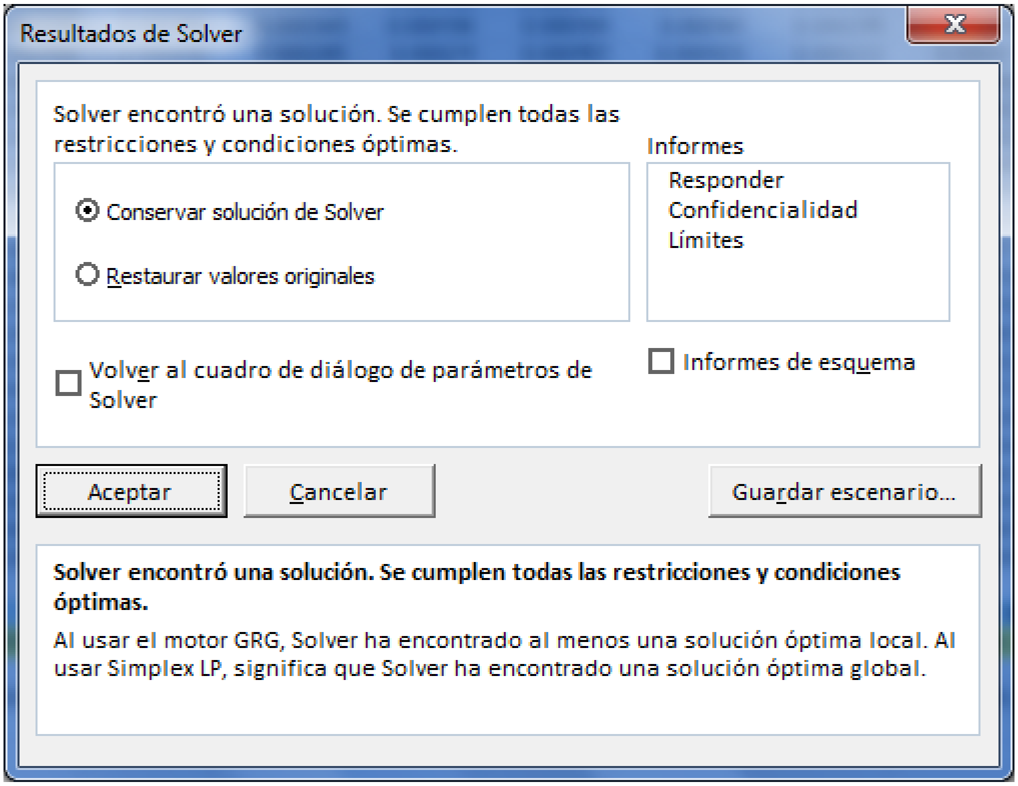
Figura 4.9 Uso de Solver para encontrar el portafolio óptimo.



Fuente: Elaboración Propia, con captura de pantalla de Microsoft Excel.

Se procede a resolver el modelo en Solver.

Figura 4.10 Prueba de la existencia de una solución óptima para el modelo.



Fuente: Elaboración Propia, con captura de pantalla de Microsoft Excel.

La solución obtenida en Solver nos permite conocer el portafolio óptimo "*m*", así como las proporciones destinadas a cada uno de los activos que nos permiten obtener un rendimiento y un riesgo que forman parte de la frontera eficiente, en este punto es donde se maximiza la pendiente de una recta que une un punto en común entre el rendimiento de un instrumento libre de riesgo y un punto de la frontera eficiente.

Este punto nos indica el portafolio más conveniente a invertir, ya que su rendimiento es mayor al proporcionado al invertir en un instrumento libre de riesgo.

Los resultados obtenidos con los que se construye el portafolio óptimo son los siguientes:

Tabla 4.8 Pesos asignados a los activos para construir un portafolio óptimo

Activo	Pesos Asignado
ALFA	**26.81%**
AMX	0.00%
BIMBO	0.00%
CEMEX	0.00%
ELEKTRA	**2.62%**
FEMSA	**14.25%**
GAP	0.00%
GEO	0.00%
GFINBUR	**22.19%**
GFNORTE	0.00%
GMEXICO	0.00%
GMODELO	**20.61%**
GRUMA	0.00%
HOMEX	0.00%
ICA	0.00%
ICH	0.00%
KIMBER	**13.52%**
PE&OLES	0.00%
TLEVISA	0.00%
URBI	0.00%
WALMEX	0.00%
Total	**100.00%**
Rentabilidad del Portafolio	**0.076332%**
Varianza del Portafolio	**0.0002251**
Desviación del Portafolio	**1.500205%**

Fuente: Elaboración propia, con datos obtenidos de cálculo del portafolio óptimo con Solver de Microsoft Excel.

Por último, se muestra el gráfico en el que se puede apreciar el punto sobre la frontera eficiente que representa el portafolio óptimo, tomando en cuenta el rendimiento de los instrumentos libres de riesgo (CETES).

Para poder obtener el grafico del portafolio óptimo sobre la frontera eficiente, se hará uso nuevamente del software Matlab, continuando el paso 9 del punto 4.3.4.1 de este mismo capítulo, se introducen los siguientes comandos:

10. RisklessRate = 0.00012

    Este comando le indica a Matlab el rendimiento de un instrumento libre de riesgo.

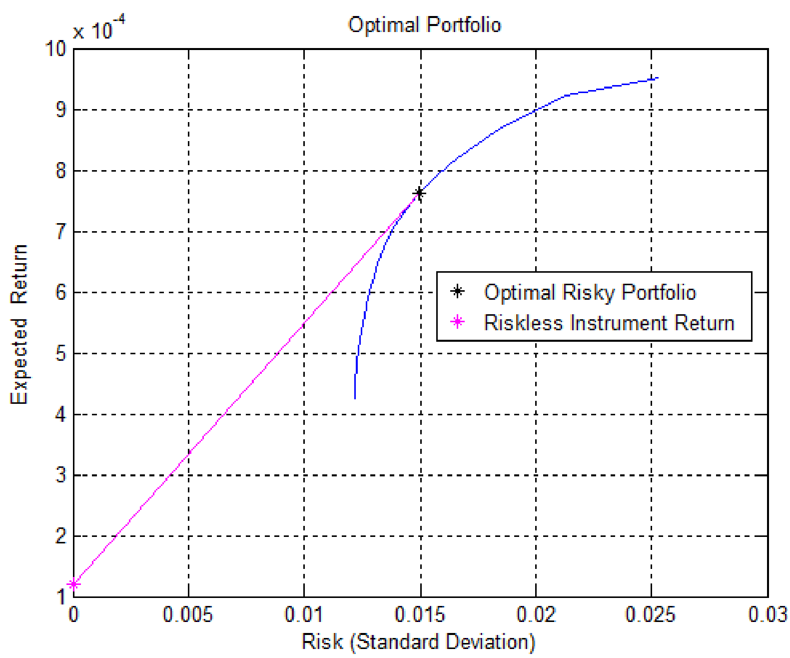
11. Para concluir, se ingresa este último comando compuesto:

    portalloc (PortRisk, PortReturn, PortWts, RisklessRate)

    El cual le ordena a Matlab construir la gráfica de la Frontera Eficiente con los rendimientos y Riesgos calculados anteriormente para los portafolios, incluyendo en este paso el rendimiento del instrumento libre de riesgo.

Figura 4.11

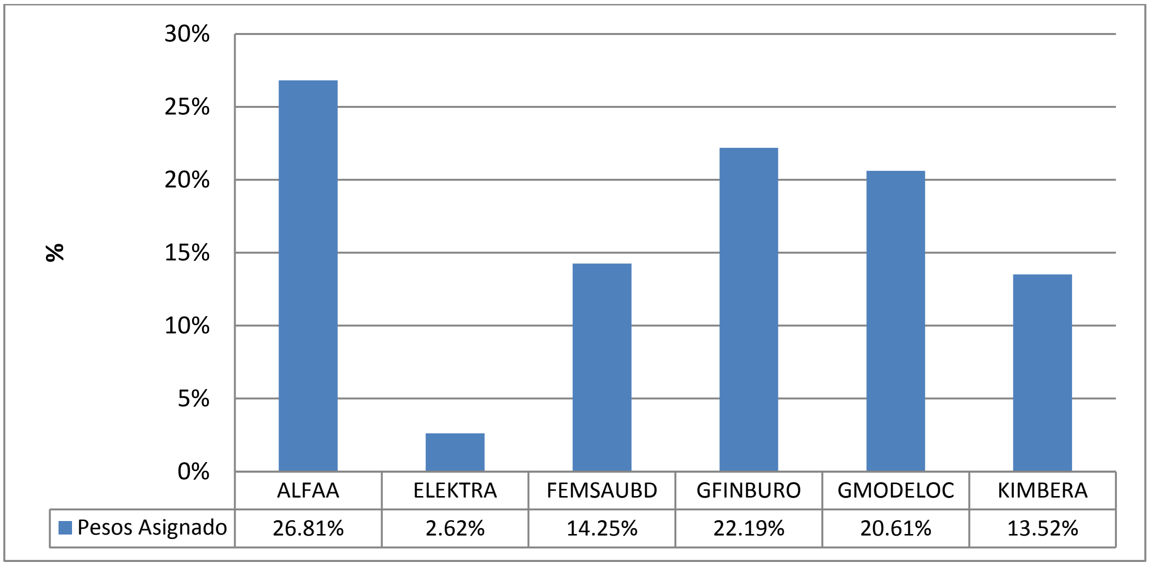
Portafolio óptimo calculado sobre la frontera eficiente.



Fuente: elaboración propia, mediante Matlab.

Figura 4.12

Distribución de los pesos en los activos para la obtención del portafolio óptimo



Fuente: Elaboración propia utilizando los datos obtenidos con Solver de Microsoft Excel.

Los resultados obtenidos de la figura 4.12 muestran que al aplicar la teoría de portafolios, se obtiene la combinación correcta para construir el portafolio óptimo que minimiza el riesgo y ofrece un rendimiento mayor al de los instrumentos libres de riesgo basándose en los estadísticos media y desviación estándar. La combinación de activos le permite al inversionista disminuir al riesgo al que se verá expuesto, ya que lo diversifica.

4.4. Aplicación del Método de Monte Carlo para la optimización de un portafolio de inversión.

En esta parte se va a mencionar como poder realizar una simulación, el software que se utilizará es Crystal Ball, de acuerdo al punto 2.5.4 del capítulo dos del presente estudio.

Los siguientes pasos son los necesarios que requiere Crystal Ball para realizar el método de simulación Monte Carlo:

1. Ajuste de una distribución de probabilidad a cada serie de datos (Punto 4.4.1.)
2. Definición de las posibles decisiones a tomar en el modelo (Punto 4.4.2.)
3. Planteamiento de una función objetivo para minimizar en este caso a través de la simulación (Punto 4.4.3.)
4. Ingresar las restricciones para el modelo a través de OptQuest y se ejecuta la Simulación (Punto 4.4.4.)
5. Por último se realiza el análisis correspondiente de los resultados obtenidos. (Punto 4.4.5.)

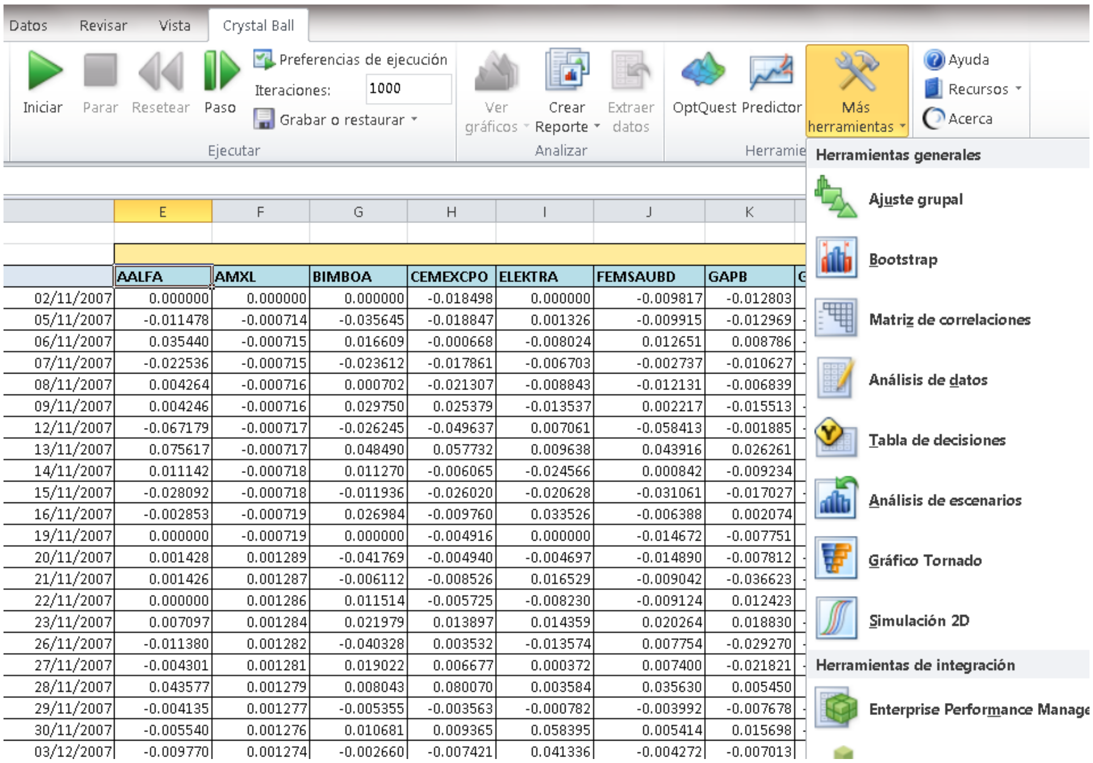
4.4.1. Ajuste de una distribución a las serie de datos

Para comenzar a trabajar con Crystal Ball es necesario contar con la serie histórica de los rendimientos que se requiere estudiar, para posteriormente realizar la simulación y optimizar un portafolio con el método de Monte Carlo, el procedimiento propuesto es el que se muestra a continuación:

1. Seleccionar el área en la que se ubican los rendimientos históricos de los activos con los que se planea optimizar el portafolio, la manera que se propone para tener preparados los datos es colocar el nombre de los activos como encabezado de las columnas, y en las filas de cada columna colocar los rendimientos correspondiente al activo que pertenece.

2. Una vez seleccionados los datos estructurados en la forma propuesta, se ingresa en la pestaña de “Más herramientas” y posteriormente se selecciona la opción de “Ajuste Grupal”.

Figura 4.13 Ajuste grupal de datos



	AALFA	AMXL	BIMBOA	CEMEXCPO	ELEKTRA	FEMSAUBD	GAPB
02/11/2007	0.000000	0.000000	0.000000	-0.018498	0.000000	-0.009817	-0.012803
05/11/2007	-0.011478	-0.000714	-0.035645	-0.018847	0.001326	-0.009915	-0.012969
06/11/2007	0.035440	-0.000715	0.016609	-0.000668	-0.008024	0.012651	0.008786
07/11/2007	-0.022536	-0.000715	-0.023612	-0.017861	-0.006703	-0.002737	-0.010627
08/11/2007	0.004264	-0.000716	0.000702	-0.021307	-0.008843	-0.012131	-0.006839
09/11/2007	0.004246	-0.000716	0.029750	0.025379	-0.013537	0.002217	-0.015513
12/11/2007	-0.067179	-0.000717	-0.026245	-0.049637	0.007061	-0.058413	-0.001885
13/11/2007	0.075617	-0.000717	0.048490	0.057732	0.009638	0.043916	0.026261
14/11/2007	0.011142	-0.000718	0.011270	-0.006065	-0.024566	0.000842	-0.009234
15/11/2007	-0.028092	-0.000718	-0.011936	-0.026020	-0.020628	-0.031061	-0.017027
16/11/2007	-0.002853	-0.000719	0.026984	-0.009760	0.033526	-0.006388	0.002074
19/11/2007	0.000000	-0.000719	0.000000	-0.004916	0.000000	-0.014672	-0.007751
20/11/2007	0.001428	0.001289	-0.041769	-0.004940	-0.004697	-0.014890	-0.007812
21/11/2007	0.001426	0.001287	-0.006112	-0.008526	0.016529	-0.009042	-0.036623
22/11/2007	0.000000	0.001286	0.011514	-0.005725	-0.008230	-0.009124	0.012423
23/11/2007	0.007097	0.001284	0.021979	0.013897	0.014359	0.020264	0.018830
26/11/2007	-0.011380	0.001282	-0.040328	0.003532	-0.013574	0.007754	-0.029270
27/11/2007	-0.004301	0.001281	0.019022	0.006677	0.000372	0.007400	-0.021821
28/11/2007	0.043577	0.001279	0.008043	0.080070	0.003584	0.035630	0.005450
29/11/2007	-0.004135	0.001277	-0.005355	-0.003563	-0.000782	-0.003992	-0.007678
30/11/2007	-0.005540	0.001276	0.010681	0.009365	0.058395	0.005414	0.015698
03/12/2007	-0.009770	0.001274	-0.002660	-0.007421	0.041336	-0.004272	-0.007013

Fuente: Elaboración propia utilizando Crystal Ball en Microsoft Excel.

3. Una vez que se ha ingresado en esta herramienta, la manera en la que se configura el "Ajuste grupal" es la siguiente:

   - Pestaña de "Ingreso de Datos."

   Como ya se había mencionado anteriormente, en la fila superior de cada Columna se encontrarán los títulos, y en las filas subsecuentes los rendimientos de cada instrumento.

   - Pestaña" Opciones de Ajuste"

Ya que las series de datos son ajustadas a una distribución de probabilidad continua, posteriormente se selecciona la prueba de Anderson-Darling para ajustar a la distribución de probabilidad que mejor describa el comportamiento de cada serie de datos.

- Pestaña “Opciones de Salida.”

Es recomendable que los resultados del análisis grupal se encuentren en la misma hoja del libro de Excel, en esta parte se selecciona la celda en la que comenzará a colocar dichos resultados, por otra parte se seleccionará la opción de mostrar matriz de correlaciones para llevar a cabo el análisis.

- Pestaña de “Reportes”

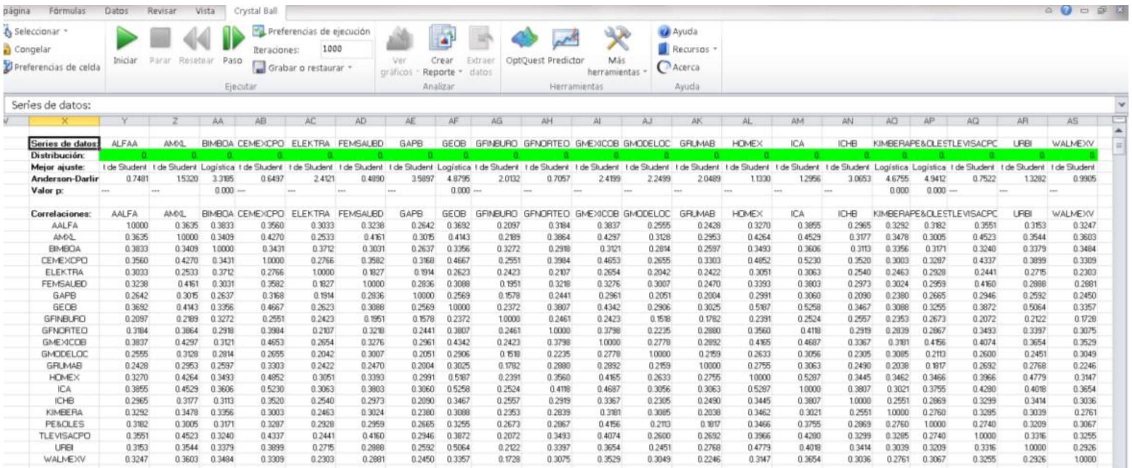
En esta parte se seleccionan los reportes que se desea conocer, en caso de así requerirlos, posteriormente se selecciona ejecutar.

Las celdas que aparecerán con fondo verde, es donde Crystal Ball por medio de la prueba de Anderson Darling realizo el mejor ajuste de una distribución de probabilidad a cada serie de datos para cada activo.

En la fila siguiente de se puede observar el nombre de la distribución que mejor se ajusta a los datos de cada uno de los activos, y posteriormente la matriz de correlación[27].

[27] Los resultados del ajuste de las distribuciones a las series de datos y los gráficos correspondientes se pueden apreciar en el anexo 5 y 6 respectivamente

Figura 4.35 Definición de supuestos en Crystal Ball



Series de datos:	ALFAA	AMXL	BIMBOA	CEMEXCPO	ELEKTRA	FEMSAUBD	GAPB	GEOB	GFINBURO	GFNORTEO
Distribución:	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Mejor ajuste:	t de Student	t de Student	Logística	t de Student	t de Student	t de Student	t de Student	Logística	t de Student	t de Student
Anderson-Darlir	0.7481	1.5320	3.3185	0.6497	2.4121	0.4890	3.5897	4.8795	2.0132	0.7057
Valor p:	---	---	0.000	---	---	---	---	0.000	---	---
Correlaciones:	AALFA	AMXL	BIMBOA	CEMEXCPO	ELEKTRA	FEMSAUBD	GAPB	GEOB	GFINBURO	GFNORTEO
AALFA	1.0000	0.3635	0.3833	0.3560	0.3033	0.3238	0.2642	0.3692	0.2097	0.3184
AMXL	0.3635	1.0000	0.3409	0.4270	0.2533	0.4161	0.3015	0.4143	0.2189	0.3864
BIMBOA	0.3833	0.3409	1.0000	0.3431	0.3712	0.3031	0.2637	0.3356	0.3272	0.2918
CEMEXCPO	0.3560	0.4270	0.3431	1.0000	0.2766	0.3582	0.3168	0.4667	0.2551	0.3984
ELEKTRA	0.3033	0.2533	0.3712	0.2766	1.0000	0.1827	0.1914	0.2623	0.2423	0.2107
FEMSAUBD	0.3238	0.4161	0.3031	0.3582	0.1827	1.0000	0.2836	0.3088	0.1951	0.3218
GAPB	0.2642	0.3015	0.2637	0.3168	0.1914	0.2836	1.0000	0.2569	0.1578	0.2441
GEOB	0.3692	0.4143	0.3356	0.4667	0.2623	0.3088	0.2569	1.0000	0.2372	0.3807
GFINBURO	0.2097	0.2189	0.3272	0.2551	0.2423	0.1951	0.1578	0.2372	1.0000	0.2461
GFNORTEO	0.3184	0.3864	0.2918	0.3984	0.2107	0.3218	0.2441	0.3807	0.2461	1.0000
GMEXICOB	0.3837	0.4297	0.3121	0.4653	0.2654	0.3276	0.2961	0.4342	0.2423	0.3798
GMODELOC	0.2555	0.3128	0.2814	0.2655	0.2042	0.3007	0.2051	0.2906	0.1518	0.2235
GRUMAB	0.2428	0.2953	0.2597	0.3303	0.2422	0.2470	0.2004	0.3025	0.1782	0.2880
HOMEX	0.3270	0.4264	0.3493	0.4852	0.3051	0.3393	0.2991	0.5187	0.2391	0.3560
ICA	0.3855	0.4529	0.3606	0.5230	0.3063	0.3803	0.3060	0.5258	0.2524	0.4118
ICHB	0.2965	0.3177	0.3113	0.3520	0.2540	0.2973	0.2090	0.3467	0.2557	0.2919
KIMBERA	0.3292	0.3478	0.3356	0.3003	0.2463	0.3024	0.2380	0.3088	0.2353	0.2839
PE&OLES	0.3182	0.3005	0.3171	0.3287	0.2928	0.2959	0.2665	0.3255	0.2673	0.2867
TLEVISACPO	0.3551	0.4523	0.3240	0.4337	0.2441	0.4160	0.2946	0.3872	0.2072	0.3493
URBI	0.3153	0.3544	0.3379	0.3899	0.2715	0.2888	0.2592	0.5064	0.2122	0.3397
WALMEXV	0.3247	0.3603	0.3484	0.3309	0.2303	0.2881	0.2450	0.3357	0.1728	0.3075

Series de datos:	GMEXICOB	GMODELOC	GRUMAB	HOMEX	ICA	ICHB	KIMBERA	PE&OLES	TLEVISACPC	URBI	WALMEXV
Distribución:	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Mejor ajuste:	t de Student	t de Student	t de Student	t de Student	t de Student	t de Student	Logística	Logística	t de Student	t de Student	t de Student
Anderson-Darlir	2.4199	2.2499	2.0489	1.1330	1.2956	3.0653	4.6755	4.9412	0.7522	1.3282	0.9905
Valor p:	---	---	---	---	---	---	0.000	0.000	---	---	---
Correlaciones:	GMEXICOB	GMODELOC	GRUMAB	HOMEX	ICA	ICHB	KIMBERA	PE&OLES	TLEVISACPC	URBI	WALMEXV
AALFA	0.3837	0.2555	0.2428	0.3270	0.3855	0.2965	0.3292	0.3182	0.3551	0.3153	0.3247
AMXL	0.4297	0.3128	0.2953	0.4264	0.4529	0.3177	0.3478	0.3005	0.4523	0.3544	0.3603
BIMBOA	0.3121	0.2814	0.2597	0.3493	0.3606	0.3113	0.3356	0.3171	0.3240	0.3379	0.3484
CEMEXCPO	0.4653	0.2655	0.3303	0.4852	0.5230	0.3520	0.3003	0.3287	0.4337	0.3899	0.3309
ELEKTRA	0.2654	0.2042	0.2422	0.3051	0.3063	0.2540	0.2463	0.2928	0.2441	0.2715	0.2303
FEMSAUBD	0.3276	0.3007	0.2470	0.3393	0.3803	0.2973	0.3024	0.2959	0.4160	0.2888	0.2881
GAPB	0.2961	0.2051	0.2004	0.2991	0.3060	0.2090	0.2380	0.2665	0.2946	0.2592	0.2450
GEOB	0.4342	0.2906	0.3025	0.5187	0.5258	0.3467	0.3088	0.3255	0.3872	0.5064	0.3357
GFINBURO	0.2423	0.1518	0.1782	0.2391	0.2524	0.2557	0.2353	0.2673	0.2072	0.2122	0.1728
GFNORTEO	0.3798	0.2235	0.2880	0.3560	0.4118	0.2919	0.2839	0.2867	0.3493	0.3397	0.3075
GMEXICOB	1.0000	0.2778	0.2892	0.4165	0.4687	0.3367	0.3181	0.4156	0.4074	0.3654	0.3529
GMODELOC	0.2778	1.0000	0.2159	0.2633	0.3056	0.2305	0.3085	0.2113	0.2600	0.2451	0.3049
GRUMAB	0.2892	0.2159	1.0000	0.2755	0.3063	0.2490	0.2038	0.1817	0.2692	0.2768	0.2246
HOMEX	0.4165	0.2633	0.2755	1.0000	0.5287	0.3445	0.3462	0.3466	0.3966	0.4779	0.3147
ICA	0.4687	0.3056	0.3063	0.5287	1.0000	0.3807	0.3021	0.3755	0.4280	0.4018	0.3654
ICHB	0.3367	0.2305	0.2490	0.3445	0.3807	1.0000	0.2551	0.2869	0.3299	0.3414	0.3036
KIMBERA	0.3181	0.3085	0.2038	0.3462	0.3021	0.2551	1.0000	0.2760	0.3285	0.3039	0.2761
PE&OLES	0.4156	0.2113	0.1817	0.3466	0.3755	0.2869	0.2760	1.0000	0.2740	0.3209	0.3067
TLEVISACPO	0.4074	0.2600	0.2692	0.3966	0.4280	0.3299	0.3285	0.2740	1.0000	0.3316	0.3255
URBI	0.3654	0.2451	0.2768	0.4779	0.4018	0.3414	0.3039	0.3209	0.3316	1.0000	0.2926
WALMEXV	0.3529	0.3049	0.2246	0.3147	0.3654	0.3036	0.2761	0.3067	0.3255	0.2926	1.0000

Fuente: Elaboración propia utilizando Crystal Ball en Microsoft Excel.

4.4.2 Definición de las variables de Decisión

Crystal Ball requiere que se definan variables de decisión con las cuales se satisfacen las restricciones del modelo a optimizar, para obtener a través de la simulación los valores que sustituirán a los valore iniciales de estas variables después de realizar la simulación, dichas variables serán los pesos asignados a cada activo que optimizaran el portafolio de inversión.

1. Se crea un vector de pesos para cada activo, con un valor inicial o valor semilla el cual se recomienda se distribuyan los pesos equitativamente para cada activo, se recomienda que las celdas que forman parte de este vector de pesos no contengan formulas, solo valores numéricos entre 0 y 1.
2. A continuación se seleccionan las 21 celdas de pesos y posteriormente se selecciona la opción de definir decisión de la barra de herramientas de Crystal Ball.

3. En la ventana emergente se selecciona el nombre de la variable de decisión que debe corresponder a cada acción, los limites inferior y superior en el cual está definido el rango de valores que pudieran llegar a tomar cada variable, en este caso de optimización cada variable debe encontrarse ente 0 y 1.

Figura 4.36 Muestra de las variables de decision creadas en el Paso 3

																						Total
Vector de Participaci	0.047619048	0.047619048	0.04762	0.047619048	0.047619048	0.047619048	0.047619048	0.04762	0.047619048	0.047619048	0.047619048	0.047619048	0.047619048	0.047619048	0.047619048	0.047619048	0.047619	0.047619	0.047619048	0.047619048	0.047619048		100%

Fuente: Elaboración propia utilizando Crystal Ball en Microsoft Excel.

4. Las celdas seleccionadas como parte de las variables de decisión estarán marcadas con fondo amarillo, lo cual indica que Crystal Ball las tiene definidas como variables de decisión.
5. En la siguiente celda de dicho vector, se debe realizar la suma de los pesos la cual debe ser forzosamente 100% para cualquiera de las combinaciones calculadas.

4.4.3. Planteamiento de la función objetivo

1. Se define en una celda libre la función objetivo, que en este caso será el producto del vector asignado a las variables de decisión (pesos de los activos) por el vector de los supuestos en el que mediante Crystal Ball se ajustó una distribución a los rendimientos históricos de los activos.[28]
2. Se selecciona la celda anteriormente mencionada y en la barra de herramientas de Crystal Ball se escoge la opción de Definir Pronostico.
3. En la ventana emergente, se edita la etiqueta que será el nombre de la función a optimizar y posteriormente en la siguiente línea, las unidades en las cuales se

[28] La función utilizada en Microsoft Excel fue “=sumaproducto”.

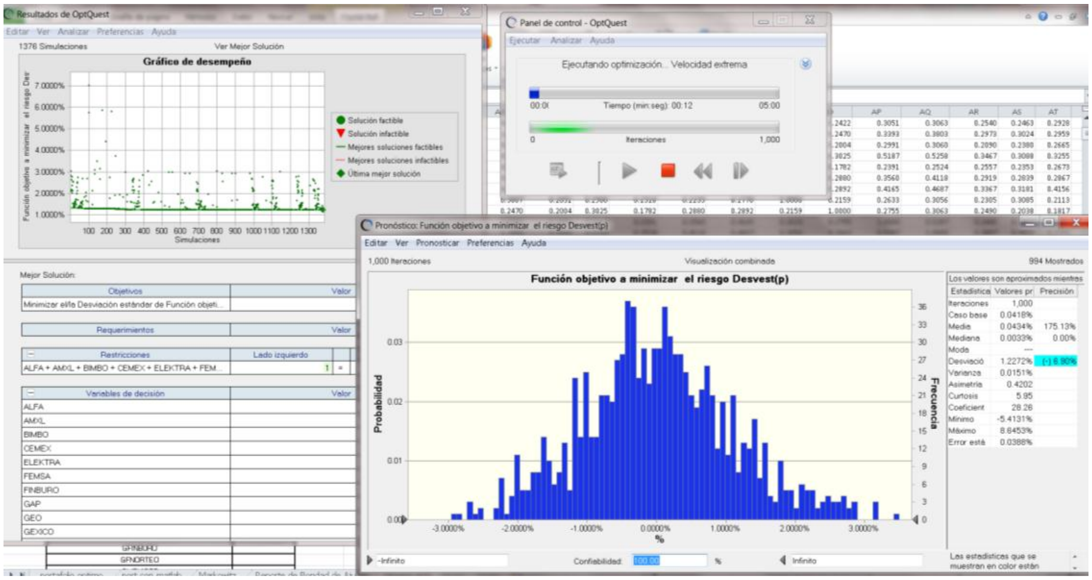
expresaran los resultados, se oprime “Aceptar” y la celda objetivo se mercara de color azul.

4. El siguiente paso será escoger la opción de “Matriz de Correlación” dentro del menú de “Más Herramientas” en la barra de Crystal Ball.
5. En la ventana emergente se ingresan todas las variables de decisión, para construir la matriz de correlación, se oprime el botón “Next” el cual nos creara una ventana temporal con la parte superior de la matriz de correlación, a continuación se oprime el botón “Load the Matrix”.

4.4.4. Configuración de “OptQuest” y ejecución de la simulación Monte Carlo

1. Una vez realizado todo el proceso anterior se escoge la opción de OptQuest en la barra de Crystal Ball.
2. En la pestaña “Objetivos” del OptQuest se selecciona el botón “Añadir Objetivo”, para este caso se selecciona “Minimizar” la “Desviación Estándar” de la función objetivo establecido anteriormente.
3. Para continuar, el usuario se debe ubicar en la pestaña de “Restricciones”, se selecciona la opción de “Ingreso Avanzado”, posteriormente se oprime el botón de “Insertar Variable” y se seleccionan todas las variables de decisión, se oprime el botón de “OK” y se iguala la suma de todas las variables a 100%, se oprime el botón de “Siguiente Paso”.
4. En la siguiente pestaña de “Opciones”, se seleccionan los siguientes parámetros:
   Ejecutar por: 5 min la simulación
   Tipo de Simulación estocástica
   Mostar solo el pronóstico objetivo
   Actualizar solo las mejores soluciones
   Automáticamente asignar la mejor solución
5. Se selecciona el botón “Ejecutar” para dar comienzo a la optimización por medio de Simulación Monte Carlo.

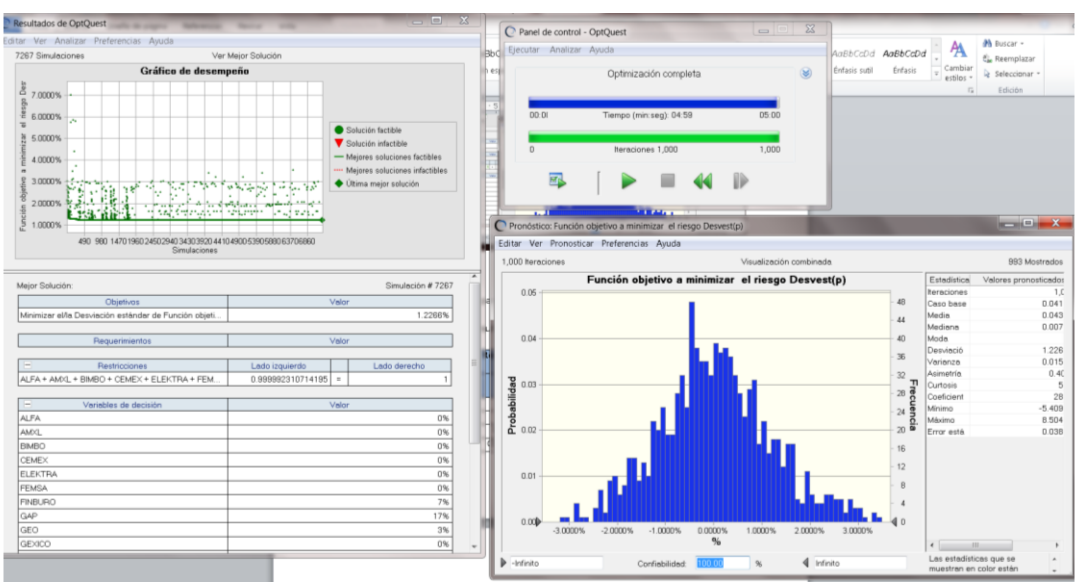
Figura 4.37 Captura de pantalla de Crystal Ball en la ejecución de la simulación



Fuente: Elaboración propia utilizando Crystal Ball en Microsoft Excel.

Después de haber transcurrido los minutos que decida el usuario para llevar a cabo la simulación el proceso termina, como se puede apreciar en la figura 4.38.

Figura 4.38 Captura de pantalla de la simulación terminada.



Fuente: Elaboración propia utilizando Crystal Ball en Microsoft Excel.

Los resultados obtenidos para los pesos en Crystal Ball son los siguientes:

Tabla 4.39 Resultados para el portafolio óptimo

mediante Monte Carlo en Crystal Ball

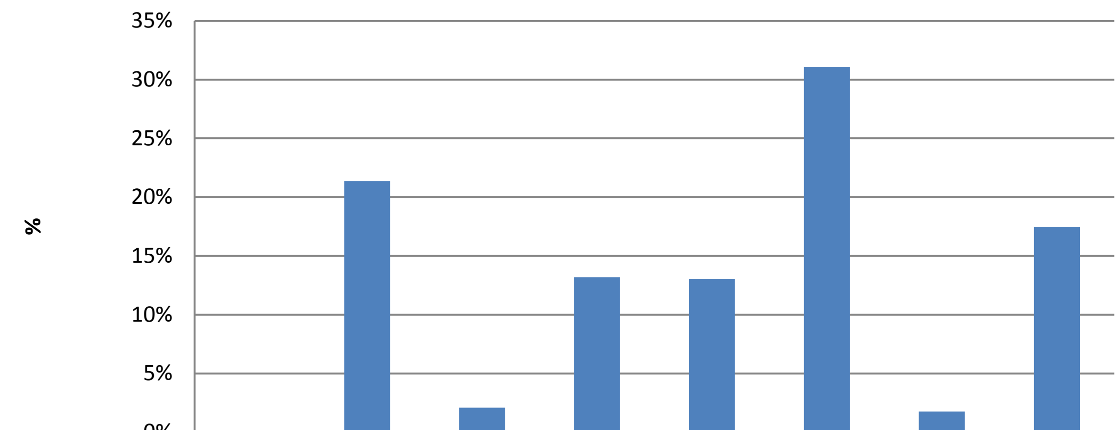
Activo	Pesos Asignado
ALFA	**0.03%**
AMX	0.00%
BIMBO	0.00%
CEMEX	0.00%
ELEKTRA	0.00%
FEMSAU	0.00%
GAPB	**21.38%**
GEO	**2.09%**
GFINBUR	**13.19%**
GFNORTE	0.00%
GMEXICO	0.00%
GMODELO	0.00%
GRUMA	0.00%
HOMEX	0.00%
ICA	0.00%
ICH	**13.01%**
KIMBER	**31.09%**
PE&OLES	**1.76%**
TLEVISA	0.00%
URBI	0.00%
WALMEX	**17.46%**
Total	**100.00%**
Rentabilidad del Portafolio	**0.042804%**
Varianza del Portafolio	**0.0000002**
Desviación del Portafolio	**0.039056%**

Fuente: Elaboración propia utilizando Crystal Ball en Microsoft Excel.

Los pesos que se muestran en la tabla 4.39 son resultado de la simulación en la que se tiene por función objetivo minimizar el riesgo al que se verá expuesto el inversionista.

Esta combinación de activos y proporciones con un nivel de 95% de confiabilidad, permiten afirmar que si se invierten los porcentajes asignados a los activos antes mencionados se obtendrá un rendimiento del 0.042804%, minimizando el riesgo a un 0.039056%.

Figura 4.40 Portafolio óptimo obtenido a través del método de simulación de Monte Carlo



	ALFAA	GAPB	GEOB	GFINBURO	ICHB	KIMBERA	PE&OLES	WALMEXV
Pesos Asignado	0.03%	21.38%	2.09%	13.19%	13.01%	31.09%	1.76%	17.46%

Fuente: Elaboración propia utilizando Crystal Ball en Microsoft Excel.

Los pesos que minimizan la desviación estándar (riesgo) se encuentran distribuidos en el gráfico 4.40, asignándole mayor importancia a KIMBER A dado que dentro de los estadísticos KIMBER A[29], no es el activo que presenta el mayor rendimiento esperado de todos, con 0.058% de rendimiento promedio diario, en cambio presenta la menor desviación estándar de todos los activos de 1.839% con tendencia a la baja en riesgo, esto es lógico, ya que la simulación busca minimizar riesgo y le asigna mayor peso a los activos con menor desviación estándar.

Por otra parte, se puede observar que el activo de TLEVISA CPO es la segunda emisora que cuenta con menor nivel de riesgo (1.891%), y sus rendimientos son mayores a los de GAP B[30] .

[29] Esta información puede ser revisada de manera detallada en el anexo 3

[30] Rendimientos históricos y riesgo: GAP B: 0.008%, 1.999%, TLEVISA : 0.013%,1.891% respectivamente.

En los resultados obtenidos se muestra que no se realiza ninguna asignación a este activo, debido a que el método de simulación Monte Carlo toma en cuenta las tendencias y comportamiento de las distribuciones de los rendimientos históricos diarios y debido al comportamiento de estos, este activo presenta un nivel de riesgo con tendencia a la alza, por lo que evita invertir en TLEVISA CPO. Recordar que antes de realizar la simulación se tomó la decisión de minimizar el riesgo, adoptando una postura conservadora.

4.5 Comparación de resultados obtenidos

A continuación se presenta un comparativo de los Portafolios Óptimos obtenidos mediante el Modelo de Markowitz vs el Método de Simulación Monte Carlo:

Al comparar los resultado obtenidos por ambos modelos, se puede apreciar que el modelo de Markowitz selecciona a instrumentos que presentan niveles bajos de riesgo, y de esa muestra elige a los que tengan los rendimientos más altos para así poder asegurar minimizar el riesgo y de forma simultánea, lograr obtener un nivel de rendimiento deseado al seleccionar las acciones con mayor rendimiento de las que poseen menor riesgo, basándose en los estadísticos históricos de media y desviación estándar.

Con el modelo de Markowitz los resultados muestran que el inversionista podrá tener un nivel de rendimiento mayor que con el método Monte Carlo, pero este resultado se obtiene con información resumida en los estadísticos, a diferencia del resultado obtenido a través de una simulación que toma en cuenta el comportamiento de los activos a través del tiempo y sus tendencias a fututo.

El portafolio obtenido a través del método de simulación Monte Carlo, proporciona los pesos para un conjunto de activos con los que se minimiza el riesgo, seleccionando activos con tendencias a la baja en riesgo, en los cuales la distribución de probabilidad ajustada a los rendimientos históricos tienen mayor probabilidad de tener rendimientos positivos.

Tabla 4.10

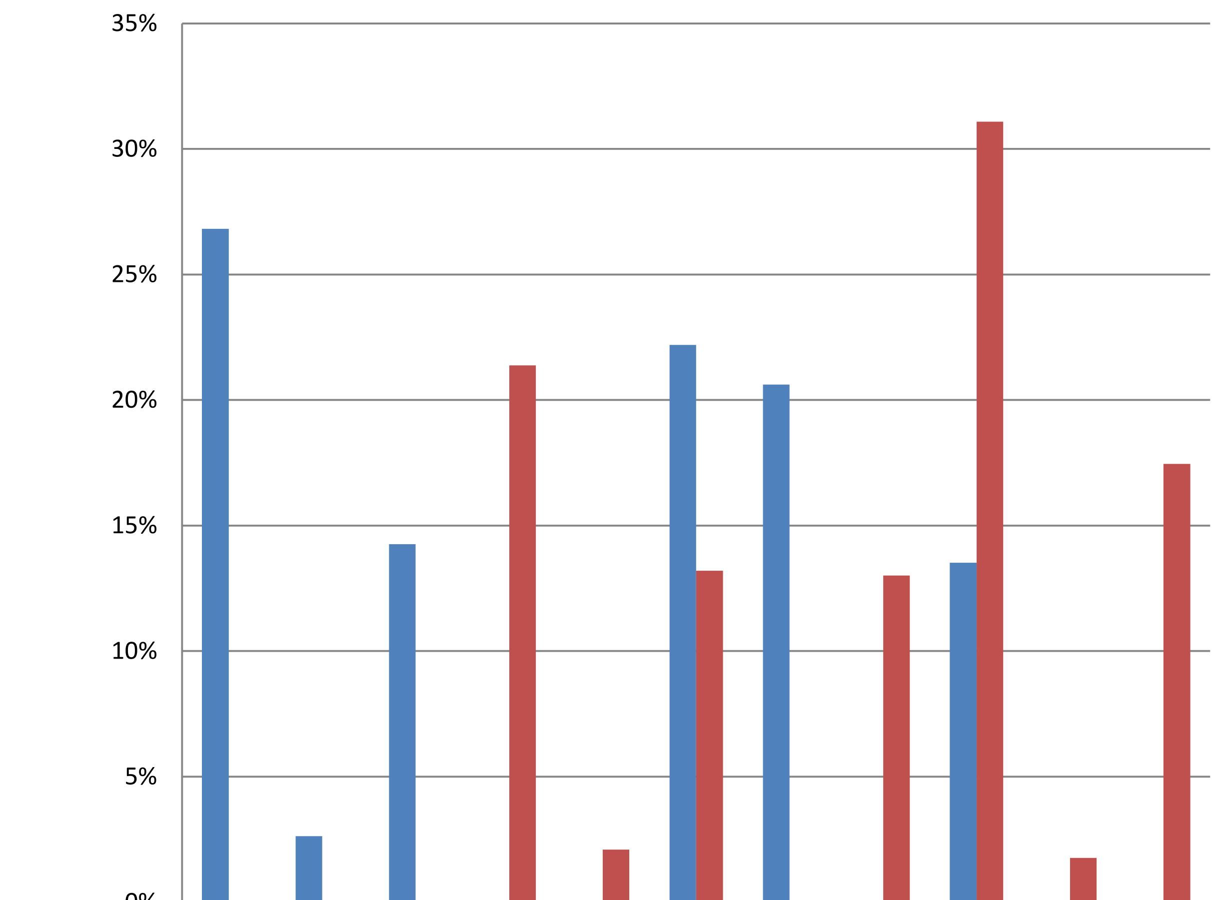
Comparativo de Resultados Obtenidos por Markowitz VS Monte Carlo

Activo	Pesos Asignado Markowitz	Pesos Asignados Monte Carlo
ALFA	**26.81%**	**0.03%**
AMX	0.00%	0.00%
BIMBO	0.00%	0.00%
CEMEX	0.00%	0.00%
ELEKTRA	**2.62%**	0.00%
FEMSA	**14.25%**	0.00%
GAP	0.00%	**21.38%**
GEO	0.00%	**2.09%**
GFINBUR	**22.19%**	**13.19%**
GFNORTE	0.00%	0.00%
GMEXICO	0.00%	0.00%
GMODELO	**20.61%**	0.00%
GRUMA	0.00%	0.00%
HOMEX	0.00%	0.00%
ICA	0.00%	0.00%
ICH	0.00%	**13.01%**
KIMBERA	**13.52%**	**31.09%**
PE&OLES	0.00%	**1.76%**
TLEVISA	0.00%	0.00%
URBI	0.00%	0.00%
WALMEX	0.00%	**17.46%**
Total	**100.00%**	**100.00%**
Rentabilidad del Portafolio	**0.076332%**	**0.042804%**
Varianza del Portafolio	**0.0002251**	**0.0000002**
Desviación del Portafolio	**1.500205%**	**0.039056%**

Fuente: Elaboración propia utilizando Crystal Ball, Matlab y Microsoft Excel.

Figura 4.41

Comparativo de los Resultados Obtenidos por Markowitz y Monte Carlo



	ALFAA	ELEKTRA	FEMSAUBD	GAPB	GEOB	GFINBURO	GMODELOC	ICHB	KIMBERA	PE&OLES	WALMEXV
Markowitz	26.81%	2.62%	14.25%	0.00%	0.00%	22.19%	20.61%	0.00%	13.52%	0.00%	0.00%
Monte Carlo	0.03%	0.00%	0.00%	21.38%	2.09%	13.19%	0.00%	13.01%	31.09%	1.76%	17.46%

Fuente: Elaboración propia utilizando Crystal Ball, Matlab y Microsoft Excel.

El portafolio obtenido a través de la simulación le proporciona al inversionista un nivel de riesgo y rendimiento menor al obtenido por el modelo de Markowitz, por otra parte le permite al inversionista tener un resultado con el 95% de confiabilidad al realizar la asignación de los activos.

4.5.1. Análisis de portafolios calculados por Markowitz y Simulación Monte Carlo en diferentes etapas y ciclos económicos

A continuación, como parte de los objetivos secundarios de la presente investigación, se presentara un análisis del comportamiento de un portafolio de activos en tres diferentes periodos que corresponde a un periodo previo a crisis, un siguiente periodo en el que la economía se encuentra en crisis y por ultimo, un periodo posterior a la crisis.

Los periodos que se seleccionaron para realizar este análisis están comprendidos de la siguiente forma:

- Periodo previo a crisis, noviembre 2007 – octubre 2008.
- Periodo en crisis, noviembre 2008 – abril 2010.
- Periodo posterior a crisis, mayo 2010 – noviembre 2012.

Dichos periodos fueron seleccionados después de estudiar varios documentos de Lomelí (2012), Cordera et al., (2012), Heredia et al., (2012). Estos son simplemente periodos para separar las etapas de los ciclos de la crisis económica, y no será un punto a profundizar, ya que no es tema principal del presente estudio.

4.5.1.1. Periodo Previo a Crisis, resultados obtenidos mediante Markowitz y Monte Carlo

El modelo de Markowitz al solo contemplar eventos pasados, no toma en cuenta que la economía se encuentra en un periodo previo a crisis, por lo que considera que el periodo no es riesgoso y decide confiar en pocos activos, y en los de mayor rendimiento para obtener un nivel mayor de rendimiento en el portafolio, asignando a ELEKTRA el 70% de la inversión y el 30% en GFINBUR, en cambio el método de simulación Monte Carlo, ya cuenta con información suficiente para prever que se acerca una etapa peligrosa para invertir, por lo que diversifica en gran medida la asignación de pesos, destinando el 25% a GFINBUR, el 17% a ELEKTRA y el 12.5% a GMODELO, como las tres principales acciones dentro del portafolio, dando como resultado un rendimiento muy bajo a comparación del nivel de riesgo al que está sujeto. El nivel de rendimiento obtenido con la combinación de activos asignada por Markowitz es mayor en rendimiento y en riesgo a comparación del método de Monte Carlo, pero como ya se mencionó anteriormente en el presente estudio, el tener un portafolio diversificado le permite al inversionista estar expuesto a niveles menores de riesgo, por lo cual es un mejor portafolio para un inversionista con un perfil conservador. Los resultados pueden apreciarse en la tabla 4.11 y la figura 4.42.

Tabla 4.11

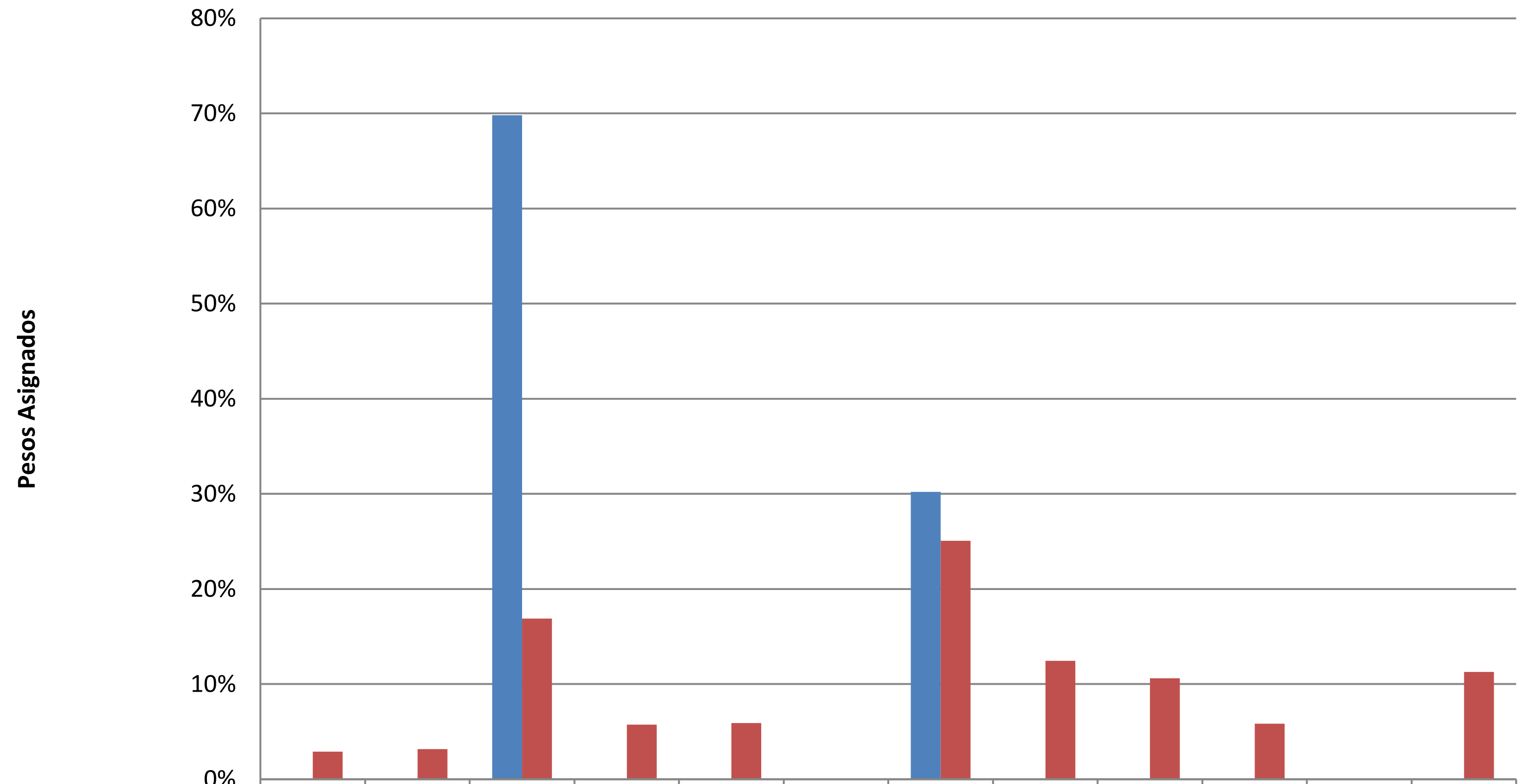
Comparación de resultados de los portafolios Óptimos en periodo previo a crisis.

Noviembre 2007 - Octubre 2008		
Nombre del activo	**Pesos Markowitz**	**Pesos Monte Carlo**
ALFA	0.00%	**2.90%**
AMX	0.00%	**3.16%**
BIMBO	0.00%	0.00%
CEMEX	0.00%	0.00%
ELEKTRA	**69.79%**	**16.89%**
FEMSA	0.00%	**5.75%**
GAP	0.00%	**5.90%**
GEO	0.00%	**0.07%**
GFINBUR	**30.21%**	**25.07%**
GFNORTE	0.00%	0.00%
GMEXICO	0.00%	0.00%
GMODELO	0.00%	**12.46%**
GRUMA	0.00%	0.00%
HOMEX	0.00%	0.00%
ICA	0.00%	0.00%
ICH	0.00%	**10.60%**
KIMBERA	0.00%	**5.85%**
PE&OLES	0.00%	**0.04%**
TLEVISA	0.00%	0.00%
URBI	0.00%	0.00%
WALMEX	0.00%	**11.29%**
Rendimiento Activo libre riesgo	**-0.01%**	**-**
Rendimiento portafolio óptimo	**0.10828%**	**0.00008%**
Riesgo (Des. Est.) portafolio óptimo	**1.92545%**	**0.039%**
Varianza portafolio óptimo	**0.000371**	**0.0000152**

Fuente: Elaboración propia utilizando Crystal Ball, Matlab y Microsoft Excel.

Figura 4.42

Comparación de la distribución de los pesos para los portafolios óptimos obtenidos en periodo previo a crisis.



	ALFA	AMX	ELEKTRA	FEMSA	GAP	GEO	GFINBUR	GMODELO	ICH	KIMBERA	PE&OLES	WALMEX
Pesos Markowitz	0.00%	0.00%	69.79%	0.00%	0.00%	0.00%	30.21%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
Pesos Monte Carlo	2.90%	3.16%	16.89%	5.75%	5.90%	0.07%	25.07%	12.46%	10.60%	5.85%	0.04%	11.29%

Fuente: Elaboración propia utilizando Crystal Ball, Matlab y Microsoft Excel.

4.5.1.2. Periodo en Crisis, resultados obtenidos mediante Markowitz y Monte Carlo

Como se puede apreciar en la tabla 4.12 y figura 4.43 ambos modelos, al estar en periodo de crisis buscan diversificar en la mayor medida la asignación de pesos para minimizar el riesgo, este efecto es menos notorio en el modelo de Markowitz, ya que asigna el 50% de los recursos a un solo activo, lo cual es poco conveniente durante un periodo en crisis, por otra parte Monte Carlo diversifica en mayor medida sus recursos y realiza su mayor asignación en WALMEX con un 25%, seguido por KIMBER con un 24%, ya que son las dos acciones que mejor se han comportado en cuanto a riesgo durante el periodo.

Los rendimientos obtenidos con el modelo de Markowitz siguen estando por encima de los obtenidos con el método de Monte Carlo, pero lo hace asignando la mitad de los recursos a un solo activo, ya que en ese periodo presento la menor desviación en comparación a los demás activos.

Tabla 4.12

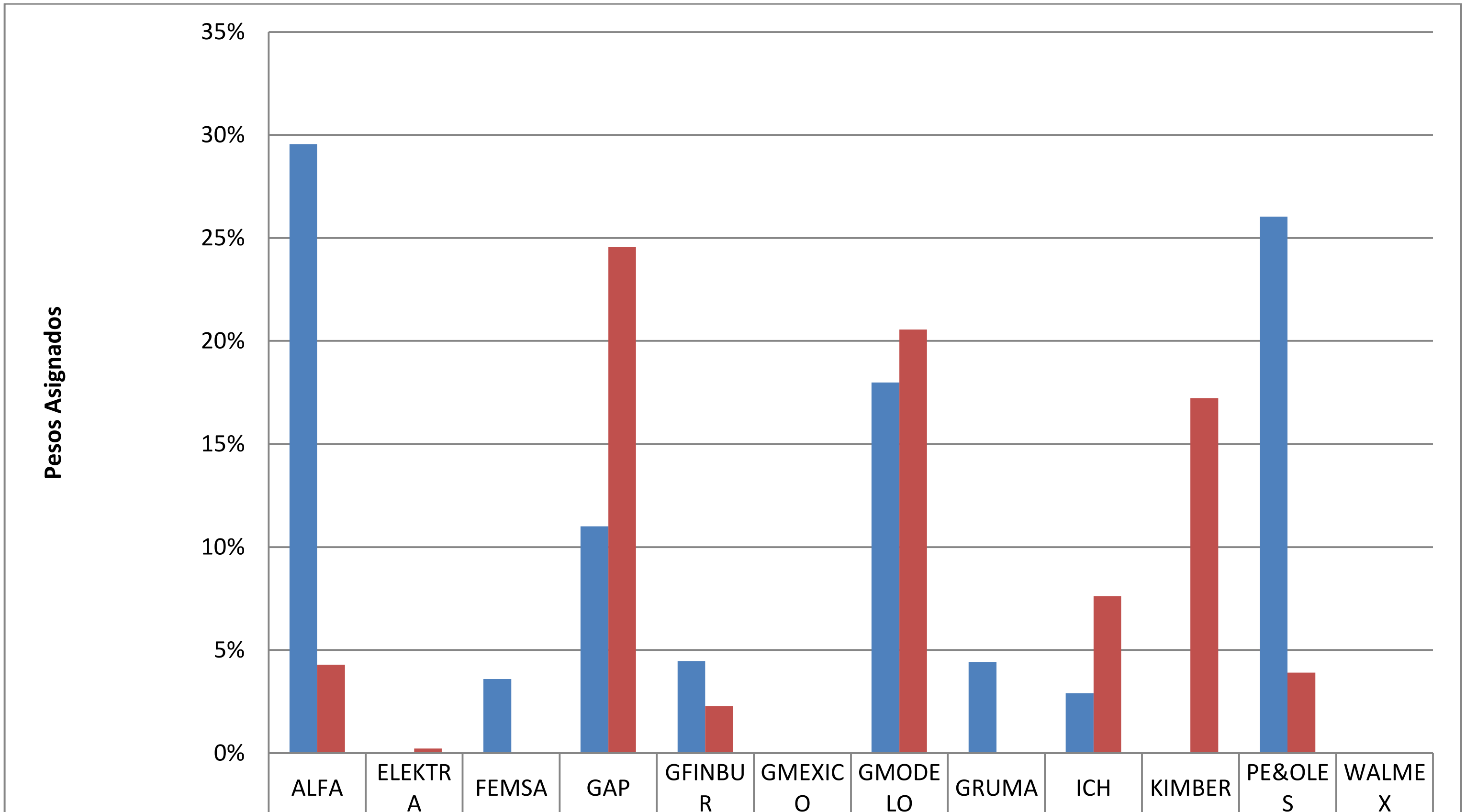
Comparación de resultados de los portafolios Óptimos en periodo de crisis.

Noviembre 2008 - Abril 2010		
Nombre del activo	**Pesos Markowitz**	**Peso Monte Carlo**
ALFA	**50.24%**	**0.02%**
AMX	0.00%	0.00%
BIMBO	0.00%	0.00%
CEMEX	0.00%	0.00%
ELEKTRA	**0.00%**	**8.03%**
FEMSA	**1.32%**	**0.00%**
GAP	**13.82%**	**12.95%**
GEO	0.00%	0.00%
GFINBUR	**0.00%**	**10.77%**
GFNORTE	0.00%	0.00%
GMEXICO	**9.56%**	**0.00%**
GMODELO	**0.00%**	**11.85%**
GRUMA	**13.10%**	**0.00%**
HOMEX	0.00%	0.00%
ICA	0.00%	0.00%
ICH	**6.18%**	**7.25%**
KIMBERA	**3.93%**	**24.07%**
PE&OLES	**1.86%**	**0.03%**
TLEVISA	0.00%	0.00%
URBI	0.00%	0.00%
WALMEX	**0.00%**	**25.02%**
Rendimiento Activo libre riesgo	**0.04%**	**-**
Rendimiento portafolio óptimo	**0.27%**	**0.13%**
Riesgo (Des. Est.) portafolio óptimo	**2.14%**	**0.13%**
Varianza portafolio óptimo	**0.0004594**	**0.0000017**

Fuente: Elaboración propia utilizando Crystal Ball, Matlab y Microsoft Excel.

Figura 4.43

Comparación de la distribución de los pesos para los portafolios óptimos obtenidos en periodo de crisis.



	ALFA	ELEKTRA	FEMSA	GAP	GFINBUR	GMEXICO	GMODELO	GRUMA	ICH	KIMBER	PE&OLES	WALMEX
Pesos Markowitz	29.56%	0.00%	3.59%	11.00%	4.47%	0.00%	17.99%	4.43%	2.91%	0.00%	26.04%	0.00%
Peso Monte Carlo	4.29%	0.22%	0.00%	24.56%	2.29%	0.00%	20.56%	0.00%	7.62%	17.23%	3.91%	0.00%

Fuente: Elaboración propia utilizando Crystal Ball, Matlab y Microsoft Excel.

4.5.1.3. Periodo posterior a Crisis, resultados obtenidos mediante Markowitz y Monte Carlo

Una vez que el periodo de crisis ha finalizado, ambos modelos comienzan a diversificar nuevamente los pesos de una forma mayormente equitativa, ya que el nuevo periodo ofrece mayor estabilidad, el modelo de Markowitz comienza a realizar asignaciones más diversificadas en comparación al periodo anterior.

El método de Monte Carlo realiza una asignación de recursos distinta, ya que las tendencias de los niveles de riesgo de los activos tienen comportamientos distintos en esta nueva etapa. En este periodo es en el cual ambos modelos realizan asignaciones a más activos en común que en periodos anteriores, ya que es un periodo de mayor estabilidad y de recuperación económica, por lo cual depositan mayor confianza en los activos seleccionados, porque se presenta un mejor panorama económico en comparación a periodos anteriores debido a niveles menores de riesgo presentes durante el periodo, de lo anterior se puede apreciar en la tabla 4.13 y figura 4.44.

Tabla 4.13

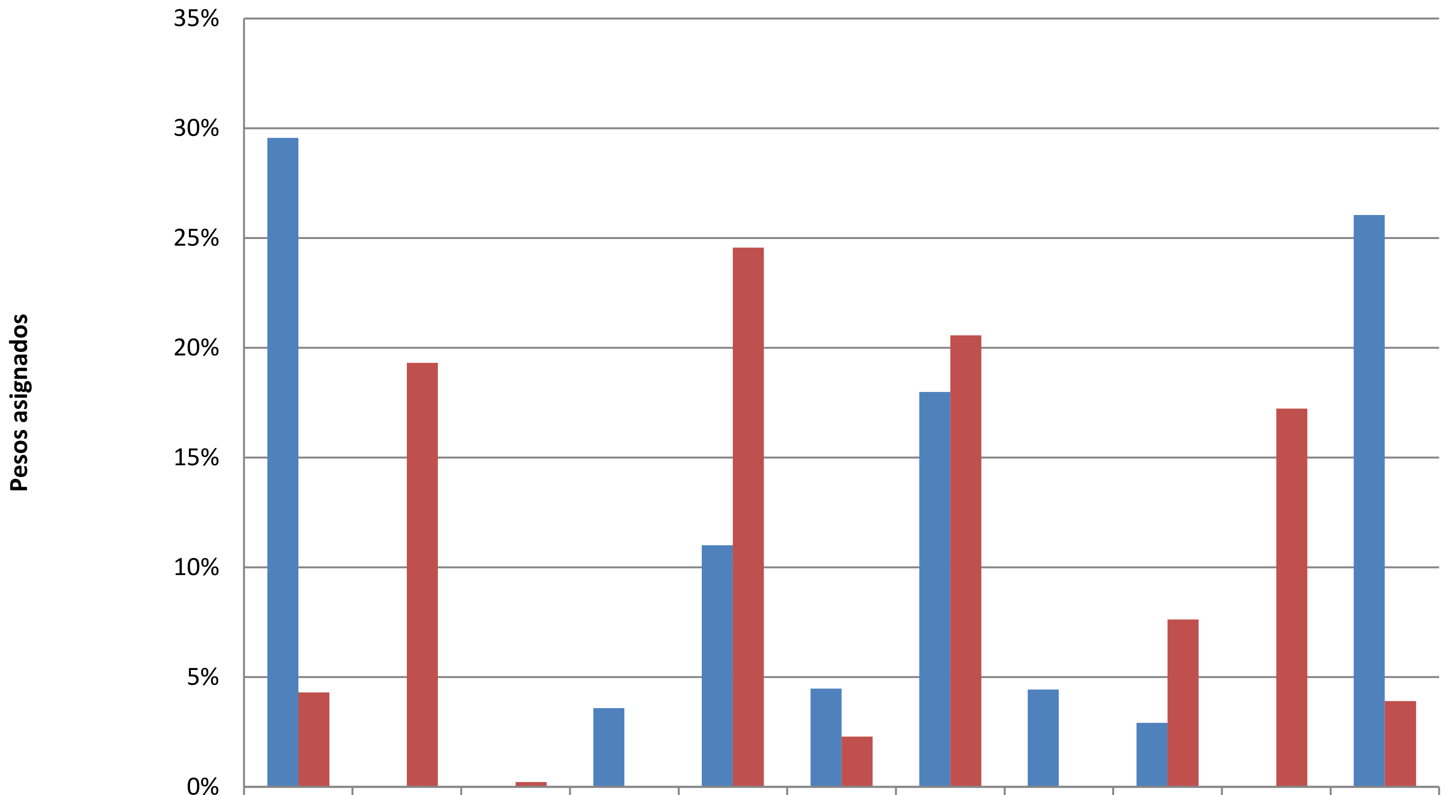
Comparación de resultados obtenidos de los portafolios Óptimos en periodo posterior a crisis.

Mayo 2010 - Noviembre 2012		
Nombre del activo	**Pesos Markowitz**	**Peso Monte Carlo**
ALFA	**29.56%**	**4.29%**
AMX	**0.00%**	**19.31%**
BIMBO	0.00%	0.00%
CEMEX	0.00%	0.00%
ELEKTRA	**0.00%**	**0.22%**
FEMSA	**3.59%**	**0.00%**
GAP	**11.00%**	**24.56%**
GEO	0.00%	0.00%
GFINBUR	**4.47%**	**2.29%**
GFNORTE	0.00%	0.00%
GMEXICO	0.00%	0.00%
GMODELO	**17.99%**	**20.56%**
GRUMA	**4.43%**	**0.00%**
HOMEX	0.00%	0.00%
ICA	0.00%	0.00%
ICH	**2.91%**	**7.62%**
KIMBER	**0.00%**	**17.23%**
PE&OLES	**26.04%**	**3.91%**
TLEVISA	0.00%	0.00%
URBI	0.00%	0.00%
WALMEX	0.00%	0.00%
Rendimiento Activo libre riesgo	**0.006%**	**-**
Rendimiento portafolio óptimo	**0.111%**	**0.058%**
Riesgo (Des. Est.) portafolio óptimo	**1.140%**	**0.057%**
Varianza portafolio óptimo	**0.0001300**	**0.0000003**

Fuente: Elaboración propia utilizando Crystal Ball, Matlab y Microsoft Excel.

Figura 4.44

Comparación de la distribución de los pesos para los portafolios óptimos obtenidos en periodo posterior a crisis.



	ALFA	AMX	ELEKTRA	FEMSA	GAP	GFINBUR	GMODELO	GRUMA	ICH	KIMBER	PE&OLES
Pesos Markowitz	29.56%	0.00%	0.00%	3.59%	11.00%	4.47%	17.99%	4.43%	2.91%	0.00%	26.04%
Peso Monte Carlo	4.29%	19.31%	0.22%	0.00%	24.56%	2.29%	20.56%	0.00%	7.62%	17.23%	3.91%

Fuente: Elaboración propia utilizando Crystal Ball, Matlab y Microsoft Excel.

4.6 Conclusiones

El método de Montecarlo, así como el de Markowitz, pudieron ser construidos siguiendo la metodología propuesta por los investigadores que los desarrollaron, estas técnicas pudieron ser aplicadas a las series de datos correspondientes a los activos seleccionados del IPC. Ambos modelos son igualmente útiles para la medición del riesgo y el rendimiento al que debe hacer frente un inversionista, al tener los dos enfoques y modelos aplicados se puede realizar un comparativo de ambas propuestas para el análisis, por lo anterior la hipótesis principal es aceptada.

Por otra parte, la hipótesis alternativa planteada es probada, ya que el modelo de simulación Monte Carlo ajusta una distribución de probabilidad a una serie de datos, dicha distribución de probabilidad va a considerar los cambios sucedidos en el pasado, presente, y le permite al inversionista tener mayor certeza de que en un futuro el comportamiento de dicho activo es descrito por una distribución de probabilidad, en cambio con el modelo de Markowitz se obtienen resultados a través de un método determinístico, dicho método solamente considera dos estadísticos, y a través de ellos el tomador de decisiones debe analizar la perspectiva y combinaciones de activos que mejor le beneficien.

A través del método de Monte Carlo se da solución a el mismo problema pero con un enfoque totalmente distinto, involucrando el comportamiento de la serie de datos, y una experimentación repetida que le ofrecen mayor certeza al inversionista para tomar la mejor decisión, el método de simulación Monte Carlo, es estocástico, y nos indica según la teoría, que el resultado obtenido tiene cierta probabilidad de ocurrir, lo cual representa la mayor ventaja frente al modelo de Markowitz, ya que el modelo de Markowitz resume toda la información de las series de datos de los activos en dos estadísticos, media y desviación estándar.

El método de Markowitz le permite al inversionista, en caso de que así lo decida y considere conveniente, realizar una distribución eficiente de sus recursos para un horizonte de tiempo corto, en otro caso, es recomendable utilizar el método de simulación Monte Carlo para inversiones con periodos amplios, ya que las distribuciones toman en cuenta el comportamiento pasado, y presente de los activos para proyectarlo al futuro de acuerdo a una distribución de probabilidad.

Para un inversionista con perfil conservador es recomendable utilizar el método de Monte Carlo, ya que a pesar de proporcionar niveles de rendimiento y riesgo menores a los obtenidos a través de Markowitz, permite asegurar con un cierto nivel de certeza que se llegará a alcanzar ese rendimiento, que a diferencia del otro modelo que ofrece rendimientos mayores, lo exponen a niveles de riesgo más altos, sin lograr asegurar ningún nivel de certeza en su resultado, ya que el modelo de Markowitz, como ya fue mencionado, utiliza información basada en eventos pasados que no le permiten tener herramientas para proyectar eventos futuros, siendo esta la principal desventaja frente al método de simulación Monte Carlo.

Anexo 1

Glosario de términos

Cosesgo: una medida estadística que calcula la simetría de distribución de probabilidad de una variable en relación a la simetría otra variable de probabilidad de la distribución. Todo lo demás es igual, un Cosesgo positivo significa que la distribución de la primera variable de probabilidad está sesgada a la derecha de la distribución de la variable del segundo.

En las finanzas, cosesgo se puede utilizar como un suplemento para el cálculo de covarianza de la estimación del riesgo. Por lo general, cosesgo se calcula utilizando datos históricos de un valor de precios como la primera variable, y datos históricos del mercado de precios como el segundo. Esto proporciona una estimación del riesgo de la seguridad en relación con el riesgo de mercado.

Un inversionista prefiere un cosesgo positivo porque representa una mayor probabilidad de rendimientos positivos sobre los rendimientos del mercado (Investopedia, 2013).

Cocurtosis: la cocurtosis permite calcular el grado de apuntamiento de las variables de una distribución de probabilidad relacionándola con otra variable que de la misma forma presenta apuntamiento. La cocurtosis se puede utilizar como un auxiliar para la estimación del riesgo en el mercado utilizando datos históricos de los precios de la primera y segunda variable (Investopedia, 2013).

Tensores: es una forma de representación matemática de fenómenos de distintas naturalezas que requieren de la representación en un sistema de referencia, existen distintos tipos de tensores, como pueden ser los escalares, vectoriales, y los de segundo orden, los primeros de ellos son una cantidad que posee magnitud pero no dirección, los segundos poseen magnitud y dirección, en algunos casos hasta dos direcciones (Chaves, 2011).

Anexo 2

Distribuciones de probabilidad continuas más comunes para el análisis Monte Carlo

A continuación se presentan algunas distribuciones de probabilidad continuas que pueden ser de utilidad en futuras investigaciones, todas estas distribuciones se encuentran disponibles en el software de Crystal Ball.

Distribución Normal

La distribución Normal es la distribución más importante de toda la probabilidad y estadística. La mayoría de las poblaciones numéricas tiene distribuciones que se puede ajustar a una curva normal apropiada (Wackerly et al., 2002).

Se dice que X es una v.a. que tiene una distribución normal con parámetros μ, σ, donde $-\infty < \mu < \infty$ y $0 < \sigma$, si la fdp de X es:

$$X \sim N(\mu, \pi^2) \tag{2.5}$$

$$f(x;\ \mu, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)} \qquad , \quad -\infty < x < \infty \tag{2.6}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x;\ \mu, \sigma) dx = 1 \tag{2.7}$$

$$E(X) = \mu \tag{2.8}$$

$$V(X) = \sigma^2 \tag{2.9}$$

Distribución Normal Estándar

Si la distribución normal tuviera parámetros $\mu = 0$ y $\sigma = 1$, esta se llama Distribución Normal Estándar, y se denota mediante Z, la fdp de Zes la siguiente:

$$f(z; 0, 1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} \qquad , \quad -\infty < z < \infty \tag{2.10}$$

Por lo general esta distribución no sirve como modelo para una población que surge de manera natural (Wackerly et al., 2002).

Distribución Gamma

La gráfica de una función de una distribución normal, tiene una forma semejante a la de una campana, lo que conlleva a que sea simétrica. En muchas situaciones la variable de interés que se desea estudiar tiene una distribución sesgada, y el conjunto de distribuciones de probabilidad que cuentan con una gran variedad de formas distributivas en las que se agrupan los datos es la Gamma.

La ecuación de la función que a continuación se muestra es de gran importancia:

Para $a > 0$ La función gamma está definida de la siguiente manera:

$$\boldsymbol{\Gamma(\propto) = \int_0^\infty x^{\propto-1} e^{-x} dx} \tag{2.11}$$

Las propiedades con las que cuenta esta función son:

- Para cualquier entero positivo:

$$n\boldsymbol{\Gamma}(\mathbf{n}) = (\mathbf{n}-\mathbf{1})! \quad (2.12)$$

$$\boldsymbol{\Gamma}\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\right) = \sqrt{(\boldsymbol{\pi})} \quad (2.13)$$

- A través de la integración por partes de la formular (2.11) se puede obtener la siguiente ecuación para cualquier valor de alfa:

$$\propto > 1, \boldsymbol{\Gamma}(\propto) = (\propto -\mathbf{1})\boldsymbol{\Gamma}(\propto -\mathbf{1}) \quad (2.14)$$

La distribución Gamma tiene ciertas particularidades, la primera variante es la siguiente:

La variable aleatoria continua X tendrá una distribución Gamma si su función de densidad es:

$$f(x;\alpha,\beta) = \begin{cases} \dfrac{1}{\beta^{\alpha}\,\boldsymbol{\Gamma}(\propto)} x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\beta}} & x \geq 0 \\ 0 & en\ caso\ contrario \end{cases} \quad (2.15)$$

Los parámetros α, y β satisfacen la condición de ser mayores a cero, esto es:

$$\alpha > 0, \beta > 0 \quad (2.16)$$

Por otra parte la variante en la que la distribución Gamma tiene $\beta = 1$ se denomina distribución Gamma estándar, y su función de densidad es la que se muestra:

$$f(x;\alpha) = \begin{cases} \frac{1}{\boldsymbol{\Gamma}(\propto)} x^{\alpha-1} e^{-x} & x \geq 0 \\ 0 & en\ caso\ contrario \end{cases} \quad (2.17)$$

La media y la varianza para una variable aleatoria de tipo Gamma $f(x;\alpha,\beta)$ son los siguientes:

$$E(X) = \mu \quad (2.18)$$

$$V(X) = \sigma^2 = \alpha\beta^2 \quad (2.19)$$

La distribución Gamma tiene un gran recurso que consiste en ser una distribución de ajuste para una amplia variedad de distribuciones de tipo empírico, ya que puede tomar formas diversas que van a depender de los parámetros con los que se define, es comúnmente utilizada para modelar proporciones (Xunta de Galicia Consellería De Sanidade, 2012)

Las distribuciones normal, gamma y uniforme proponen una amplia variedad de modelos de probabilidad para v.a. continuas, pero existen muchas situaciones en las que ningún modelo de estas distribuciones se ajusta a un conjunto de datos observados. Se han desarrollado otras distribuciones que pueden ser útiles en estos casos.

Distribución de Weibull

Se dice que X es una v.a. continua y tiene una distribución Weibull con parámetros α y β $(\alpha > 0,\ \beta > 0)$ (Wackerly et al., 2002):

$$f(x;\ \alpha,\beta)=\begin{cases}\dfrac{\alpha}{\beta}x^{\alpha-1}e^{-\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha}}, & x\geq 0\\ 0, & x<0\end{cases} \tag{2.20}$$

$$\mu=\beta\Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right) \tag{2.21}$$

$$\sigma^2=\beta^2\left\{\Gamma\left(1+\frac{2}{\alpha}\right)-\left[\Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)\right]^2\right\} \tag{2.22}$$

La fda de una v.a. Weibull con parámetros α y β es:

$$F(x;\ \alpha,\beta)=\begin{cases}0, & x<0\\ 1-e^{-(x/\beta)^{\alpha}}, & x\geq 0\end{cases} \tag{2.23}$$

Distribución Lognormal

Se dice que una v.a. continua positiva X tiene una distribución Lognormal si $Y=\ln(X)$ es una v.a. normalmente distribuida y tiene una fdp con parámetros μ y σ (Wackerly et al., 2002):

$$f(x;\ \mu,\sigma)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma x}}e^{-[\ln(x)-\mu]^2/(2\sigma^2)}, & x\geq 0\\ 0, & x<0\end{cases} \tag{2.24}$$

$$E(X)=e^{\mu+\sigma^2/2} \tag{2.25}$$

$$V(X)=e^{2\mu+\sigma^2}*(e^{\sigma^2}-1) \tag{2.26}$$

Distribución Beta

Se dice que X tiene una distribución beta si es una v.a. con parámetros α,β(ambos positivos), A y B si la fdp de X es (Xunta de Galicia Consellería De Sanidade, 2012):

$$f(x;,\beta,A,B)=\begin{cases}\frac{1}{B-A}*\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)*\Gamma(\beta)}\left(\frac{x-A}{B-A}\right)^{\alpha-1}\left(\frac{B-x}{B-A}\right)^{\beta-1},\ A\leq x\leq b\\ \qquad 0,\ en\ caso\ contrario\end{cases} \tag{2.27}$$

La media y la varianza de X están dadas por:

$$E(X)=\mu=A+(B-A)*\frac{\alpha}{\alpha+\beta} \tag{2.28}$$

$$V(X)=\sigma^2=\frac{(B-A)^2\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)} \tag{2.29}$$

Distribución Exponencial

La distribución exponencial es utilizada para obtener modelos equivalentes a una serie de experimentos continuos de la distribución discreta geométrica, es utilizada para procesos de los cuales se pretende conocer el periodo de tiempo en el que un evento específico podrá suceder, tiene un amplio uso en el modelado de tiempos de supervivencia (Wackerly et al., 2002).

Una de las características que es importante mencionar de esta distribución es llamada "Falta de Memoria", este se refiere a que cuando se realiza la medición de periodos de tiempo , el tiempo que transcurre desde un momento dado t_0, hasta que ocurre el evento esperado, no depende de que dicho evento se haya dado antes del momento t_0 (Xunta de Galicia Consellería De Sanidade, 2012)

Esta distribución modela el tiempo en el que suceden eventos consecutivos, a causa de un proceso de tipo Poisson.

Se dice que una variable aleatoria X tiene una distribución exponencial con parámetro λ (λ<0) si su función de densidad es la siguiente:

$$f(x;\lambda)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & x>0\\ 0\ en\ caso\ contrario\end{cases} \tag{2.30}$$

Esta función de densidad es un caso especial de la distribución Gamma, en la que α=1 y β= (1/ λ).

La media y desviación estándar de una distribución exponencial estará dada por:

$$E(x)=\alpha\beta=\frac{1}{\lambda} \tag{2.31}$$

$$V(x)=\alpha\beta^2=\frac{1}{\lambda^2} \tag{2.32}$$

Distribución Ji-cuadrada

La distribución Ji cuadrada, estará definida por el parámetro v, esta distribución es otro caso de la distribución Gamma, cuando el parámetro $\alpha=\frac{v}{2},\beta=2$. El parámetro con el que estará definida la distribución con v grados de libertad es un entero positivo (Xunta de Galicia Consellería De Sanidade, 2012).

La función de densidad de probabilidad de una distribución Ji Cuadrada está dada por:

$$f(x;\mathrm{v})=\begin{cases}\dfrac{1}{2^{\frac{v}{2}}\,\boldsymbol{\Gamma}(\mathbf{v}/\mathbf{2})}x^{\left(\frac{v}{2}\right)-1}e^{-x/2} & x>0\\ 0 & x<0\end{cases} \tag{2.33}$$

Esta distribución es de gran importancia para procesos de inferencia estadística, en especial para pruebas de bondad de ajuste, para el cálculo de los límites de confiabilidad de la varianza de una población estudiada, y como se mencionó anteriormente está completamente definida por sus grados de libertad correspondientes (Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Antioquia, 2012).

La media y la varianza de esta distribución son las siguientes:

$$E(x) = v \tag{2.34}$$

$$V(X) = 2v \tag{2.35}$$

Distribución F

La distribución F, llamada así en honor a Sir Ronald A. Fisher, considera dos variables aleatorias independientes de tipo Ji cuadrada, cada una dividida por los grados de libertad que les correspondan (Wackerly et al., 2002).

Si se tienen dos variables aleatorias e independientes: $U\ y\ V$ con $v_1,\ v_2$ grados de libertad respectivamente:

$$F = \frac{U/v_1}{U/v_2} \tag{2.40}$$

La función de densidad de la variable aleatoria se comporta de acuerdo a la distribución F dada por:

$$g(f) = \frac{\boldsymbol{\Gamma}\left(\frac{\boldsymbol{v_1}+\boldsymbol{v_2}}{\mathbf{2}}\right)}{\boldsymbol{\Gamma}\left(\frac{\boldsymbol{v_1}}{\mathbf{2}}\right)\boldsymbol{\Gamma}\left(\frac{\boldsymbol{v_2}}{\mathbf{2}}\right)}\left(\frac{\boldsymbol{v_1}}{\boldsymbol{v_2}}\right)^{\frac{\boldsymbol{v_1}}{\mathbf{2}}}.f^{2^{\frac{v_1}{2}-1}}(1+\frac{\boldsymbol{v_1}}{\boldsymbol{v_2}}f)^{-\frac{1}{2}(v_1+v_2)} \tag{2.41}$$

Para $f > 0$, y $g(f) = 0$ en cualquier otra parte.

La media y la varianza para esta distribución son las siguientes:

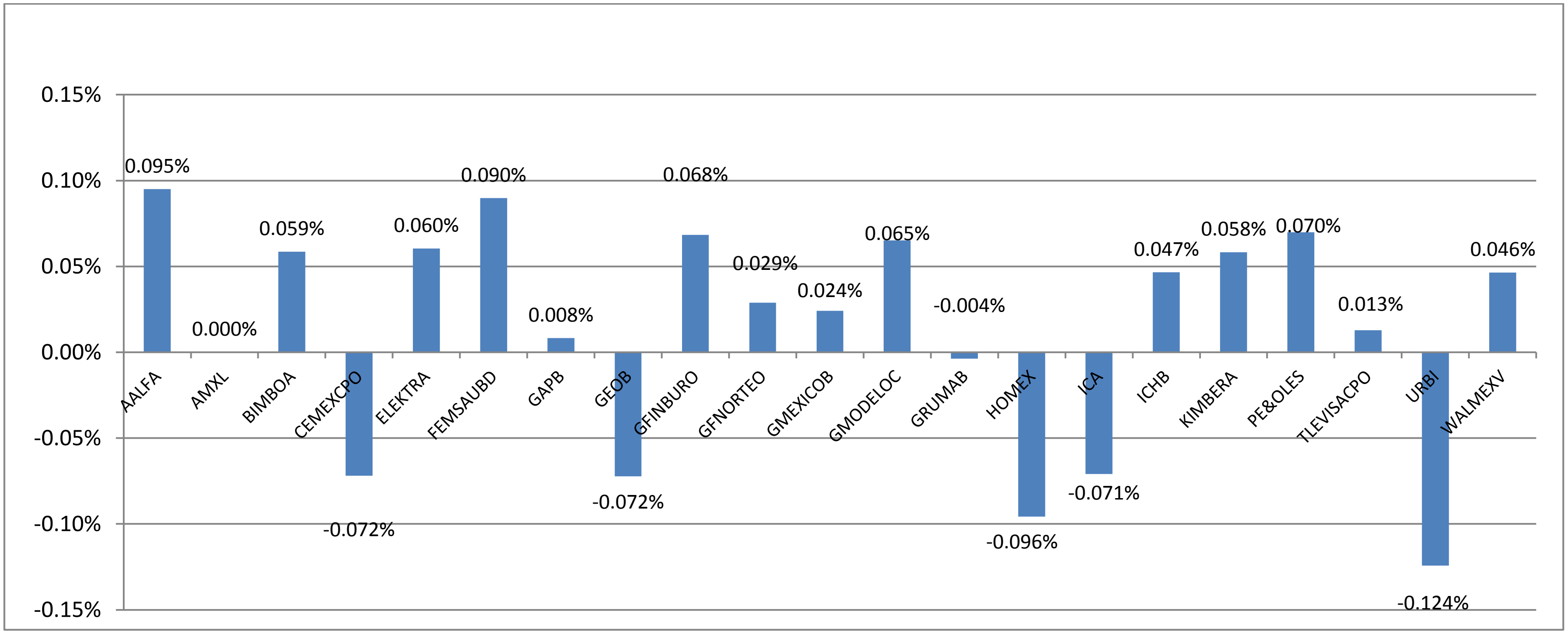
$$\mu = \frac{\boldsymbol{v_2}}{\boldsymbol{v_2 - 2}} \text{ : Para } \boldsymbol{v_2 > 2} \tag{2.42}$$

$$\sigma^2 = \frac{2v_2^2(\boldsymbol{v_1 + v_2 - 2})}{\boldsymbol{v_1}(\boldsymbol{v_2 - 2})^2(\boldsymbol{v_2 - 4})} \text{ : Para } \boldsymbol{v_2 > 4} \tag{2.43}$$

Anexo 3

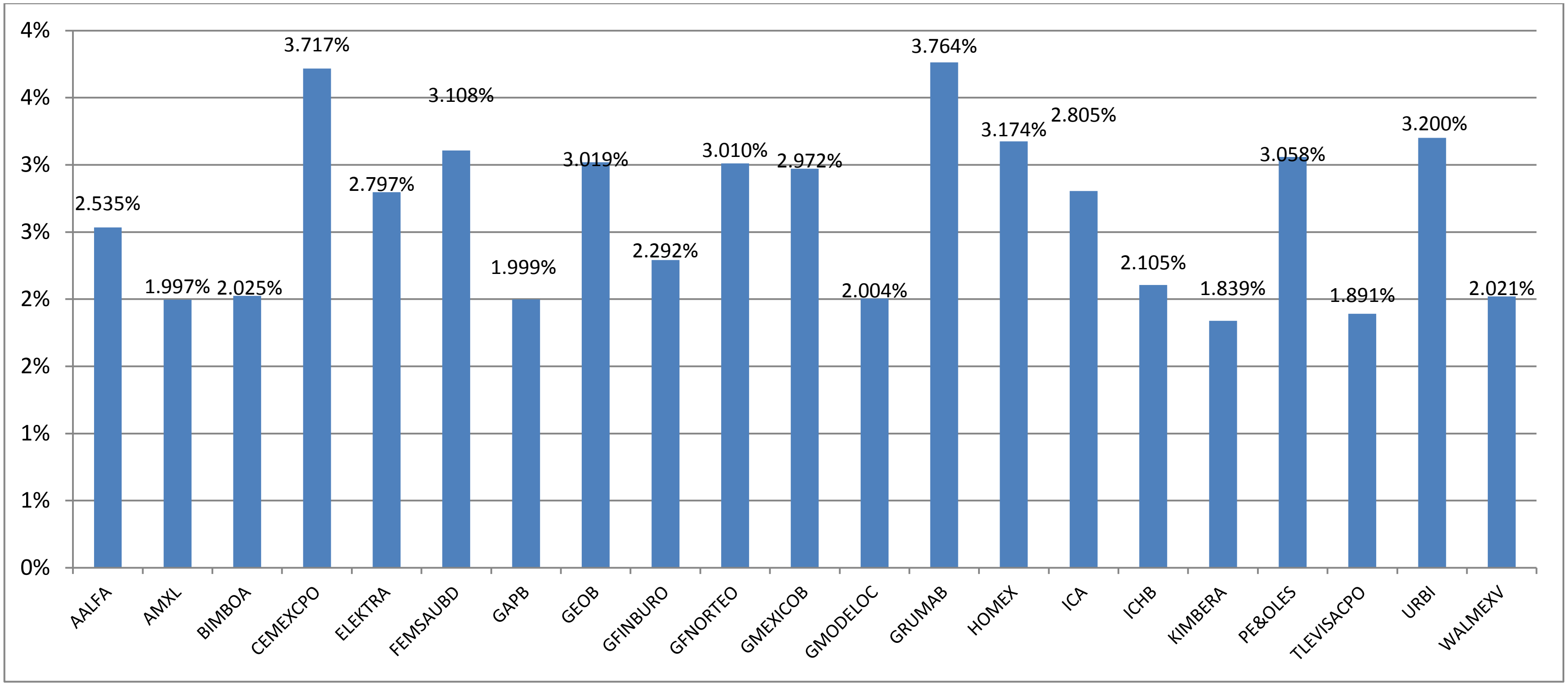
Gráficos de Rendimientos y Riesgo de los activos seleccionados

Figura 4.1 Promedio de los rendimientos históricos diarios por activo



Fuente: Elaboración Propia con Microsoft Excel basada en http://bit.ly/Mux7Vo

Figura 4.2 Riesgo por activo



Fuente: Elaboración Propia con Microsoft Excel basada en http://bit.ly/Mux7Vo

Anexo 4

Tabla 4.5: Matriz de covarianza

Activo i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
1	0.000642	0.000212	0.000210	0.000386	0.000199	0.000206	0.000135	0.000322	0.000117	0.000311	0.000321	0.000171	0.000196	0.000309	0.000329	0.000199	0.000169	0.000287	0.000187	0.000309	0.000165
2	0.000212	0.000398	0.000156	0.000349	0.000136	0.000199	0.000141	0.000295	0.000098	0.000280	0.000286	0.000151	0.000193	0.000310	0.000287	0.000149	0.000131	0.000234	0.000196	0.000266	0.000160
3	0.000210	0.000156	0.000410	0.000285	0.000211	0.000157	0.000123	0.000222	0.000151	0.000219	0.000211	0.000128	0.000139	0.000233	0.000225	0.000154	0.000142	0.000229	0.000146	0.000241	0.000141
4	0.000386	0.000349	0.000285	0.001381	0.000298	0.000368	0.000246	0.000585	0.000248	0.000543	0.000522	0.000234	0.000342	0.000597	0.000573	0.000322	0.000229	0.000417	0.000323	0.000549	0.000229
5	0.000199	0.000136	0.000211	0.000298	0.000782	0.000120	0.000098	0.000226	0.000182	0.000189	0.000204	0.000107	0.000151	0.000263	0.000230	0.000156	0.000118	0.000234	0.000146	0.000253	0.000128
6	0.000206	0.000199	0.000157	0.000368	0.000120	0.000965	0.000132	0.000233	0.000102	0.000250	0.000238	0.000160	0.000104	0.000253	0.000270	0.000159	0.000153	0.000233	0.000181	0.000243	0.000126
7	0.000135	0.000141	0.000123	0.000246	0.000098	0.000132	0.000399	0.000178	0.000068	0.000189	0.000174	0.000095	0.000028	0.000201	0.000179	0.000101	0.000115	0.000171	0.000127	0.000205	0.000097
8	0.000322	0.000295	0.000222	0.000585	0.000226	0.000233	0.000178	0.000911	0.000177	0.000481	0.000473	0.000210	0.000266	0.000553	0.000488	0.000278	0.000210	0.000368	0.000240	0.000547	0.000221
9	0.000117	0.000098	0.000151	0.000248	0.000182	0.000102	0.000068	0.000177	0.000525	0.000177	0.000178	0.000076	0.000065	0.000202	0.000173	0.000128	0.000104	0.000182	0.000109	0.000165	0.000099
10	0.000311	0.000280	0.000219	0.000543	0.000189	0.000250	0.000189	0.000481	0.000177	0.000905	0.000432	0.000188	0.000266	0.000428	0.000462	0.000259	0.000198	0.000347	0.000234	0.000426	0.000203
11	0.000321	0.000286	0.000211	0.000522	0.000204	0.000238	0.000174	0.000473	0.000178	0.000432	0.000882	0.000208	0.000212	0.000445	0.000423	0.000273	0.000188	0.000422	0.000236	0.000392	0.000234
12	0.000171	0.000151	0.000128	0.000234	0.000107	0.000160	0.000095	0.000210	0.000076	0.000188	0.000208	0.000401	0.000152	0.000203	0.000192	0.000121	0.000110	0.000157	0.000113	0.000200	0.000140
13	0.000196	0.000193	0.000139	0.000342	0.000151	0.000104	0.000028	0.000266	0.000065	0.000266	0.000212	0.000152	0.001416	0.000198	0.000258	0.000163	0.000004	0.000082	0.000129	0.000217	0.000105
14	0.000309	0.000310	0.000233	0.000597	0.000263	0.000253	0.000201	0.000553	0.000202	0.000428	0.000445	0.000203	0.000198	0.001006	0.000488	0.000244	0.000215	0.000405	0.000254	0.000532	0.000219
15	0.000329	0.000287	0.000225	0.000573	0.000230	0.000270	0.000179	0.000488	0.000173	0.000462	0.000423	0.000192	0.000258	0.000488	0.000786	0.000264	0.000188	0.000355	0.000240	0.000424	0.000186
16	0.000199	0.000149	0.000154	0.000322	0.000156	0.000159	0.000101	0.000278	0.000128	0.000259	0.000273	0.000121	0.000163	0.000244	0.000264	0.000443	0.000122	0.000231	0.000143	0.000271	0.000139
17	0.000169	0.000131	0.000142	0.000229	0.000118	0.000153	0.000115	0.000210	0.000104	0.000198	0.000188	0.000110	0.000004	0.000215	0.000188	0.000122	0.000338	0.000178	0.000129	0.000216	0.000101
18	0.000287	0.000234	0.000229	0.000417	0.000234	0.000233	0.000171	0.000368	0.000182	0.000347	0.000422	0.000157	0.000082	0.000405	0.000355	0.000231	0.000178	0.000934	0.000192	0.000353	0.000200
19	0.000187	0.000196	0.000146	0.000323	0.000146	0.000181	0.000127	0.000240	0.000109	0.000234	0.000236	0.000113	0.000129	0.000254	0.000240	0.000143	0.000129	0.000192	0.000357	0.000208	0.000147
20	0.000309	0.000266	0.000241	0.000549	0.000253	0.000243	0.000205	0.000547	0.000165	0.000426	0.000392	0.000200	0.000217	0.000532	0.000424	0.000271	0.000216	0.000353	0.000208	0.001023	0.000199
21	0.000165	0.000160	0.000141	0.000229	0.000128	0.000126	0.000097	0.000221	0.000099	0.000203	0.000234	0.000140	0.000105	0.000219	0.000186	0.000139	0.000101	0.000200	0.000147	0.000199	0.000408

Fuente: Elaboración propia utilizando Microsoft Excel.

Anexo 5

Parámetros de las distribuciones ajustadas a los rendimientos de los activos

Tabla 4.14 Parámetros de las distribuciones.

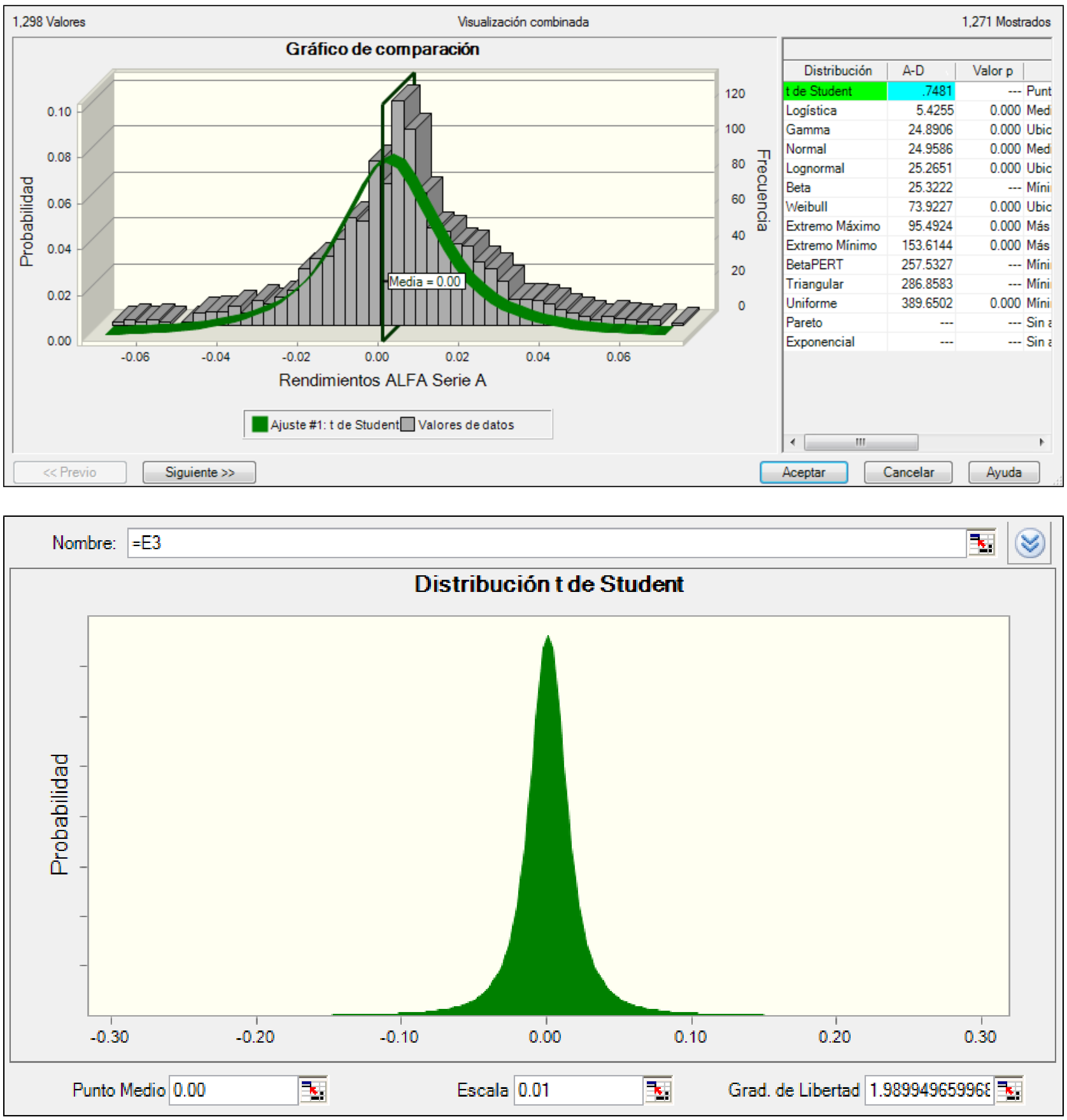
Activo	Distribución	Parámetros					
AALFA	T Student	Punto Medio	0.00095	Escala	0.013348	Grados. de Libertad	1.98995
AMXL	T Student	Punto Medio	0	Escala	0.009621	Grados. de Libertad	1.67449
BIMBOA	Logística	Media	0.000459	Escala	0.010486		
CEMEXCPO	T Student	Punto Medio	-0.000719	Escala	0.020445	Grados. de Libertad	1.99689
ELEKTRA	T Student	Punto Medio	0.000604	Escala	0.014456	Grados. de Libertad	1.68189
FEMSAUBD	T Student	Punto Medio	0.000898	Escala	0.010904	Grados. de Libertad	1.81966
GAPB	T Student	Punto Medio	0.000083	Escala	0.015555	Grados. de Libertad	5.07343
GEOB	Logística	Media	-0.000444	Escala	0.015223		
GFINBURO	T Student	Punto Medio	0.000683	Escala	0.016534	Grados. de Libertad	4.17221
GFNORTEO	T Student	Punto Medio	0.000288	Escala	0.01738	Grados. de Libertad	3.00045
GMEXICOB	T Student	Punto Medio	0.000241	Escala	0.015733	Grados. de Libertad	1.95743
GMODELOC	T Student	Punto Medio	0.000652	Escala	0.010879	Grados. de Libertad	1.81966
GRUMAB	T Student	Punto Medio	-0.000038	Escala	0.015326	Grados. de Libertad	1.87539
HOMEX	T Student	Punto Medio	-0.000957	Escala	0.018523	Grados. de Libertad	3.03326
ICA	T Student	Punto Medio	-0.000708	Escala	0.016164	Grados. de Libertad	2.99452
ICHB	T Student	Punto Medio	0.000466	Escala	0.016475	Grados. de Libertad	5.16552
KIMBERA	Logística	Media	0.000424	Escala	0.009398		
PE&OLES	Logística	Media	0.001032	Escala	0.015311		
TLEVISACPO	T Student	Punto Medio	0.000129	Escala	0.012467	Grados. de Libertad	3.5391
URBI	T Student	Punto Medio	-0.001242	Escala	0.017045	Grados. de Libertad	1.99187
WALMEXV	T Student	Punto Medio	0.000464	Escala	0.012967	Grados. de Libertad	3.40015

Fuente: Elaboración propia utilizando Crystal Ball en Microsoft Excel.

Anexo 6

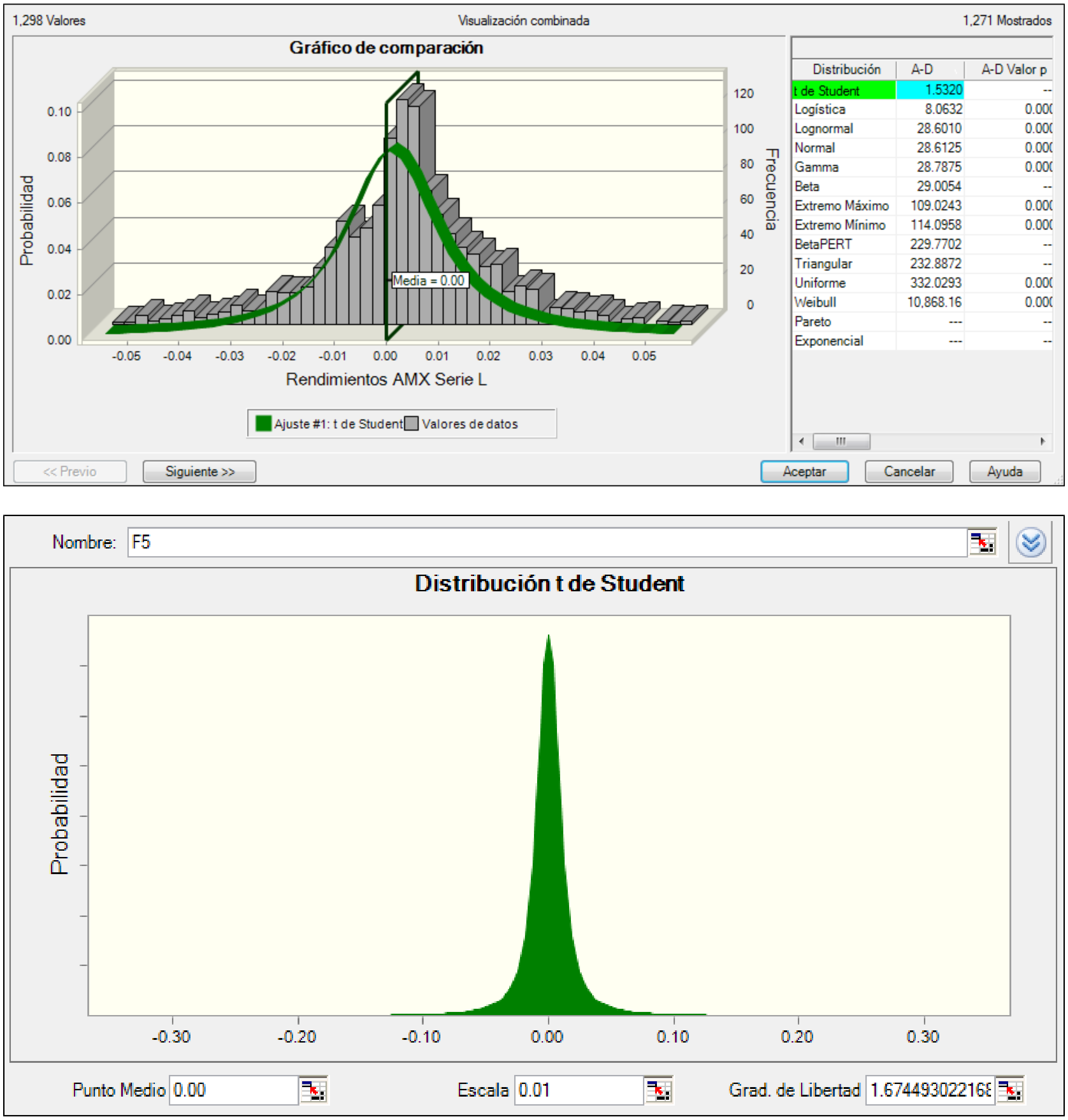
Gráficos de las distribuciones ajustadas a las series históricas de los rendimientos de los activos

Figura 4.14 – Grafica de rendimientos de ALFA Serie A



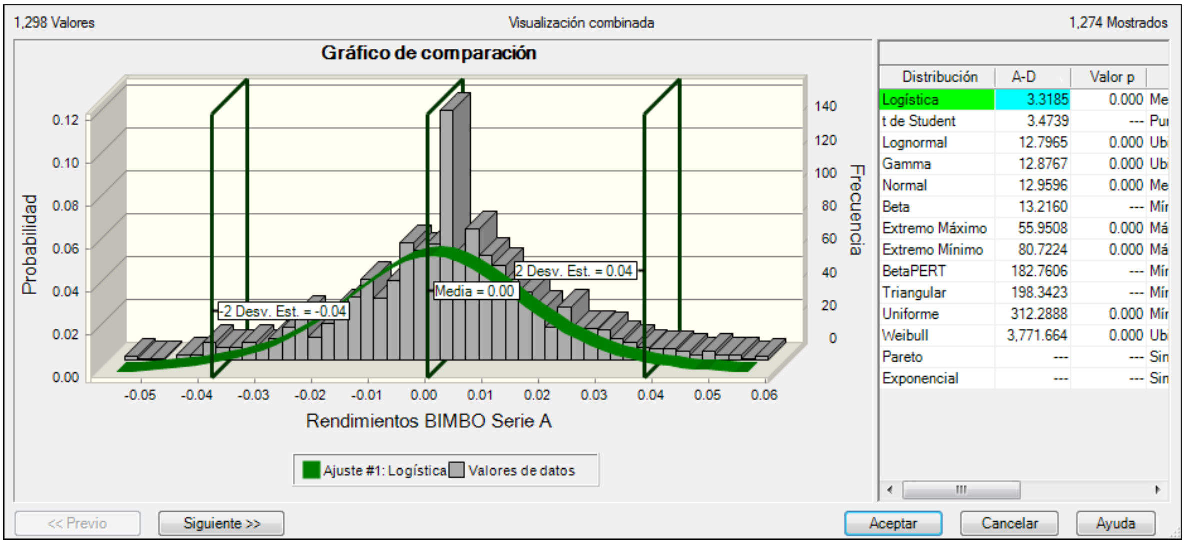
Fuente: Elaboración Propia basada en http://bit.ly/Mux7Vocon software Crystal Ball

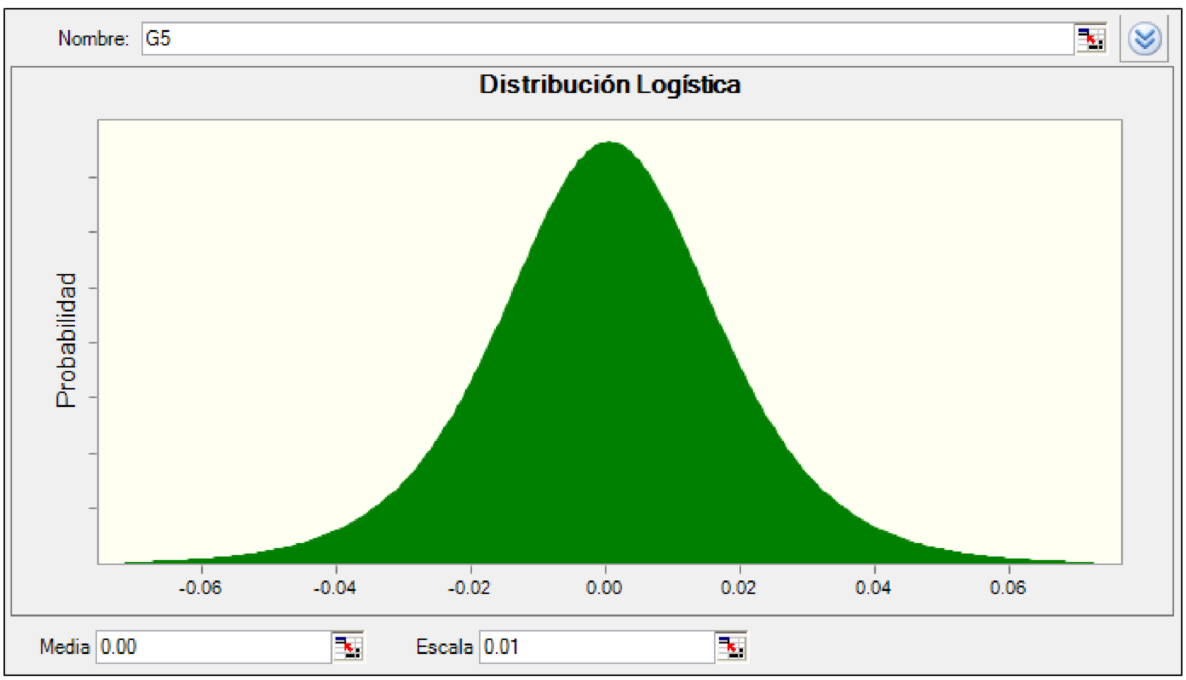
Figura 4.15 – Grafica de rendimientos de AMX Serie L



Fuente: Elaboración Propia basada en http://bit.ly/Mux7Vocon software Crystal Ball

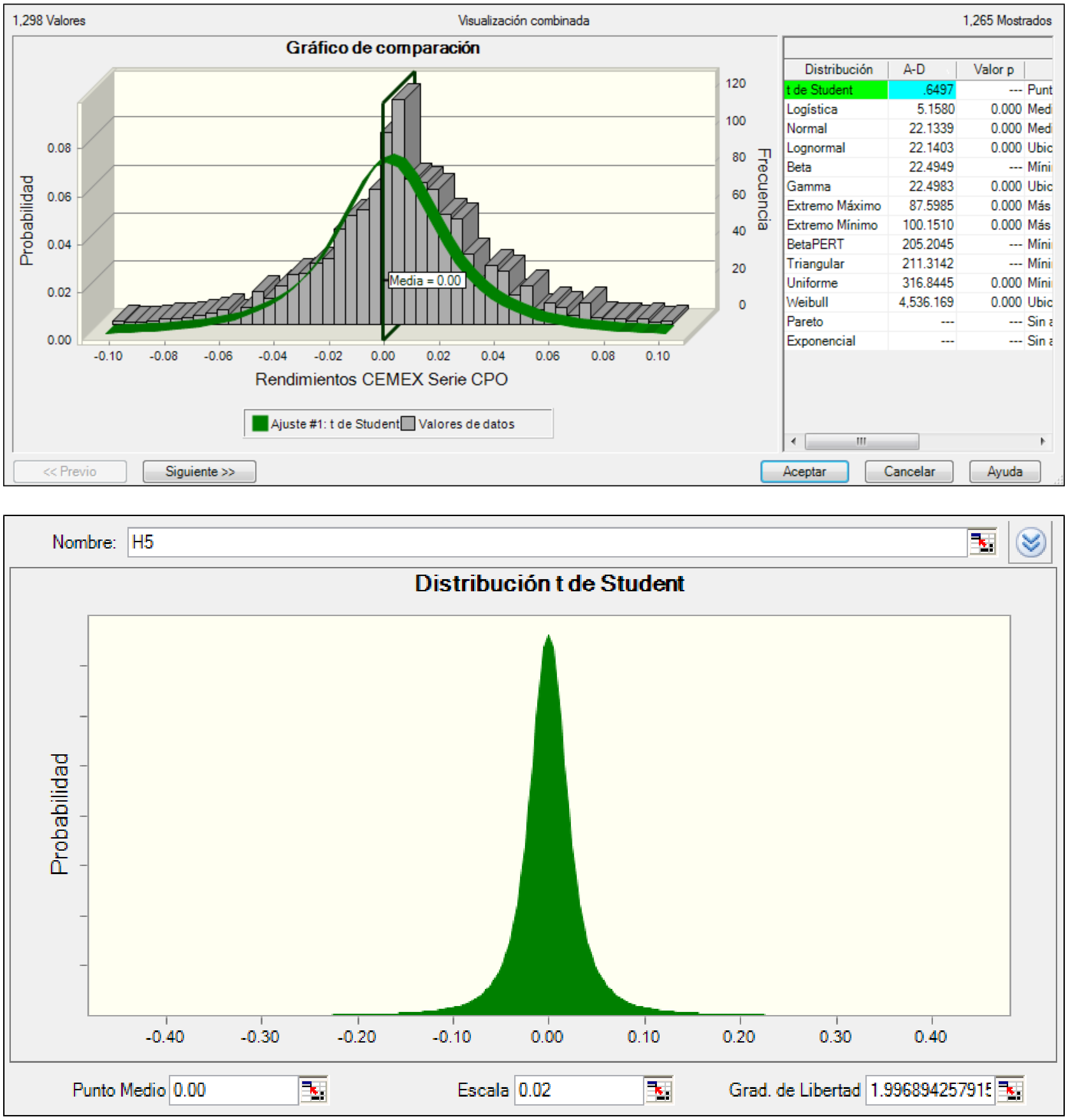
Figura 4.16 – Grafica de rendimientos de BIMBO Serie A





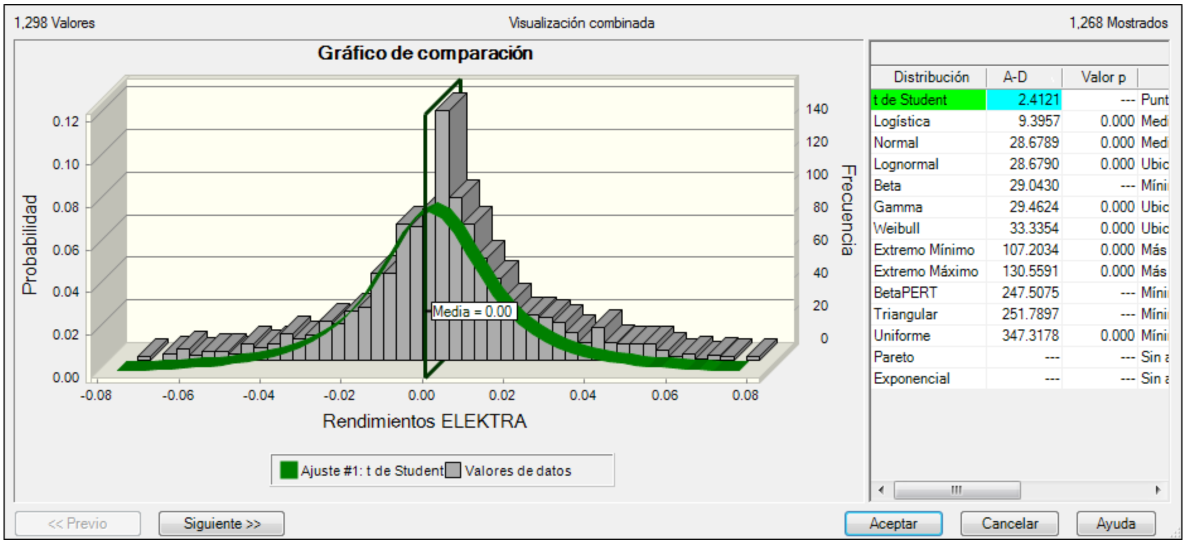
Fuente: Elaboración Propia basada en http://bit.ly/Mux7Vocon software Crystal Ball

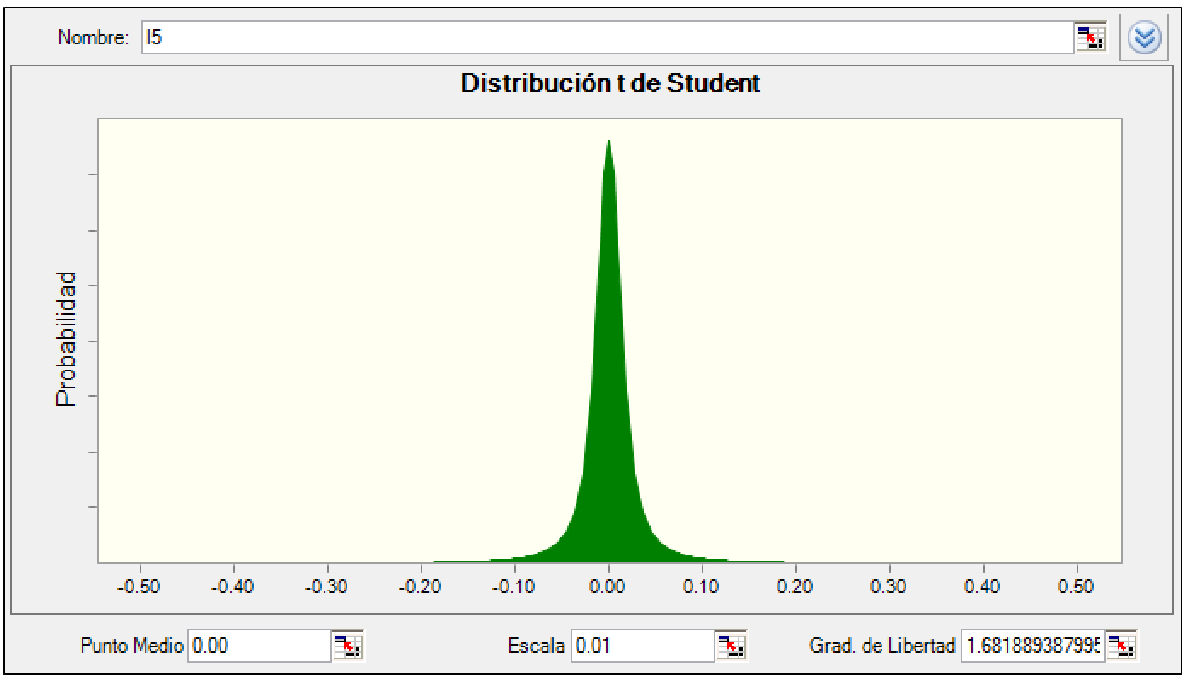
Figura 4.17 – Grafica de rendimientos de CEMEX Serie CPO



Fuente: Elaboración Propia basada en http://bit.ly/Mux7Vocon software Crystal Ball

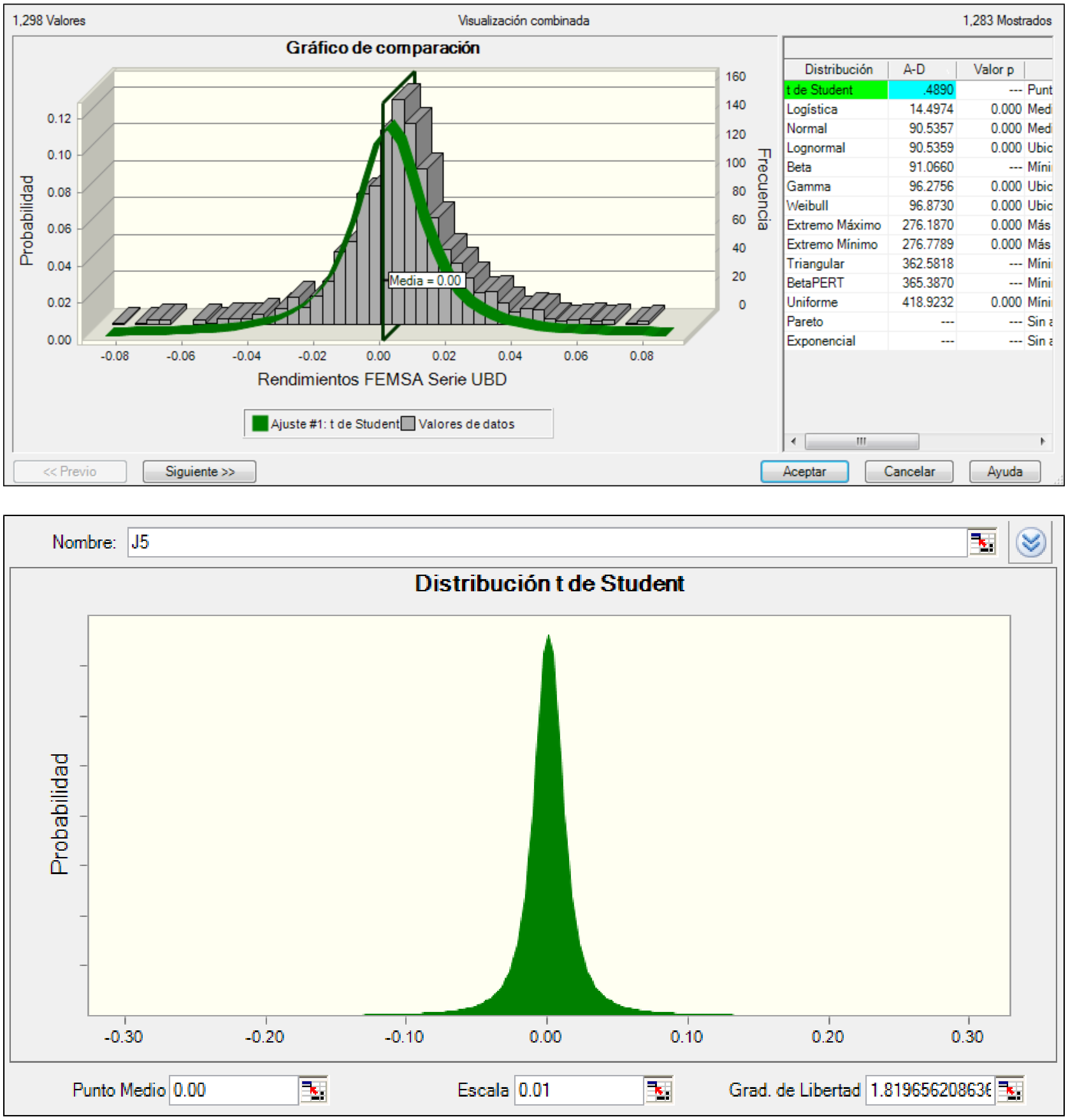
Figura 4.18 – Grafica de rendimientos de ELEKTRA





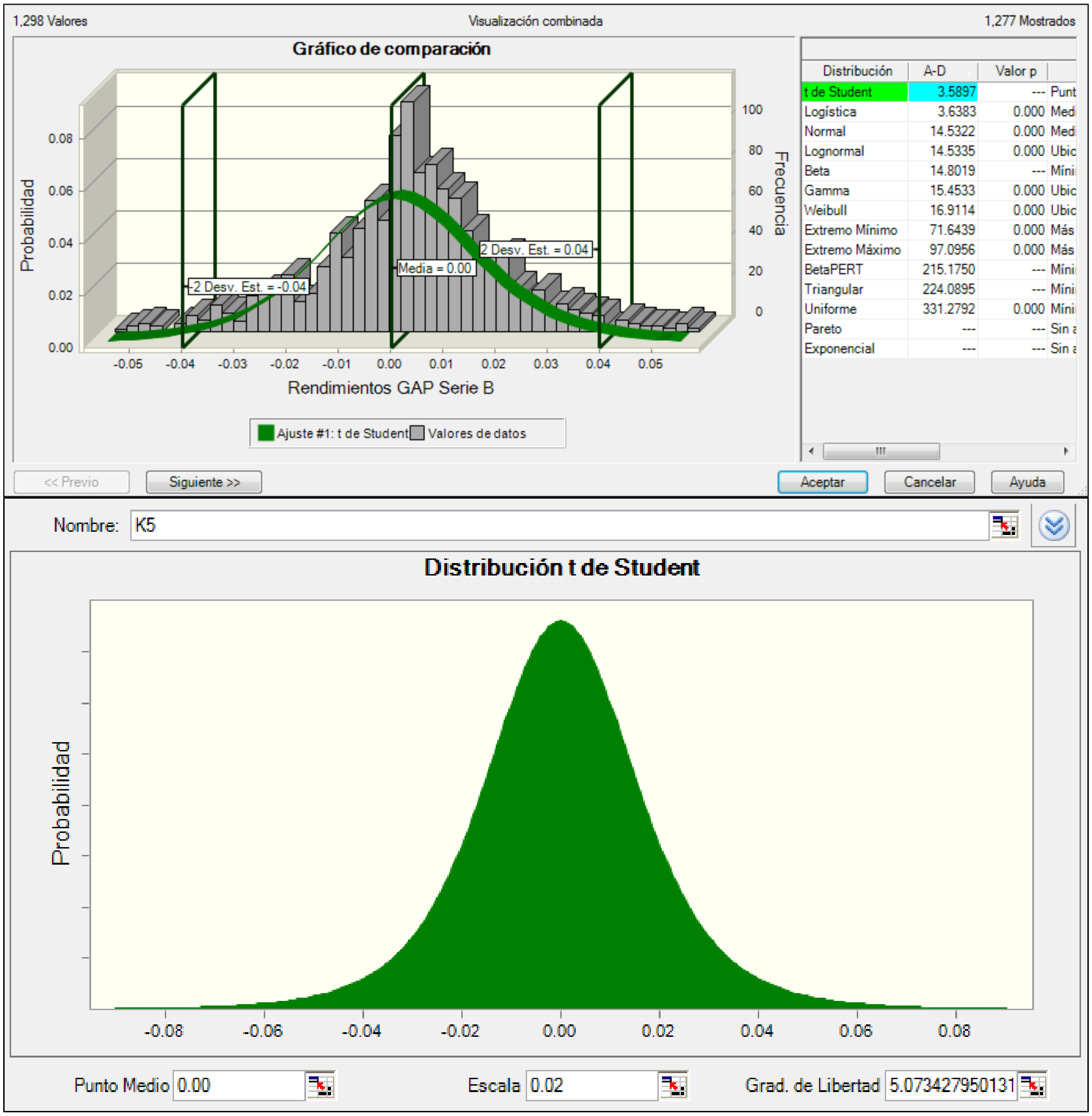
Fuente: Elaboración Propia basada en http://bit.ly/Mux7Vocon software Crystal Ball

Figura 4.19– Grafica de rendimientos de FEMSA Serie UBD



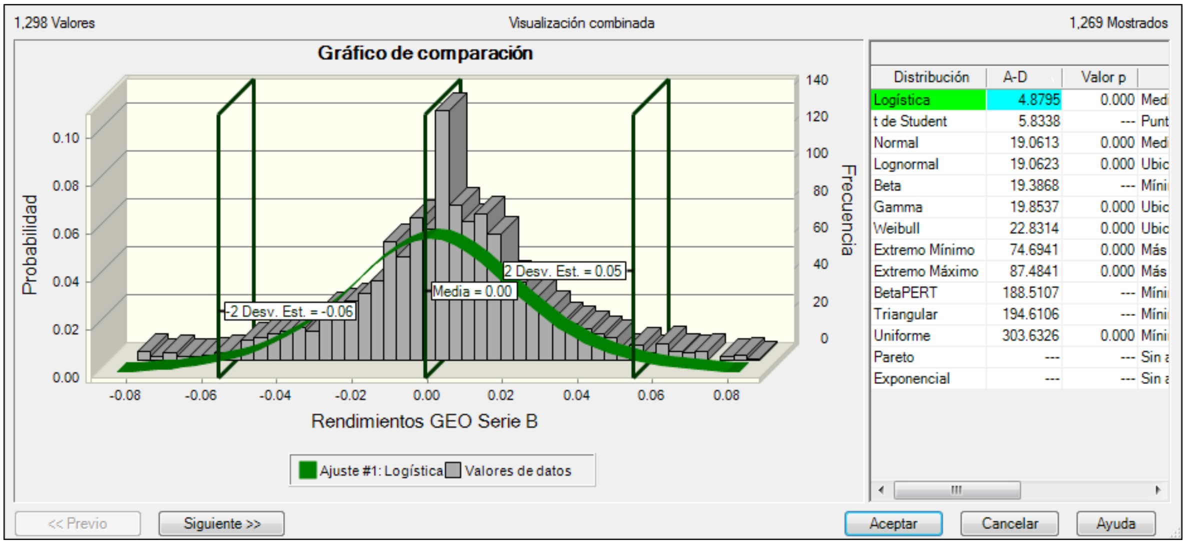
Fuente: Elaboración Propia basada en http://bit.ly/Mux7Vocon software Crystal Ball

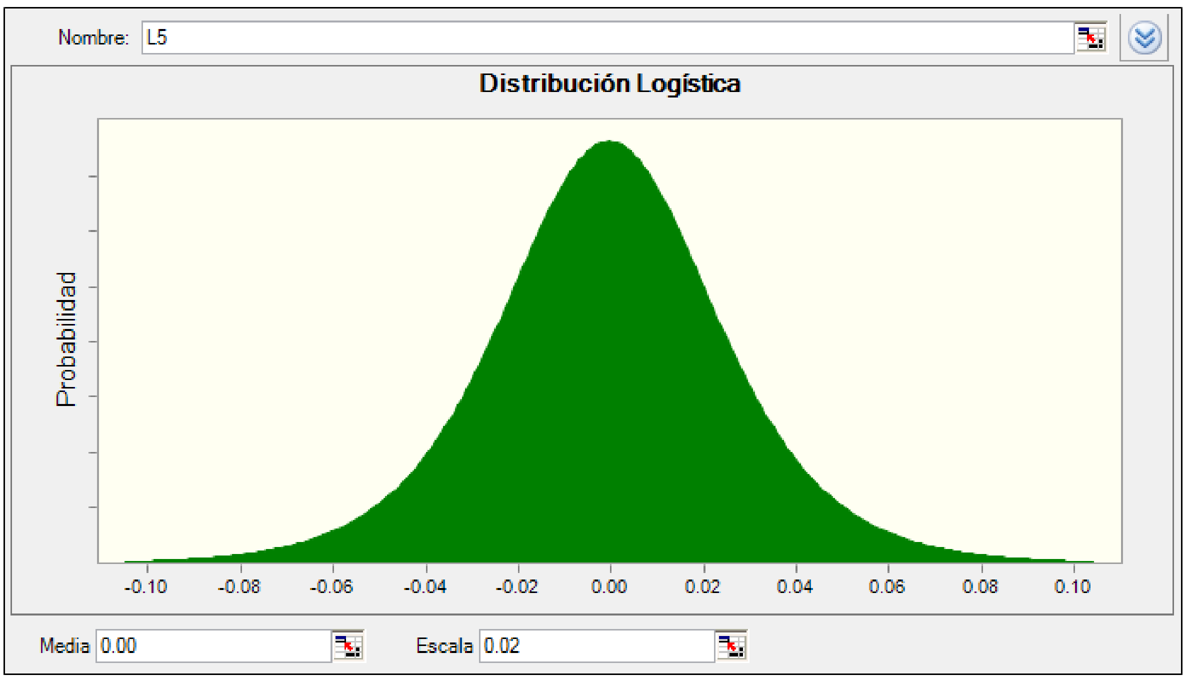
Figura 4.20 – Grafica de rendimientos de GAP Serie B



Fuente: Elaboración Propia basada en http://bit.ly/Mux7Vocon software Crystal Ball

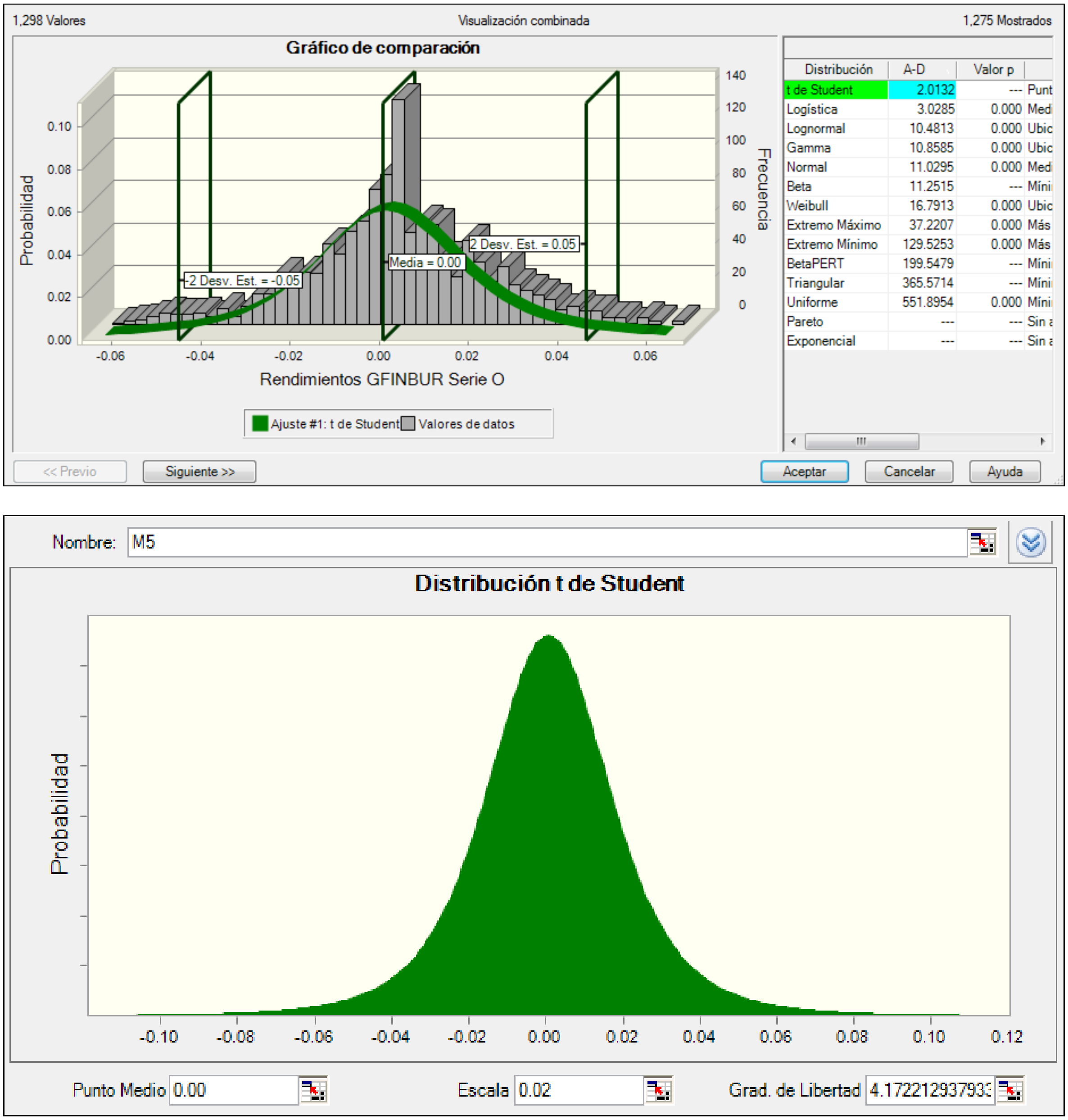
Figura 4.21 – Grafica de rendimientos de GEO Serie B





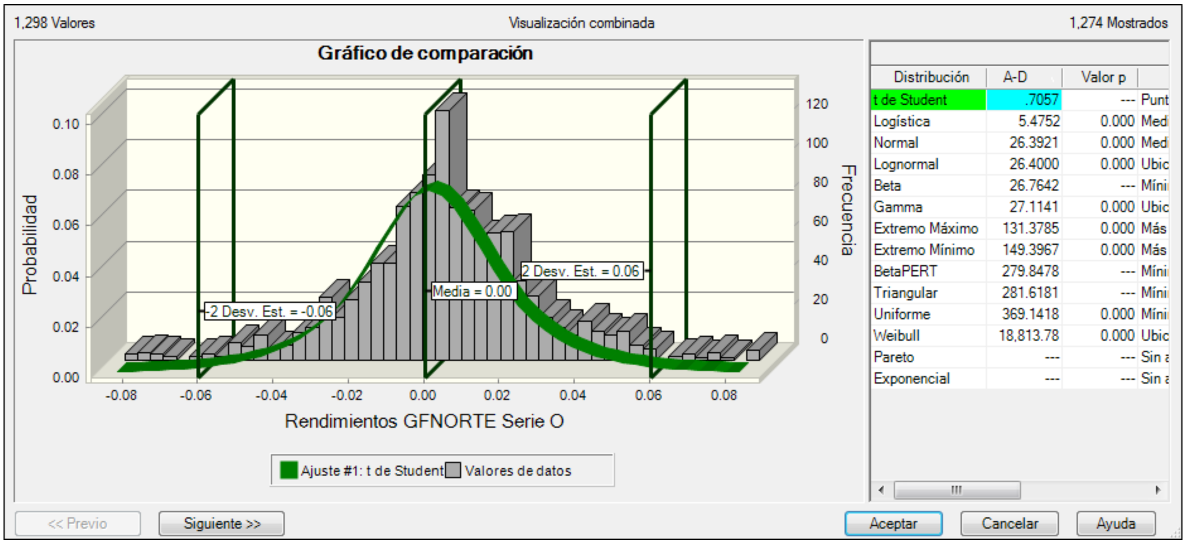
Fuente: Elaboración Propia basada en http://bit.ly/Mux7Vocon software Crystal Ball

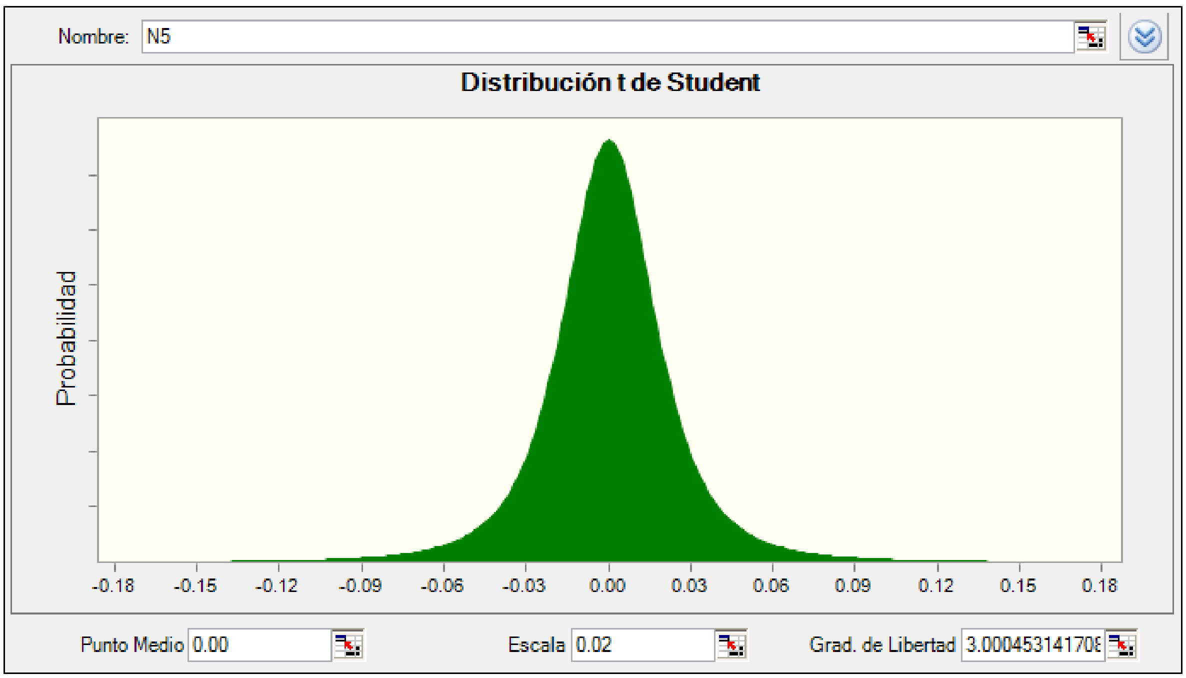
Figura 4.22 – Grafica de rendimientos de GFINBUR Serie O



Fuente: Elaboración Propia basada en http://bit.ly/Mux7Vocon software Crystal Ball

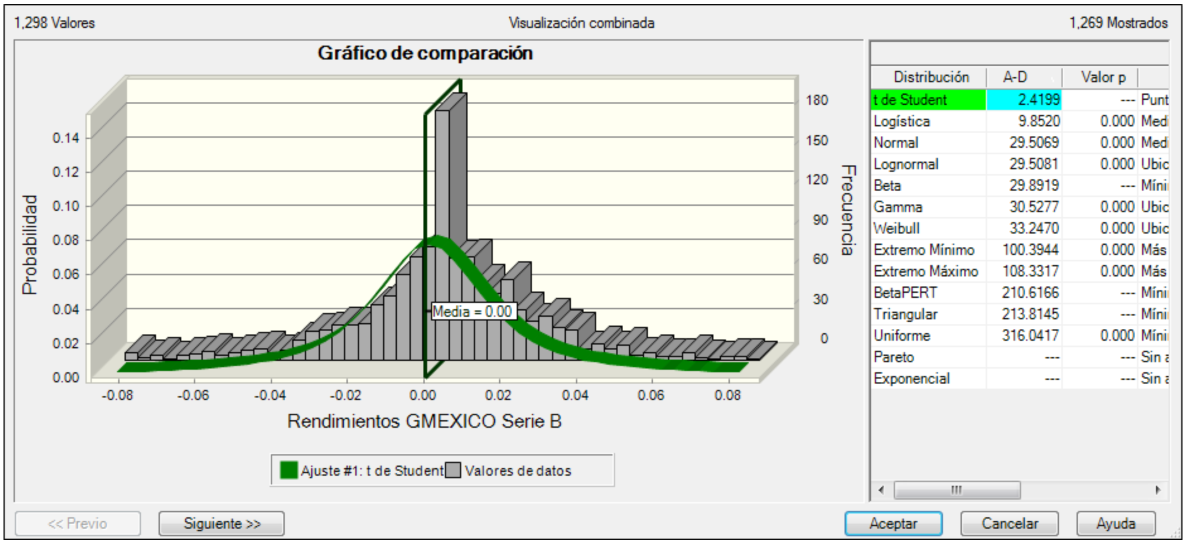
Figura 4.23 – Grafica de rendimientos de GFNORTE Serie O

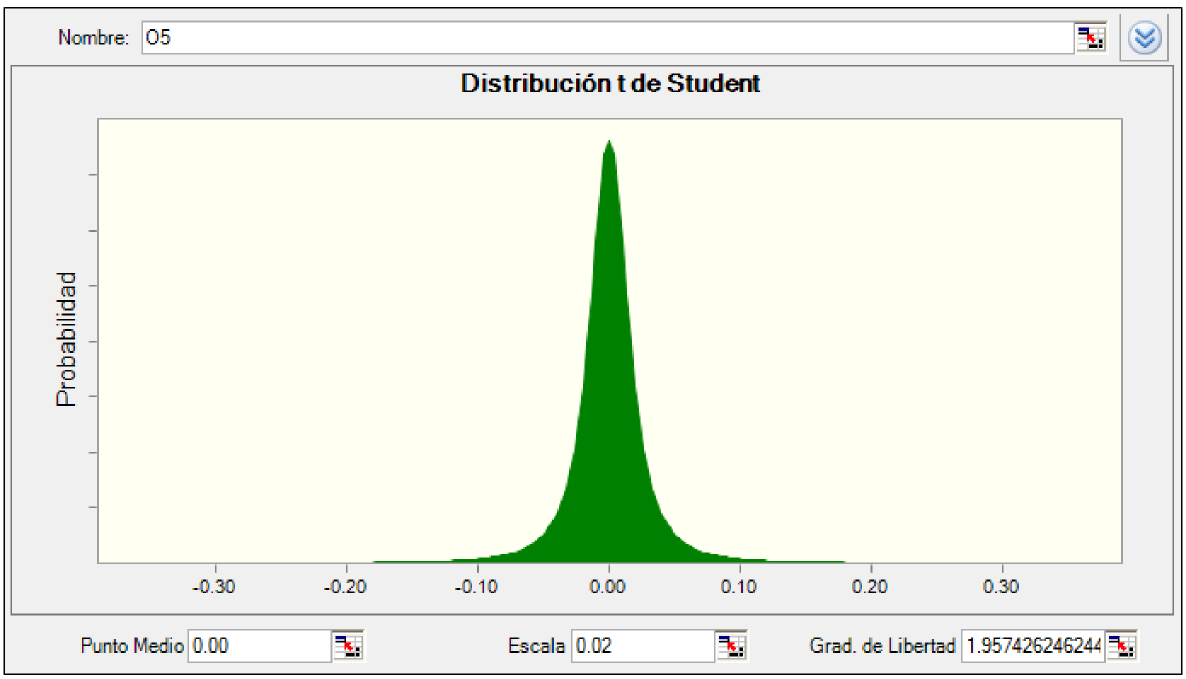




Fuente: Elaboración Propia basada en http://bit.ly/Mux7Vocon software Crystal Ball

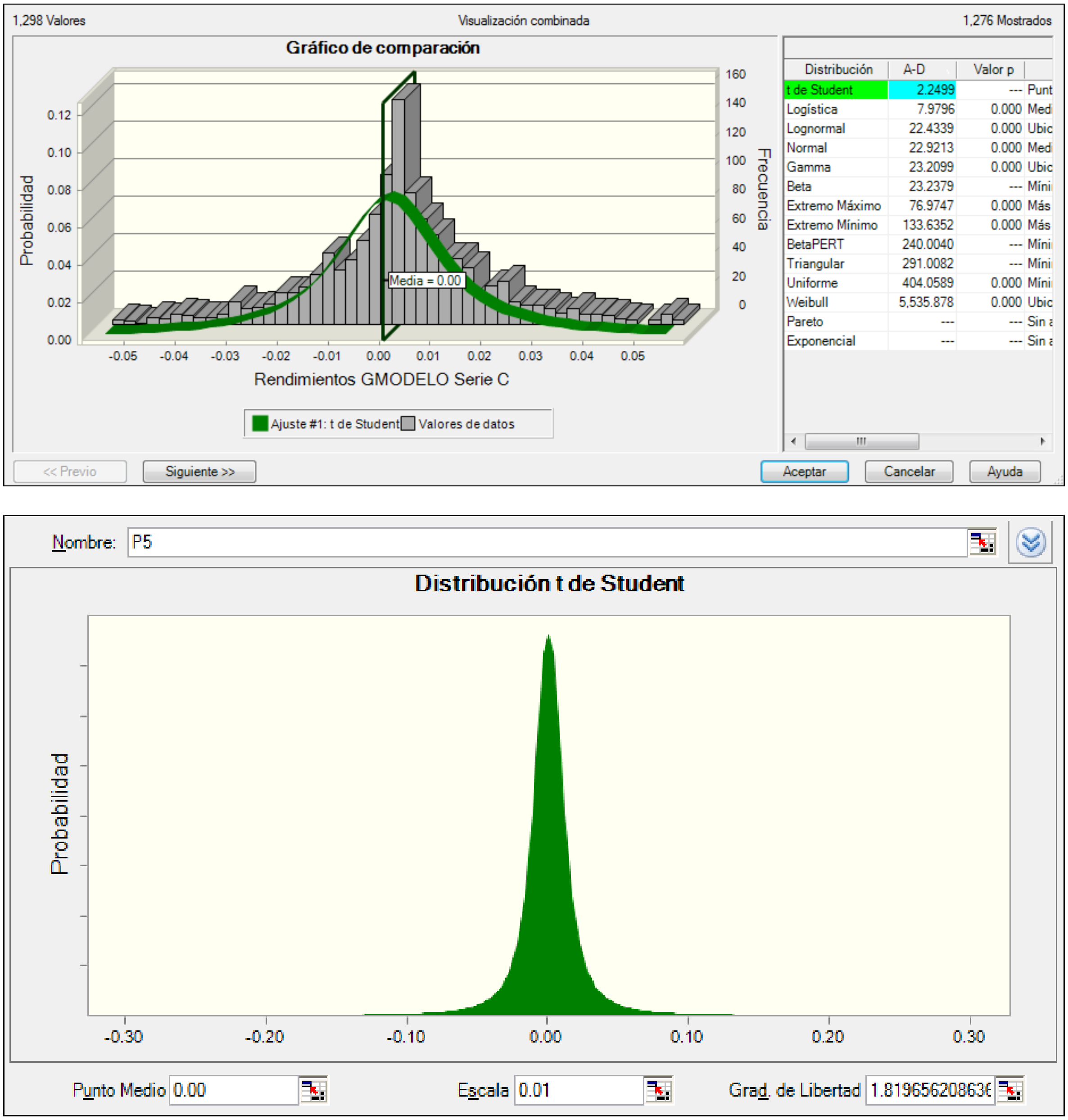
Figura 4.24 – Grafica de rendimientos de GMEXICO Serie B





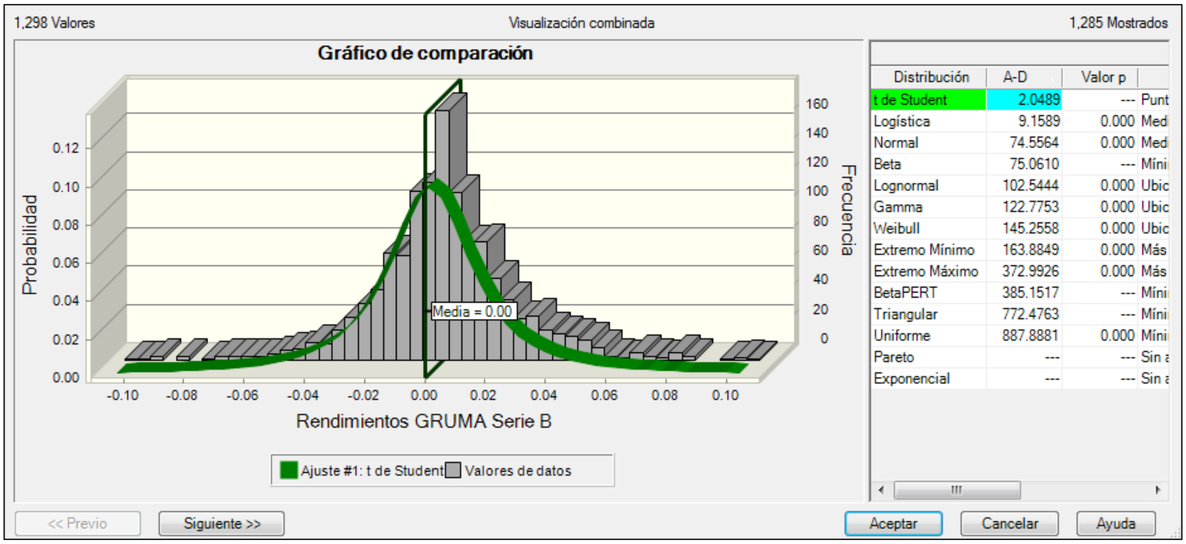
Fuente: Elaboración Propia basada en http://bit.ly/Mux7Vocon software Crystal Ball

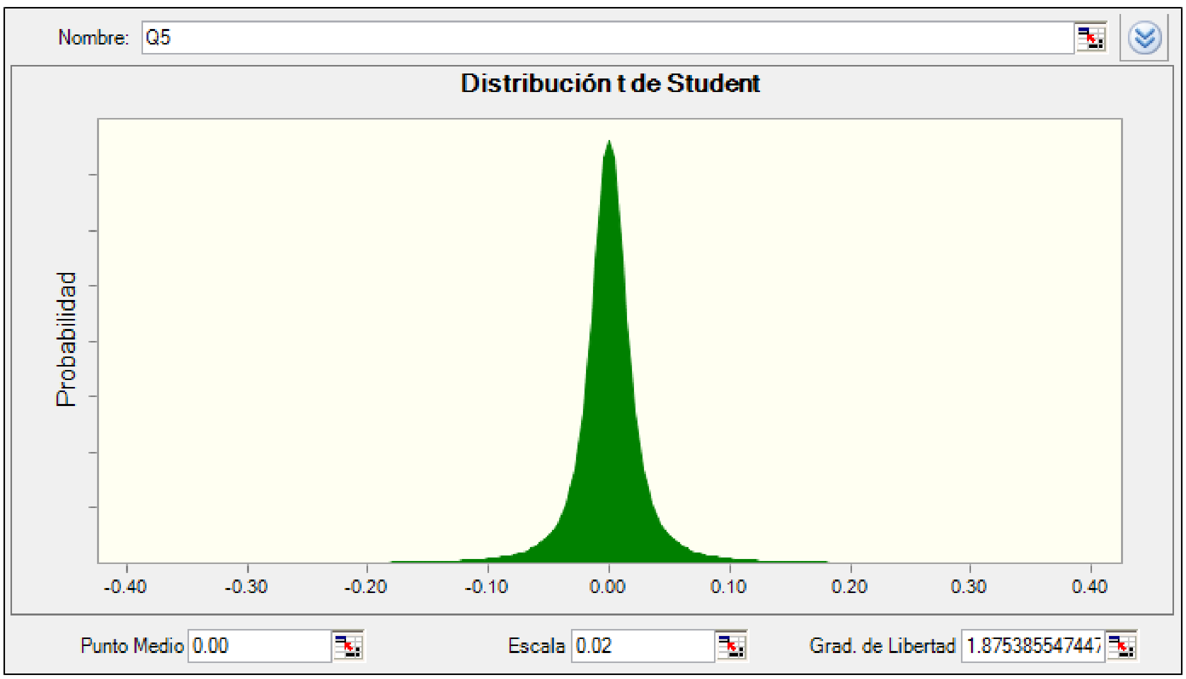
Figura 4.25 – Grafica de rendimientos de GMODELO Serie C



Fuente: Elaboración Propia basada en http://bit.ly/Mux7Vocon software Crystal Ball

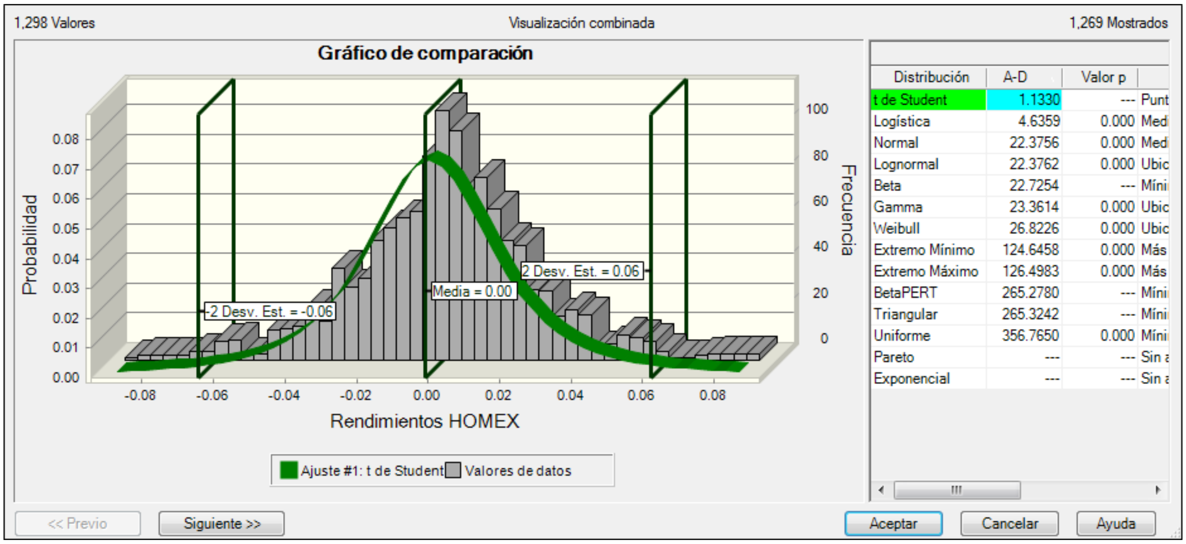
Figura 4.26 – Grafica de rendimientos de GRUMA Serie B

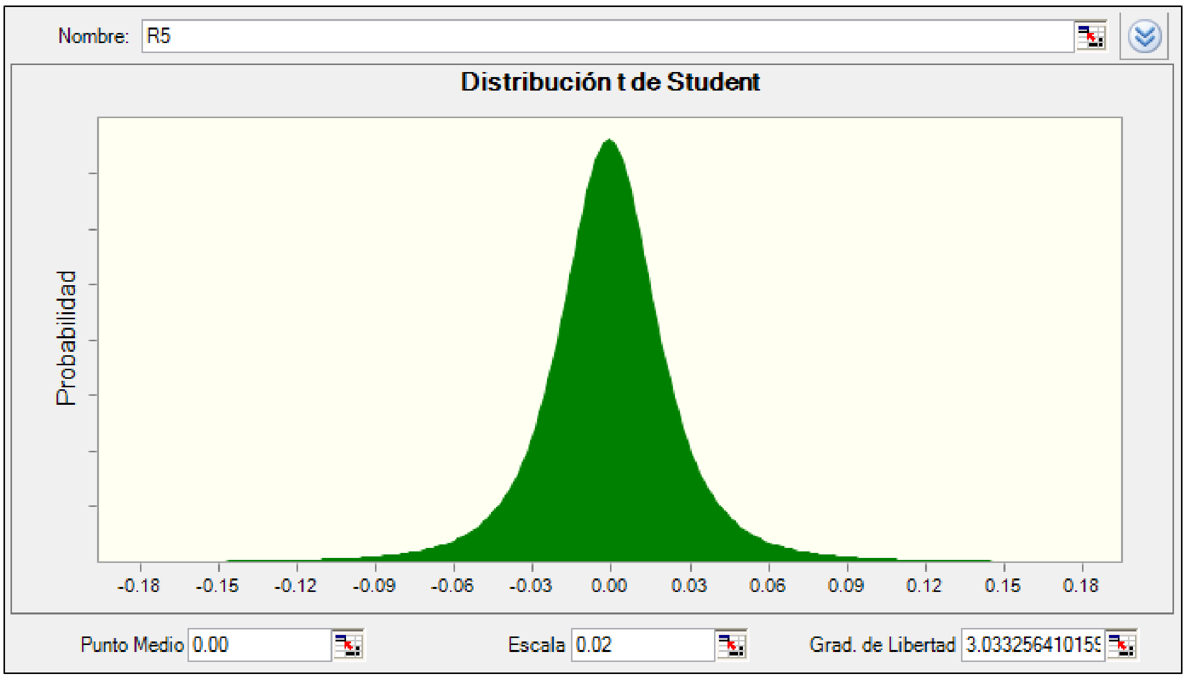




Fuente: Elaboración Propia basada en http://bit.ly/Mux7Vocon software Crystal Ball

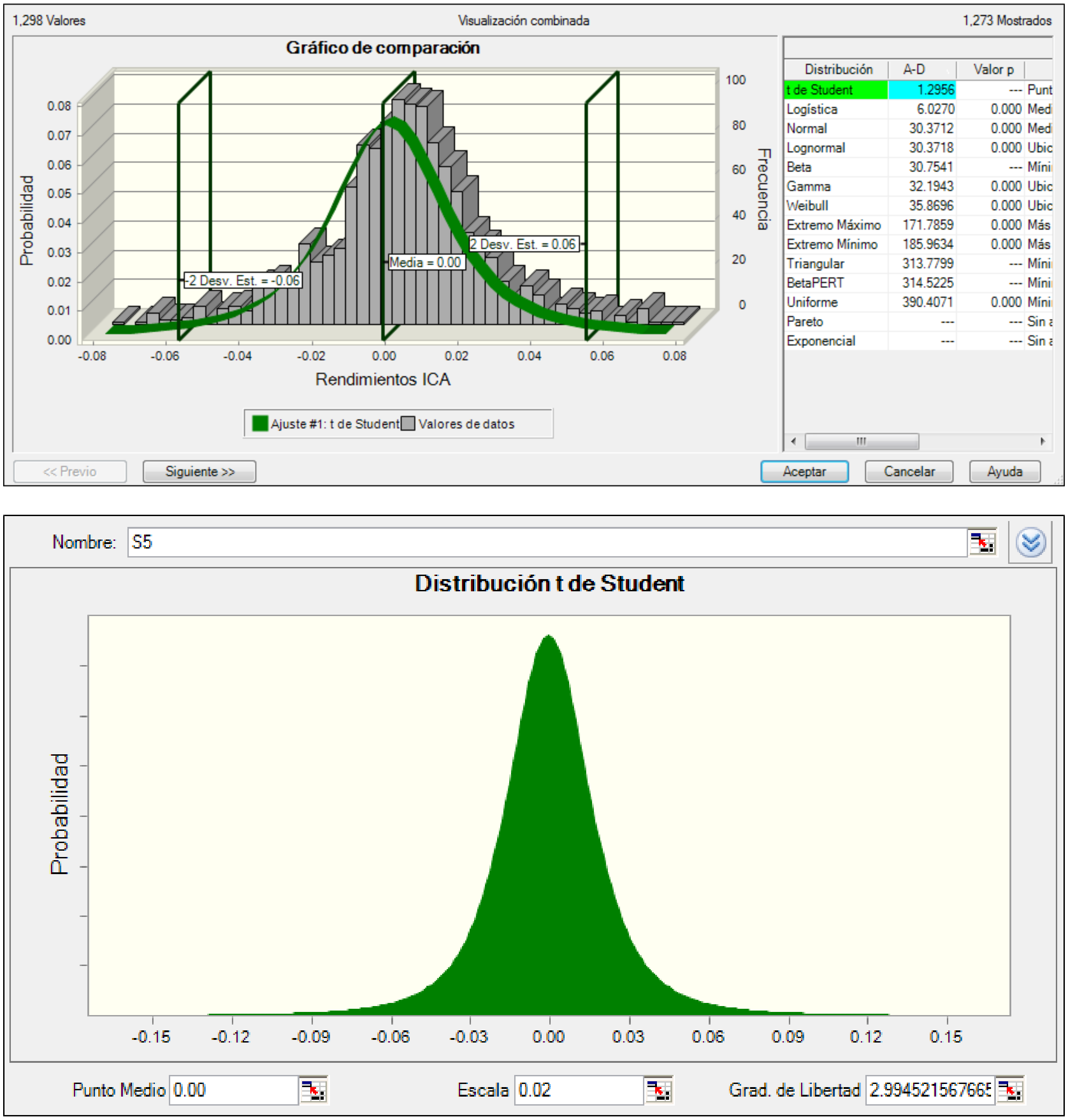
Figura 4.27 – Grafica de rendimientos de HOMEX





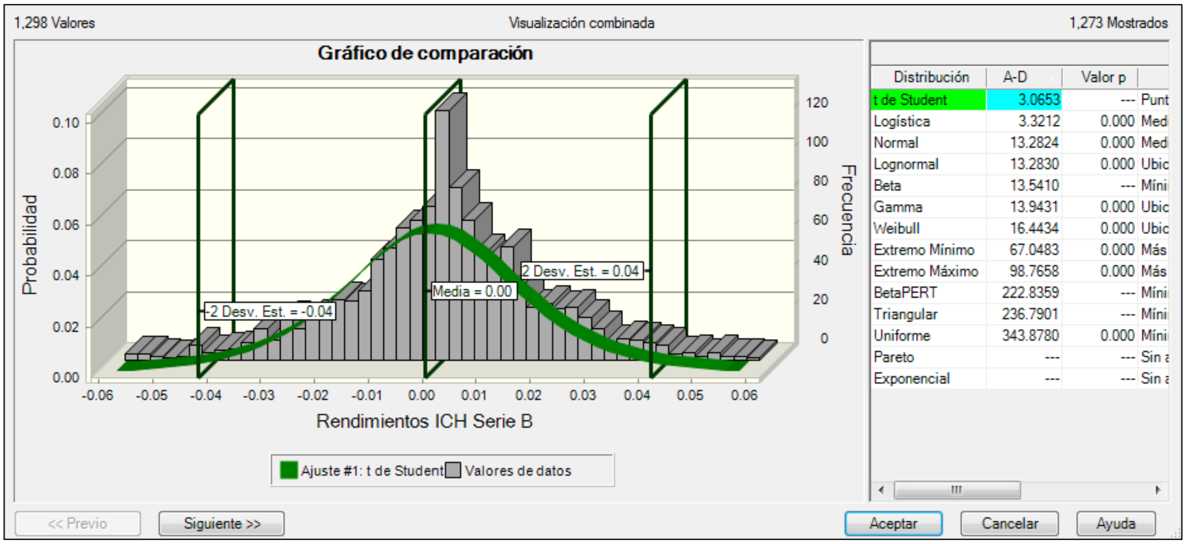
Fuente: Elaboración Propia basada en http://bit.ly/Mux7Vocon software Crystal Ball

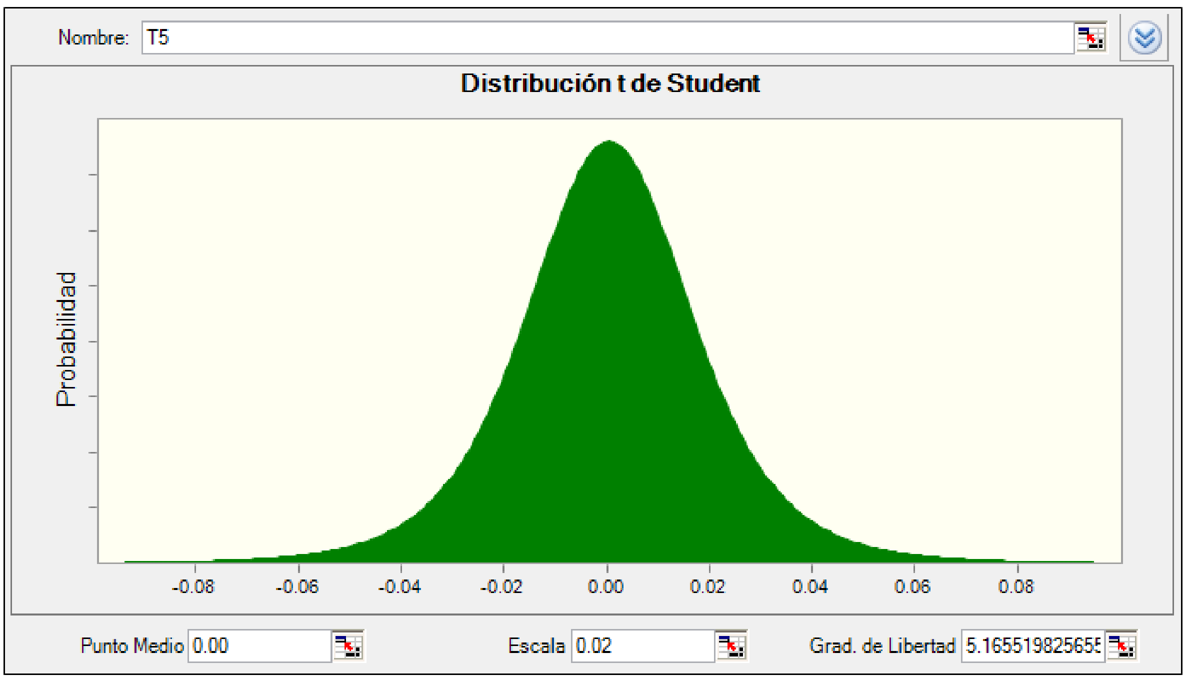
Figura 4.28 – Grafica de rendimientos de ICA



Fuente: Elaboración Propia basada en http://bit.ly/Mux7Vocon software Crystal Ball

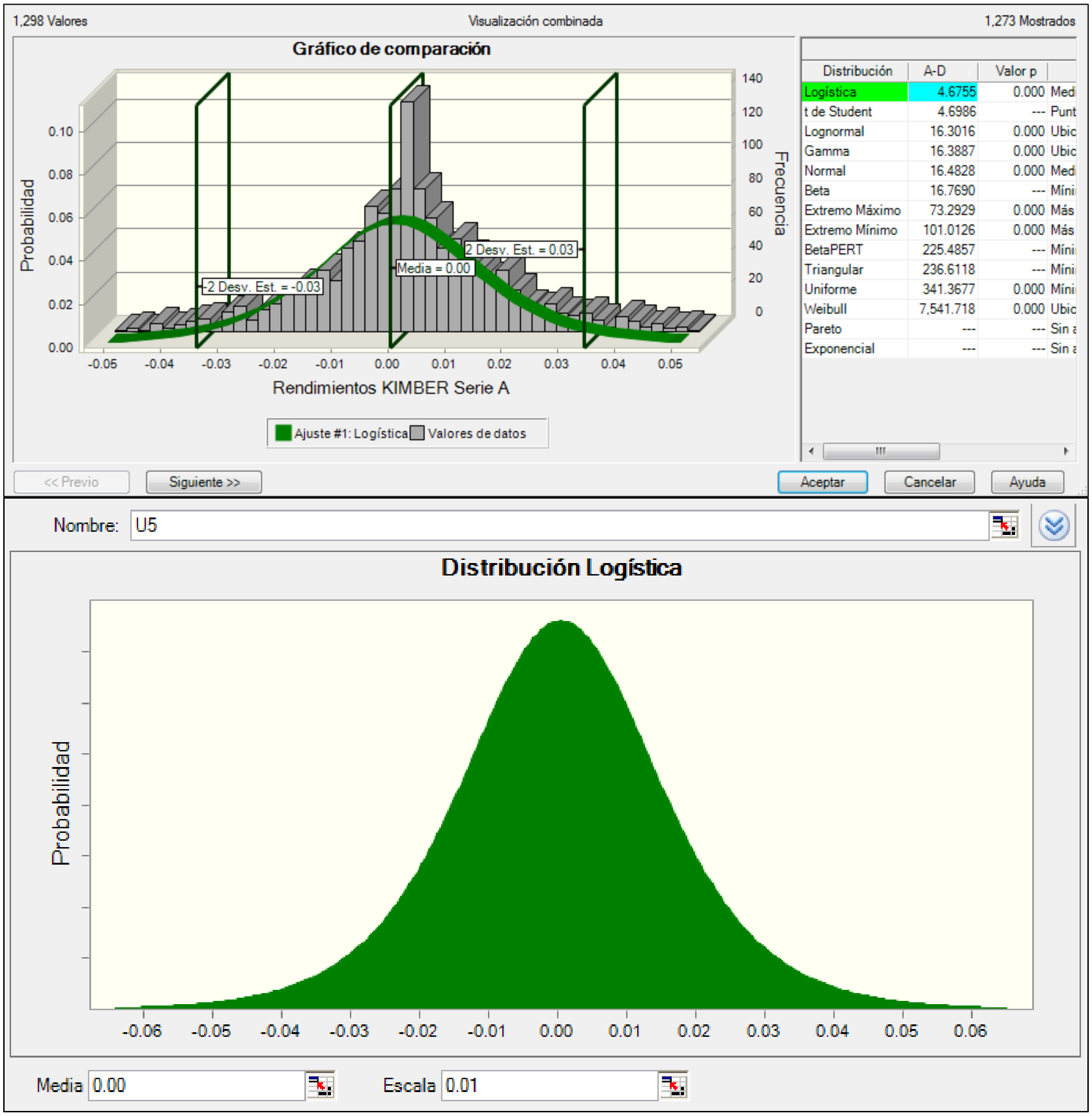
Figura 4.29 – Grafica de rendimientos de ICH Serie B





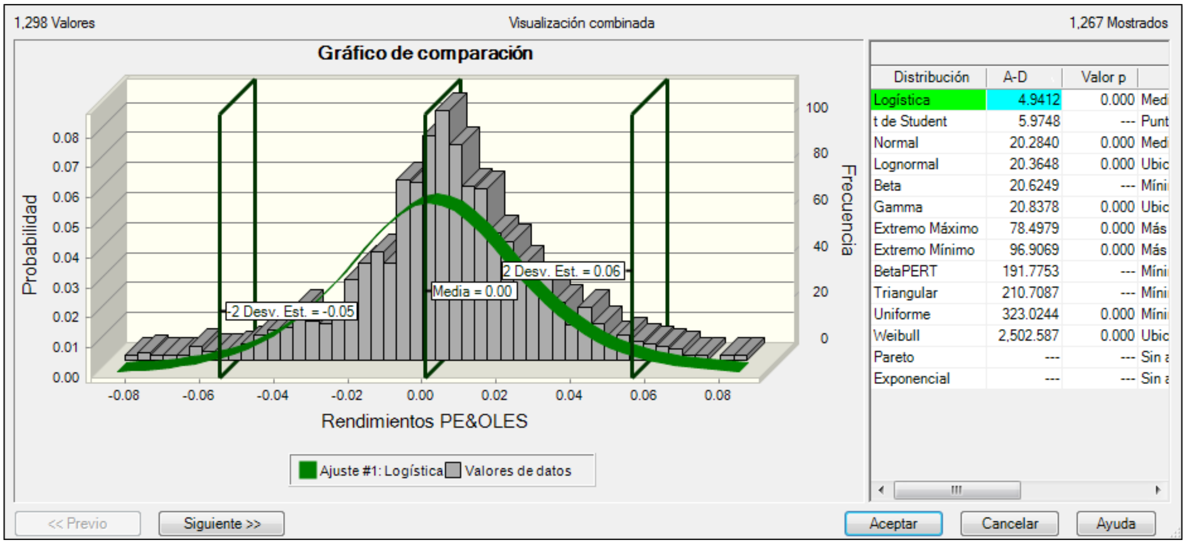
Fuente: Elaboración Propia basada en http://bit.ly/Mux7Vocon software Crystal Ball

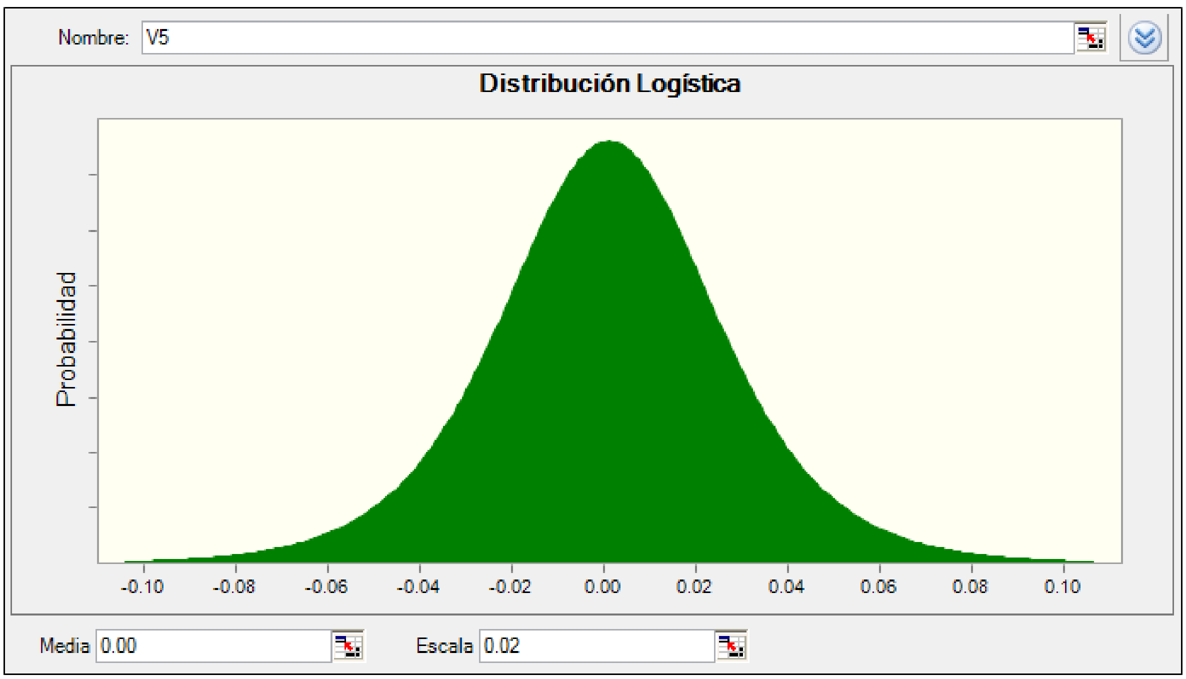
Figura 4.30 – Grafica de rendimientos de KIMBER Serie A



Fuente: Elaboración Propia basada en http://bit.ly/Mux7Vocon software Crystal Ball

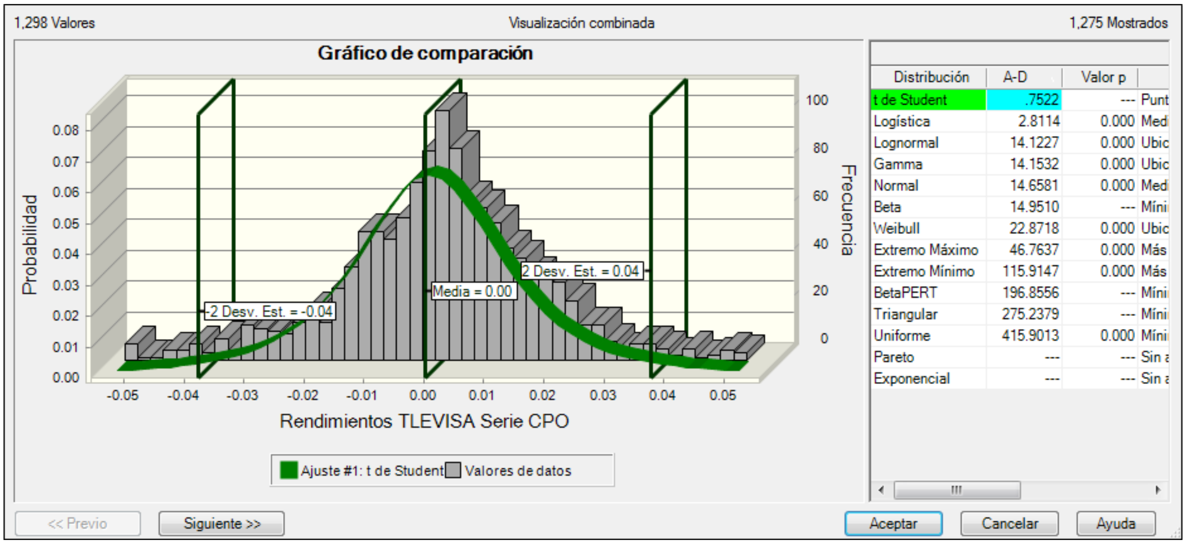
Figura 4.31 – Grafica de rendimientos de PE&OLES

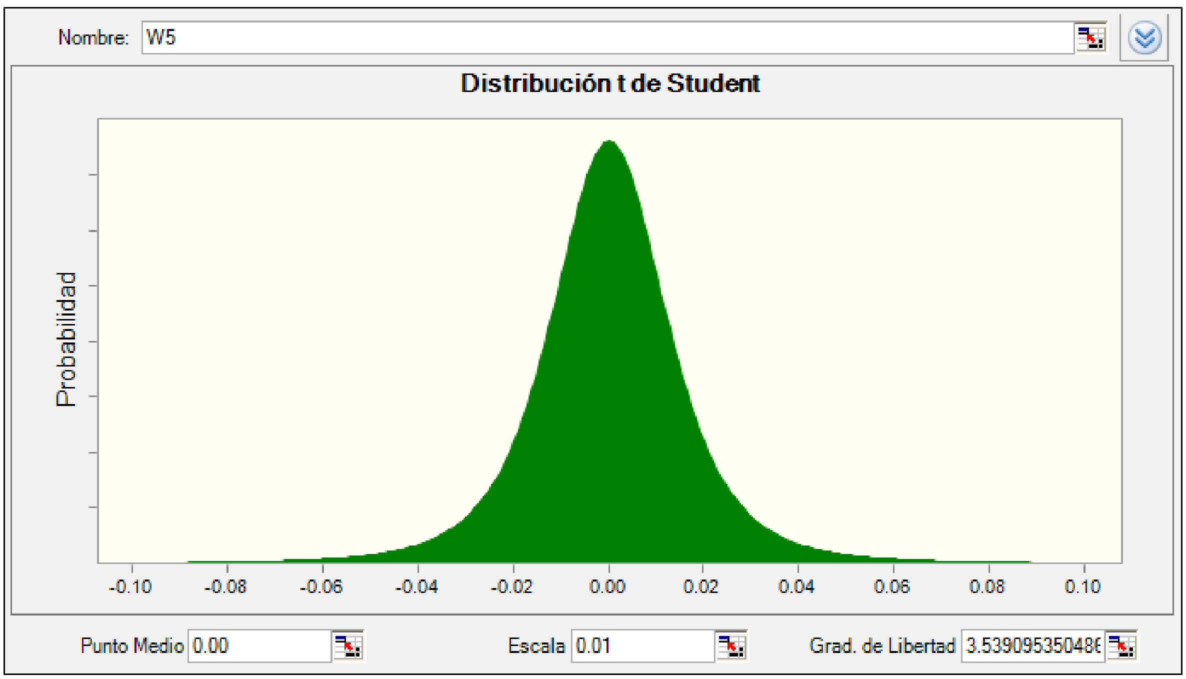




Fuente: Elaboración Propia basada en http://bit.ly/Mux7Vocon software Crystal Ball

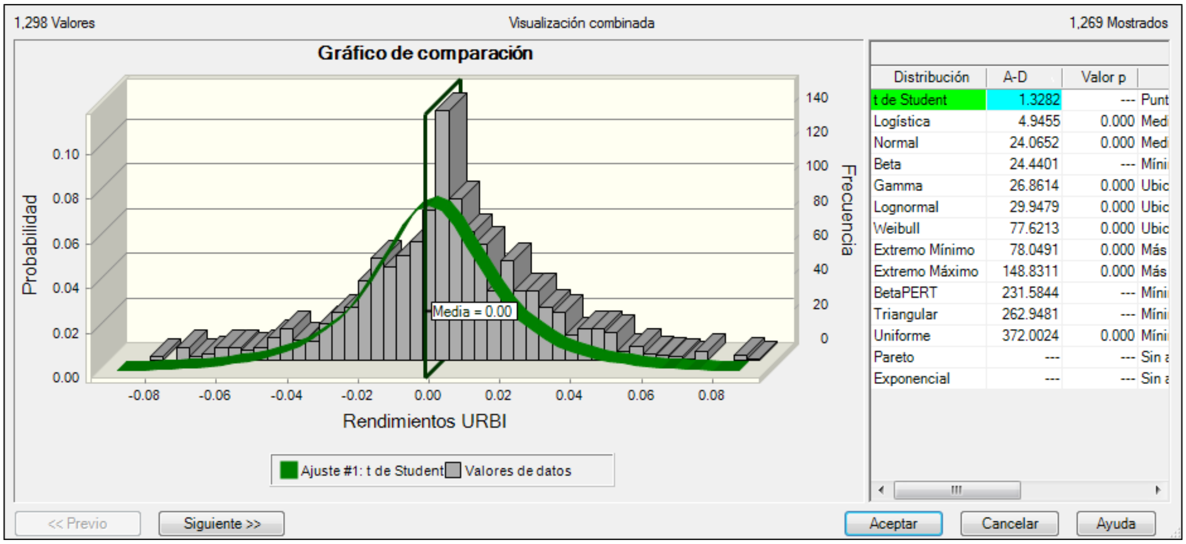
Figura 4.32 – Grafica de rendimientos de TLEVISA Serie CPO

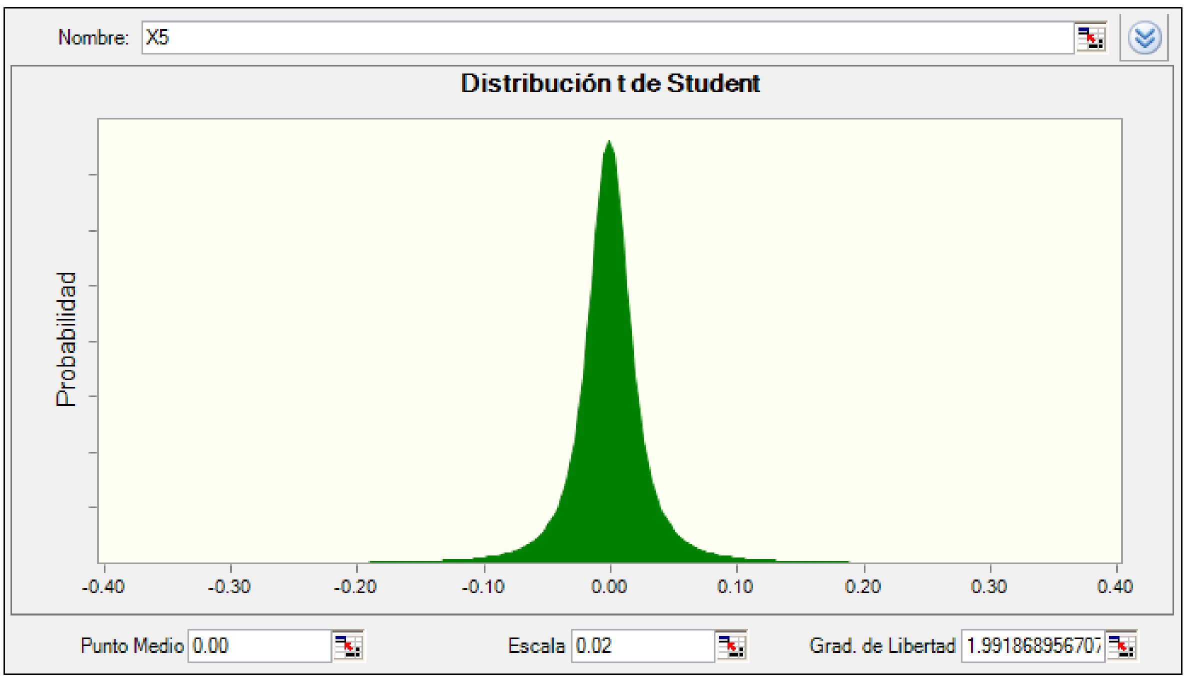




Fuente: Elaboración Propia basada en http://bit.ly/Mux7Vocon software Crystal Ball

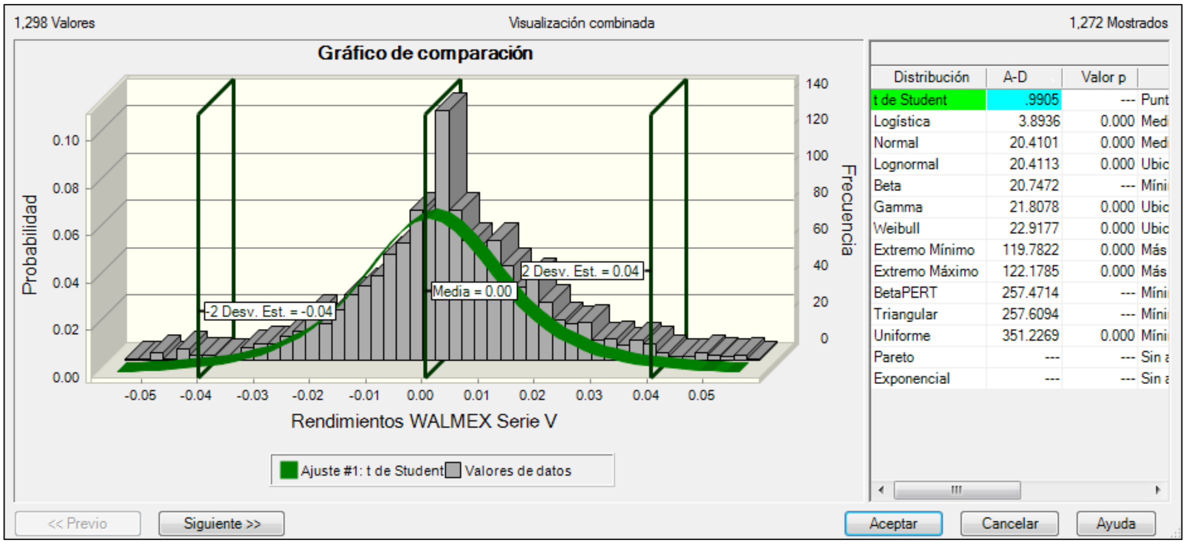
Figura 4.33 – Grafica de rendimientos de URBI

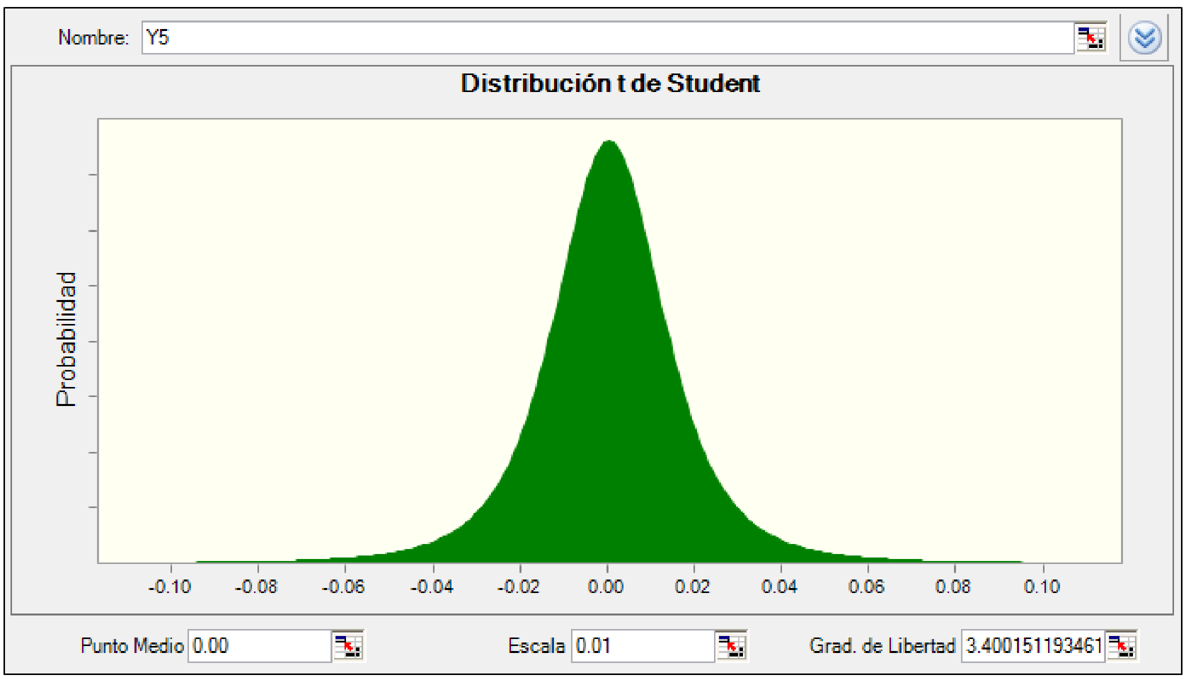




Fuente: Elaboración Propia basada en http://bit.ly/Mux7Vocon software Crystal Ball

Figura 4.34 – Grafica de rendimientos de WALMEX Serie V





Fuente: Elaboración Propia basada en http://bit.ly/Mux7Vocon software Crystal Ball

Apéndice A

Emisoras de la Bolsa Mexicana de Valores

Cada una de ella se muestra con su clave para identificarla y su respectiva razón social, sector productivo y sub sector correspondiente.

Clave de emisor	Razón social	Sector	Subsector	Clave de emisor	Razón social	Sector	Subsector
AC	ARCA CONTINENTAL, S.A.B. DE C.V.	Productos de consumo frecuente	Alimentos, bebida, tabaco	GNP	**GRUPO NACIONAL PROVINCIAL, S.A.B.**	Servicios Financieros	Entidades Financieras
ACCELSA	ACCEL, S.A.B. DE C.V.	Industrial	Suministro y servicios comerciales	GOMO	**GRUPO COMERCIAL GOMO, S.A. DE C.V.**	Servicios y Bienes de Consumo no básico	Bienes de consumo duradero y confección
ACTINVR	CORPORACION ACTINVER, S.A.B. DE C.V.	Servicios Financieros	Entidades Financieras	GPH	**GRUPO PALACIO DE HIERRO, S.A.B. DE C.V.**	Servicios y Bienes de Consumo no básico	Venta al por menor
AEROMEX	GRUPO AEROMÉXICO, S.A.B. DE C.V.	Industrial	Transportes	GPROFUT	**GRUPO PROFUTURO, S.A.B. DE C.V.**	Servicios Financieros	Entidades Financieras
AGRIEXP	AGRO INDUSTRIAL EXPORTADORA, S.A. DE C.V.	Productos de consumo frecuente	Alimentos, bebida, tabaco	GRUMA	**GRUMA, S.A.B. DE C.V.**	Productos de consumo frecuente	Alimentos, bebida, tabaco
AHMSA	ALTOS HORNOS DE MEXICO, S.A. DE C.V.	Materiales	Materiales	HERDEZ	**GRUPO HERDEZ, S.A.B. DE C.V.**	Productos de consumo frecuente	Alimentos, bebida, tabaco
ALFA	ALFA, S.A.B. DE C.V.	Industrial	Bienes de Equipo	HILASAL	**HILASAL MEXICANA S.A.B. DE C.V.**	Servicios y Bienes de Consumo no básico	Bienes de consumo duradero y confección

Clave de emisor	Razón social	Sector	Subsector	Clave de emisor	Razón social	Sector	Subsector
ALPEK	ALPEK, S.A.B. DE C.V.	Materiales	Materiales	HOGAR	**CONSORCIO HOGAR, S.A.B. DE C.V.**	Industrial	Construcción
ALSEA	ALSEA, S.A.B. DE C.V.	Servicios y Bienes de Consumo no básico	Servicios al consumidor	HOMEX	**DESARROLLADORA HOMEX, S.A.B. DE C.V.**	Industrial	Construcción
AMX	AMERICA MOVIL, S.A.B. DE C.V.	Servicios de telecomunicaciones	Servicios de telecomunicaciones	IASASA	**INDUSTRIA AUTOMOTRIZ, S.A. DE C.V.**	Servicios y Bienes de Consumo no básico	Automóviles y componentes
ARA	CONSORCIO ARA, S.A.B. DE C.V.	Industrial	Construcción	ICA	**EMPRESAS ICA, S.A.B. DE C.V.**	Industrial	Construcción
ARISTOS	CONSORCIO ARISTOS, S.A. DE C.V.	Servicios y Bienes de Consumo no básico	Servicios al consumidor	ICH	**INDUSTRIAS CH, S.A.B. DE C.V.**	Materiales	Materiales
ASUR	GRUPO AEROPORTUARIO DEL SURESTE, S.A.B. DE C.V.	Industrial	Transportes	IDEAL	**IMPULSORA DEL DESARROLLO Y EL EMPLEO EN AMERICA LATINA, S.A.B. DE C.V.**	Industrial	Construcción
AUTLAN	COMPAÑIA MINERA AUTLAN, S.A.B. DE C. V.	Materiales	Materiales	INCARSO	**Inmuebles Carso, S.A.B. de C.V.**	Industrial	Construcción
AXTEL	AXTEL, S.A.B. DE C.V.	Servicios de Telecomunicaciones	Servicios de telecomunicaciones	INVEX	**INVEX CONTROLADORA, S.A.B. DE C.V.**	Servicios Financieros	Entidades Financieras
AZTECA	TV AZTECA, S.A.B. DE C.V.	Servicios de Telecomunicaciones	Medios de comunicación	KIMBER	**KIMBERLY - CLARK DE MEXICO S.A.B. DE C.V.**	Productos de consumo frecuente	Productos domésticos y personales
BACHOCO	INDUSTRIAS BACHOCO, S.A.B. DE C.V.	Productos de consumo frecuente	Alimentos, bebida, tabaco	KOF	**COCA-COLA FEMSA, S.A.B. DE C.V.**	Productos de consumo frecuente	Alimentos, bebida, tabaco
BAFAR	GRUPO BAFAR, S.A.B. DE C.V.	Productos de consumo frecuente	Alimentos, bebida, tabaco	KUO	**GRUPO KUO, S.A.B. DE C.V.**	Industrial	Bienes de Equipo

Clave de emisor	Razón social	Sector	Subsector	Clave de emisor	Razón social	Sector	Subsector
BBVA	BANCO BILBAO VIZCAYA ARGENTARIA, S.A.	Servicios Financieros	Entidades Financieras	LAB	**GENOMMA LAB INTERNACIONAL, S.A.B. DE C.V.**	Salud	Equipo, medicamentos, servicios médicos
BEVIDES	FARMACIAS BENAVIDES, S.A.B. DE C.V.	Salud	Equipo, medicamentos, servicios médicos	LAMOSA	**GRUPO LAMOSA, S.A.B. DE C.V.**	Industrial	Bienes de Equipo
BIMBO	GRUPO BIMBO, S.A.B. DE C.V.	Productos de consumo frecuente	Alimentos, bebida, tabaco	LASEG	**LA LATINOAMERICANA SEGUROS, S.A.**	Servicios Financieros	Entidades Financieras
BOLSA	BOLSA MEXICANA DE VALORES, S.A.B. DE C.V.	Servicios Financieros	Entidades Financieras	LIVEPOL	**EL PUERTO DE LIVERPOOL, S.A.B. DE C.V.**	Servicios y Bienes de Consumo no básico	Venta al por menor
C	CITIGROUP INC.	Servicios Financieros	Entidades Financieras	MASECA	**GRUPO INDUSTRIAL MASECA, S.A.B. DE C.V.**	Productos de consumo frecuente	Alimentos, bebida, tabaco
CABLE	EMPRESAS CABLEVISION, S.A. DE C.V.	Servicios de Telecomunicaciones	Medios de comunicación	MAXCOM	**MAXCOM TELECOMUNICACIONES, S.A.B. DE C.V.**	Servicios de Telecomunicaciones	Servicios de telecomunicaciones Principio del formulario
CEMEX	CEMEX, S.A.B. DE C.V.	Materiales	Materiales	MEDICA	**MEDICA SUR, S.A.B. DE C.V.**	Salud	Equipo, medicamentos, servicios médicos
CERAMIC	INTERNACIONAL DE CERAMICA, S.A.B. DE C.V.	Industrial	Bienes de Equipo	MEGA	**MEGACABLE HOLDINGS, S.A.B. DE C.V.**	Servicios de Telecomunicaciones	Medios de comunicación
CHDRAUI	GRUPO COMERCIAL CHEDRAUI, S.A.B. DE C.V.	Productos de consumo frecuente	Venta de productos de consumo frecuente	MEXCHEM	**MEXICHEM, S.A.B. DE C.V.**	Materiales	Materiales

Clave de emisor	Razón social	Sector	Subsector	Clave de emisor	Razón social	Sector	Subsector
CIDMEGA	GRUPE, S.A.B. DE C.V.	Servicios y Bienes de Consumo no básico	Servicios al consumidor	MFRISCO	**MINERA FRISCO, S.A.B. DE C.V.**	Materiales	Materiales
CIE	CORPORACION INTERAMERICANA DE ENTRETENIMIENTO, S.A.B. DE C.V.	Servicios y Bienes de Consumo no básico	Servicios al consumidor	MINSA	**GRUPO MINSA, S.A.B. DE C.V.**	Productos de consumo frecuente	Alimentos, bebida, tabaco Final del formulario
CMOCTEZ	CORPORACION MOCTEZUMA, S.A.B. DE C.V.	Materiales	Materiales	MONEX	**HOLDING MONEX, S.A.P.I.B. DE C.V.**	Servicios Financieros	Entidades Financieras Principio del formulario Principio del formulario
CMR	CMR, S.A.B. DE C.V.	Servicios y Bienes de Consumo no básico	Servicios al consumidor	NUTRISA	**GRUPO NUTRISA, S.A.B. DE C. V.**	Productos de consumo frecuente	Alimentos, bebida, tabaco Final del formulario Final del formulario
COLLADO	G COLLADO, S.A.B. DE C.V.	Materiales	Materiales	OHLMEX	**OHL MEXICO, S.A.B. DE C.V.**	Industrial	Construcción
COMERCI	CONTROLADORA COMERCIAL MEXICANA, S.A.B. DE C.V.	Productos de consumo frecuente	Venta de productos de consumo frecuente	OMA	**GRUPO AEROPORTUARIO DEL CENTRO NORTE, S.A.B. DE C.V.**	Industrial	Transportes
COMPARC	COMPARTAMOS, S.A.B. DE C.V.	Servicios Financieros	Entidades Financieras	PAPPEL	**BIO PAPPEL, S.A.B. DE C.V.**	Materiales	Materiales
CONVER	CONVERTIDORA INDUSTRIAL, S.A.B. DE C.V.	Materiales	Materiales	PASA	**PROMOTORA AMBIENTAL, S.A.B. DE C.V.**	Industrial	Suministro y servicios comerciales

Clave de emisor	Razón social	Sector	Subsector	Clave de emisor	Razón social	Sector	Subsector
CREAL	CREDITO REAL, S.A.B. DE C.V., SOFOM, E.N.R.	Servicios Financieros	Entidades Financieras	PATRIA	**REASEGURADORA PATRIA, S.A.**	Servicios Financieros	Entidades Financieras
CULTIBA	GRUPO EMBOTELLADORAS UNIDAS, S.A.B. DE CV	Productos de consumo frecuente	Alimentos, bebida, tabaco	PE&OLES	**INDUSTRIAS PEÑOLES, S. A.B. DE C. V.**	Materiales	Materiales
CYDSASA	CYDSA, S.A.B. DE C.V.	Materiales	Materiales	PINFRA	**PROMOTORA Y OPERADORA DE INFRAESTRUCTURA, S.A.B. DE C.V.**	Industrial	Construcción
DINE	DINE, S.A.B. DE C.V.	Industrial	Construcción	POCHTEC	**GRUPO POCHTECA, S.A.B. DE C.V.**	Materiales	Materiales
EDOARDO	EDOARDOS MARTIN, S.A.B. DE C.V.	Servicios y Bienes de Consumo no básico	Venta al por menor	POSADAS	**GRUPO POSADAS, S.A.B. DE C.V.**	Servicios y Bienes de Consumo no básico	Servicios al consumidor
ELEKTRA	GRUPO ELEKTRA, S.A.B. DE C.V.	Servicios y Bienes de Consumo no básico	Venta al por menor	PROCORP	**PROCORP, S.A. DE C.V., SOCIEDAD DE INV. DE CAPITAL DE RIESGO**	Servicios Financieros	Entidades Financieras
FEMSA	FOMENTO ECONÓMICO MEXICANO, S.A.B. DE C.V.	Productos de consumo frecuente	Alimentos, bebida, tabaco	PV	**PEÑA VERDE S.A.B.**	Servicios Financieros	Entidades Financieras
FIBRAMQ	DEUTSCHE BANK, S.A., INSTITUCION DE BANCA MULTIPLE	Servicios Financieros	Entidades Financieras	Q	**QUALITAS COMPAÑIA DE SEGUROS, S.A. DE C.V.**	Servicios Financieros	Entidades Financieras

Clave de emisor	Razón social	Sector	Subsector	Clave de emisor	Razón social	Sector	Subsector
FIHO	DEUTSCHE BANK MÉXICO, S.A. INSTITUCIÓN DE BANCA MÚLTIPLE, DIVISIÓN FIDUCIARIA	Servicios Financieros	Entidades Financieras	QBINDUS	**Q.B. INDUSTRIAS, S.A. DE C.V.**	Materiales	Materiales
FINAMEX	CASA DE BOLSA FINAMEX, S.A.B. DE C.V.	Servicios Financieros	Entidades Financieras	QC	**QUÁLITAS CONTROLADORA, S.A.B. DE C.V.**	Servicios Financieros	Entidades Financieras
FINDEP	FINANCIERA INDEPENDENCIA, S.A.B. DE C.V. SOFOM, E.N.R.	Servicios Financieros	Entidades Financieras	QUMMA	**GRUPO QUMMA, S.A. DE C.V.**	Servicios de Telecomunicaciones	Medios de comunicación
FRAGUA	CORPORATIVO FRAGUA, S.A.B. DE C.V.	Salud	Equipo, medicamentos, servicios médicos	RCENTRO	**GRUPO RADIO CENTRO, S.A.B. DE C.V.**	Servicios de Telecomunicaciones	Medios de comunicación
FRES	FRESNILLO PLC	Materiales	Materiales	REALTUR	**REAL TURISMO S.A. DE C.V.**	Servicios y Bienes de Consumo no básico	Servicios al consumidor
FUNO	DEUTSCHE BANK MEXICO, S.A., INSTITUCION DE BANCA MULTIPLE	Servicios Financieros	Entidades Financieras	SAB	**GRUPO CASA SABA, S.A.B. DE C.V.**	Salud	Equipo, medicamentos, servicios médicos
GAP	GRUPO AEROPORTUARIO DEL PACIFICO, S.A.B. DE C.V.	Industrial	Transportes	SAN	**BANCO SANTANDER, S.A.**	Servicios Financieros	Entidades Financieras
GBM	CORPORATIVO GBM, S.A.B. DE C. V.	Servicios Financieros	Entidades Financieras	SANLUIS	**SANLUIS CORPORACION, S.A.B. DE C. V.**	Servicios y Bienes de Consumo no básico	Automóviles y componentes

Clave de emisor	Razón social	Sector	Subsector	Clave de emisor	Razón social	Sector	Subsector
GCARSO	GRUPO CARSO, S.A.B. DE C.V.	Industrial	Bienes de Equipo	SANMEX	**GRUPO FINANCIERO SANTANDER MEXICO, S.A.B. DE C.V.**	Servicios Financieros	Entidades Financieras
GCC	GRUPO CEMENTOS DE CHIHUAHUA, S.A.B. DE C.V.	Materiales	Materiales	SARE	**SARE HOLDING, S.A.B. DE C.V.**	Industrial	Construcción
GENSEG	GENERAL DE SEGUROS, S.A.B.	Servicios Financieros	Entidades Financieras	SAVIA	**SAVIA, S.A. DE C.V.**	Productos de consumo frecuente	Alimentos, bebida, tabaco
GEO	CORPORACION GEO, S.A.B. DE C.V.	Industrial	Construcción	SIMEC	**GRUPO SIMEC, S.A.B. DE C.V.**	Materiales	Materiales
GFAMSA	GRUPO FAMSA, S.A.B. DE C.V.	Servicios y Bienes de Consumo no básico	Venta al por menor	SORIANA	**ORGANIZACION SORIANA, S.A.B. DE C.V.**	Productos de consumo frecuente	Venta de productos de consumo frecuente
GFINBUR	GRUPO FINANCIERO INBURSA, S.A.B. DE C.V.	Servicios Financieros	Entidades Financieras	SPORT	**GRUPO SPORTS WORLD, S.A.B. DE C.V.**	Servicios y Bienes de Consumo no básico	Servicios al consumidor
GFINTER	GRUPO FINANCIERO INTERACCIONES, S.A. DE C.V.	Servicios Financieros	Entidades Financieras	TEAK	**PROTEAK UNO, S.A.P.I.B. DE C.V.**	Materiales	Materiales
GFMULTI	GRUPO FINANCIERO MULTIVA S.A.B.	Servicios Financieros	Entidades Financieras	TEKCHEM	**TEKCHEM, S.A.B. DE C.V.**	Materiales	Materiales
GFNORTE	GRUPO FINANCIERO BANORTE, S.A.B DE C.V.	Servicios Financieros	Entidades Financieras	TLEVISA	**GRUPO TELEVISA, S.A.B.**	Servicios de Telecomunicaciones	Medios de comunicación
GFREGIO	BANREGIO GRUPO FINANCIERO, S.A.B. DE C.V.	Servicios Financieros	Entidades Financieras	TMM	**GRUPO TMM, S.A.**	Industrial	Transportes
GIGAN	GRUPO	Productos de	Venta de	TS	**TENARIS S.A.**	Materiales	Materiales

Clave de emisor	Razón social	Sector	Subsector	Clave de emisor	Razón social	Sector	Subsector
TE	GIGANTE, S.A.B. DE C.V.	consumo frecuente	productos de consumo frecuente				
GISSA	GRUPO INDUSTRIAL SALTILLO, S.A.B. DE C.V.	Industrial	Bienes de Equipo	URBI	**URBI DESARROLLOS URBANOS, S.A.B. DE C.V.**	Industrial	Construcción
GMACMA	GRUPO MACMA, S.A.B. DE C.V.	Productos de consumo frecuente	Alimentos, bebida, tabaco	VALUEGF	**VALUE GRUPO FINANCIERO, S.A.B. DE C.V.**	Servicios Financieros	Entidades Financieras
GMD	GRUPO MEXICANO DE DESARROLLO, S.A.B.	Industrial	Construcción	VASCONI	**GRUPO VASCONIA S.A.B.**	Servicios y Bienes de Consumo no básico	Bienes de consumo duradero y confección
GMDR	GMD RESORTS, S.A.B.	Industrial	Construcción	VESTA	**CORPORACIÓN INMOBILIARIA VESTA, S.A.B. DE C.V.**	Industrial	Construcción
GMEXICO	GRUPO MEXICO, S.A.B. DE C.V.	Materiales	Materiales	VITRO	**VITRO, S.A.B. DE C.V.**	Materiales	Materiales
GMODELO	GRUPO MODELO, S.A.B. DE C.V.	Productos de consumo frecuente	Alimentos, bebida, tabaco	WALMEX	**WAL - MART DE MEXICO, S.A.B. DE C.V.**	Productos de consumo frecuente	Venta de productos de consumo frecuente

Fuente: Elaboración propia basado en la información de la BMV. (Bolsa Mexicana de Valores, S.A.B. de C.V., 2007)

Apéndice B

Series accionarias disponibles en el Mercado Mexicano.

Tipo de Serie	Descripción
A	Serie ordinaria reservada para accionistas mexicanos, y que sólo pueden ser adquiridas por extranjeros a través de inversionistas neutros o de ADRs.
A1	Ordinaria en la que participan en forma directa accionistas mexicanos y representa la parte fija del capital, también llamada clase 1.
A2	Ordinaria en la que participan en forma directa accionistas mexicanos y representa la parte variable del capital, también llamada clase 2.
A4	Una serie A con un derecho pendiente de aplicar, en este caso relacionado con el cupón 4
AA	Series accionarias no negociables de Telmex que se encuentran en fideicomiso.
B	Ordinaria conocida como Libre suscripción, por lo que puede ser adquirida directamente por inversionistas extranjeros.
B1	Ordinaria conocida como Libre Suscripción, por lo que puede ser adquirida directamente por inversionistas extranjeros; representa la parte fija del capital, también llamada clase 1.
B2	Ordinaria conocida como Libre Suscripción, por lo que puede ser adquirida directamente por inversionistas extranjeros; representa la parte variable del capital, también llamada clase 2.
BCP	Ordinaria conocida como Libre Suscripción, por lo que puede ser adquirida directamente por inversionistas extranjeros y representada por un certificado provisional.
BCR	Ordinaria conocida como Libre suscripción, aunque es considerada de circulación restringida.
BCPO	Ordinaria conocida como Libre Suscripción, no negociable, ya que está incluida en un Certificado de Participación Ordinaria.
B4	Es una serie B con un derecho pendiente de aplicar,

Tipo de Serie	Descripción
	en este caso con el cupón 4.
B-1	Emisión especial para funcionarios de la compañía, por lo que no son negociables.
C-1	Voto limitado de libre suscripción y representa la parte fija del capital.
CP	Certificado Provisional.
CPO	Certificado de Participación Ordinario de libre suscripción; estas acciones otorgan derechos de voto restringido.
D	Dividendo superior o preferente.
DCPO	Serie D incluida en un Certificado de Participación Ordinario, que otorga derechos de voto restringido, no negociable.
F	Series de emisoras filiales que están en poder de empresas controladoras extranjeras.
L	Voto limitado. Pueden ser adquiridas por inversionistas nacionales o extranjeros.
L4	Es una serie L con un derecho pendiente de aplicar, en este caso relacionado con el cupón 4.
LCPO	Serie L incluida en un Certificado de Participación Ordinario, que otorga derechos de voto restringido, no negociables.
T	Emisión especial para funcionarios de la compañía, por lo que no son negociables.
UB	Títulos vinculados que representan acciones serie B
UBC	Títulos vinculados que representan acciones serie B y C
UBL	Títulos vinculados que representan acciones serie B y L
ULD	Títulos vinculados que representan acciones serie L y D
1	1 u Ordinaria en la que participan en forma directa accionistas mexicanos y representa la parte fija del capital, también llamada clase 1.
2	2 ordinaria en la que participan en forma directa accionistas mexicanos, y representa la parte variable del capital, también llamada clase 2.
1CP	Ordinaria, representa la parte fija del capital, también llamada clase 1, contiene un certificado provisional.
2CP	Ordinaria, representa la parte variable del capital, también llamada clase 2, contiene un certificado provisional

Fuente: Elaboración propia basada en (Blink! By Banamex ; Universidad del Valle de México., 2008)

Referencias Bibliográficas

Aracioglu, B., Demircan, F., & Soyeur, H. (2011). *Mean Variance Skewness Kurtosis Approach to portfolio optimization .An application in Stambul Exchange*: Ege Academic Review. Estambul.

Azarag, M., & Garcia, E. (1996). *Simulación y Análisis de Modelos estocasticos*: McGraw Hill. México.

Babaistev, V., Brailov, A., & Popov, A. (2012). *Fast Algorithm for the Markowitz Critical Line Method*: Matematical Models and Computer Simulations. Rusia.

Benninga, S. (1997). *Financial Modeling*: MIT Press. EEUU.

Benninga, S. (2006). *Stattics for Portfolios , Principles of Finance with Excel*: Oxford University Press. EEUU.

Black, F. (1972). *Capital Market Equilibrium with restricted Borrowing*: Journal of Business. EEUU.

Blink! By Banamex ; Universidad del Valle de México. (2008). Mercados Financieros en México.

Bolsa Mexicana de Valores, S.A.B. de C.V. (2007). *Bolsa Mexicana de Valores*. (28/12/2012), http://bit.ly/3fVavv

Bolsa Mexicana de Valores, S.A.B. de C.V. (2007). *Bolsa Mexicana de Valores.* (16/01/2013), http://bit.ly/7AyYR9

Bradford, J., & Miller, T. (2009). *A Brief History of Risk and Return , Fundamentals of investments*: Mc Graw Hill . EEUU.

Carreto, J. (Abril de 2009). *La Bolsa Mexicana de Valores*.(18/01/2012),http://bit.ly/VTctEt

Chaves, E. (2011). *Mecánica del medio continuo*: Universidad Politecnica de Cataluña. España.

Cordera, R., Heredia, C., & Navarrete, J. (Marzo de 2012). *Economía UNAM.* (22/02/2013), http://bit.ly/ZfaVpW

Cordera, R., Lomelí, L., Murayama, C., Navarrete, J., & Samaniego, N.. *http://www.miguelcarbonell.com/.* (18/02/2013), http://bit.ly/ZfafkE

Dani, A., Ali, N., Simhadri, S., & Murthy, D. (2012). *Portfolio Selection using Min-Max Approach*: Indian Institute of Managment. India.

Egouzcu, M., Fuentes, L., Wong, W., & Zitkis, R. (2011). *Do investors Like to Diversify? A Study of Markowitz preferences*: European Journal of Operational Research. Francia.

Elton, E., & Gruber, M. (1995). *Modern Portfolio Theory and Investment Analysis*: Wiley. EEUU.

Fabozzi, F., Gupta, F., & Markowitz, H. (2006). *The Legacy of Modern Portfolio Theory*: Journal Of Investign. EEUU.

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Antioquia. (2012). *Universidad de Antioquía.* Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. (23/02/2103), http://bit.ly/XLEcVg

Frantz, P., Payne, R., Favilukis, & J. (2011). *Corporate Finance*: University Of London. Londres.

Galagosky, L., & Aduríz, A. (2001). Modelos y analogías en la enseñanza de las ciencias naturales: El concepto del modelo didáctico analógico. *Investigación Didactica, 19*, 231-242.

Gordon, G. (1989). *Simulación de sistemas*: Diana. México.

Haro, S., & González, C. (04 de Marzo de 2008). TUTORIAL Indices de Bolsa en México. Distrito Federal, México.

Hooda, D., & Sthehlik, M. (2011). *Portfolio Analysis of investments in Risnk Managment*: The open Statistic and Probability Journal. India .

Investopedia. (2013). *Investopedia*. (10/11/2012),http://bit.ly/15nRtsq

Investopedia. (2013). *Investopedia*. (15/11/2012), http://bit.ly/16JH0Jn

Leung, P., Ng, H., & Wong, W. (2011). *An Improved Estimation to make Markowitz's portfolio optimization Theory users friendly and estimations accurate with application on te US stock market investment*: European Journal of Operational Research. Hong Kong .

Levy, H., & Duchin, R. (2009). *Markowitz Versus the Talmudic Portfolio Diversification Strategies*: The Journal of Portfolio Managment. Israel.

Levy, H., & Sarnat, M. (1982). *Capital Investment and Finncial Decisions*: Prentice Hall. EEUU.

Lomelí, P. (Febrero de 2012). *http://www.fundacionpreciado.org.mx/index.html.*(16/02/2013), http://bit.ly/RQRDFP

Mangram, M. (2013). A Simplified Perspective of the Markowitz Portfolio Theory: Swiss Management Center. Suiza.

Markowitz, H. (1952). *Portfolio Selection*: The Journal of Finance. EEUU.

Markowitz, H., & Wiley, J. (1959). *Portafolio Selection: Efficient Diversification of Investment*: Chapman & Hall. EEUU.

Markowitz, H., Hebner, M., & Brunson, M. (2013). *Does Portfolio Theory Work During Financial Crises?* (26/11/2012), Index Funds Advisor: http://bit.ly/cnVjkX

Marqués, M. J. (2004). *Estadística Básica : un enfoque no parametrico.*: Universidad Nacional Autónoma de México.México .

McClelland, C. A. (1973). *Event Simulations: A First Description.*: University of Southern California. EEUU.

McHaney, R. (1991). *Computer Simulation: A Practical Perspective*: Academic Press. EEUU.

Mendizabal, Z., Miera, Z., & Zubia, Z. (2002). *Cuadernos de Gestión.* Universidad del País Vasco. España.

Merton, R. (1973). *An Analytic Derivation of the Efficiente Portfolio Frontier.* Journal of Financial an Quantitative Analysis. EEUU.

Metropolis, N. (1987). *The beginning of the Monte Carlo Method.*: Federation of American Scientists. EEUU.

Navidad, M. (1998). *Optimización de una cartera de inversión con acciones triple A, como mejor alternativa ante el riesgo*: Facultad de Economía UAEM. Toluca de Lerdo.

Poole, T. G., & Szymankiewicz, J. Z. (1977). *Using simulation to solve problems*: McGraw Hill. California.

Prawda, J. (1980). *Métodos y Modelos de Investigación de Operaciones* (Vol. 2): Limusa. México.

Ríos, D. (2009). *Simulación: métodos y aplicaciones*: Alfaomega. México.

Rodríguez, L. J. (Marzo de 2011). *Univesidad de Castilla-La Mancha.* (28/12/2012), http://bit.ly/XXQP3a

Rojas, M. (2002). *Análisis de Portafolio*: Universidad Nacional de Colombia. Colombia .

Ross, S. M. (1980). *Simulación* (2a ed.): Diana. México.

Saavedra, P., & Ibarra, V. (2008). *El método de Monte-Carlo y su aplicación a finanzas*: Departamento de Matemáticas, Universidad Autónoma Metropolitana-Iztapalapa;Escuela de Actuaría, Universidad Anáhuac. México.

Scherk, A. (2007). *Manual de Análisis Fundamental*: Inversiones Edicios S.L. Madrid.

Seidl, I. (2012). *Markowitz Versus Regime Switching An Empirical Approach*: The Review of finance and Banking. Rumania.

SEMATECH, NIST. (4 de 01 de 2012). *Nist Simathech*. (17/02/2013), Engineering Statistics Handbook: http://1.usa.gov/ZMVU7

Shanon, R. (1988). *Simulación de Sistemas*: Trillas. México.

Sharpe, W. (1963). *A simplified model for portfolio analysis , Managment Science*: Management Science. EEUU.

Stacey, J. (2008). *Muidimensional Risk andmean kurtosis Portfolio Optimization*: Journal of Financial Managment and Analysis. Canada .

Tamošiūnienė, R., & Petravičius, T. (2006). *The use of Monte Carlo Simulation Technique to Support Investment decisions*: Vilnius Thecnical University*.* Lituania.

Thierauf, R., & Groose, R. (1976). *Toma de decisiones por medio de investigación de operaciones*: Limusa*.* México.

Tziralis, G., Kirytopoulos, K., & Rentizelas, A. (2009). *Holistic Investment Assesment:Optimization, Risk Appraisal and Decision Making*: Managerial and Decision Economics*.* Grecia.

Urraca, J. (2008). Curso de Anásis Técnico , Santander Central Hispano. *Curso de Anásis Técnico*, 4-65.

Wackerly, D., Mendenhall, W., & Scheaffer, R. (2002). *Estadística Matemática con Aplicaciones*: Thomson.México.

Whicker, M., & Sigelman, L. (1991). *Computer simulation applications: an introduction.*: Sage Publications Michigan.

Xunta de Galicia Consellería De Sanidade. (2012). *Servizo Galego de Saúde(19/02/2013)*, http://bit.ly/Y4jaAj

Zwi, B., & Robert, M. (1999). *Finanzas*: Prentice Hall*.* México.