Penerapan Diagonalisasi Matriks untuk Menyelidiki Pewarisan Genotip pada Generasi ke-n dalam Genetika

Nurmia[1,a)], Muhammad Abdy[2,b)], Syafruddin Side[3,c)]

[1,2,3] *Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam*
Universitas Negeri Makassar

[a)] nurmiamia882@gmail.com
[b)] abdy02@yahoo.com
[c)]

Abstrak. *Penelitian ini bertujuan untuk menentukan formula dalam penentuan pewarisan genotip pada generasi ke-n dengan konsep diagonalisasi matriks dan untuk mengetahui penyelesaian persamaan-persamaan eksplisit dalam fraksi-fraksi dari genotip suatu populasi pada generasi ke-n. dalam menentukan formula pada pewarisan genotip generasi ke-n akan dibahas mengenai pewarisan autosomal. Untuk menyelesaikan masalah ini digunakan nilai dan vektor eigen yang sangat erat hubungannya dalam pendiagonalan suatu matriks bujursangkar. Sehingga dapat didefinisikan sebagai* $D = PAP^{-1}$*, dimana elemen-elemen matriks yang didiagonalisasi diperoleh dari probabilitas hasil persilangan dari kedua induknya. Kemudian untuk menyelesaikan persamaan eksplisit dapat menggunakan rumus yaitu:* $X^{(n)} = A^n X^{(0)} = PD^n P^{-1} X^{(0)}$*. Dari hasil perhitungan didapatkan bahwa dari kesembilan tabel persilangan, terdapat beberapa persilangan induk yang mempunyai 2 bentuk persamaan, namun memperoleh hasil peluang keturunan yang sama begitupun juga persilangan pada ilmu genetika itu sendiri. Persamaan-persamaan tersebut digunakan untuk menentukan peluang generasi ke-n pada suatu populasi dengan berdasar kepada perkawinan silang yang terkontrol.*
Kata Kunci: *Diagonalisasi Matriks, Nilai dan Vektor Eigen, Pewarisan Genotip.*

Abstact. *The purposes of this research are to determine the formula for determining genotypic inheritance in the n-th generation with the concept of matrix diagonalization and to find out the solution of explicit equations in the fractions of the genotype of a population in the nth generation. In determining the formula in the inheritance of the n-th generation genotype will be discussed about autosomal inheritance. The eigenvector values and vectors are used to solve this problem that are closely related in the diagonalization of a square matrix. So it can be defined as* $D = PAP^{-1}$*, where the matrix elements diagonalizied obtained from the probability of the crosses from both parent. To solve the explicit equation can use the formula that is:* $X^{(n)} = A^n X^{(0)} = PD^n P^{-1} X^{(0)}$*. From the calculation results obtained that from the nine crossing table, there are several crosses of the parent that has 2 forms of equation, but obtained the same result of the same descent as well as the crossing of genetics itself. The equations are used to determine the chances of the nth generation in a population based on controlled marriage.*
Keywords: *Matrix Diagonalization, Eigen Values and Vectors, Genotypic Inheritance.*

PENDAHULUAN

Dalam kehidupan di dunia, manusia tidak lepas dari berbagai macam permasalahan. Permasalahan-permasalahan tersebut menyangkut berbagai aspek, yang mana dalam penyelesaiannya diperlukan suatu pemahaman melalui suatu metode dan ilmu bantu tertentu. Salah satu ilmu bantu yang dapat digunakan adalah ilmu matematika. Aljabar matriks merupakan salah satu teori matematika yang dapat diaplikasikan pada ilmu biologi, fisika dan ilmu ekonomi. Salah satu masalah biologi yang dapat diselesaikan dengan matriks adalah masalah genetika (Islamiyah, 2009).

Genetika salah satu cabang dari ilmu biologi yang mempelajari hereditas yaitu penurunan sifat dari satu generasi ke generasi berikutnya. Dalam bidang biologi muncul suatu permasalahan yaitu ingin mengetahui suatu individu yang unggul dari beberapa generasi dengan melakukan persilangan secara kontinu terhadap individu tersebut. jika dilakukan secara konvensional sangat merugikan karena waktu yang cukup lama dan biaya yang tinggi jika spesiesnya tergolong langka dan mahal. Permasalahan tersebut dapat diselesaikan dengan analisis diagonalisasi matriks berdasarkan peluang dari genotip induk suatu spesies. Matriks yang digunakan berasal dari tabel peluang genotip induknya (Kaffah, 2015).
Untuk menyelesaikan masalah genetika ini dapat menggunakan nilai dan vektor eigen, serta diagonalisasi matriks dan limit untuk mengetahui sifat yang muncul pada individu di dalam suatu generasi. Adapun rumus yang digunakan dalam penyelidikan pewarisan genotip ini adalah $D = PAP^{-1}$, D merupakan diagonalisasi matriks, sedangkan A adalah matriks yang diperoleh dari tabel peluang persilangan *dihibrid*, P merupakan matriks yang terbentuk dari vektor eigen matriks A, dan P^{-1} adalah matriks invers/balikan dari matriks P. (Islamiyah, 2009).
Penelitian ini bertujuan untuk membuat sistem persamaan linear berdasarkan tabel genotip persilangan. Berdasarkan tabel yang akan terbentuk peneliti dapat mengetahui sifat individu pada generasi ke-n dengan cara analisis diagonalisasi matriks.

KAJIAN PUSTAKA

A. Matriks

Matriks adalah suatu kumpulan dari angka-angka (elemen-elemen) yang disusun menurut baris dan kolom sehingga berbentuk segi empat siku-siku dengan panjang dan lebarnya ditunjukkan oleh banyaknya baris dan kolom. Suatu matriks biasanya dinotasikan dengan huruf kapital dan dinyatakan dengan tanda kurung, yaitu ada yang dalam kurung siku (*backets*) [ ], ada yang dalam tanda kurung biasa (*parentheses*) ( ) atau dalam garis vertical yang *double* (*double verticalbar*) || ||. Walaupun demikian, umumnya suatu matriks ditulis dalam tanda kurung siku atau [ ]. (Budhi, 1995).

B. Nilai dan Vektor Eigen

Menurut Anton (1998) untuk mencari nilai eigen matriks A yang berukuran $n \times n$ maka dapat ditulis kembali Ax = λx. sebagai Ax = λIx Atau secara ekuivalen

$$(\lambda I - A)x = 0 \quad (1)$$

Supaya λ menjadi nilai eigen, maka harus ada pemecahan tak nol dari persamaan (1). Suatu persamaan akan mempunyai pemecahan tak nol jika dan hanya jika:

$$det(\lambda I - A) = 0. \quad (2)$$

Persamaan (2) dinamakan persamaan karakteristik A, skalar λ yang memenuhi persamaan tersebut merupakan nilai eigen dari A.
Untuk mencari vektor eigen A yang bersesuain dengan nilai eigen λ adalah dengan vektor tak nol x yang memenuhi persamaan Ax = λx. secara ekuivalen, vektor eigen yang bersesuain dengan λ adalah vektor tak nol dalam ruang pemecahan dari $(\lambda I - A)x = 0$

C. Diagonalisasi Matriks

Suatu matriks bujursangkar A dikatakan dapat didiagonalisasi (*diagonazable*) jika terdapat sebuah matriks P yang dapat dibalik sedemikian rupa sehingga $P^{-1}AP$ adalah sebuah matriks diagonal, matriks P dikatakan mendiagonalkan A. *(diagonalize)* A (Anton,2004).
Menurut (Anton, 1998) langkah-langkah untuk mendiagonalisasi matriks $n \times n$ yaitu sebagai berikut:

Langkah 1. Dicari nilai eigen dari matriks A, misalkan $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ dengan $n \leq m$
Langkah 2. Dicari m vektor eigen yang bebas linear, misalkan $p_1, p_2, \ldots, p_m$
Langkah 3. Dibentuk matriks P yang mempunyai $p_1, p_2, \ldots, p_m$ sebagai vektor- vektor kolomnya.
Langkah 4. Selanjutnya matriks $P^{-1}AP$ akan diagonal dengan $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ adalah unsur diagonal utamanya yang berurutan, dimana λ_1 adalah nilai eigen yang bersesuaian dengan $p_i = 1,2, \ldots, n$ maka $P^{-1}AP = D$ untuk suatu matriks diagonal D, sehingga $A = PDP^{-1}$ dan akibatnya $A^n = PD^nP^{-1}$.

D. Kajian tentang Genetika

1. Pewarisan Sifat Autosomal

Yang dimaksud dengan pewarisan sifat autosomal adalah sifat keturunan yang ditentukan oleh gen pada *autosom*. Gen ini ada yang dominan dan ada yang resesif. Karena laki-laki dan perempuan mempunyai autosom yang sama, maka sifat keturunan yang ditentukan oleh gen autosomal dapat dijumpai pada keturunan laki-laki maupun perempuan.

2. Persilangan Dihibrid

Dihibrid adalah persilangan dua individu yang memiliki dua sifat beda (AaBb). Pada hasil percobaan Mendel dengan tanaman ercis, pada bijinya terdapat 2 sifat beda, yaitu soal bentuk biji dan warna biji.

METODE PENELITIAN

Jenis penelitian ini merupakan penelitian matematika murni dengan metode studi literatur yaitu materi yang digunakan terdiri dari buku-buku dan jurnal-jurnal yang membahas tentang nilai dan vektor eigen, diagonalisasi matriks, serta limit dan penerapan diagonalisasi matriks pada bidang Genetika.

HASIL DAN PEMBAHASAN

1. Penentuan Distribusi Genotip dari Pewarisan

Ciri-ciri pewarisan yang akan ditinjau ditentukan atau di atur oleh dua kromosom (pembawa sifat) yang akan ditandai huruf AABB dan aabb. Pada pewarisan autosomal setiap individu dalam populasi, masing-masing kelamin akan memiliki dua kromosom yang berikutnya, yaitu pasangan-pasangan dari persilangan dua sifat beda akan ditandai dengan AABB, AABb, AAbb, AaBB, AaBb, Aabb, aaBB, aaBb, dan aabb atau disebut genotip. Genotip ini menentukan keturunan dari perkawinan silang. Adapun persilangan terkontrol adalah persilangan antara individu normal dengan seluruh kemungkinan genotip yang ada yaitu sebagai berikut:

1. P (induk) : AABB × AABB
   Gamet : AB dan AB

TABEL 1. Persilangan AABB dan AABB

Gamet	**AB**
AB	AABB

Jadi peluang genotip dari persilangan AABB dan AABB adalah sepenuhnya bergenotip AABB.

2. P (induk) : AABB × AABb
   Gamet : AB dan AB, Ab

TABEL 2. Persilangan AABB dan AABb

Gamet	AB	Ab
AB	AABB	AABb

Jadi peluang genotip dari persilangan AABB dan AABb adalah $\frac{1}{2}$ AABB dan $\frac{1}{2}$ AABb.

3. P (induk) : AABB × AAbb
   Gamet : AB dan Ab

TABEL 3. Persilangan AABB dan AAbb

Gamet	Ab
AB	AABb

Jadi peluang genotip dari persilangan AABB dan AAbb adalah sepenuhnya bergenotip AABb.

4. P (induk) : AABB × AaBB
   Gamet : AB dan AB, aB

TABEL 4. Persilangan AABB dan AaBB

Gamet	AB	aB
AB	AABB	AaBB

Jadi peluang genotip dari persilangan AABB dan AaBB adalah $\frac{1}{2}$ AABB dan $\frac{1}{2}$ AaBB.

5. P (induk) : AABB × AaBb
   Gamet : AB dan AB, Ab, aB, dan ab

TABEL 5. Persilangan AABB dan AaBb

Gamet	AB	Ab	aB	ab
AB	AABB	AABb	AaBB	AaBb

Jadi peluang genotip dari persilangan AABB dan AaBb adalah $\frac{1}{4}$ AABB, $\frac{1}{4}$ AABb, $\frac{1}{4}$ AaBB, dan $\frac{1}{4}$ AaBb

6. P (induk) : AABB × Aabb
   Gamet : AB dan Ab, ab

TABEL 6. Persilangan AABB dan Aabb

Gamet	Ab	ab
AB	AABb	AaBb

Jadi peluang genotip dari persilangan AABB dan Aabb adalah $\frac{1}{2}$ AABb dan $\frac{1}{2}$ AaBb.

7. P (induk) : AABB × aaBB
   Gamet : AB dan aB

TABEL 7. Persilangan AABB dan aaBB

Gamet	aB
AB	AaBB

Jadi peluang genotip dari persilangan AABB dan aaBB adalah sepenuhnya bergenotip AaBB.

8. P (induk) : AABB × aaBb
   Gamet : AB dan aB, ab

TABEL 8. Persilangan AABB dan aaBb

Gamet	aB	ab
AB	AaBB	AaBb

Jadi peluang genotip dari persilangan AABB dan aaBb adalah $\frac{1}{2}$ AaBB dan $\frac{1}{2}$ AaBb.

9. P (induk) : AABB × aabb
   Gamet : AB dan ab

TABEL 9 Persilangan AABB dan aabb

Gamet	ab
AB	AaBb

Jadi peluang genotip dari persilangan AABB dan aabb adalah sepenuhnya bergenotip AaBb

2. **Aplikasi Diagonalisasi Mariks pada Pewarisan Genotip**

Untuk lebih memperjelas aplikasi diagonalisasi matriks untuk menyelidiki keturunan sampai generasi ke-n maka digunakan langkah-langkah penyelesaian sebagai berikut:

1. Membentuk persamaan linear dari tabel yang menjelaskan peluang dari masing-masing genotip sedemikian sehingga didapatkan persamaan dalam notasi matriks.
2. Membentuk matriks A, kemudian dicari nilai-nilai eigen matriks A sehingga diperoleh pula vektor-vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai-nilai eigen tersebut.
3. Membentuk matriks P dari vektor-vektor yang bersesuaian dengan nilai-nilai eigen tersebut.
4. Substitusikan matriks A dengan matriks D yang sudah terlebih dahulu didiagonalisasi oleh matriks P.
5. Menyelesaikan persamaan distribusi genotip dalam generasi ke-n.
6. Membentuk sebuah persamaan eksplisit.
7. Dicari limit dari masing-masing persamaan untuk n menuju tak hingga.

Pewarisan autosomal

TABEL 10. Peluang genotip dari persilangan atau perkawinan silang individu normal AABB dengan seluruh kemungkinan genotip yang ada.

Genotip Keturunan	**Genotip dari kedua orang tua**								
	AABB-AABB	**AABB-AABb**	**AABB-AAbb**	**AABB-AaBB**	**AABB-AaBb**	**AABB-Aabb**	**AABB-aaBB**	**AABB-aaBb**	**AABB aabb**
	a_{n-1}	b_{n-1}	c_{n-1}	d_{n-1}	e_{n-1}	f_{n-1}	g_{n-1}	h_{n-1}	i_{n-1}
a_n AABB	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	0	0	0	0
b_n AABb	0	$\frac{1}{2}$	1	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	0	0	0
c_n AAbb	0	0	0	0	0	0	0	0	0
d_n AaBB	0	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	0	1	$\frac{1}{2}$	0
e_n AaBb	0	0	0	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1
f_n Aabb	0	0	0	0	0	0	0	0	0
g_n aaBB	0	0	0	0	0	0	0	0	0
h_n aaBb	0	0	0	0	0	0	0	0	0
i_n aaBB	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Untuk menghitung probabilitas gen yang dimiliki satu individu maka dapat dibuat

$$X^n = \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \\ d_n \\ e_n \\ f_n \\ g_n \\ h_n \\ i_n \end{bmatrix} \qquad \text{untuk } n = 1,2,\ldots \tag{3}$$

Dari tabel 10 dapat ditentukan distribusi genotip setiap generasi dari distribusi genotip generasi terdahulu dengan menggunakan persamaan dimana persamaan itu menyatakan bahwa semua turunan yang dihasilkan, yakni $a_n, b_n, c_n, d_n, e_n, f_n, g_n, h_n$dan i_n dari individu yang bergenotip AABB, AABb, AAbb, AaBB, AaBb, Aabb, aaBB, aaBb, dan aabb yang dinyatakan dengan
$a_{n-1}, b_{n-1}, c_{n-1}, d_{n-1}, e_{n-1}, f_{n-1}, g_{n-1}, h_{n-1}, i_{n-1}$.
Sedangkan koefisien-koefisien dari sembilan persamaan itu berasal dari probabilitas genotip yang mungkin dimiliki oleh individu tersebut dari hasil perkawinan, persamaan itu adalah:

$$a_n = a_{n-1} + \frac{1}{2}b_{n-1} + \frac{1}{2}d_{n-1} + \frac{1}{4}e_{n-1}$$
$$b_n = \frac{1}{2}b_{n-1} + c_{n-1} + \frac{1}{4}e_{n-1} + \frac{1}{2}f_{n-1}$$
$$c_n = 0$$
$$d_n = \frac{1}{2}d_{n-1} + \frac{1}{4}e_{n-1} + g_{n-1} + \frac{1}{2}h_{n-1}$$
$$e_n = \frac{1}{4}e_{n-1} + \frac{1}{2}f_{n-1} + \frac{1}{2}h_{n-1} + i_{n-1}$$
$$f_n = g_n = h_n = i_n = 0 \tag{4}$$

Kemudian dapat ditulis persamaannya dalam notasi matriks sebagai

$$X^n = AX^{n-1} \tag{5}$$

Dengan

$$X^n = \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \\ d_n \\ e_n \\ f_n \\ g_n \\ h_n \\ i_n \end{bmatrix} \quad X^{n-1} = \begin{bmatrix} a_{n-1} \\ b_{n-1} \\ c_{n-1} \\ d_{n-1} \\ e_{n-1} \\ f_{n-1} \\ g_{n-1} \\ h_{n-1} \\ i_{n-1} \end{bmatrix} \text{ dan } A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Berikut penyelesaian diagonalisasi dari matriks A

$$|\lambda I - A| = 0$$

$$\left| \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right| = 0$$

Sehingga nilai-nilai eigen yang diperoleh adalah

$\lambda_1 = 1$

$\lambda_2 = \lambda_4 = \frac{1}{2}$

$\lambda_5 = \frac{1}{4}$

$\lambda_3 = \lambda_6 = \lambda_7 = \lambda_8 = \lambda_9 = 0$

Untuk $\lambda = 1$

Dengan melakukan proses OBE diperoleh hasil sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \\ x_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Sistem persamaan yang sesuai adalah sebagai berikut:

$x_2 + x_4 + \frac{1}{2}x_5 = 0$

$x_3 + \frac{1}{2}x_4 + \frac{1}{2}x_5 + \frac{1}{2}x_6 = 0$

$x_4 + x_5 + x_6 = 0$

$x_5 + \frac{2}{3}x_6 + \frac{4}{3}x_7 + \frac{2}{3}x_8 = 0$

$x_6 + x_7 + x_8 + x_9 = 0$

$x_7 + x_8 + x_9 = 0$

$x_8 + x_9 = 0$

$x_9 = 0$ sehingga $x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = x_6 = x_7 = x_8 = x_9 = 0$

Misalkan $x_1 = s$, maka vektor eigen yang sesuai dengan $\lambda = 1$ adalah

$$\begin{bmatrix} s \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$ sehingga

$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ adalah sebuah basis untuk ruang eigen yang terkait dengan $\lambda = 1$.

Untuk $\lambda = \frac{1}{2}$,

Untuk mencari vektor eigen yang sesuai dengan $\lambda = \frac{1}{2}$ dapat dilakukan dengan cara yang sama seperti untuk mencari vektor eigen dengan $\lambda = 1$.

$\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ dan $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ adalah sebuah basis untuk ruang eigen yang terkait dengan $\lambda = \frac{1}{2}$.

Untuk $\lambda = \frac{1}{4}$,

$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ adalah sebuah basis untuk ruang eigen yang terkait dengan $\lambda = \frac{1}{4}$.

Untuk $\lambda = 0$:

$$\begin{bmatrix}-1\\2\\0\\2\\-4\\0\\0\\0\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\\-2\\0\\0\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\0\\0\\-2\\0\\0\\1\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\\-2\\1\\0\\0\\0\end{bmatrix} \text{ dan } \begin{bmatrix}1\\-2\\1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}$$ adalah sebuah basis untuk ruang eigen yang terkait dengan $\lambda = 0$.

Terdapat sembilan vektor basis secara keseluruhan, sehingga matriks A dapat didiagonalisasi. Sembilan vektor basis tersebut dibentuk ke dalam matriks P sebagai berikut:

$$P = \begin{bmatrix}1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1\\0 & 1 & -2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 2\\0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -2 & 0 & 2\\0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & -2 & -4\\0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

Selanjutnya menentukan invers matriks P dengan mereduksi matriks P menjadi matriks identitas sebagai berikut:

$[P|I]$

$$\left[\begin{array}{ccccccccc|ccccccccc}1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\0 & 1 & -2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & -2 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]$$

Dengan melanjutkan proses di atas diperoleh invers dari matriks P yaitu:

$$P^{-1} = \begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1\\0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2\\0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2\\0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 2 & 4\\0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

Terbukti bahwa matriks P dapat dibalik sedemikian rupa sehingga $P^{-1}AP$ adalah sebuah matriks diagonal.
Berdasarkan persamaan $A^n = P^{-1}D^nP$, dapat diperoleh
$X^n = A^nX^o$
$\quad = P^{-1}D^nPX^o$

$$\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \\ d_n \\ e_n \\ f_n \\ g_n \\ h_n \\ i_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \left(\frac{1}{2}\right)^n - 1 & 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} & \left(\frac{1}{2}\right)^n - 1 & 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \left(\frac{1}{4}\right)^n & \left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1} & 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} & \left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1} & \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} - \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} - 1 \\ 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^n & -\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} & 0 & \left(\frac{1}{4}\right)^n - \left(\frac{1}{2}\right)^n & -\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1} & 0 & -\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1} & \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^n & \left(\frac{1}{4}\right)^n - \left(\frac{1}{2}\right)^n & \left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1} & -\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} & -\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1} & \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \left(\frac{1}{4}\right)^n & -\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1} & 0 & -\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1} & -\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \\ d_0 \\ e_0 \\ f_0 \\ g_0 \\ h_0 \\ i_0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} a_n = a_0 &+ \left(\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1\right) b_0 + \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right) c_0 + \left(\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1\right) d_0 + \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \left(\frac{1}{4}\right)^n\right) e_0 \\ &+ \left(\left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1}\right) f_0 + \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right) g_0 + \left(\left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1}\right) h_0 \\ &+ \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} - \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} - 1\right) i_0 \end{aligned}$$

$$b_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n b_0 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} c_0 + \left(\left(\frac{1}{4}\right)^n - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) e_0 - \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1} f_0 - \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1} h_0 + \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\right) i_0$$

$$\begin{aligned} d_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n d_0 &+ \left(\left(\frac{1}{4}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) e_0 + \left(\left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1}\right) f_0 - \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1} g_0 - \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1} h_0 \\ &+ \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\right) i_0 \end{aligned}$$

$$e_n = \left(\frac{1}{4}\right)^n e_0 - \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1} f_0 - \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1} h_0 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} i_0$$

$c_n = f_n = g_n = h_n = i_n = 0$ untuk$n = 1,2, \dots$ (6)

Persamaan (5) merupakan persamaan eksplisit untuk fraksi-fraksi dari kesembilan genotip pada generasi ke-n yang ditinjau dari fraksi-fraksi genotip awal. Karena $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ cenderung mendekati 0 untuk n menuju tak terhingga $n \to \infty$, maka limit persamaan di atas adalah sebagai berikut:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_0 + \left(\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1\right) b_0 + \cdots + \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} - \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} - 1\right) i_0$$

$$= a_0 - b_0 + c_0 - d_0 + e_0 + g_0 - i_0$$

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n b_0 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} c_0 + \cdots + \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\right) i_0 = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} d_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n d_0 + \left(\left(\frac{1}{4}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) e_0 + \cdots + \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\right) i_0 = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} e_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n e_0 - \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1} f_0 - \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1} h_0 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} i_0 = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} f_n = \lim_{n\to\infty} g_n = \lim_{n\to\infty} h_n = \lim_{n\to\infty} i_n = \lim_{n\to\infty} 0 = 0$$

Jadi diperoleh peluang genotip untuk n menuju tak terhingga yaitu:

$a_n = a_0 - b_0 + c_0 - d_0 + e_0 + g_0 - i_0$

$b_n = c_n = d_n = e_n = f_n = g_n = h_n = i_n = 0$

Dari hasil penelitian dapat disimpulkan bahwa dari kesembilan tabel persilangan, terdapat beberapa persilangan induk yang mempunyai 2 bentuk persamaan, namun memperoleh hasil peluang keturunan yang sama begitupun juga persilangan pada ilmu genetika itu sendiri. Persamaan-persamaan tersebut digunakan untuk menentukan peluang generasi ke-n pada suatu populasi dengan berdasar kepada perkawinan silang yang terkontrol.

PENUTUP

A. Kesimpulan

Berdasarkan dari hasil penelitian, dapat disimpukan bahwa formula dalam pewarisan genotip pada generasi ke-n dengan genotip induk yang terkontrol (Persilangan genotip induk AABB dengan seluruh kemungkinan genotip dihibrid) dapat diperoleh dari persamaan-persamaan berikut :

1. $a_n = a_0 + \left(\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1\right) b_0 + \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right) c_0 + \left(\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1\right) d_0 + \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \left(\frac{1}{4}\right)^n\right) e_0 + \left(\left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1}\right) f_0 + \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right) g_0 + \left(\left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1}\right) h_0 + \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} - \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} - 1\right) i_0$

$$b_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n b_0 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} c_0 + \left(\left(\frac{1}{4}\right)^n - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) e_0 - \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1} f_0 - \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1} h_0 + \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\right) i_0$$

$$d_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n d_0 + \left(\left(\frac{1}{4}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) e_0 + \left(\left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1}\right) f_0 - \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1} g_0 - \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1} h_0 + \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\right) i_0$$

$$e_n = \left(\frac{1}{4}\right)^n e_0 - \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1} f_0 - \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1} h_0 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} i_0$$

$c_n = f_n = g_n = h_n = i_n = 0$ untuk$n = 1,2, \dots$

2. Penyelesaian persamaan-persamaan eksplisit dalam fraksi-fraksi dari genotip suatu populasi pada generasi ke-n.

Selanjutnya bentuk formula dari fraksi genotip diatas, maka diperoleh penyelesaian persamaan eksplisit untuk fraksi-fraksi dari kesembilan genotip pada generasi ke-n yang ditinjau dari fraksi-fraksi genotip awal. Karena $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ cenderung mendekati 0 untuk n menuju tak terhingga $n \to \infty$, maka limit persamaan di atas adalah sebagai berikut:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_0 + \left(\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1\right) b_0 + \cdots + \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} - \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} - 1\right) i_0$$

$$= a_0 - b_0 + c_0 - d_0 + e_0 + g_0 - i_0$$

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n b_0 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} c_0 + \cdots + \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\right) i_0 = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} d_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n d_0 + \left(\left(\frac{1}{4}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) e_0 + \cdots + \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\right) i_0 = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} e_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n e_0 - \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1} f_0 - \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1} h_0 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} i_0 = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} f_n = \lim_{n\to\infty} g_n = \lim_{n\to\infty} h_n = \lim_{n\to\infty} i_n = \lim_{n\to\infty} 0 = 0$$

Jadi diperoleh peluang genotip untuk n menuju tak terhingga yaitu:

$$a_n = a_0 - b_0 + c_0 - d_0 + e_0 + g_0 - i_0$$

$$b_n = c_n = d_n = e_n = f_n = g_n = h_n = i_n = 0$$

B. Saran

Adapun saran yang dapat peneliti sampaikan yaitu selain menggunakan matriks, dapat juga digunakan metode lain untuk persilangan trihibrid atau polihibrid dengan perkawinan acak. Karena dalam persilangan secara acak akan menghasilkan persamaan-persamaan tak linear, sehingga dapat digunakan metode lain pada penelitian selanjutnya.

DAFTAR PUSTAKA

Anton, H dan Rorres, C. 1998. *Penerapan Aljabar Linear* : Terjemahan : Pantura Silaban . Jakarta : Erlangga.

Anton, H dan Rorres, C. 2004. *Aljabar Linear Elementer*. Versi Aplikasi. Edisi Kedelapan / Jilid 1. Jakarta : Erlangga.

Budhi, Wono Setya. 1995. *Aljabar Linear*. Jakarta : PT Gramedia Pustaka Utama.

Islamiyah, Nurul. 2009. "*Aplikasi Diagonalisasi Matriks Untuk Menyelidiki Pewarisan Pada Genotipe Generasi ke-n*".

Kaffah, Silmi M.Yakin, dan Mamika Ujianita Romdhini. 2015. "*Analisis Diagonalisasi Matriks Untuk Menentukan Individu ke-n Berdasarkan Peluang Genotip Induk*".