

Rain Ferenets

DIGITAALNE
SIGNAALI- JA
PILDITÖÖTLUS

Harjutused

Digitaalne signaali- ja pilditöötlus

Harjutused

Rain Ferenets

Sisukord

1	Signaalitöötlus	5
1.1	Süsteemide omadused	5
1.2	Konvolutsioon	7
1.3	Impulsskaja, hüppekaja	12
1.4	Sageduskarakteristikud	16
1.5	Diskreetne Fourier' teisendus (DFT)	17
1.5.1	Kiire Fourier' teisendus (FFT)	21
1.6	Filtrite disainimine	25
1.6.1	<i>Notch</i> -filter	25
1.6.2	FIR-filtrite disainimine akna meetodiga	34
1.6.3	Optimaalse FIR-filtri disainimine	37
1.6.4	IIR-filtrite disainimine	39
2	Pilditöötlus	45
2.1	Histogrammi "venitamine"	45
2.2	"Libiseva naabrusega" töötlemine	48
2.3	Fikseeritud blokkide kaupa töötlemine	54
2.4	Müra filtreerimine	54
2.5	Fourier' teisendus	64
A	Lisad	67
A.1	Kompleksarvud	67
A.2	Osamurdudeks lahutamine	69
A.3	z -teisenduse tabel	72
A.4	Mõned olulisemad MATLAB-i käsud	73

1 Signaalitöötlus

1.1 Süsteemide omadused

- **Linearsus:** olgu x_1 ja x_2 sisendid süsteemile T . Süsteem T on lineaarne siis, kui kehtivad aditiivsuse ja homogeensuse omadused, mis on kirjeldatud seosega

$$T\{ax_1[n] + bx_2[n]\} = aT\{x_1[n]\} + bT\{x_2[n]\} \quad (1.1)$$

- **Ajas invariantus:** süsteem T on ajas invariantne, kui sisendi ajas nihutamine põhjustab ka väljundi ajalise nihke:

$$\begin{aligned} x[n] &\xrightarrow{T} y[n] \\ x[n - \tau] &\xrightarrow{T} y[n - \tau] \end{aligned} \quad (1.2)$$

Selline süsteem toimib olenemata sellest, kus teda ajaliselt rakendada.

- **Kausaalsus:** süsteem T on kausaalne, kui tema väljund kohal n_0 sõltub ainult sisenditest kohtadel $n \leq n_0$, s.t süsteem (väljund) ei saa sisendit ennetada.
- **Stabiilsus:** süsteem on stabiilne, kui iga tõkestatud sisendi puhul on ka väljund tõkestatud. Sisend $x[n]$ on tõkestatud, kui eksisteerib fikseeritud positiivne lõplik arv B_x nii, et

$$|x[n]| \leq B_x < \infty, \quad \text{kõikide } n\text{-de jaoks.}$$

Stabiilsus nõuab, et iga tõkestatud sisendi jaoks eksisteerib fikseeritud positiivne lõplik väärtus B_y nii, et

$$|y[n]| \leq B_y < \infty, \quad \text{kõikide } n\text{-de jaoks.}$$

Näide 1.1 On antud süsteem $y[n] = T\{x[n]\} = nx[n]$. Uurida selle süsteemi linearsust, ajas invariantust ja kausaalsust.

Lahendus. Kuna on näha, et süsteemi väljund $y[n]$ kohal n sõltub ainult sisendist kohal n , siis seega on kausaalsuse tingimus täidetud ja saab öelda, et süsteem on kausaalne.

Lineaarsuse uurimiseks tähistame eespool toodud lineaarsuse seose (1.1) vasaku poole näiteks VP -ga ja parema poole PP -ga (selline tähistus ei ole otseselt vajalik, kuid lihtsustamise mõttes on seda kasulik teha). Seejärel paneme uuri-tava süsteemi sellesse süsteemi sisse ja teisendame:

$$\begin{aligned} VP &= T\{ax_1[n] + bx_2[n]\} = n(ax_1[n] + bx_2[n]) = anx_1[n] + bnx_2[n] \\ PP &= aT\{x_1[n]\} + bT\{x_2[n]\} = anx_1[n] + bnx_2[n] \end{aligned}$$

Kuna $VP = PP$, siis saame öelda, et *süsteem on lineaarne*.

Ajas invariantse uurimiseks hilistame kõigepealt sisendit τ võrra ning vaatame, mis sellisel juhul väljundiks tuleb:

$$T\{x[n - \tau]\} = nx[n - \tau] \quad (*)$$

Seejärel vaatame, milline on τ võrra hilistatud väljund $y[n - \tau]$:

$$y[n - \tau] = [n - \tau]x[n - \tau] \quad (**)$$

Kuna $(*) \neq (**)$, siis saame öelda, et antud *süsteem ei ole ajas invariantne*. \square

Näide 1.2 On antud süsteem $y[n] = T\{x[n]\} = e^{x[n]}$. Uurida selle süsteemi lineaarsust, ajas invariantust ja kausaalsust.

Lahendus. Kuna süsteemi väljund $y[n]$ kohal n sõltub ainult sisendist kohal n , siis seega on kausaalsuse tingimus täidetud ja saab öelda, et *süsteem on kausaalne*.

Lineaarsus:

$$\begin{aligned} VP &= T\{ax_1[n] + bx_2[n]\} = e^{(ax_1[n] + bx_2[n])} = e^{ax_1[n]} \cdot e^{bx_2[n]} \\ PP &= aT\{x_1[n]\} + bT\{x_2[n]\} = ae^{x_1[n]} + be^{x_2[n]} \end{aligned}$$

On näha, et $VP \neq PP$, seega saame öelda, et antud *süsteem ei ole lineaarne*.

Ajas invariantus:

$$T\{x[n - \tau]\} = e^{x[n - \tau]} \quad (*)$$

$$y[n - \tau] = e^{x[n - \tau]} \quad (**)$$

Kuna $(*) = (**)$, siis järelikult *on süsteem ajas invariantne*. \square

Näide 1.3 Uurida, kas süsteem $y[n] = T\{x[n]\} = \log(|x[n]|)$ on stabiilne.

Lahendus. Antud süsteem on ebastabiilne, kuna kõikide n väärtuste puhul, mille korral $x[n] = 0$, ei ole süsteemi väljund tõkestatud, s.t et sellisel juhul $y[n] = \log(|x[n]|) = -\infty$. \square

Näide 1.4 *Uruida, kas süsteem $y[n] = T\{x[n]\} = (x[n])^2$ on stabiilne.*

Lahendus. Eeldame, et süsteemi sisend $x[n]$ on tõkestatud, s.t $|x[n]| \leq B_x$, kõikide n -de jaoks. Sellisel juhul saame, et $|y[n]| = |x[n]|^2 \leq B_x^2$. Seega saame valida $B_y = B_x^2$, mis tähendab, et ka väljund on tõkestatud. Järelikult on süsteem $(x[n])^2$ stabiilne. \square

1.2 Konvolutsioon

Kahe signaali, $x[n]$ ja $h[n]$ konvolutsioon $y[n]$ on defineeritud järgnevalt:

$$y[n] = x[n] * b[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] \quad (1.3)$$

Olgu $X(z)$ ja $H(z)$ vastavalt $x[n]$ -i ja $h[n]$ -i z -teisendused, siis saame kirja panna olulise seose konvolutsiooni ja z -teisenduse vahel:

$$x[n] * b[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(z) \cdot H(z) \quad (1.4)$$

Seega, z -teisenduse järel muutub konvolutsioon korrutiseks.

Näide 1.5 *On antud kaks signaali: $x[n] = \{1; 2; 2\}$, s.t $x[0] = 1; x[1] = 2; x[2] = 2$ ja $h[n] = \{2; 3; 4\}$, s.t $h[0] = 2; h[1] = 3; h[2] = 4$. Leida nende signaalide konvolutsioon, kasutades z -teisendust.*

Lahendus. Leiame kõigepealt $x[n]$ -i ja $h[n]$ -i z -teisendused:

$$X(z) = 1 + 2z^{-1} + 2z^{-2}$$

$$H(z) = 2 + 3z^{-1} + 4z^{-2}$$

Konvolutsiooni z -teisenduse $Y(z)$ leidmiseks peame $X(z)$ -i ja $H(z)$ -i omavahel läbi korrutama:

$$\begin{aligned} Y(z) &= X(z) \cdot H(z) = (1 + 2z^{-1} + 2z^{-2})(2 + 3z^{-1} + 4z^{-2}) \\ &= 2 + 7z^{-1} + 14z^{-2} + 14z^{-3} + 8z^{-4} \end{aligned}$$

Konvolutsiooni $y[n]$ saamiseks võtame $Y(z)$ -st z -pöördteisenduse:

$$y[0] = 2; y[1] = 7; y[2] = 14; y[3] = 14; y[4] = 8,$$

mis teisiti kirjutatuna on $y = \{2; 7; 14; 14; 8\}$. □

Näide 1.6 *Leiame näites 1.5 toodud signaalide konvolutsiooni otse, kasutades selleks konvolutsioonisumma definitsiooni, s.t valemit (1.3).*

Lahendus. Kuna antud juhul on mõlema signaali pikkus 3, siis konvolutsiooni pikkus on $3 + 3 - 1 = 5$. Võttes veel arvesse, et kui $n < 0$, siis $x[n] = 0$ ja $h[n] = 0$, saame valemit (1.3) kasutades järgneva konvolutsioonisumma:

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=0}^4 x[k]h[n-k]$$

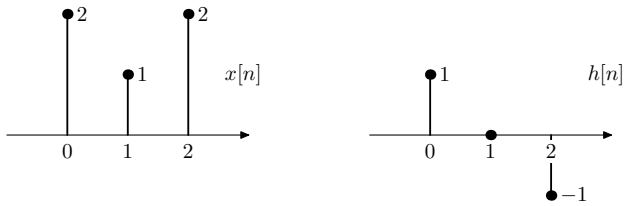
Antud konvolutsiooni arvutamisel saame mitmeid nulliseid liikmeid, mida üldiselt pole vaja välja kirjutada, kuid selguse mõttes teeme seda antud juhul siiski. Järgnevas konvolutsiooni arvutuses on mittenuullised liikmed ridade kaupa alla joonitud:

$$\begin{aligned} y[0] &= \underline{x[0]h[0]} + x[1]h[-1] + x[2]h[-2] + x[3]h[-3] + x[4]h[-4] = 2 \\ y[1] &= \underline{x[0]h[1]} + \underline{x[1]h[0]} + x[2]h[-1] + x[3]h[-2] + x[4]h[-3] = 7 \\ y[2] &= \underline{x[0]h[2]} + \underline{x[1]h[1]} + \underline{x[2]h[0]} + x[3]h[-1] + x[4]h[-2] = 14 \\ y[3] &= x[0]h[3] + \underline{x[1]h[2]} + \underline{x[2]h[1]} + x[3]h[0] + x[4]h[-1] = 14 \\ y[4] &= x[0]h[4] + x[1]h[3] + \underline{x[2]h[2]} + x[3]h[1] + x[4]h[0] = 8 \end{aligned}$$

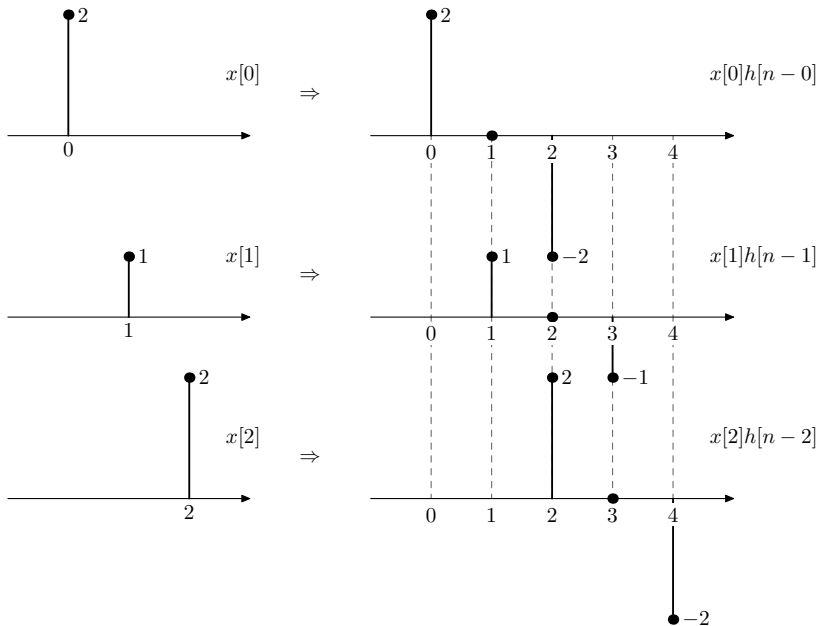
Nagu näha, saame sama tulemuse, mis z -teisendust kasutades. □

Näide 1.7 *Kasutades graafilist lahendamist, leida joonisel 1.1 toodud signaalide $x[n]$ ja $h[n]$ konvolutsioon.*

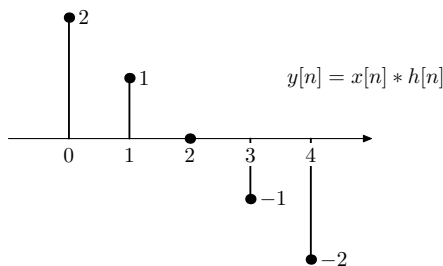
Lahendus. Antud ülesannet saab lahendada, kasutades otse konvolutsioonisumma valemit (1.3). Selleks tuleb võtta ühe sisendi $x[n]$ -i k -s liige ja korrutada temaga läbi teise sisend $h[n]$, mis on k võrra hilistatud (vt joonist 1.2).



Joonis 1.1 — Signaalid $x[n]$ ja $h[n]$



Joonis 1.2 — Konvolutsiooni leidmine graafiliselt, kasutades otse konvolutsioonisumma valemit 1.3



Joonis 1.3 — Näites 1.7 toodud signaalide $x[n]$ ja $h[n]$ konvolutsioon

Kirjutades konvolutsioonisummas olevad liikmed $x[0]h[n-0]$, $x[1]h[n-1]$ ja $x[2]h[n-2]$ sellisel moel graafiliselt, on soovitatav paigutada nad hilistuse mõttes üksteise alla õigele kohale. See on vajalik selleks, et lõpliku konvolutsiooni saamiseks on tarvis kõik osajadad vastavate elementide kaupa kokku liita. Seega, näiteks konvolutsiooni $y[n]$ kohal 0 leidmiseks liidame kokku kõikide osajadade liikmed kohal 0; tulemuseks saame $y[0] = 2$ (antud juhul tegelikult liitmist ei olegi, kuna ainult esimese osajada vastav liige on nullist erinev).

Konvolutsioon on graafiliselt kujutatud joonisel 1.3. □

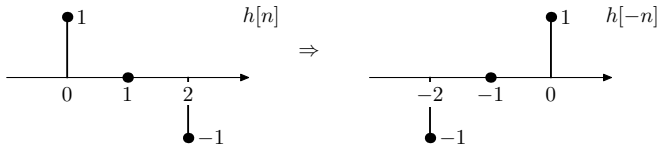
Näide 1.8 *Leida näites 1.7 toodud signaalide $x[n]$ ja $h[n]$ konvolutsioon graafiliselt, kasutades selleks $h[n]$ -i “peegeldamist”.*

Lahendus. “Peegeldamine” tähendab siin seda, et leitakse $h[n]$ -i peegelpilt 0 ajahetke suhtes, ehk teiste sõnadega, leitakse $h[-n]$ ($h[n]$ ja $h[-n]$ on summeerilised 0 ajahetke suhtes). Toimides sellisel moel, saab konvolutsioonisumma nüüd järgneva kuju:

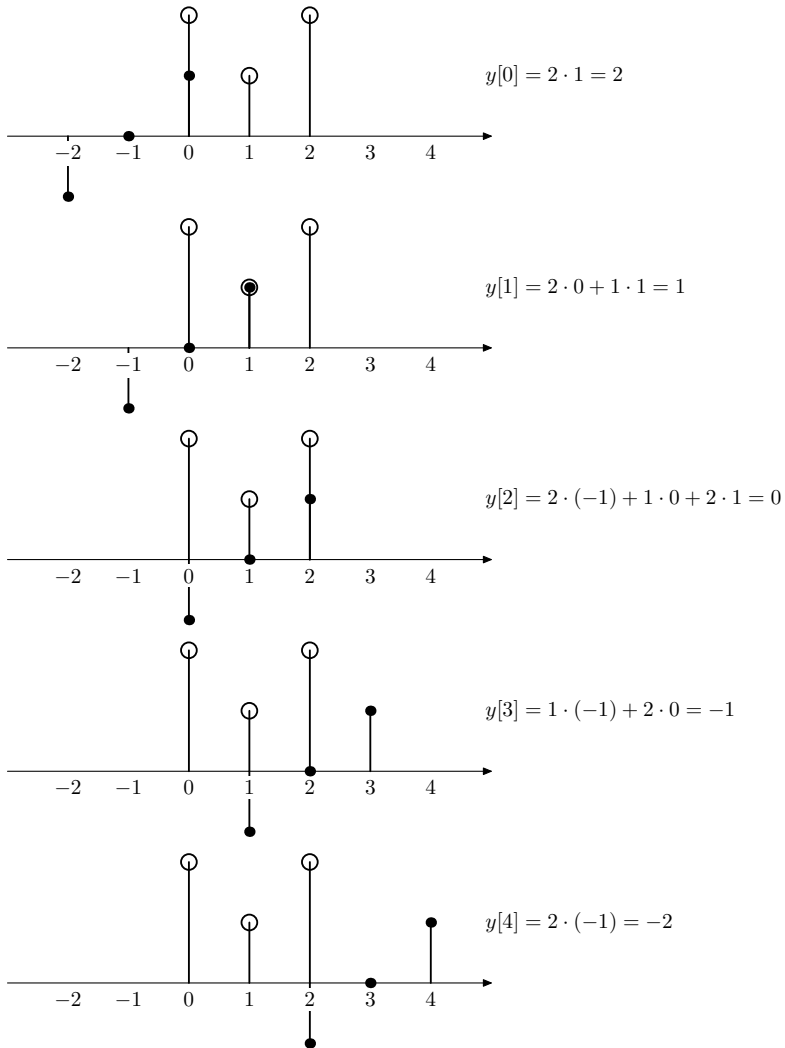
$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=0}^4 x[k]h[n-k] = \sum_{k=0}^4 x[k]h[-(n+k)]$$

“Peegeldatud” $h[n]$ on näidatud joonisel 1.4.

“Peegeldamise” mõte on selles, et nüüd saab $h[-n]$ -ga “sõita” üle $x[n]$ -i, korrutades ja seejärel summeerides kõik vastavad mittenuollised liikmed kokku. Joonisel 1.5 on kirjeldatud sellist toimingut samm sammuliselt. □



Joonis 1.4 – $h[n]$ -i “peegeldamine”



Joonis 1.5 – Konvolutsiooni leidmine “peegeldatud” $h[n]$ -ga

1.3 Impulsskaja, hüppekaja

Näide 1.9 Kausaalne süsteem on esitatud diferentsvõrrandiga $y[n] = ay[n-1] + x[n]$. Milline on selle süsteemi impulsskaja $h[n]$? Millise a väärtuse korral on süsteem stabiilne?

Lahendus. Süsteemi impulsskaja saame leida, kui anname tema sisendiks ühikimpulsi, s.t $x[n] = \delta[n]$. Kuna süsteem on kausaalne, siis tema $h[n] = 0$, kui $n < 0$. $h[n]$ -i leidmiseks hakkame nüüd n -le väärtusi andma, alustades 0-st:

$$\begin{aligned}h[0] &= ah[-1] + \delta[0] = a \cdot 0 + 1 = 1 \\h[1] &= ah[0] + \delta[1] = a \cdot 1 + \delta[1] = a \\h[2] &= ah[1] + \delta[2] = a \cdot a + \delta[2] = a^2 \\&\vdots \\h[n] &= ah[n-1] = a^2h[n-2] = \dots = a^n h[0] = a^n \\&\Downarrow \\h[n] &= a^n u[n],\end{aligned}$$

kus $u[n]$ on ühikhüpe.

Lineaarne, ajas invariantne süsteem on stabiilne, kui tema impulsskaja $h[n]$ on tõkestatud, s.t

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| < \infty$$

Seega, antud juhul saame stabiilsuse tingimuse järgneva:

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a|^k < \infty$$

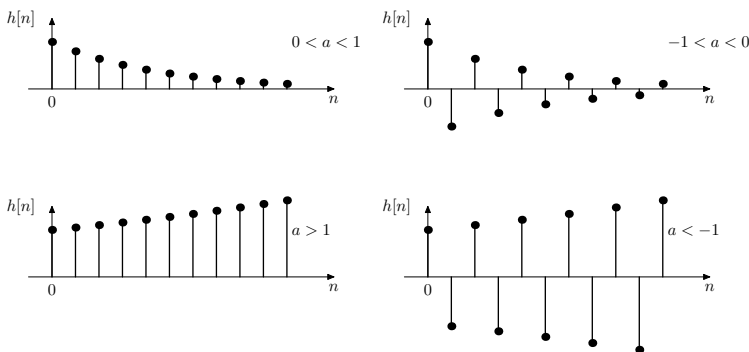
Tegemist on geomeetrilise reaga ja see koondub, kui $|a| < 1$, mis ongi ühtlasi ka antud süsteemi stabiilsuse tingimuseks.

Seda ülesannet saab lahendada ka z -teisendust kasutades. Selleks võtame esialgselt võrrandist z -teisenduse

$$y[n] = ay[n-1] + x[n] \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} Y(z) = az^{-1}Y(z) + X(z)$$

ja teisendame saadud tulemust nii, et $Y(z)$ -ga liikmed jäävad võrduse ühele poole ja $X(z)$ -ga liikmed teisele poole. Sellisel moel saame lihtsalt avaldada süsteemi ülekandefunktsiooni $H(z)$, mis on impulsskaja z -teisendus:

$$Y(z) - az^{-1}Y(z) = X(z) \Rightarrow Y(z)(1 - az^{-1}) = X(z)$$



Joonis 1.6 — Näites 1.9 saadud impulsskaja erinevate parameetri a väärtuste korral

Saadud tulemusest avaldame $H(z)$ -i:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1 - az^{-1}}$$

Impulsskaja leidmiseks võtame ülekandefunktsioonist $H(z)$ z -pöördteisen-
duse:

$$H(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} a^n u[n] = h[n]$$

Selleks et süsteem oleks stabiilne, peavad tema ülekandefunktsiooni $H(z)$ poolused asuma ühikringi sees. $H(z)$ -i avaldisest on näha, et ülekandefunktsiooni poolus asub kohas $z = a$. Seega, süsteem on stabiilne, kui $|a| < 1$.

Joonisel 1.6 on esitatud süsteemi impulsskajad erinevate a väärtuste jaoks. \square

Näide 1.10 *Kausaalne süsteem on esitatud diferentsvõrrandiga $y[n] = x[n] + \frac{3}{4}y[n-1] - \frac{1}{8}y[n-2]$. Milline on selle süsteemi impulsskaja $h[n]$ ja hüppekaja $g[n]$?*

Lahendus. Teisendame süsteemi nii, et sisendid $x[n]$ oleks ühel pool võrdust ja väljundid $y[n]$ oleks teisel pool ning võtame sellest z -teisenduse:

$$y[n] - \frac{3}{4}y[n-1] + \frac{1}{8}y[n-2] = x[n] \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} Y(z) \left(1 - \frac{3}{4}z^{-1} + \frac{1}{8}z^{-2} \right) = X(z)$$

Nüüd saame avaldada süsteemi ülekandefunktsiooni $H(z)$:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1 - \frac{3}{4}z^{-1} + \frac{1}{8}z^{-2}}$$

Impulsskaja $h[n]$ leidmiseks peame ülekandefunktsioonist võtma z -pöörde-
teisenduse, kuid antud juhul tuleb eelnevalt $H(z)$ -i avaldist lihtsustada ehk
see lahutada osamurdudeks.¹

Leiame kõigepealt $H(z)$ -i poolused:

$$1 - \frac{3}{4}z^{-1} + \frac{1}{8}z^{-2} = 0 \Rightarrow z^2 - \frac{3}{4}z + \frac{1}{8} = 0$$

$$z_{1,2} = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{4} \pm \sqrt{\frac{9}{16} - \frac{8}{16}} \right) \Rightarrow z_1 = \frac{1}{2} \text{ ja } z_2 = \frac{1}{4}$$

Kasutades leitud pooluseid, kirjutame ülekandefunktsiooni ringi ja lahutame
osamurdudeks:

$$H(z) = \frac{1}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})(1 - \frac{1}{4}z^{-1})} = \frac{A}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{B}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}}$$

$$A = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}} \Big|_{z=\frac{1}{2}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2$$

$$B = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} \Big|_{z=\frac{1}{4}} = \frac{1}{1 - 2} = -1$$

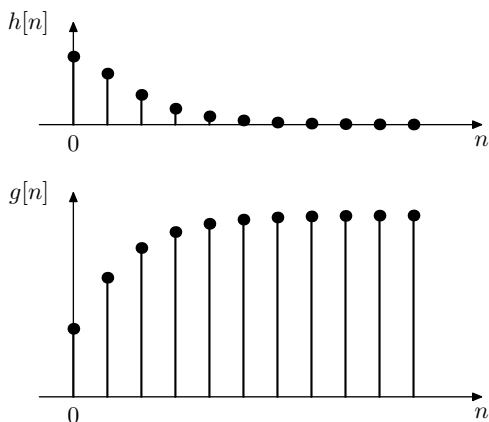
Asendades kordajad A ja B ülekandefunktsiooni avaldisse ja võttes sellest z -
pöörde teisenduse, saame järgneva impulsskaja $h[n]$:

$$H(z) = \frac{2}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} - \frac{1}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}} \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} 2 \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] = h[n]$$

Hüppekaja $g[n]$ leidmiseks kasutame asjaolu, et $g[n]$ -i z -teisenduse $G(z)$
saame, kui korrutame $H(z)$ -i avaldist ühikhüppe $u[n]$ -i z -teisendusega, s.t
 $1/(1 - z^{-1})$ -ga. Pärast korrutamist on tarvis võtta $G(z)$ -st z -pöörde teisendus,
kuid sellele eelneb üldjuhul veel osamurdudeks lahutamine. Seega saame

$$G(z) = \frac{1}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})(1 - \frac{1}{4}z^{-1})(1 - z^{-1})} = \frac{A}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{B}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}} + \frac{C}{1 - z^{-1}}$$

¹Osamurdudeks lahutamist on selgitatud lisan A.2.



Joonis 1.7 – Näites 1.10 saadud impulsskaja $h[n]$ ja hüppekaja $g[n]$

Leiame kordajad A , B ja C :

$$A = \frac{1}{(1 - \frac{1}{4}z^{-1})(1 - z^{-1})} \Bigg|_{z=\frac{1}{2}} = -2$$

$$B = \frac{1}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})(1 - z^{-1})} \Bigg|_{z=\frac{1}{4}} = \frac{1}{3}$$

$$C = \frac{1}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})(1 - \frac{1}{2}z^{-1})} \Bigg|_{z=1} = \frac{8}{3}$$

Asendades leitud kordajad $G(z)$ -i avaldisse ja võttes $G(z)$ -st z -pöördeisenduse, saame hüppekaja $g[n]$ -i:

$$G(z) = \frac{-2}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}} + \frac{\frac{8}{3}}{1 - z^{-1}}$$

$$\mathcal{Z} \downarrow$$

$$g[n] = \left(-2 \cdot \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4^n} + \frac{8}{3} \right) u[n]$$

Antud süsteemi impulsskaja $h[n]$ ja hüppekaja $g[n]$ on graafiliselt esitatud joonisel 1.7. □

1.4 Sageduskarakteristikud

Vaatame olukorda, kus süsteemi sisendiks on $x[n] = e^{j\omega n}$, s.t kompleksseksponent ringsagedusega ω . Sellisel juhul saame järgneva impulsskajaga $h[n]$ vastava lineaarse ajas invariantse süsteemi väljundi:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]e^{j\omega[n-k]} = e^{j\omega n} \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]e^{-j\omega k}}_{H(e^{j\omega})} = H(e^{j\omega})e^{j\omega n}$$

Suurst $H(e^{j\omega})$ nimetatakse süsteemi sageduskarakteristikuks:

$$H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})| \cdot e^{j\phi(\omega)},$$

kus $|H(e^{j\omega})|$ on amplituudikarakteristik ja $\phi(\omega)$ on faasikarakteristik. Sageduskarakteristikus olevat suurst j nimetatakse imaginaarühikuks.²

Näide 1.11 *Leida hilistussüsteemi $y[n] = x[n - \tau]$ sageduskarakteristik ning amplituudikarakteristik $|H(e^{j\omega})|$ ja faasikarakteristik $\phi(\omega)$.*

Lahendus. Kõigepealt anname süsteemi sisendiks $x[n] = e^{j\omega n}$ ning leiame sellele vastava väljundi:

$$y[n] = e^{j\omega[n-\tau]} = e^{-j\omega\tau} \cdot e^{j\omega n}$$

Siit saame süsteemi sageduskarakteristiku:

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega\tau}$$

Amplituudi- ja faasikarakteristiku leidmiseks eraldame sageduskarakteristikus reaali- ja imaginaarosa:

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega\tau} = \cos(\omega\tau) - j \sin(\omega\tau)$$

$$|H(e^{j\omega})| = \sqrt{\cos^2(\omega\tau) + \sin^2(\omega\tau)} = 1$$

$$\phi(\omega) = \arctan\left(-\frac{\sin(\omega\tau)}{\cos(\omega\tau)}\right) = -\omega\tau$$

Nagu näha, säilitab selline süsteem signaali amplituudi, faasi muutus on otsest sõltuvuses hilistuse τ suurusest. \square

²Kompleksarve on selgitatud lisas A.1.

Näide 1.12 On antud süsteem $y[n] = x[n] + y[n-1] - \frac{1}{2}y[n-2]$. Leida selle süsteemi amplituudikarakteristik $|H(e^{j\omega})|$ ja faasikarakteristik $\phi(\omega)$ ning esitada saadud tulemused graafiliselt.

Lahendus. Leiame kõigepealt süsteemi ülekandefunktsiooni, kasutades z -teisendust:

$$H(z) = \frac{1}{1 - z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2}}$$

Sageduskarakteristiku saamiseks tuleb ülekandefunktsioonis z asendada suurusega $e^{j\omega}$:

$$\begin{aligned} H(e^{j\omega}) &= H(z) \Big|_{z=e^{j\omega}} = \frac{1}{1 - e^{-j\omega} + \frac{1}{2}e^{-j2\omega}} = \\ &= \frac{1}{1 - \cos \omega + j \sin \omega + \frac{1}{2} \cos 2\omega - j \frac{1}{2} \sin 2\omega} = \\ &= \frac{1}{1 - \cos \omega + \frac{1}{2} \cos 2\omega + j(\sin \omega - \frac{1}{2} \sin 2\omega)} \end{aligned}$$

Leiame $H(e^{j\omega})$ -st amplituudikarakteristiku:

$$|H(e^{j\omega})| = \frac{1}{\sqrt{(1 - \cos \omega + \frac{1}{2} \cos 2\omega)^2 + (\sin \omega - \frac{1}{2} \sin 2\omega)^2}}$$

ja faasikarakteristiku:

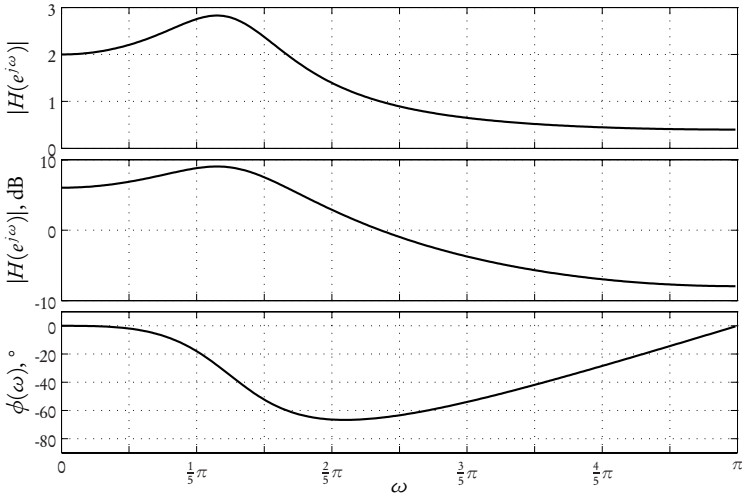
$$\phi(\omega) = -\arctan\left(\frac{\sin \omega - \frac{1}{2} \sin 2\omega}{1 - \cos \omega + \frac{1}{2} \cos 2\omega}\right)$$

$|H(e^{j\omega})|$ ja $\phi(\omega)$ on esitatud joonisel 1.8. □

1.5 Diskreetne Fourier' teisendus (DFT)

Olgu meil antud lõpliku pikkusega N jada $x[n]$ nii, et $x[n] = 0$, kui n jääb vahemikust $0 \leq n \leq N$ väljapoole. Sellisel jadal saame teostada N -punktilise diskreetse Fourier' teisenduse (DFT) $X[k]$, mis on defineeritud järgnevalt:

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j2\pi nk/N} \quad 0 \leq k \leq N-1 \quad (1.5)$$



Joonis 1.8 — Näites 1.12 esitatud süsteemi amplituudi- ja faasikarakteristikud

Analoogselt on defineeritud ka diskreetne Fourier' pöördteisendus:

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{j2\pi nk/N} \quad 0 \leq n \leq N-1 \quad (1.6)$$

Sageli kirjutatakse DFT-valem kujul

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{nk} \quad 0 \leq k \leq N-1, \quad (1.7)$$

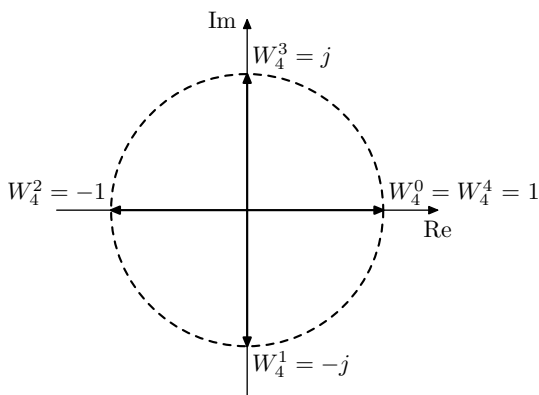
kus

$$W_N^{nk} = e^{-j\frac{2\pi nk}{N}} \quad (\textit{twiddle factor})$$

Kui meil on näiteks 4-punktiline signaal, millele leiame DFT, siis selle jaoks on W_4^{nk} esitatud graafiliselt joonisel 1.9.

Teiste sõnadega, W_4^{nk} kujutab endast ühikringil asuvat kompleksarvude hulka, antud juhul on neid 4. Tasub veel tähele panna, et need arvud on perioodilised (perioodiga N), antud juhul on perioodiks 4.

Näide 1.13 On antud jada $x[n] = \{0; 1; 0; 1; 0; 1; 0; 1\}$. Kasutades DFT definitsiooni (1.5), leida selle jada 8-punktiline DFT $X[k]$, lisaks veel eraldi $X[k]$ amplituud, s.t $|X[k]|$, ja faas, s.t $\angle X[k]$.



Joonis 1.9 – 4-punktise DFT kordaja (*twiddle factor*) W_4^{nk} paiknemine kompleksstasandil oleväl ühikringil

Lahendus. Kõigepealt leiame $x[n]$ -i diskreetse Fourier' teisenduse $X[k]$. Kasutades valemit (1.5), kirjutame DFT summa lahti ja lihtsustame seda:

$$\begin{aligned} X[k] &= \sum_{n=0}^7 x[n] e^{-j2\pi kn/8} = 0e^{-j2\pi k0/8} + 1e^{-j2\pi k1/8} + 0e^{-j2\pi k2/8} \\ &\quad + 1e^{-j2\pi k3/8} + 0e^{-j2\pi k4/8} + 1e^{-j2\pi k5/8} + 0e^{-j2\pi k6/8} + 1e^{-j2\pi k7/8} \\ &= e^{-j2\pi k1/8} + e^{-j2\pi k3/8} + e^{-j2\pi k5/8} + e^{-j2\pi k7/8} = \dots \end{aligned}$$

Edasiseks lihtsustamiseks võtame saadud tulemusest $e^{-j2\pi k4/8}$ sulgude ette ja grupeerime sulgudesse jäävaid liikmeid järgnevalt:

$$\dots = e^{-j2\pi k4/8} \left[\left(e^{j2\pi k1/8} + e^{-j2\pi k1/8} \right) + \left(e^{j2\pi k3/8} + e^{-j2\pi k3/8} \right) \right] = \dots$$

Sulgude ette võtmise idee seisneb selles, et nüüd saame sulgudes olevatele liikmetele rakendada lisas A.1 olevat valemit (A.4), täpsemalt selle koosinust puudutavat osa. Teiste sõnadega, selline sulgude ette võtmine võimaldab vabaneeda sulgudes olevatest imaginaarosadest. Võttes veel arvesse, et $e^{-j2\pi k4/8} = e^{-j\pi k} = (-1)^k$, saame lõpuks järgneva tulemuse:

$$\dots = (-1)^k \left[2 \cos\left(\frac{\pi k}{4}\right) + 2 \cos\left(\frac{3\pi k}{4}\right) \right]$$

Andes nüüd k -le väärtusi 0-st 7-ni, saame arvutada järgnevad $X[k]$ väärtused:

$$k = 0 \rightarrow X[0] = (-1)^0 (2 \cos 0 + 2 \cos 0) = 1(2 + 2) = 4$$

$$k = 1 \rightarrow X[1] = (-1)^1 \left(2 \cos \frac{\pi}{4} + 2 \cos \frac{3\pi}{4} \right) = -1(\sqrt{2} - \sqrt{2}) = 0$$

$$k = 2 \rightarrow X[2] = (-1)^2 \left(2 \cos \frac{\pi}{2} + 2 \cos \frac{3\pi}{2} \right) = 1(0 - 0) = 0$$

$$k = 3 \rightarrow X[3] = (-1)^3 \left(2 \cos \frac{3\pi}{4} + 2 \cos \frac{9\pi}{4} \right) = -1(-\sqrt{2} + \sqrt{2}) = 0$$

$$k = 4 \rightarrow X[4] = (-1)^4 (2 \cos \pi + 2 \cos 3\pi) = 1(-2 - 2) = -4$$

$$k = 5 \rightarrow X[5] = (-1)^5 \left(2 \cos \frac{5\pi}{4} + 2 \cos \frac{15\pi}{4} \right) = -1(-\sqrt{2} + \sqrt{2}) = 0$$

$$k = 6 \rightarrow X[6] = (-1)^6 \left(2 \cos \frac{3\pi}{2} + 2 \cos \frac{9\pi}{2} \right) = 1(0 + 0) = 0$$

$$k = 7 \rightarrow X[7] = (-1)^7 \left(2 \cos \frac{7\pi}{4} + 2 \cos \frac{21\pi}{4} \right) = -1(\sqrt{2} - \sqrt{2}) = 0$$

Kirjutades saadud tulemuse kompaktselt, saame

$$X[k] = \{4; 0; 0; 0; -4; 0; 0; 0\}$$

Kasutades lisa A.1 toodud seoseid ja võttes arvesse, et antud juhul on $X[k]$ reaalne, s.t tema imaginaaros on null, saame

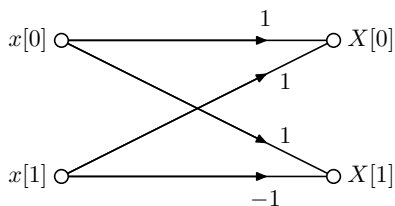
$$\begin{aligned} |X[k]| &= \{4; 0; 0; 0; 4; 0; 0; 0\} \\ \sphericalangle X[k] &= \{0; \times; \times; \times; \pi; \times; \times; \times\} \end{aligned}$$

Märk \times tähendab seda, et antud kohas on $X[k]$ faas määramata. □

Näide 1.14 *Olgu meil lihtne 2-punktine signaal, millele leiame DFT.*

Lahendus. Kasutades valemit (1.7), saame

$$\begin{aligned} X[k] &= \sum_{n=0}^1 x[n] W_2^{nk} \\ &= x[0] W_2^{0k} + x[1] W_2^{1k} \quad k = 0, 1 \end{aligned}$$



Joonis 1.10 — Näites 1.14 saadud 2-punktise DFT arvutamise n.n. *butterfly flowgraph*

Kuna

$$W_2^0 = e^{-j \frac{2\pi \cdot 0}{2}} = 1 \quad \text{ja} \quad W_2^1 = e^{-j \frac{2\pi \cdot 1}{2}} = -1,$$

siis saame järgneva DFT:

$$X[0] = x[0] \cdot 1 + x[1] \cdot 1 = x[0] + x[1]$$

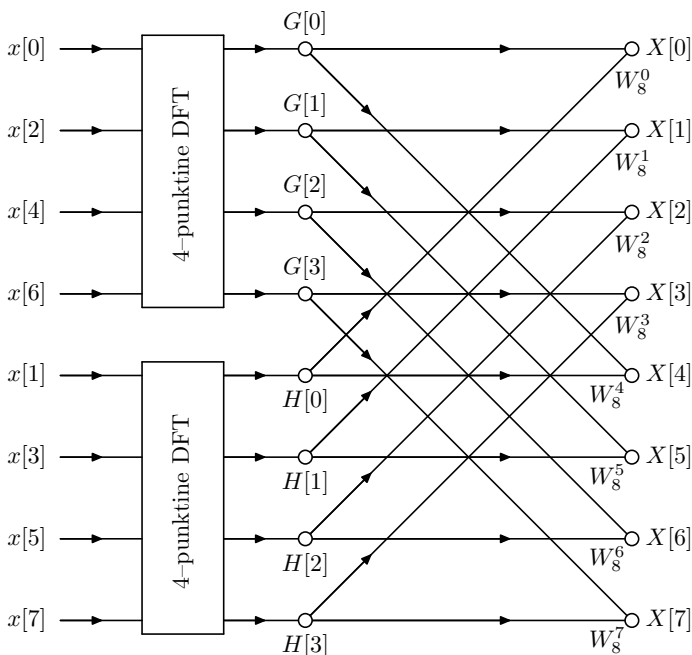
$$X[1] = x[0] \cdot 1 + x[1] \cdot (-1) = x[0] - x[1]$$

Seega saame 2-punktist DFT-d kujutada joonisel 1.10 esitatud nn liblikana (*butterfly flowgraph*). □

1.5.1 Kiire Fourier' teisendus (FFT)

FFT rakendamiseks peab sisendsignaal $x[n]$ olema pikkusega 2^m , kus m on positiivne täisarv. Järgnevalt rakendatakse tavalist DFT-valemit, kuid sisendsignaal $x[n]$ jagatakse kaheks osaks — paarisarvuliste ja paarituarvuliste indeksite järgi:

$$\begin{aligned} X[k] &= \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{nk} \\ &= \underbrace{\sum_{r=0}^{N/2-1} x[2r] W_N^{2rk}}_{n \text{ on paaris}} + \underbrace{\sum_{r=0}^{N/2-1} x[2r+1] W_N^{2rk+k}}_{n \text{ on paaritu}} \\ &= \sum_{r=0}^{N/2-1} x[2r] W_N^{2rk} + W_N^k \sum_{r=0}^{N/2-1} x[2r+1] W_N^{2rk} \end{aligned}$$



Joonis 1.11 – 8-punktkine DFT jagatuna kaheks 4-punktkiseks DFT-ks

Kuna $W_N^{2rk} = e^{-j\frac{2\pi rk}{N}} = e^{-j\frac{2\pi rk}{N/2}} = W_{N/2}^{rk}$, siis saame

$$X[k] = \sum_{r=0}^{N/2-1} x[2r] W_{N/2}^{rk} + W_N^k \sum_{r=0}^{N/2-1} x[2r+1] W_{N/2}^{rk} = G[k] + W_N^k H[k]$$

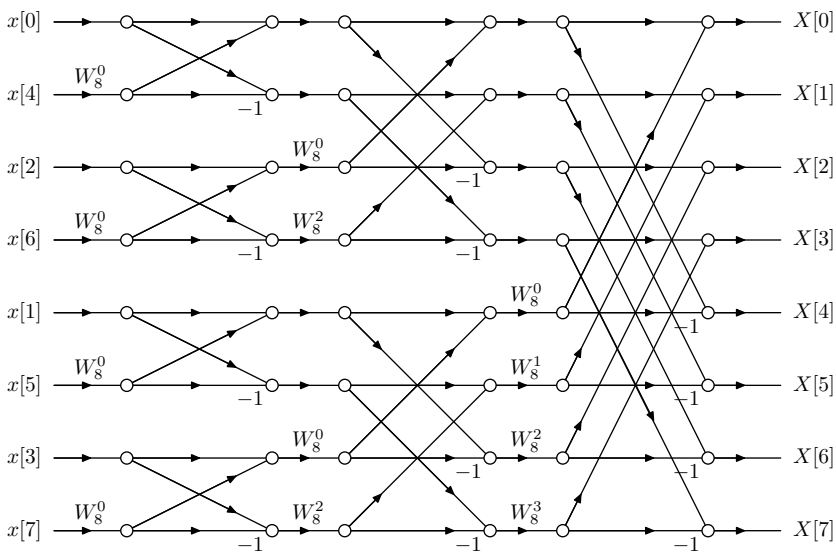
$$k = 0, \dots, N-1,$$

kus $G[k]$ on pikkusega $N/2$ DFT paarisarvuliste n -de jaoks ja $H[k]$ on pikkusega $N/2$ DFT paarituarvuliste n -de jaoks.

Tuleb tähele panna, et $X[k]$ arvutamisel $k = 0, \dots, N-1$, kuid $G[k+N/2] = G[k]$ ja $H[k+N/2] = H[k]$, kuna nii $G[k]$ kui ka $H[k]$ on $N/2$ -punktised DFT-d. Kui $N = 8$, siis saab seda kujutada joonisel 1.11 toodud diagrammina.

Kordajate W_N -de arvu saab veelgi vähendada, kuna

$$W_N^{k+N/2} = e^{-j\frac{2\pi(k+N/2)}{N}} = e^{-j\frac{2\pi k}{N}} \cdot e^{-j\frac{2\pi N/2}{N}} = e^{-j\frac{2\pi k}{N}} \cdot (-1) = -W_N^k$$



Joonis 1.12 — 8-punktine ajas detsimeeritud FFT-diagramm

Näiteks $X[1]$ ja $X[5]$ saab seega arvutada järgnevalt:

$$X[1] = G[1] + W_8^1 H[1]$$

$$X[5] = G[1] - W_8^1 H[1]$$

Kui joonisel 1.11 toodud diagrammis 4-punktine DFT asendada 2-punktistega, mis omakorda asendatakse nn *butterfly flowgraph*-ga (vt näide 1.14), siis saame nn ajas detsimeeritud FFT-algoritmi, mis on kujutatud joonisel 1.12.

Näide 1.15 *Leiame näites 1.13 toodud signaali DFT, kasutades selleks ajas detsimeeritud FFT-algoritmi.*

Lahendus. Leiame kõigepealt FFT-algoritmis esinevad kordajad $W_8^0 \dots W_8^3$:

$$W_8^0 = 1, \quad W_8^1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 - j); \quad W_8^2 = -j; \quad W_8^3 = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1 - j)$$

Edasi on mõttekas FFT-d arvutada etappide kaupa, s.t et leiame kõigepealt vahetulemuse pärast esimesi “liblikaid”, siis teisi “liblikaid” ja pärast kolmandaid “liblikaid” saame lõpptulemuse.

Esimeses veerus peab olema sisendsignaali, kusjuures tähelepanu tuleb pöörata ka elementide järjekorrale, vt joonisel 1.12 toodud ajas detsimeeritud FFT-diagrammi! Kogu toiming on etappide kaupa ära toodud järgnevas tabelis (miinus ühega korrutamist ei ole näidatud):

$$\begin{array}{l}
 x[0] \\
 x[4] \\
 x[2] \\
 x[6] \\
 x[1] \\
 x[5] \\
 x[3] \\
 x[7]
 \end{array}
 \left\| \left\| \begin{array}{l}
 0 \\
 0 \cdot 1 \\
 0 \\
 0 \cdot 1 \\
 1 \\
 1 \cdot 1 \\
 1 \\
 1 \cdot 1
 \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{l}
 0 \\
 0 \\
 0 \cdot 1 \\
 0 \cdot (-j) \\
 2 \\
 0 \\
 2 \cdot 1 \\
 0 \cdot (-j)
 \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{l}
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 4 \cdot 1 \\
 0 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}(1-j) \\
 0 \cdot (-j) \\
 0 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}(-1-j)
 \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{l}
 4 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 -4 \\
 0 \\
 0 \\
 0
 \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{l}
 X[0] \\
 X[1] \\
 X[2] \\
 X[3] \\
 X[4] \\
 X[5] \\
 X[6] \\
 X[7]
 \end{array} \right.$$

Seega, kui oleme sisendsignaali õigesse järjekorda pannud (indeksite *bit reversal* järgi), siis on meil jada kujul $\{0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 1\ 1\}$. Pärast esimest etappi on jadaks $\{0\ 0\ 0\ 0\ 2\ 0\ 2\ 0\}$, pärast teist etappi $\{0\ 0\ 0\ 0\ 4\ 0\ 0\ 0\}$ ning pärast kolmandat etappi saame tulemuseks $\{4\ 0\ 0\ 0\ -4\ 0\ 0\ 0\}$, mis ongi sisendsignaali DFT. \square

1.6 Filtrite disainimine

Filtrite disainimise all mõeldakse antud filtrile vastava diferentsvõrrandi korrajate leidmist.

1.6.1 *Notch*-filter

Olgu meil näiteks olukord, kus mingi olemasolev signaal sisaldab võrgupinge tekitatud 50 Hz või 60 Hz häiret. Eesmärgiks on disainida selline filter, mis antud häire kõrvaldaks või vähemalt vähendaks seda oluliselt.

Sellise häire kõrvaldamise üheks võimaluseks on lihtne 2 nulliga *notch*-filter. Sellise filtri ülekandefunktsiooni saamiseks tuleb z -tasandil panna kaks nulli (kaaskompleksed) ühikringil just täpselt häire kohale. Teiste sõnadega, tuleb leida häire sagedusele vastav nurk, teades, et poolele diskreetimissagedusele $F_s/2$ vastab z -tasandil nurk π .

Näide 1.16 *Olgu signaali diskreetimissagedus $F_s = 720$ Hz ja häire sagedus $F_H = 60$ Hz. Disainida kahe nulliga filter, mis seda häiret vähendab. Lisaks leida filtri impulsskaja ja tema sageduskarakteristikud ning esitada need graafiliselt. Arvutada ka filtri rühmahilistus.*

Lahendus. Leiame kõigepealt 60 Hz-le vastava z -tasandi nurga, võttes arvesse, et 360 Hz-le vastab nurk π :

$$60Hz \rightarrow \frac{\pi \cdot 60}{360} = \frac{\pi}{6}$$

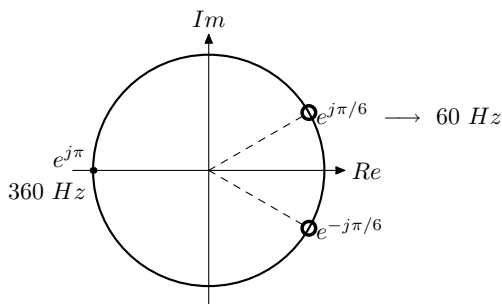
Järgnevalt kujutame nullid (○) vastavatel kohtadel ühikringil, vt joonis 1.13.

Edasi paneme kirja antud filtri ülekandefunktsiooni:

$$\begin{aligned} H(z) &= (1 - e^{j\pi/6} \cdot z^{-1}) (1 - e^{-j\pi/6} \cdot z^{-1}) \\ &= 1 - (e^{j\pi/6} + e^{-j\pi/6}) z^{-1} + z^{-2} \\ &= 1 - 2 \cos(\pi/6) \cdot z^{-1} + z^{-2} \\ &= 1 - \sqrt{3} \cdot z^{-1} + z^{-2} \end{aligned}$$

Kuna $H(z) = Y(z)/X(z)$, siis saame ülekandefunktsioonist tuletada seose sisendi ja väljundi vahel:

$$Y(z) = (1 - \sqrt{3} \cdot z^{-1} + z^{-2})X(z)$$



Joonis 1.13 — Näites 1.16 toodud filtri nullide (○) paiknemine kompleksstaandil

Võttes saadud tulemusest z -pöörde teisenduse, saamegi filtrile vastava diferentsvõrrandi:

$$y[n] = x[n] - \sqrt{3}x[n-1] + x[n-2]$$

Andes süsteemi sisendisse ühikimpulsi $\delta[n]$, saame tema impulsskaja $b[n]$ -i:

$$b[n] = \delta[n] - \sqrt{3}\delta[n-1] + \delta[n-2]$$

Saame järgneva filtri sageduskarakteristiku $H(e^{j\omega})$:

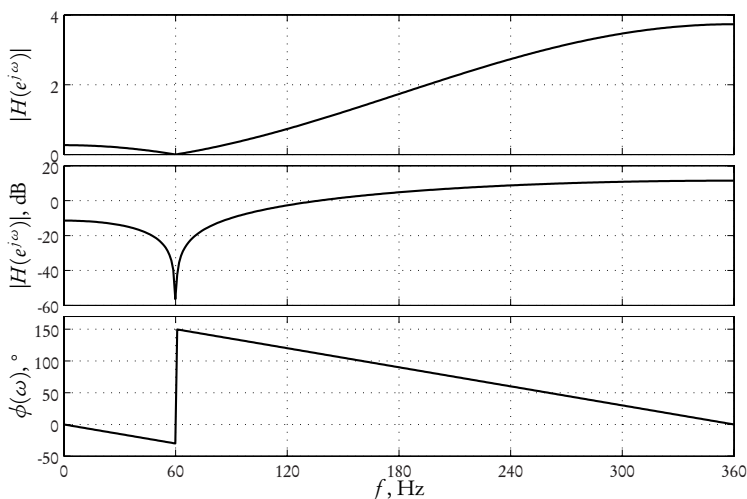
$$\begin{aligned} H(e^{j\omega}) &= 1 - \sqrt{3} \cdot e^{-j\omega} + e^{-j2\omega} \\ &= e^{-j\omega} (e^{j\omega} + e^{-j\omega} - \sqrt{3}) \\ &= e^{-j\omega} (2 \cos \omega - \sqrt{3}) \end{aligned}$$

Saadud seosest saame leida amplituudikarakteristiku $|H(e^{j\omega})|$:

$$|H(e^{j\omega})| = \underbrace{|e^{-j\omega}|}_{=1} \cdot |2 \cos \omega - \sqrt{3}| = |2 \cos \omega - \sqrt{3}|$$

Faasikarakteristiku $\phi(\omega)$ leidmiseks teisendame sageduskarakteristiku sobivamale kujule:

$$\begin{aligned} H(e^{j\omega}) &= e^{-j\omega} (2 \cos \omega - \sqrt{3}) \\ &= (\cos \omega - j \sin \omega) (2 \cos \omega - \sqrt{3}) \\ &= 2 \cos^2 \omega - \sqrt{3} \cos \omega - j 2 \sin \omega \cos \omega + j \sqrt{3} \sin \omega \\ &= \cos \omega (2 \cos \omega - \sqrt{3}) - j \sin \omega (2 \cos \omega - \sqrt{3}) \end{aligned}$$



Joonis 1.14 – Näites 1.16 toodud *notch*-filtri amplituudi- ja faasikarakteristikud

Saadud $H(e^{j\omega})$ kujust saame hõlpsalt avaldada faasikarakteristiku $\phi(\omega)$:

$$\begin{aligned} \phi(\omega) &= \arctan \left[\frac{\text{Im } H(e^{j\omega})}{\text{Re } H(e^{j\omega})} \right] = \arctan \left[-\frac{\sin \omega(2 \cos \omega - \sqrt{3})}{\cos \omega(2 \cos \omega - \sqrt{3})} \right] = \\ &= \arctan(-\tan \omega) = -\omega \end{aligned}$$

Rühmahilistuse $\tau_g(\omega)$ saame leida järgnevalt:

$$\tau_g(\omega) = -\frac{d\phi(\omega)}{d\omega} = 1$$

Nagu näha, on antud filtri jaoks rühmahilistus konstantne suurus (ei sõltu ω -st), mis tähendab, et filter hilistab kõiki sagedusi võrdselt.

Leitud $|H(e^{j\omega})|$ (esitatuna nii lineaarses kui ka logaritmilises skaalas) ja $\phi(\omega)$ on näidatud joonisel 1.14 (pane tähele, et joonisel on sagedusteljel näidatud filtri reaalsed sagedused, mitte ringsagedus ω !). \square

Näide 1.17 Labendame näites 1.16 toodud ülesande, käsitledes filtri nullkohti eraldi.

Lahendus. Alustame sellest, et meil on ülekandefunktsioon kujul

$$H(z) = (1 - e^{j\pi/6} \cdot z^{-1}) (1 - e^{-j\pi/6} \cdot z^{-1})$$

Kasutades seda ülekandefunktsiooni kuju, kirjutame välja sageduskarakteristiku:

$$\begin{aligned} H(e^{j\omega}) &= (1 - e^{j\pi/6} \cdot e^{-j\omega}) (1 - e^{-j\pi/6} \cdot e^{-j\omega}) \\ &= (1 - e^{j(\pi/6 - \omega)}) (1 - e^{-j(\pi/6 + \omega)}) = \dots \end{aligned}$$

Nüüd kasutame Euleri valemit (A.3) ja viime sulgudes olevad kompleksarvud trigonomeetrilisele kujule:

$$\begin{aligned} \dots &= \left[1 - \cos\left(\frac{\pi}{6} - \omega\right) - j \sin\left(\frac{\pi}{6} - \omega\right) \right] \cdot \\ &\quad \cdot \left[1 - \cos\left(\frac{\pi}{6} + \omega\right) + j \sin\left(\frac{\pi}{6} + \omega\right) \right] = \dots \end{aligned}$$

Lihtsustamise mõttes tähistame esimestes nurksulgudes oleva avaldise L_1 -ga ja teistes oleva L_2 -ga. Seega saame lõpuks:

$$\dots = L_1 \cdot L_2$$

Amplituudi- ja faasikarakteristikud on nüüd avaldatavad järgmisel kujul:

$$|H(e^{j\omega})| = |L_1| \cdot |L_2| \quad \text{ja} \quad \phi(\omega) = \sphericalangle L_1 + \sphericalangle L_2,$$

kus \sphericalangle tähistab faasi.

Leides kummagi nulli jaoks eraldi amplituudi ja faasi, saame üldjuhul lihtsamad avaldised ja see lihtsustab arvutamist.

Leiame $|L_1|$ ja $|L_2|$:

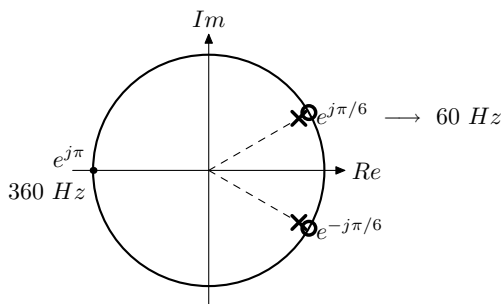
$$|L_1| = \sqrt{\left(1 - \cos\left(\frac{\pi}{6} - \omega\right)\right)^2 + \sin^2\left(\frac{\pi}{6} - \omega\right)} = \sqrt{2 - 2\cos\left(\frac{\pi}{6} - \omega\right)}$$

$$|L_2| = \sqrt{\left(1 - \cos\left(\frac{\pi}{6} + \omega\right)\right)^2 + \sin^2\left(\frac{\pi}{6} + \omega\right)} = \sqrt{2 - 2\cos\left(\frac{\pi}{6} + \omega\right)}$$

ning $\sphericalangle L_1$ ja $\sphericalangle L_2$:

$$\sphericalangle L_1 = -\arctan\left(\frac{\sin\left(\frac{\pi}{6} - \omega\right)}{1 - \cos\left(\frac{\pi}{6} - \omega\right)}\right)$$

$$\sphericalangle L_2 = \arctan\left(\frac{\sin\left(\frac{\pi}{6} + \omega\right)}{1 - \cos\left(\frac{\pi}{6} + \omega\right)}\right)$$



Joonis 1.15 — Näites 1.18 toodud filtri nullide (○) ja pooluste (×) paiknemine kompleksstasandil

Lõpuks saame välja kirjutada ka $|H(e^{j\omega})|$ ja $\phi(\omega)$:

$$|H(e^{j\omega})| = \sqrt{2 - 2 \cos\left(\frac{\pi}{6} - \omega\right)} \cdot \sqrt{2 - 2 \cos\left(\frac{\pi}{6} + \omega\right)}$$

$$\phi(\omega) = -\arctan\left(\frac{\sin\left(\frac{\pi}{6} - \omega\right)}{1 - \cos\left(\frac{\pi}{6} - \omega\right)}\right) + \arctan\left(\frac{\sin\left(\frac{\pi}{6} + \omega\right)}{1 - \cos\left(\frac{\pi}{6} + \omega\right)}\right)$$

Andes nüüd ω -le väärtusi 0-st π -ni ning arvutades, saame samad tulemused, mis on toodud näites 1.16 oleval joonisel. \square

Näide 1.18 Täiendada näites 1.16 toodud filtrit, lisades kaks poolust.

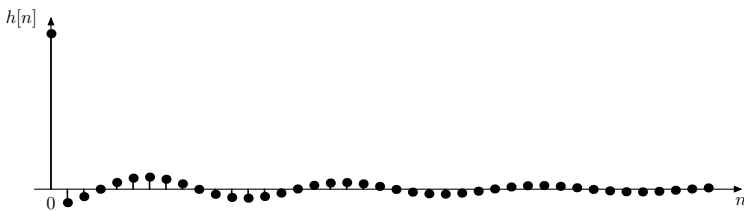
Lahendus. Lisades pooluseid, tuleb mees pidada, et need peavad asuma ühikringi sees ja joonel, mis läheb z -tasandi nullkohast filtri nullini. Poolus peaks asuma ühikringile suhteliselt lähedal, sest siis saame filtrile teravama kuju. Samas peab arvestama, et kui poolus on ühikringile väga lähedal, siis võib süsteem ebastabiilseks muutuda.

Lisame kaks poolust (tähistatud punase ristiga), mis asuvad nullkohast 0,95 kaugusel ($0,95e^{j\pi/6}$ ja $0,95e^{-j\pi/6}$), vt joonist 1.15.

Antud filtri ülekandefunktsiooni lugeja on sama mis näites 1.16, kuna nullid on samad, küll aga muutub nimetaja:

$$H(z) = \frac{(1 - e^{j\pi/6} \cdot z^{-1})(1 - e^{-j\pi/6} \cdot z^{-1})}{(1 - 0,95e^{j\pi/6} \cdot z^{-1})(1 - 0,95e^{-j\pi/6} \cdot z^{-1})}$$

$$= \frac{1 - 1,7321z^{-1} + z^{-2}}{1 - 1,6454z^{-1} + 0,9025z^{-2}}$$



Joonis 1.16 — Näites 1.18 toodud filtri impulsskaja $h[n]$

Võttes saadud ülekandefunktsioonist z -pöördteisenduse, asendades ja paigutades liikmeid ringi, saame filtrile vastava diferentsvõrrandi:

$$y[n] = 1,6454y[n-1] - 0,9025y[n-2] + x[n] - 1,7321x[n-1] + x[n-2]$$

Antud filter on IIR (*Infinite Impulse Response*) tüüpi filter, s.t tema impulsskaja on lõpmatult pikk. Impulsskaja algusosa on ära toodud joonisel 1.16.

Sageduskarakteristiku leidmisel on antud juhul sobivam kasutada näites 1.17 toodud lähenemist:

$$\begin{aligned} H(e^{j\omega}) &= \frac{(1 - e^{j\pi/6} \cdot e^{-j\omega})(1 - e^{-j\pi/6} \cdot e^{-j\omega})}{(1 - 0,95e^{j\pi/6} \cdot e^{-j\omega})(1 - 0,95e^{-j\pi/6} \cdot e^{-j\omega})} \\ &= \frac{(1 - e^{j(\pi/6-\omega)})(1 - e^{-j(\pi/6+\omega)})}{(1 - 0,95e^{j(\pi/6-\omega)})(1 - 0,95e^{-j(\pi/6+\omega)})} = \dots \end{aligned}$$

Kasutades jällegi nii lugejas kui ka nimetajas Euleri valemit (A.3) ning tähistades nullid ja poolused vastavalt L_1 , L_2 , N_1 ja N_2 -ga, saame

$$\begin{aligned} \dots &= \frac{\overbrace{[1 - \cos(\pi/6 - \omega) - j \sin(\pi/6 - \omega)]}^{=L_1}}{\underbrace{[1 - 0,95 \cos(\pi/6 - \omega) - j0,95 \sin(\pi/6 - \omega)]}_{=N_1}} \cdot \\ &\quad \cdot \frac{\overbrace{[1 - \cos(\pi/6 + \omega) + j \sin(\pi/6 + \omega)]}^{=L_2}}{\underbrace{[1 - 0,95 \cos(\pi/6 + \omega) + j0,95 \sin(\pi/6 + \omega)]}_{=N_2}} \end{aligned}$$

Amplituudikarakteristiku $|H(e^{j\omega})|$ saame avaldada, kui

$$|H(e^{j\omega})| = \frac{|L_1| \cdot |L_2|}{|N_1| \cdot |N_2|},$$

ja faasikarakteristiku $\phi(\omega)$, kui

$$\phi(\omega) = \sphericalangle L_1 + \sphericalangle L_2 - \sphericalangle N_1 - \sphericalangle N_2$$

Leiame vastavad suurused:

$$|L1| = \sqrt{2 - 2 \cos(\pi/6 - \omega)}$$

$$|L2| = \sqrt{2 - 2 \cos(\pi/6 + \omega)}$$

$$|N1| = \sqrt{1,9025 - 1,9 \cos(\pi/6 - \omega)}$$

$$|N2| = \sqrt{1,9025 - 1,9 \cos(\pi/6 + \omega)}$$

ning

$$\sphericalangle L1 = -\arctan\left(\frac{\sin(\pi/6 - \omega)}{1 - \cos(\pi/6 - \omega)}\right)$$

$$\sphericalangle L2 = \arctan\left(\frac{\sin(\pi/6 + \omega)}{1 - \cos(\pi/6 + \omega)}\right)$$

$$\sphericalangle N1 = -\arctan\left(\frac{0,95 \sin(\pi/6 - \omega)}{1 - 0,95 \cos(\pi/6 - \omega)}\right)$$

$$\sphericalangle N2 = \arctan\left(\frac{0,95 \sin(\pi/6 + \omega)}{1 - 0,95 \cos(\pi/6 + \omega)}\right)$$

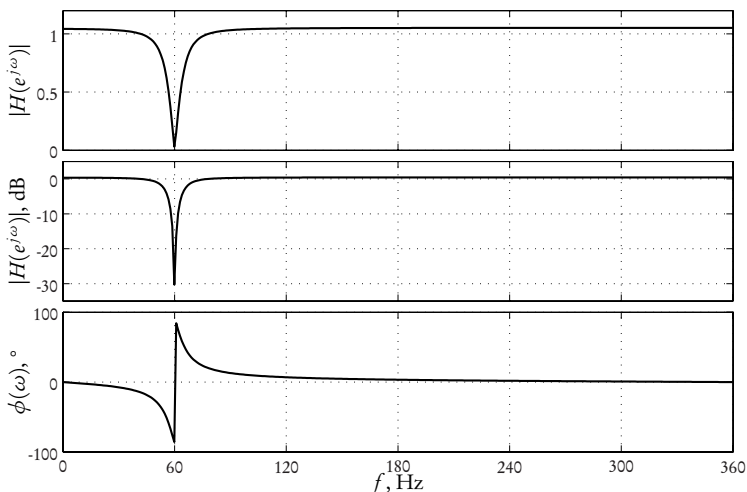
Kasutades saadud tulemusi, saame

$$|H(e^{j\omega})| = \sqrt{\frac{(2 - 2 \cos(\pi/6 - \omega))(2 - 2 \cos(\pi/6 + \omega))}{(1,9025 - 1,9 \cos(\pi/6 - \omega))(1,9025 - 1,9 \cos(\pi/6 + \omega))}}$$

ja

$$\begin{aligned} \phi(\omega) = & -\arctan\left(\frac{\sin(\pi/6 - \omega)}{1 - \cos(\pi/6 - \omega)}\right) + \arctan\left(\frac{\sin(\pi/6 + \omega)}{1 - \cos(\pi/6 + \omega)}\right) + \\ & + \arctan\left(\frac{0,95 \sin(\pi/6 - \omega)}{1 - 0,95 \cos(\pi/6 - \omega)}\right) - \arctan\left(\frac{0,95 \sin(\pi/6 + \omega)}{1 - 0,95 \cos(\pi/6 + \omega)}\right) \end{aligned}$$

Vastavad amplituudi- ja faasikarakteristikud on esitatud graafiliselt joonisel 1.17. Kui võrrelda tulemust näites 1.16 olevaga, siis on näha, et amplituudikarakteristiku kuju on oluliselt paremaks muutunud, s.t emaldatakse peamiselt 60 Hz sagedust. Kuid faasikarakteristikult on ka näha, et faas pole enam lineaarne ja kõige rohkem on faas moonutatud just 60 Hz ümbruses. \square



Joonis 1.17 — Näites 1.18 toodud filtri amplituudi- ja faasikarakteristikud

Näide 1.19 Lahendada näites 1.18 toodud ülesanne, kasutades MATLAB-i ning nihutades pooluseid nii, et nad oleks ühikringist (ühikringi seespool) kaugusel 0,01. Lisaks kujutada graafiliselt filtri rühmahilistust.

Lahendus. On kaks nullkohta: $e^{j\pi/6}$ ja $e^{-j\pi/6}$; ning kaks poolust: $0,99e^{j\pi/6}$ ja $0,99e^{-j\pi/6}$. Leiame neile vastava filtri ülekandefunktsiooni $H(z)$, kus nullidest moodustub lugejas olev polünoom lug ja poolustest nimetajas olev polünoom nim :

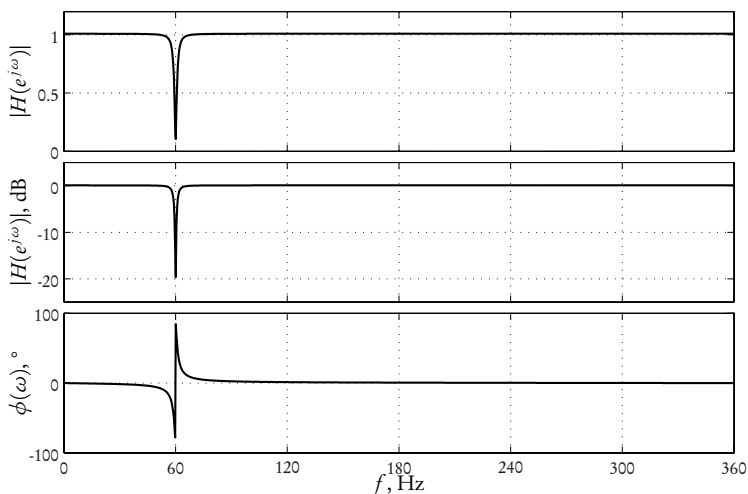
```
>> lug = poly([exp(j*pi/6) exp(-j*pi/6)])
lug =
    1.0000   -1.7321    1.0000
>> nim = poly([0.99*exp(j*pi/6) 0.99*exp(-j*pi/6)])
nim =
    1.0000   -1.7147    0.9801
```

Seega vastab antud nullidele ja poolustele järgmine ülekandefunktsioon:

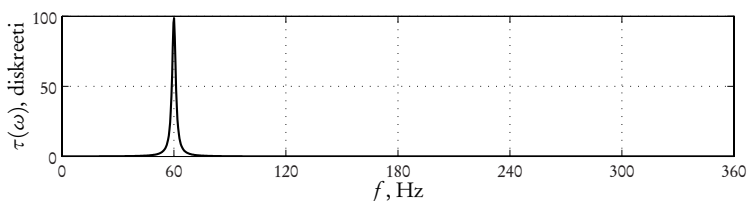
$$H(z) = \frac{1 - 1,7321z^{-1} + z^{-2}}{1 - 1,7147z^{-1} + 0,9801z^{-2}}$$

Võttes $H(z)$ -st z -pöördeisenduse, saame filtrile vastava diferentsvõrrandi:

$$y[n] = 1,7147y[n-1] - 0,9801y[n-2] + x[n] - 1,7321x[n-1] + x[n-2]$$



Joonis 1.18 — Näites 1.19 toodud filtri amplituudi- ja faasikarakteristikud



Joonis 1.19 — Näites 1.19 toodud filtri rühmahilistuskarakteristik

Uurime filtri sageduskarakteristikut $H(e^{j\omega})$:

```
[H, f] = freqz(lug, nim);
```

Amplituudikarakteristiku H_amp ja faasikarakteristiku H_pha saame järgnevalt:

```
>> H_amp = abs(H);
```

```
>> H_pha = angle(H);
```

Leiame rühmahilistuse tau:

```
>> tau = grpdelay(lug, nim, 1000);
```

Saadud karakteristikud on esitatud joonistel 1.18 ja 1.19

□

1.6.2 FIR-filtrite disainimine akna meetodiga

Antud meetod seisneb lühidalt selles, et kõigepealt luuakse filtri soovitud sageduskarakteristik sagedusvallas, seejärel teisendatakse karakteristik Fourier' pöördteisendust kasutades ajavaldaks, s.t saadakse impulsskaja. Seejärel tuleb impulsskaja lühendada ja nihutada (kausaalseks muutmine) ning enamasti ka aknafunktsiooniga korrutada.

Näide 1.20 *Disainida FIR-madalpääsfilter, mille lõikesagedus on $\omega_c = \pi/10$, järk 8 ning aknafunktsiooniks on nelinurkne aken. Lisaks täiendada filtrit nii, et sagedusel $\omega = 0$ oleks filtri ülekanne 1.*

Lahendus. Toodud tingimustele vastava ideaalse filtri amplituudikarakteristik on järgmine:

$$H_d(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & |\omega| \leq \pi/10 \\ 0, & \text{mujal} \end{cases}$$

Filtri impulsskaja $h_d[n]$ saamiseks võtame $H_d(e^{j\omega})$ -st Fourier' pöördteisenduse:

$$\begin{aligned} h_d[n] &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(e^{j\omega}) e^{jn\omega} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/10}^{\pi/10} e^{jn\omega} d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi jn} \cdot e^{jn\omega} \Big|_{-\pi/10}^{\pi/10} = \frac{1}{2\pi jn} (e^{jn\pi/10} - e^{-jn\pi/10}) = \dots \end{aligned}$$

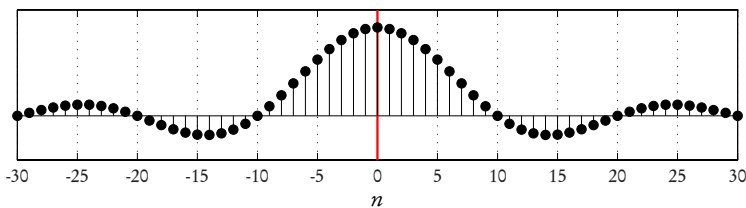
Kasutades sulgudes oleva avaldise jaoks valemit (A.4) siinust käsitlevat osa, saame

$$\dots = \frac{\sin(n\pi/10)}{\pi n} = \frac{1}{10} \cdot \frac{\sin(n\pi/10)}{n\pi/10}$$

Saadud filtri impulsskaja keskosa on esitatud joonisel 1.20; teoreetiliselt on antud impulsskaja lõpmatult pikk.

Filtriga on meil kaks probleemi:

1. filtri impulsskaja on lõpmatult pikk, s.t n on vahemikus $-\infty < n < \infty$ nullist erinev;
2. filter on mittekauaalne, s.t tema realiseerimiseks oleks vaja teada väärtusi tulevikust (eelmisel joonisel nullist vasakule jäävad punktid).



Joonis 1.20 — Näites 1.20 toodud tingimustele vastava ideaalse filtri impulsskaja keskosa

Nendest probleemidest vabanemiseks korrutatakse impulsskaja läbi aknafunktsiooniga ja seejärel nihutatakse saadud tulemus paremale, s.t muudetakse filter kausaalseks.

Praegusel juhul kasutame nelinurkset akent, mis on defineeritud kui

$$w[n] = \begin{cases} 1, & -4 \leq n \leq 4 \\ 0, & \text{mujal} \end{cases}$$

Seega saame pärast aknafunktsiooniga korrutamist järgneva filtri impulsskaja:

$$h[n] = h_d[n]w[n] = \begin{cases} \frac{1}{10} \cdot \frac{\sin(n\pi/10)}{n\pi/10}, & -4 \leq n \leq 4 \\ 0, & \text{mujal} \end{cases}$$

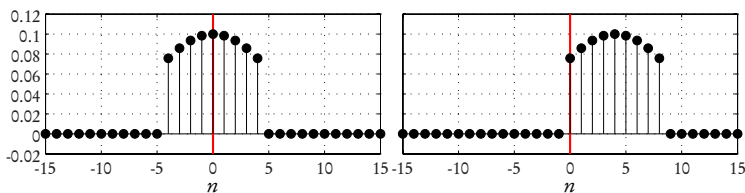
Saadud filter on nüüd lõpliku pikkusega, kuid ikka veel mittekausaalne. Järgneb veel nihutamine ehk kausaalseks muutmine:

$$h[n] = \begin{cases} \frac{1}{10} \cdot \frac{\sin((n-4)\pi/10)}{(n-4)\pi/10}, & 0 \leq n \leq 8 \\ 0, & \text{mujal} \end{cases}$$

Andes n -le väärtuseid 0-st 8-ni ning arvutades, saame järgmise impulsskaja:

$$\begin{aligned} h[n] = & 0,075\delta[n] + 0,085\delta[n-1] + 0,093\delta[n-2] + 0,098\delta[n-3] + \\ & + 0,1\delta[n-4] + 0,098\delta[n-5] + 0,093\delta[n-6] + \\ & + 0,085\delta[n-7] + 0,075\delta[n-8] \end{aligned}$$

Joonise 1.21 vasakpoolsel osal on näidatud aknafunktsiooniga korrutatud impulsskaja ja paremal pool on lisaks korrutamisele impulsskaja ka nihutatud, s.t filter on kausaalne.



Joonis 1.21 — Näites 1.20 toodud filtri lõpliku pikkusega (vasakul) ning liiks kausaalne (paremal) impulsskaja

Filtrile vastava diferentsvõrrandi saame otse impulsskajast:

$$y[n] = 0,075x[n] + 0,085x[n-1] + 0,093x[n-2] + 0,098x[n-3] + \\ + 0,1x[n-4] + 0,098x[n-5] + 0,093x[n-6] + \\ + 0,085x[n-7] + 0,075x[n-8]$$

Selleks et määrata kindlaks filtri ülekannet sagedusel $\omega = 0$, peame kõigepealt leidma ülekandefunktsiooni $H(z)$. Leiame selle, võttes impulsskajast z -teisenduse:

$$H(z) = 0,0757 + 0,0858z^{-1} + 0,0935z^{-2} + 0,0984z^{-3} + 0,1z^{-4} + \\ + 0,0984z^{-5} + 0,0935z^{-6} + 0,0858z^{-7} + 0,0757z^{-8}$$

Anname nüüd ülekandefunktsiooni sisendiks $z = e^{j\omega}$, kui $\omega = 0$, s.t $z = e^{j \cdot 0} = 1$:

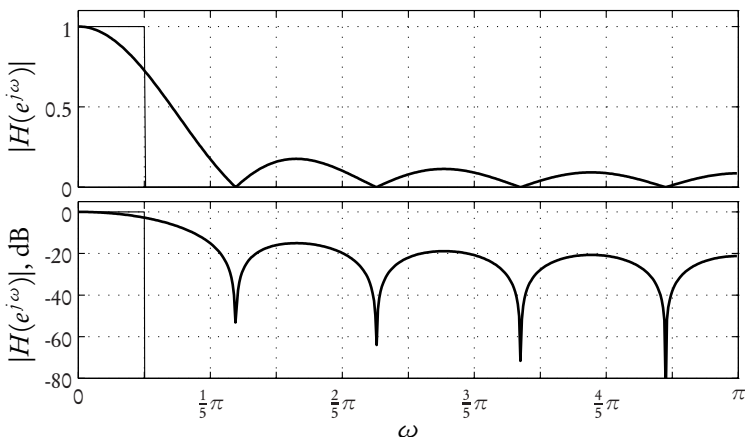
$$H(1) = 0,0757 + 0,0858 + 0,0935 + 0,0984 + 0,1 + 0,0984 + 0,0935 + \\ + 0,0858 + 0,0757 = 0,8069$$

Et filtri ülekanne ehk sageduskarakteristik sagedusel $\omega = 0$ oleks 1, peame filtri kordajaid korrutama teguriga K :

$$K = \frac{1}{0,8069} = 1,2394$$

Filtri amplituudikarakteristik on esitatud joonisel 1.22. □

Näide 1.21 *Kasutades MATLAB-i, disainida madalpääsfilter, mille lõikesagedus on $\omega = \pi/10$, aknafunktsiooniks on nelinurkne aken ning järguks on a) $N = 10$ ja b) $N = 100$. Esitada saadud filtrite amplituudikarakteristikud graafiliselt.*



Joonis 1.22 — Näites 1.20 toodud filtri amplituudikarakteristikud. Vastava ideaalse filtri sageduskarakteristik on tähistatud peene joonega

Lahendus. Kuna on antud filtri lõikesagedus, aknafunktsioon ning järk, siis saame kasutada MATLAB-i käsku `fir1`.

Leiame kõigepealt filtri kordajad, s.t vektori `b1`, kui järguks on 10:

```
b1 = fir1(10, 1/10, window(@rectwin, 11));
```

Analoogselt leiame kordajad, kui filtri järk on 100:

```
b2 = fir1(100, 1/10, window(@rectwin, 101));
```

Saadud filtrite sageduskarakteristikute esitamiseks kasutame käsku `freqz`:

```
[H1, w] = freqz(b1, 1);
```

```
[H2, w] = freqz(b2, 1);
```

Nüüd leiame veel amplituudikarakteristikud:

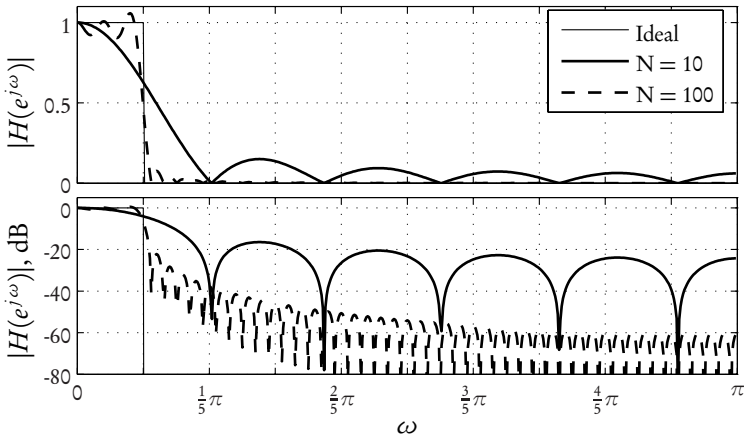
```
amp1 = abs(H1);
```

```
amp2 = abs(H2);
```

Saadud amplituudikarakteristikud on esitatud joonisel 1.23. □

1.6.3 Optimaalse FIR-filtri disainimine

Vaatame optimaalse FIR-filtri disainimist MATLAB-s, kasutades selleks Parks-McClellani meetodit. Selleks on MATLAB-is käsud `firpm` ja `firpmord`, vanemates MATLAB-i versioonides on nende nimetused `remez` ja `remezord`.



Joonis 1.23 — Näites 1.21 toodud filtri amplituudikarakteristikud

Näide 1.22 Disainida optimaalne FIR-madalpääsfilter, mis rahuldaks järgmisi tingimusi:

Diskreetimissagedus: 1000 Hz
 Läbilaskeriba: 0 – 50 Hz
 Tõkkeriba: 70 – 250 Hz
 Läbilaskeriba kõikumine: 0.5 dB
 Tõkkeriba sumbuvus: 40 dB

Esitada graafiliselt filtri amplituudi- ja faasikarakteristikud.

Lahendus. Kuna nii läbilaskeriba kõikumine (*ripple*) kui ka tõkkeriba sumbuvus on antud dB-des, siis tuleb neid kõigepealt teisendada. Lisaks esitame need suurused ühe vektorina:

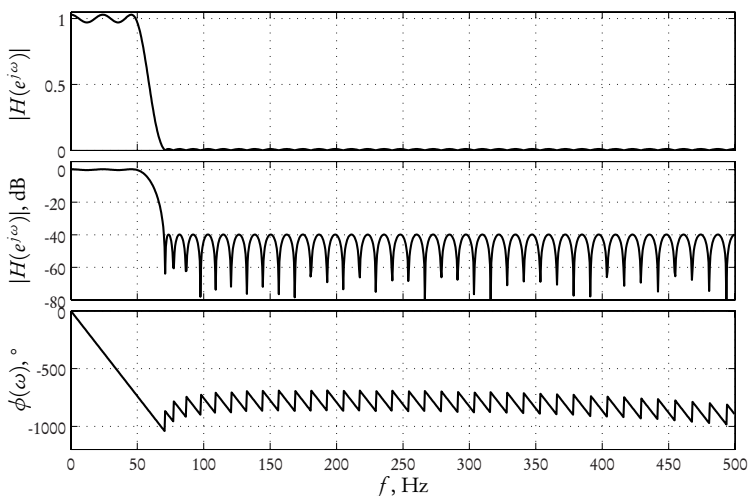
```
>> Rp = 0.5;
>> Rs = 40;
>> dev = [(10^(Rp/20)-1)/(10^(Rp/20)+1) 10^(-Rs/20)]
dev =
    0.0288    0.0100
```

Samuti moodustame filtri lõikesagedustest vektori

```
>> f = [50 70];
```

Samuti moodustame vastavatest soovitud amplituudidest vektori:

```
>> a = [1 0];
```



Joonis 1.24 — Näites 1.22 toodud filtri amplituudi- ja faasikarakteristikud

Nüüd kasutame filtri järgu saamiseks käsku `firpmord`:

```
>> [n,fo,ao,w] = firpmord(f, a, dev, 1000);
```

Antud juhul saame filtri järguks $n = 82$.

Filtri kordajate b leidmiseks kasutame käsku `firpm`:

```
>> b = firpm(n, fo, ao, w);
```

Leiame nüüd filtri sageduskarakteristiku:

```
>> [H,f] = freqz(b, 1, 1000, 1000);
```

Filtri amplituudi- ja faasikarakteristikud on esitatud joonisel 1.24. □

1.6.4 IIR-filtrite disainimine

Vaatleme järgnevaid IIR-filtreid: Butterworth, Tšebõšov I ja II (kasutatakse ka kirjanpilti Chebyshev või Chebysheff) ning elliptiline. Filtrite disainimiseks kasutame MATLAB-i.

Näide 1.23 *Disainida näites 1.22 toodud nõuetele vastavad a) Butterworthi, b) Tšebõšovi I, c) Tšebõšovi II ja d) elliptiline filter. Esitada filtrite amplituudi- ja faasikarakteristikud ning rühmahilistuse graafikud.*

Lahendus. Defineerime kõigepealt läbilaskeriba sageduse f_p ja võnkumise (*ripple*) R_p ning tõkkeriba sageduse f_s ja sumbuvuse R_s :

```
>> fp = 50;
>> Rp = 0.5;
>> fs = 70;
>> Rs = 40;
```

a) Butterworthi filter

Leiame filtri järgu ja seejärel filtri kordajad:

```
>> [N_b,Wn_b] = buttord(fp/500, fs/500, Rp, Rs);
>> [B_b,A_b] = butter(N_b, Wn_b);
```

Filtri järguks saame, et $N_b = 17$. Samuti leiame amplituudikarakteristiku:

```
>> [H_b,w_b] = freqz(B_b, A_b, 1000, 1000);
```

ja rühmahilistuse:

```
>> tau_b = grpdelay(B_b, A_b, 1000);
```

b) Tšebõšovi I filter

Leiame filtri järgu ja seejärel filtri kordajad:

```
>> [N_c1,Wn_c1] = cheb1ord(fp/500, fs/500, Rp, Rs);
>> [B_c1,A_c1] = cheby1(N_c1, Rp, Wn_c1);
```

Filtri järguks saame, et $N_{c1} = 8$. Samuti leiame amplituudikarakteristiku:

```
>> [H_c1,w_c1] = freqz(B_c1, A_c1, 1000, 1000);
```

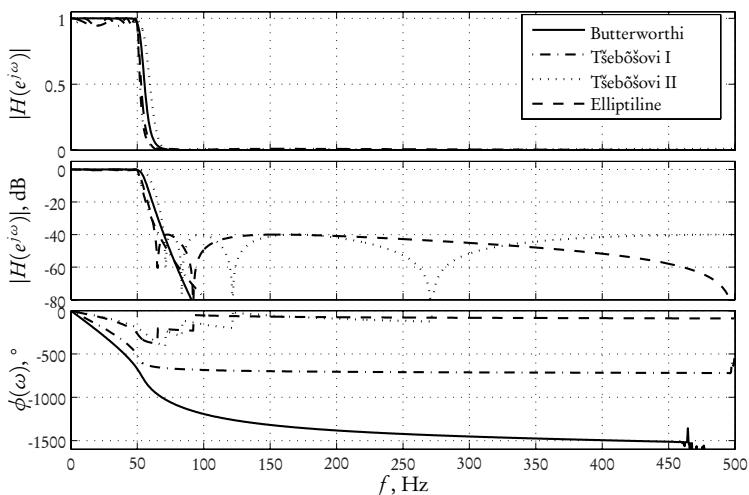
ja rühmahilistuse:

```
>> tau_c1 = grpdelay(B_c1, A_c1, 1000);
```

c) Tšebõšovi II filter

Leiame filtri järgu ja seejärel filtri kordajad:

```
>> [N_c2,Wn_c2] = cheb2ord(fp/500, fs/500, Rp, Rs);
>> [B_c2,A_c2] = cheby2(N_c2, Rs, Wn_c2);
```



Joonis 1.25 — Näites 1.23 toodud filtrite amplituudi- ja faasikarakteristikud

Filtri järguks saame, et $N_{c2} = 8$. Samuti leiame amplituudikarakteristiku:

```
>> [H_c2,w_c2] = freqz(B_c2, A_c2, 1000, 1000);
```

ja rühmahilistuse:

```
>> tau_c2 = grpdelay(B_c2, A_c2, 1000);
```

d) Elliptiline filter

Leiame filtri järgu ja seejärel filtri kordajad:

```
>> [N_e,Wn_e] = ellipord(fp/500, fs/500, Rp, Rs);
```

```
>> [B_e,A_e] = ellip(N_e, Rp, Rs, Wn_e);
```

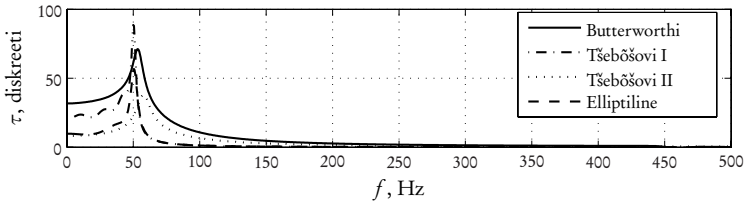
Filtri järguks saame, et $N_e = 5$. Samuti leiame amplituudikarakteristiku:

```
>> [H_e,w_e] = freqz(B_e, A_e, 1000, 1000);
```

ja rühmahilistuse:

```
>> tau_e = grpdelay(B_e, A_e, 1000);
```

Amplituudi- ja faasikarakteristikud on kõigi nelja filtri jaoks esitatud joonisel 1.25 ning rühmahilistused joonisel 1.26. □



Joonis 1.26 — Näites 1.23 toodud filtrite rühmahilistuskarakteristikud

Näide 1.24 Võrrelda lineaarse (FIR) ja mittelineaarse (IIR) faasikarakteristikuga filtri mõju signaali kujule.

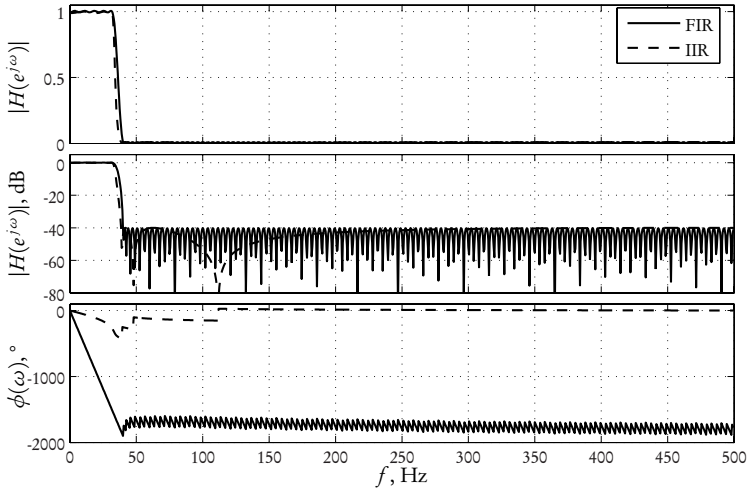
Lahendus. Et mittelineaarse faasikarakteristiku mõjust paremini aru saada, vaatleme praegu lihtsat juhtu, kus meil on signaal, mis sisaldab näiteks kahte sageduskomponenti: 10 Hz ja 30 Hz. Olgu selleks signaaliks vastavate sagedustega siinussignaali summa.

Nüüd disainime kaks madalpääsfiltrit: üks FIR-filtrit ja teine IIR-filtrit, ning filtreerime nendega algupärast signaali. Valime filtri läbilaskeala sageduseks 32 Hz ja tõkkeala sageduseks 40 Hz. Läbilaskeala kõikumine (*ripple*) olgu 0,5 dB ja tõkkeala sumbuvus 40 dB. Nagu näha, ei ole antud filtriga “filtreerimine” päris tavapärane, kuna tegelikult ei filtreerita välja mitte midagi: kõik sagedused on niikuini läbilaskeala sees. Kuid sellele vaatamata sobivad sellised filtrid faasi mõju uurimiseks hästi.

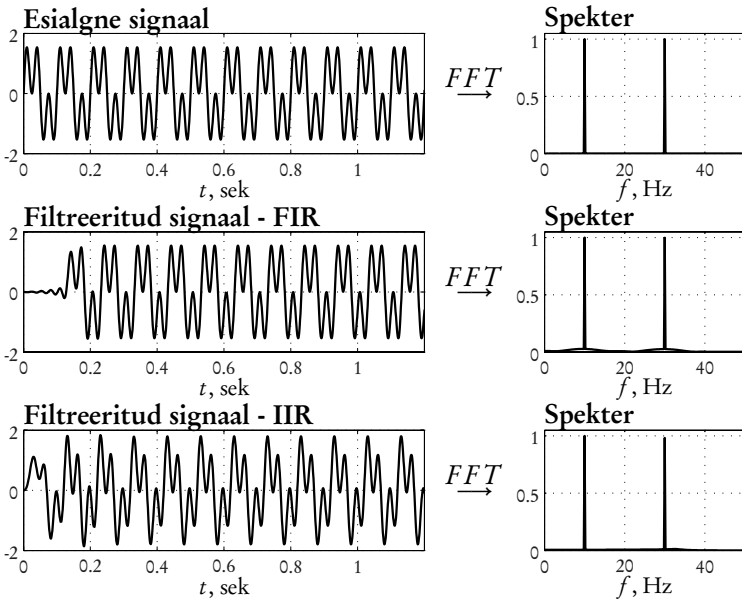
Kasutades eelnevates näidetes toodud võtteid, disainime etteantud parameetritele vastavad filtrid. FIR-filtriks valime optimaalse Parks-McClellani filtri ning IIR-filtriks valime elliptilise filtri. Vastavate filtrite amplituudi- ja faasikarakteristikud on toodud joonisel 1.27.

Saadud FIR-filtri järk on 264 ning IIR-filtri järk on ainult 6. Kui võrrelda faasikarakteristikuid, siis sealt on näha, et FIR-filtri korral langeb faas palju kiiremini kui IIR-korral, kuid see on lineaarne. Ka IIR-filtri faas on enam-vähem lineaarne, kui sagedused on väga madalad. Kuid mida lähemale jõuab sagedus tõkkeribale, seda mittelineaarsemaks faas muutub.

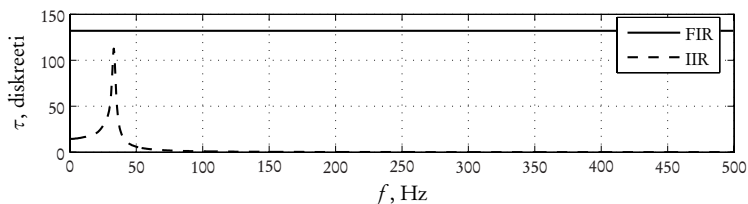
Joonisel 1.28 on näidatud, kuidas antud filtrid “filtreerivad” esialgset signaali, mis oli kahe siinussignaali summa. Sealt on näha, et pärast filtreerimist FIR-filtriga on esialgne signaal hilistatud (filtril kõrge järk), kuid tema kuju on säilinud. Filtreerides signaali IIR-filtriga, on hilistus palju väiksem (filtri järk madal), kuid signaali kuju on moondunud.



Joonis 1.27 — Näites 1.24 kasutatud FIR- ja IIR-filtrite amplituudi- ja faasi-
 karakteristikud



Joonis 1.28 — Näites 1.24 toodud esialgne signaal (ülemine graafik), signaal
 pärast FIR-filtriga filtreerimist (keskmine graafik) ja pärast IIR-filtriga filtreerimist
 (alumine graafik)



Joonis 1.29 — Näites 1.24 toodud filtrite rühmahilistuskarakteristikud

Signaali kuju moonutus tuleneb sellest, et IIR-filter on hilistanud erinevaid sageduskomponente erinevalt: 30 Hz komponenti on hilistatud rohkem kui 10 Hz komponenti. Meenutame, et rühmahilistuse saamiseks tuleb võtta faasist tuletis. Seega, kui faas on lineaarne, siis tuletis sellest (rühmahilistus) on konstant, s.t kõiki sageduskomponente hilistatakse võrdselt, kui faas on aga mittelineaarne, siis tuletis temast on ka mittelineaarne, s.t erinevaid sageduskomponente hilistatakse erinevalt. Antud filtrite rühmahilistuskarakteristikud on esitatud joonisel 1.29. □

2 Pilditöötlus

Joonisel 2.1 (A) ja (B) on ära toodud kaks suurusega 512×512 pikselit 8-bitilist halltoonides originaalpilti “Lena” ja “lill”, mille puhul rakendatakse erinevaid operatsioone. Pilditöötluseks on kasutatud peamiselt MATLAB-i *Image Processing Toolbox*-s olevaid käske.

2.1 Histogrammi “venitamine”

Näide 2.1 *Uurida joonisel 2.1 toodud piltide histogramme ja muuta neid nii, et kogu heleduste (halltoonide) vahemik oleks kasutatud.*

Lahendus. Kui halltoonides pilt on 8-bitine, siis see tähendab seda, et ta sisaldab $2^8 = 256$ erinevat halltooni (või heledust). Teiste sõnadega, halltoonide skaala on 0-st 255-ni, kus 0 vastab mustale värvile, 255 valgele värvile ja väärtused nende vahel vastavad vahepealsetele halltoonidele.

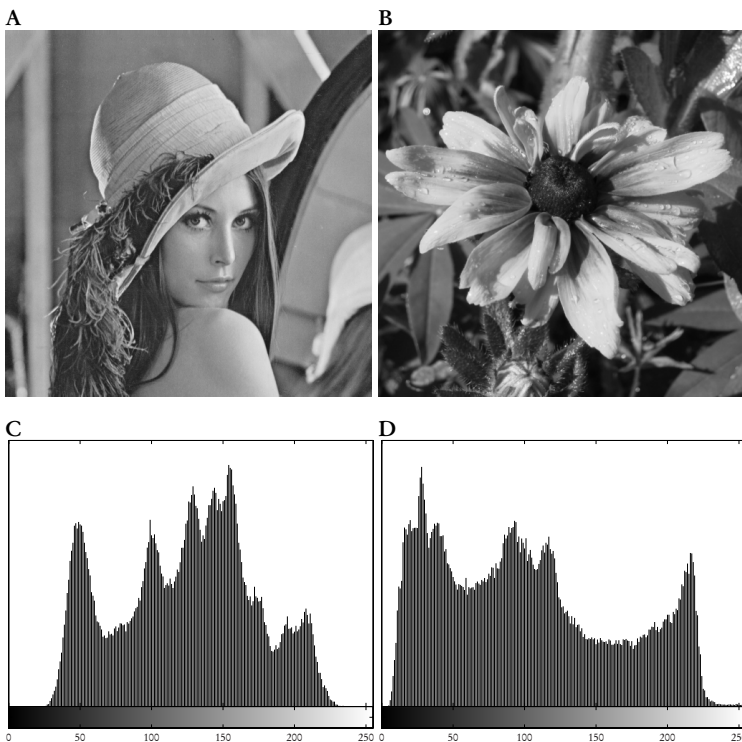
Uurime kõigepealt, millised näevad välja originaalpiltide histogrammid. Selleks kasutame MATLAB-i käsku `imhist`:

```
>> figure, imhist(lena);  
>> figure, imhist(lill);
```

Joonisel 2.1 (C) ja (D) on näidatud piltide “Lena” ja “lill” histogrammid. Sealt on näha, et mõlemal juhul ei ole kogu halltoonide vahemik kaetud: päris valge osa on mõlemal juhul kasutamata (või väga vähe kasutatud) ning must osa on “Lena” puhul rohkem kasutamata.

Leiame kõigepealt originaalpildis olevad minimaalsed ja maksimaalsed halltoonide väärtused. Selleks kasutame käsku `stretchlim`:

```
>> low_high_lena = stretchlim(lena, [0.005 0.995])  
low_high_lena =  
    0.1373  
    0.8588  
  
>> low_high_lill = stretchlim(lill, [0.005 0.995])  
low_high_lill =  
    0.0353  
    0.8745
```



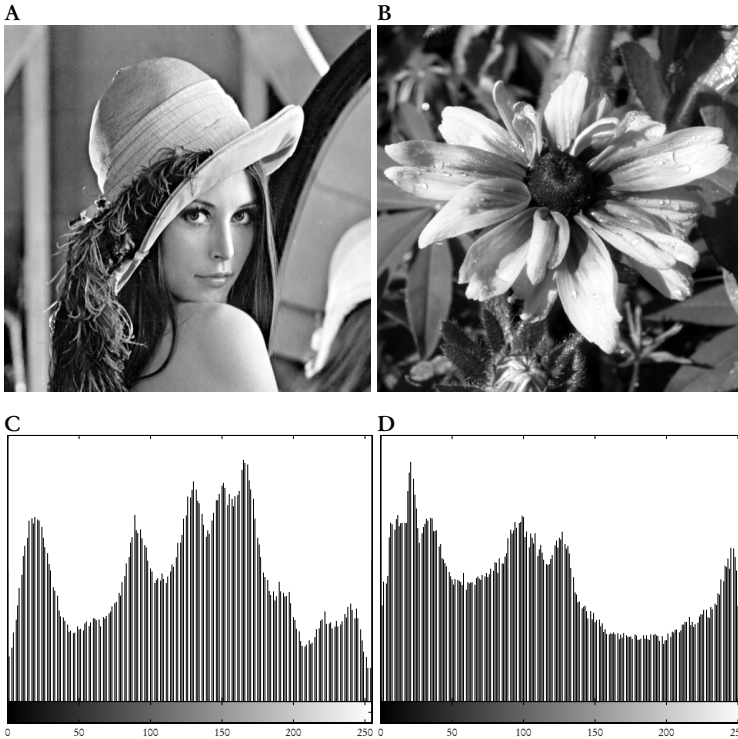
Joonis 2.1 — Pilditöötuse osas kasutatavad originaalpildid: “Lena” (A) ja “lill” (B); ning nende histogrammid: “Lena” (C) ja “lill” (D)

NB! Käsu `stretchlim` väljund on normaliseeritud, s.t see on vahemikus `[0 1]`, kus 0 vastab ikka nullile ja 1 vastab 255-le.

Tulemuseks on, et näiteks “Lena” pildi jaoks on minimaalseks väärtuseks 0,1373, kuid siinkohal tuleb tähelepanu pöörata ka käsu `stretchlim` teisele argumendile, mis määrab ära minimaalsete ja maksimaalsete väärtuste “küllastuse” (*saturation*). Teiste sõnadega, antud juhul on pildis 0,5% piksleid väiksema väärtusega kui 0,1373 ning 0,5% piksleid suurema väärtusega kui 0,8588.

Histogrammi muutmiseks kasutame käsku `imadjust`:

```
>> lena_new = imadjust(lena, low_high_lena, [0; 1]);
>> lill_new = imadjust(lill, low_high_lill, [0; 1]);
```



Joonis 2.2 — “Venitatud” histogrammidega pildid: “Lena” (A) ja “lill” (B); ning nende histogrammid: “Lena” (C) ja “lill” (D)

Tulemuseks saame uued pildid, kus näiteks “Lena” pildi pikslite väärtused vahemikus $[0, 1373 \ 0, 8588]$ on teisendatud uude vahemikku $[0 \ 1]$, kusjuures pikslid, mille väärtus on väiksem kui $0,1373$ (neid on kokku $0,5\%$), saavad uueks väärtuseks 0 . Analoogselt toimitakse ka kõige suurema väärtustega pikslite korral: kui väärtus on suurem kui $0,8588$ (neid on samuti $0,5\%$), siis uueks väärtuseks tuleb ikka 1 .

“Venitatud” histogrammidega pildid “Lena” ja “lill” ning nende histogrammid on näidatud joonisel 2.2. \square

2.2 “Libiseva naabrusega” töötlemine

Näide 2.2 Rakendada piltidele “Lena” ja “lill” Laplace’i filtrit “libiseva naabruse” (sliding neighborhood) operatsioonina, kui bloki suurus on 3×3 pikslit ning Laplace’i filter on esitatud järgnevate kernelitega h_1 ja h_2 :

$$h_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad h_2 = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 8 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Lahendus. Üks võimalus sellise filtri rakendamiseks on kasutada MATLAB-i käsku `nlfilter`, kuid selle käsu kasutamise puudus on see, et suurte piltide korral võtab operatsioon palju aega. Puudusest vabanemiseks võime kasutada käsku `imfilter`, kus filter (kernel) tuleb eelnevalt defineerida tavalise MATLAB-i maatriksina:

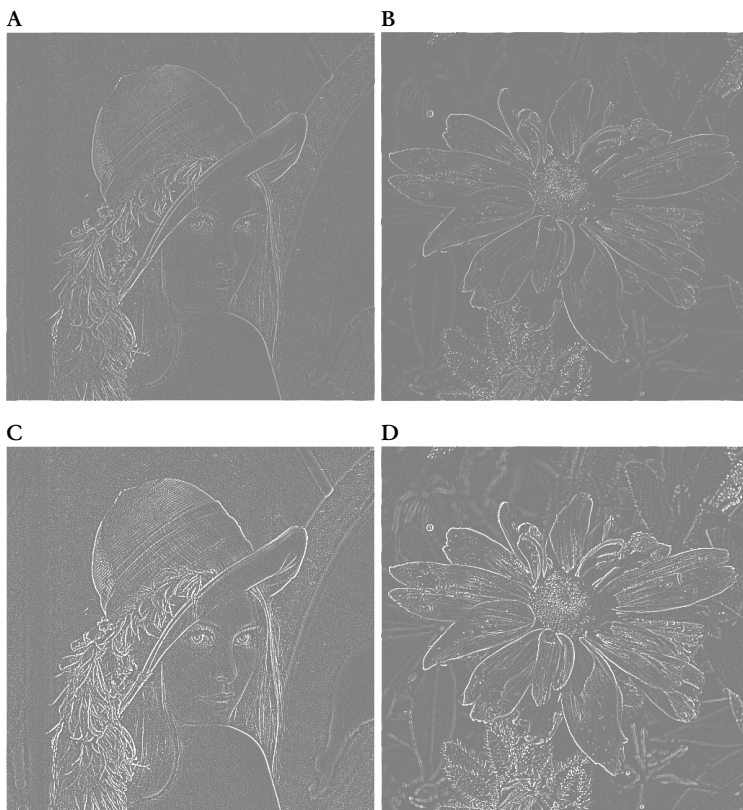
```
>> h_1 = [0 -1 0; -1 4 -1; 0 -1 0];  
>> h_2 = [-1 -1 -1; -1 8 -1; -1 -1 -1];  
>> lena_lap_1 = imfilter(lena, h_1);  
>> lena_lap_2 = imfilter(lena, h_2);  
>> lill_lap_1 = imfilter(lill, h_1);  
>> lill_lap_2 = imfilter(lill, h_2);
```

Tulemused pärast Laplace’i filtri rakendamist on esitatud joonisel 2.3. NB! Sellel joonisel olevatele piltidele on parema nähtavuse huvides juurde lisatud halltoon väärtusega 128 (kui seda mitte teha, siis oleks need pildid suuremas osas musta värvi). Joonistelt on näha, et Laplace’i filter rõhutab pildidel olevaid detaile. \square

Näide 2.3 Kasutame näites 2.2 esitatud Laplace’i filtreid piltide teravamaks muutmiseks.

Lahendus. Nagu näitest 2.2 selgus, annab Laplace’i filter tulemuse, kus on rõhutatud esialgses pildis olevad detailid. Pildi teravamaks muutmiseks tuleb need detailid esialgsele pildile juurde liita. Seda võib teha nii, et kõigepealt filtreeritakse esialgset pilti Laplace’i filtriga ning seejärel liidetakse saadud tulemus ja esialgne pilt omavahel kokku. Kuid võib kasutada ka modifitseeritud Laplace’i filtrit, kus see liitmine on juba arvestatud. Selleks tuleb Laplace’i filtrile jooksva pikslit väärtus juurde liita:

$$h_{m1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$



Joonis 2.3 — Näites 2.2 toodud Laplace'i filtri rakendamise tulemused, kui kernel on h_1 : “Lena” (A) ja “lill” (B); ning kui kernel on h_2 : “Lena” (C) ja “lill” (D). NB! Nendele piltidele on parema nähtavuse huvides juurde lisatud halltoon väärtusega 128

$$h_{m2} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 8 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 9 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Nüüd kasutame jälle käsku `imfilter`:

```
>> h_m1 = [0 -1 0; -1 5 -1; 0 -1 0];
>> h_m2 = [-1 -1 -1; -1 9 -1; -1 -1 -1];
>> lena_sharp_1 = imfilter(lena, h_m1);
>> lena_sharp_2 = imfilter(lena, h_m2);
>> lill_sharp_1 = imfilter(lill, h_m1);
>> lill_sharp_2 = imfilter(lill, h_m2);
```

Tulemused on toodud joonisel 2.4, millelt on näha, et võrreldes joonisel 2.1 toodud originaalpiltidega, on nüüd detailid rohkem rõhutatud, s.t pildid on teravamad. □

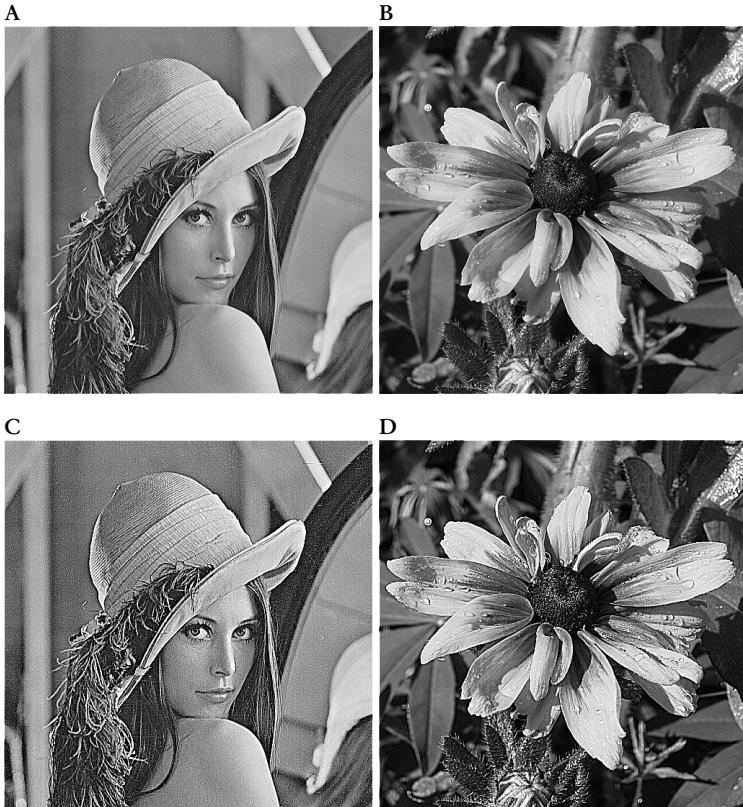
Näide 2.4 Rakendada piltidele “Lena” ja “lill” aritmeetilist keskmist (keskmistamist) ja mediaani “libiseva naabruse” operatsioonina, kui bloki suurus on *a*) 3×3 ja *b*) 7×7 pikslit.

Lahendus. Keskmistamise jaoks kasutame jällegi käsku `imfilter` ning mediaani jaoks käsku `medfilt2`. Enne keskmistamist peame defineerima ka kerneli *h*:

```
>> h = 1/9*ones(3,3);
>> lena_new_mean = imfilter(lena, h);
>> lena_new_median = medfilt2(lena, [3 3]);
>> lill_new_mean = imfilter(lill, h);
>> lill_new_median = medfilt2(lill, [3 3]);
```

Analoogselt toimime, kui bloki suurus on 7×7 pikslit:

```
>> h = 1/49*ones(7,7);
>> lena_new_mean = imfilter(lena, h);
>> lena_new_median = medfilt2(lena, [7 7]);
>> lill_new_mean = imfilter(lill, h);
>> lill_new_median = medfilt2(lill, [7 7]);
```



Joonis 2.4 — Näites 2.3 toodud modifitseeritud Laplace'i filtri rakendamise tulemused, kui kernel on h_{m1} : "Lena" (A) ja "lill" (B); ning kui kernel on h_{m2} : "Lena" (C) ja "lill" (D)

Keskmistamise tulemused on toodud joonisel 2.5 ning mediaanfiltriga filtreerimise tulemused joonisel 2.6. Nendelt joonistelt on näha, et kui bloki suurus on 3×3 pikslit, siis mõlemal juhul muutuvad pildid mõnevõrra ähmasemaks, s.t väikesed detailid on kadunud. Kui aga bloki suurus on 7×7 pikslit, siis ähmastumise efekt on oluliselt tugevam. \square



Joonis 2.5 — Keskmistamine rakendatuna “libiseva naabruse” operatsioonina piltidele “Lena” ja “lill”, kui bloki suurus on 3×3 pikslit (A) ja (B) ning 7×7 pikslit (C) ja (D)



Joonis 2.6 — Mediaan rakendatuna “libiseva naabruse” operatsioonina piltidele “Lena” ja “lill”, kui bloki suurus on 3×3 pikslit (A) ja (B) ning 7×7 pikslit (C) ja (D)

2.3 Fikseeritud blokkide kaupa töötlemine

Näide 2.5 Rakendada piltidele “Lena” ja “lill” fikseeritud blokkide kaupa keskmistamist (aritmeetiline keskmine), kui bloki suurus on $a) 4 \times 4$ ja $b) 8 \times 8$ pikslit.

Lahendus. Ülesande lahendamiseks kasutame MATLAB-i käsku `blkproc`, kuid enne selle rakendamist defineerime funktsiooni f keskmistamise realiseerimiseks:

```
>> f = inline('mean(x(:))*ones(size(x))');  
>> lena_new_1 = blkproc(lena, [4 4], f);  
>> lena_new_2 = blkproc(lena, [8 8], f);  
>> lill_new_1 = blkproc(lill, [4 4], f);  
>> lill_new_2 = blkproc(lill, [8 8], f);
```

Tulemused on esitatud joonisel 2.7. Sealt on näha, et ka antud juhul toimub pildi ähmastumine, kuid erinevalt näites 2.4 saadud tulemustest on tekkinud nn pildi ruudustumine ning see efekt on seda tugevam, mida suurem on bloki suurus. □

2.4 Müra filtreerimine

Näide 2.6 Uurida, kuidas eemaldavad madalpääsfilter (keskmistamine) ja mediaanfilter joonisel 2.8 A ja B toodud piltidelt nn “salt & pepper” müra ning piltidelt C ja D Gaussi jaotusega valget müra, kui bloki suurus on 5×5 pikslit.

Lahendus. Kõigepealt uurime, kui palju on müra antud pilte “rikkunud”: selleks kasutame ruutkeskmist viga (*Mean Square Error*), mille leiame järgnevalt:

$$MSE = \frac{1}{NM} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M (x(i,j) - \hat{x}(i,j))^2,$$

kus $x(i,j)$ ja $\hat{x}(i,j)$ on vastavalt originaalpildi ja müra poolt rikutud pildi pikslite väärtused. MSE väärtused müra poolt rikutud (filtreerimata) piltide jaoks on toodud tabeli 2.1 teises veerus.

Müra filtreerimiseks kasutame eelnevalt näites 2.4 toodud filtreid, kuid nüüd paneme bloki suuruseks 5×5 pikslit:

```
>> h = 1/25*ones(5,5);  
>> lena_nf_mean_s_p = imfilter(lena_noise_s_p, h);
```

Tabel 2.1 — Näites 2.6 toodud piltide jaoks arvutatud ruutkeskmised vead (MSE)

Pilt	MSE		
	Filtreeri- mata	Madalpääs- filter	Mediaan- filter
“Lena”, <i>salt & pepper</i> (A)	3725,92	346,32	85,81
“lill”, <i>salt & pepper</i> (B)	4145,07	421,91	62,09
“Lena”, Gaussi müra (C)	1238,33	148,11	156,39
“lill”, Gaussi müra (D)	1149,06	128,22	143,93

```
>> lena_nf_median_s_p = medfilt2(lena_noise_s_p, [5 5]);
>> lill_nf_mean_s_p = imfilter(lill_noise_s_p, h);
>> lill_nf_median_s_p = medfilt2(lill_noise_s_p, [5 5]);

>> lena_nf_mean_g = imfilter(lena_noise_g, h);
>> lena_nf_median_g = medfilt2(lena_noise_g, [5 5]);
>> lill_nf_mean_g = imfilter(lill_noise_g, h);
>> lill_nf_median_g = medfilt2(lill_noise_g, [5 5]);
```

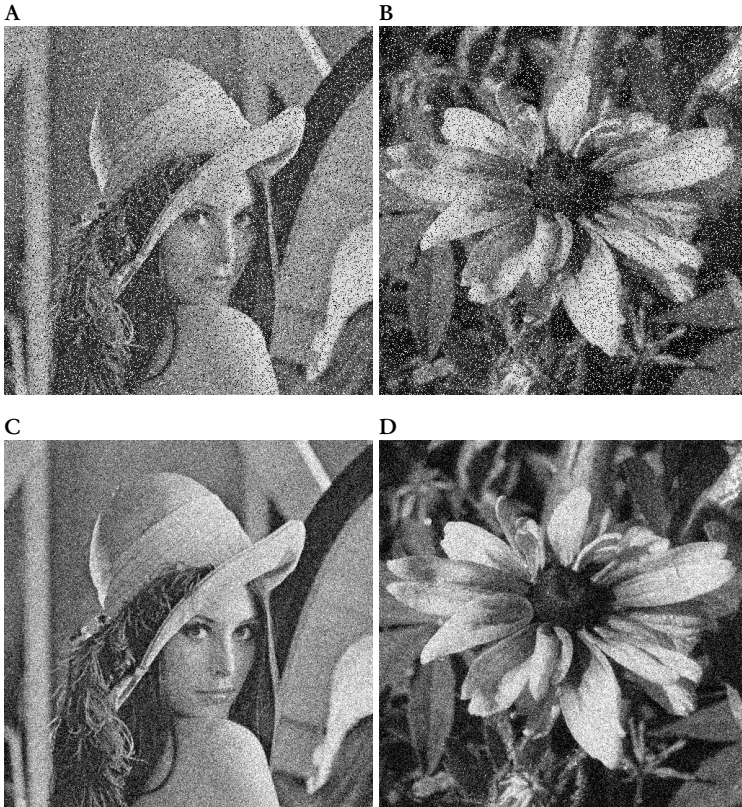
Filtreeritud pildid on näidatud joonistel 2.9 (“*salt & pepper*” müra) ja 2.10 (Gaussi jaotusega valge müra). Vastavad *MSE* väärtused on ära toodud tabeli 2.1 teises ja kolmandas veerus.

Tabelist 2.1 on näha, et kui tegemist on “*salt & pepper*” müraga, siis madalpääsfilter, võrreldes mediaanfiltriga, ei vähenda müra eriti hästi. See tuleneb sellest, et madalpääsfilter n-ö “määrib laiali” müra poolt tekitatud mustad ja valged pikslid ka kõrvalolevatesse pikslitesse (vt joonis 2.9 A ja B). Mediaanfilter toimib antud juhul hästi: praktiliselt on kõik müra poolt tekitatud mustad ja valged pikslid kadunud (vt joonis 2.9 C ja D).

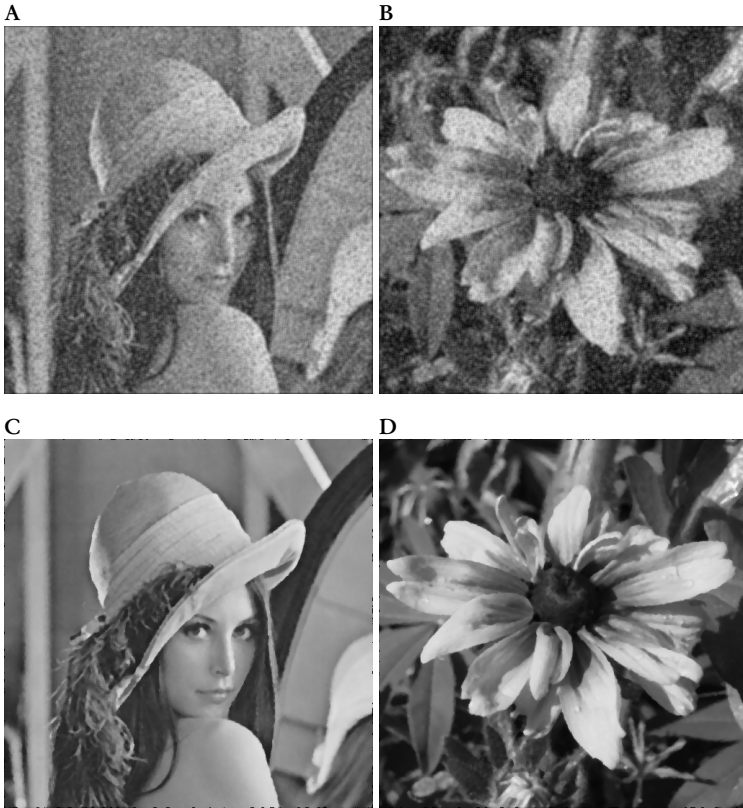
Kui tegemist on Gaussi jaotusega valge müraga, siis ruutkeskmise vea järgi (vt tabel 2.1) annab jällegi veidi parema tulemuse madalpääsfilter. □



Joonis 2.7 — Keskmistamine rakendatuna fikseeritud bloki operatsioonina piltidele “Lena” ja “lill”, kui bloki suurus on 4×4 pikslit (A) ja (B) ning 8×8 pikslit (C) ja (D)



Joonis 2.8 — “Lena” (A) ja “lill” (B), millele on lisatud 20% “salt & pepper” müra, ning “Lena” (C) ja “lill” (D), millele on lisatud Gaussi jaotusega valget müra variatsiooniga 0,2



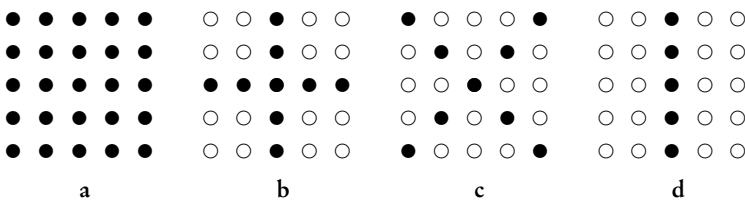
Joonis 2.9 — “Salt & pepper” müraga pildid, mida on filtreeritud madalpääs-filtriga: “Lena” (A) ja “lill” (B); ning mediaanfiltriga: “Lena” (C) ja “lill” (D)



Joonis 2.10 — Gaussi jaotusega valge müraga pildid, mida on filtreeritud madalpääsfiltriga: “Lena” (A) ja “lill” (B); ning mediaanfiltriga: “Lena” (C) ja “lill” (D)



Joonis 2.11 – “Lena” (A) ja “lill” (B), millel on müra horisontaalsete valgete joontena



Joonis 2.12 – Mediaanfiltri kujud, filtris kasutatavad pikslid on tähistatud mustade ringidega (●)

Tabel 2.2 – Näites 2.7 toodud piltide jaoks arvatud ruutkeskmised vead (MSE)

Pilt	MSE				
	Filtreerimata	Filter a	Filter b	Filter c	Filter d
“Lena”(A)	1945,10	67,92	1953,34	67,29	31,72
“lill”(B)	2725,75	59,19	2716,40	58,41	36,45

Näide 2.7 Joonisel 2.11 on toodud pildid “Lena” ja “lill”, millel on mürana valged horisontaalsed jooned. Uurida, kuidas eemaldavad joonisel 2.12 esitatud erineva kujuga mediaanfiltrid (5 × 5 pikslit) neid jooni.

Lahendus. Leiame kõigepealt joonisel 2.11 toodud piltide jaoks ruutkeskmised vead, need on esitatud tabeli 2.2 teises veerus.

Filtri **a** realiseerimiseks kasutame käsku `medfilt2`:

```
lena_median_a = medfilt2(lena_r, [5 5]);  
lill_median_a = medfilt2(lill_r, [5 5]);
```

Filtri **b** ja **c** realiseerimiseks kasutame käsku `nlfilter` ning eelnevalt defineerime nõutud kujuga mediaanfiltri:

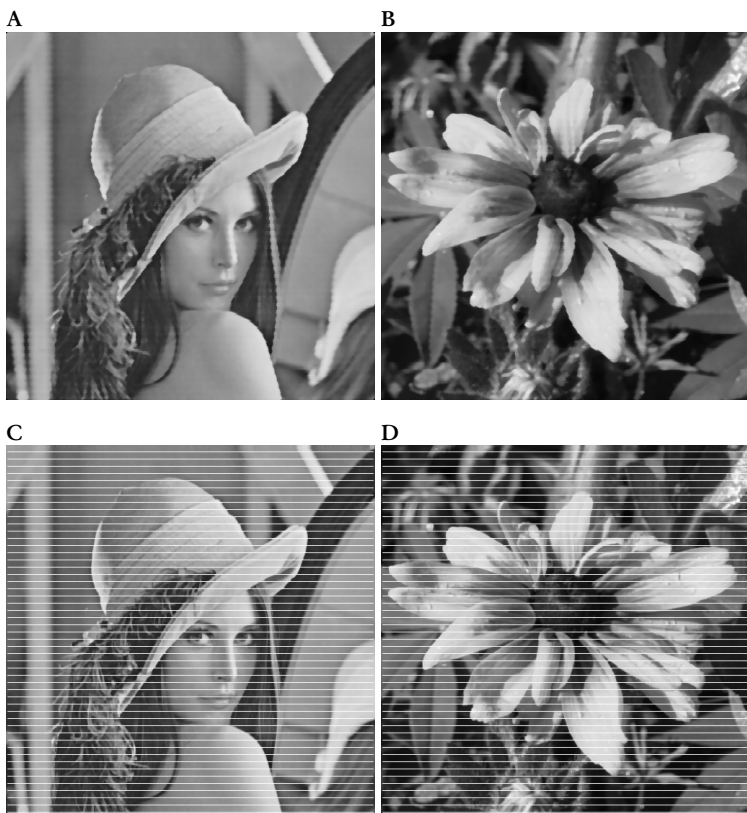
```
>> F_b = inline('median([x(3,1) x(3,2) x(3,3) x(3,4) ...  
x(3,5) x(1,3) x(2,3) x(4,3) x(5,3)])');  
>> F_c = inline('median([x(1,1) x(2,2) x(3,3) x(4,4) ...  
x(5,5) x(5,1) x(4,2) x(2,4) x(1,5)])');  
  
>> lena_median_b = nlfilter(lena_r, [5 5], F_b);  
>> lill_median_b = nlfilter(lill_r, [5 5], F_b);  
  
>> lena_median_c = nlfilter(lena_r, [5 5], F_c);  
>> lill_median_c = nlfilter(lill_r, [5 5], F_c);
```

Filtri **d** realiseerimiseks võime kasutada nii `nlfilter` kui ka `medfilt2` käsku, antud juhul kasutame viimast:

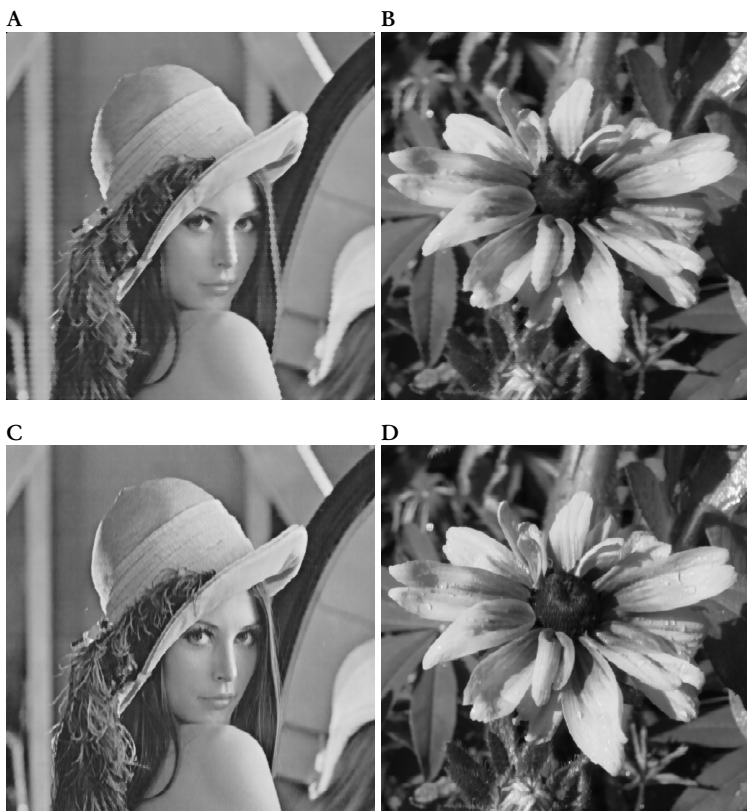
```
>> lena_median_d = medfilt2(lena_r, [5 1]);  
>> lill_median_d = medfilt2(lill_r, [5 1]);
```

Tabelis 2.2 on toodud kõikide kasutatud filtrite jaoks ruutkeskmised vead. Sealt on näha, et *MSE* mõttes andis kõige parema tulemuse filter **d** ning filter **b** praktiliselt ei muutnud ruutkeskmist viga, võrreldes filtreerimata pildiga.

□



Joonis 2.13 — Näites 2.7 toodud pildid, mida on filtreeritud filtriga a: “Lena” (A) ja “lill” (B); ning filtriga b: “Lena” (C) ja “lill” (D)



Joonis 2.14 – Näites 2.7 toodud pildid, mida on filtreeritud filtriga c: “Lena” (A) ja “lill” (B); ning filtriga d: “Lena” (C) ja “lill” (D)

2.5 Fourier' teisendus

Näide 2.8 *Leida piltide “Lena” ja “lill” kahedimensioonilise Fourier' teisenduse amplituud ja faas.*

Lahendus. Kahedimensioonilise Fourier' teisenduse arvutamiseks kasutame käsku `fft2`, lisaks kasutame käsku `fftshift`, mis paigutab alaliskomponendi pildi keskele. Amplituudi ja faasi jaoks kasutame, nagu ikka, käske `abs` ja `angle`:

```
>> lena_sp = fft2(lena);
>> lena_amp = abs(fftshift(lena_sp));
>> lena_pha = angle(fftshift(lena_sp));

>> lill_sp = fft2(lill);
>> lill_amp = abs(fftshift(lill_sp));
>> lill_pha = angle(fftshift(lill_sp));
```

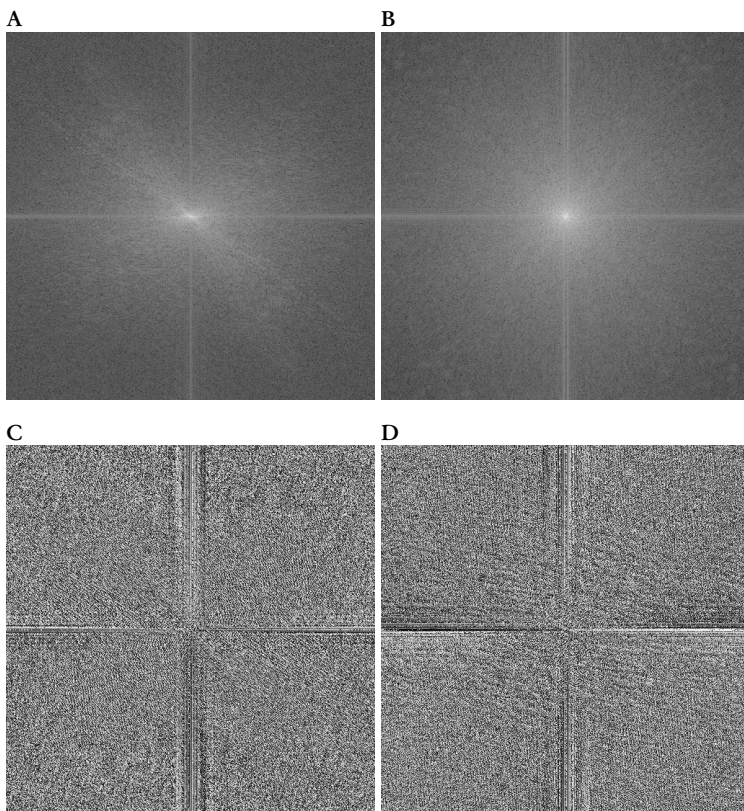
Tulemuste paremaks illustreerimiseks on vaja saadud amplituudidest võtta logaritm, s.t esitada nad logaritmilises skaalas. Lisaks on mõttekas teisendada saadud tulemused (amplituudi ja faasi maatriksid) halltoonide piltideks, selleks kasutame käsku `mat2gray`:

```
figure, imshow(mat2gray(log(lena_amp)));
figure, imshow(mat2gray(lena_pha));

figure, imshow(mat2gray(log(lill_amp)));
figure, imshow(mat2gray(lill_pha));
```

Saadud tulemused on esitatud joonisel 2.15.

□

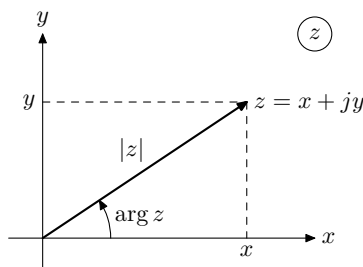


Joonis 2.15 — Piltide “Lena” ja “lill” Fourier’ teisenduse amplituudid: “Lena” (A) ja “lill” (B); ning faasid d: “Lena” (C) ja “lill” (D)

A Lisad

A.1 Kompleksarvud

Kompleksarvuks z nimetatakse arvu kujul $z = a + jb$, kus a ja b on reaalarvud ning $j = \sqrt{-1}$ tähistab imaginaarühikut. a on kompleksarvu reaalosa ja b on imaginaarosa. Kasutatakse veel ka esitusviisi $z = x + jy$, kus x ja y on vastavalt kompleksarvu reaali- ja imaginaarosa. Kompleksarvu moodul (amplituud) ehk kohavektori pikkus on tähistatud kui $|z|$. Kompleksarvu $z = x + jy$ kohavektori ja reaaltelje positiivse suuna vahelist nurka nimetatakse kompleksarvu argumendiks (faasiks) ja tähistatakse $\arg z$ (kasutatakse veel ka tähistust $\sphericalangle z$ ning φ).



Kompleksarvu $z = x + jy$ moodul $|z|$ on leitab kui

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (\text{A.1})$$

ja faas $\sphericalangle z$ kui

$$\sphericalangle z = \arctan \frac{y}{x} \quad (\text{A.2})$$

NB! Kasutades toodud seost faasi arvutamiseks, on vaja arvestada ka seda, millises veerandis antud arv z on!

Kompleksarvu z kaaskompleksarvuks nimetatakse kompleksarvu kujul $z^* = x - jy$. Samuti kehtib seos $|z|^2 = zz^*$.

Kompleksarvu saab trigonomeetriliselt ja eksponentsiaalselt esitada järgneval kujul:

$$z = |z|(\cos \varphi + j \sin \varphi) = |z| \cdot e^{j\varphi},$$

millest tuleneb Euleri valem:

$$e^{j\varphi} = \cos \varphi + j \sin \varphi \quad (\text{A.3})$$

Kasutades Euleri valemit (A.3), saame seosed siinuse ja koosinuse jaoks:

$$\begin{aligned} \sin \varphi &= \frac{e^{j\varphi} - e^{-j\varphi}}{2j} \\ \cos \varphi &= \frac{e^{j\varphi} + e^{-j\varphi}}{2} \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

A.2 Osamurdudeks lahutamine

Osamurdudeks lahutamist kasutatakse etteantud ratsionaalavaldise, s.t kahe hulkliikme jagatise, lihtsamale kujule viimiseks eesmärgiga lihtsustada mingi operatsiooni (näiteks z -teisenduse, integreerimise) läbiviimist.

Siinkohal käsitleme ainult selliseid ratsionaalavaldisi, kus lugejas olev polünoom on madalama astmega kui nimetajas olev, s.t tegemist on ratsionaalse lihtmurruga. Ratsionaalsed lihtmurrud on näiteks

$$\frac{1}{x^2 - 1} \text{ ja } \frac{2x^2 - x + 1}{x^3 - x^2 + x - 1}$$

Uurime järgneva näite põhjal osamurdudeks lahutamist.

Näide A.1 *Olgu meil antud mingi süsteemi ülekandefunktsioon kujul*

$$H(z) = \frac{5}{(1 - z^{-1})(1 - 2z^{-1} - 3z^{-2})}$$

Kirjutada antud ülekandefunktsioon lahutatuna osamurdudeks.

Lahendus. Osamurdudeks lahutamiseks tuleb kõigepealt leida *poolused* ehk nimetaja nullkohad. Antud juhul on üks poolus $z_1 = 1$, mis tuleb tegurist $(1 - z^{-1})$. Järgnevalt tuleb leida ülejäänud poolused ehk teguri $(1 - 2z^{-1} - 3z^{-2})$ nullkohad. Leiame need:

$$\begin{aligned} 1 - 2z^{-1} - 3z^{-2} &= 0 \quad | \cdot z^2 \\ z^2 - 2z - 3 &= 0 \\ z &= 1 \pm 2 \end{aligned}$$

Seega, kaks ülejäänud poolust on $z_2 = -1$ ja $z_3 = 3$.

Kasutades nüüd leitud pooluseid, saame $H(z)$ -i kirjutada kujul, kus nimetajas on teguriteks esimese astme polünoomid:

$$H(z) = \frac{5}{(1 - z^{-1})(1 + z^{-1})(1 - 3z^{-1})} \quad (*)$$

Osamurdudeks lahutatuna saab $H(z)$ kuju

$$H(z) = \frac{A}{1 - z^{-1}} + \frac{B}{1 + z^{-1}} + \frac{C}{1 - 3z^{-1}}, \quad (**)$$

kus A , B ja C on kordajad, mis tuleb leida nii, et seosed (*) ja (**) oleksid samaselt võrdsed, s.t

$$\frac{5}{(1-z^{-1})(1+z^{-1})(1-3z^{-1})} \equiv \frac{A}{1-z^{-1}} + \frac{B}{1+z^{-1}} + \frac{C}{1-3z^{-1}}$$

Peamine probleem on siin kordajate A , B ja C leidmine. Teeme seda näiteks resiididel põhineval meetodil: paneme pooluse väärtuse avaldisse (*), kusjuures avaldise (*) nimetajast **jätame välja** selle teguri, mis sisaldab antud poolust.

Leiame kõigepealt kordaja A , s.t poolusele $z = 1$ vastava kordaja. Selleks jätame avaldise nimetajast välja poolusele $z = 1$ vastava teguri $(1 - z^{-1})$ ja leiame ülejäänud avaldise väärtuse kohal $z = 1$:

$$z = 1 \rightarrow A = \left. \frac{5}{(1+z^{-1})(1-3z^{-1})} \right|_{z=1} = -\frac{5}{4}$$

Analoogselt leiame kordajad B (poolus $z = -1$) ja C (poolus $z = 3$):

$$z = -1 \rightarrow B = \left. \frac{5}{(1-z^{-1})(1-3z^{-1})} \right|_{z=-1} = \frac{5}{8}$$

$$z = 3 \rightarrow C = \left. \frac{5}{(1-z^{-1})(1+z^{-1})} \right|_{z=3} = \frac{45}{8}$$

Pannes leitud kordajate A , B ja C väärtused avaldisse (**), saame lõpptulemuse:

$$H(z) = \frac{-\frac{5}{4}}{1-z^{-1}} + \frac{\frac{5}{8}}{1+z^{-1}} + \frac{\frac{45}{8}}{1-3z^{-1}}$$

□

Näide A.2 *Labendada näites A.1 toodud ülesanne, kasutades MATLAB-i.*

Lahendus. MATLAB-i jaoks on tarvis, et nii murru lugejas kui ka nimetajas oleks polünoomid lahti kirjutatud, s.t et ei oleks tegureid. Kuna aga esimeses näites on murru nimetajas kaks tegurit: $(1 - z^{-1})$ ja $(1 - 2z^{-1} - 3z^{-2})$, siis on kõigepealt vaja nendest vabaneda, s.t need omavahel läbi korrutada.

Leiame kõigepealt teise teguri $(1 - 2z^{-1} - 3z^{-2})$ nullkohad:

```
>> roots([1 -2 -3])
```

```
ans =  
    3  
   -1
```

Seega saime kaks nullkohta: 3 ja -1 . Kuna esimese polünoomi $(1 - z^{-1})$ nullkoht on 1, siis nüüd leiame MATLAB-i abil nende nullkohtade järgi vastava polünoomi kordajad:

```
>> poly([1 3 -1])
```

```
ans =  
    1    -3    -1     3
```

See tähendab, et nimetajas on polünoom $1 - 3z^{-1} - z^{-2} + 3z^{-3}$ ja $H(z)$ -i avaldise saab kirjutada kujul

$$H(z) = \frac{5}{(1 - z^{-1})(1 - 2z^{-1} - 3z^{-2})} = \frac{5}{1 - 3z^{-1} - z^{-2} + 3z^{-3}}$$

Nüüd lahutame $H(z)$ -i osamurdudeks:

```
>> [r, p, k] = residuez(5, [1 -3 -1 3])
```

```
r =  
    5.6250  
   -1.2500  
    0.6250
```

```
p =  
    3.0000  
    1.0000  
   -1.0000
```

```
k =  
    []
```

Need tulemused tähendavad seda, et vektor r sisaldab osamurdude kordajaid (resiide), vektor p vastavaid pooluseid ja vektor k polünoomide jagamisel tekkinud jääki (see on antud juhul tühi vektor, kuna nimetaja aste on suurem kui lugeja oma).

Nendest tulemustest on näha, et $H(z)$ lahutati kolmeks osamurruks, kusjuures selle osamurru, mille poolus on kohas $z = 3$, kordaja (resiid) on 5,625 jne. Nagu näha, ühtib tulemus näite A.1 tulemustega. \square

A.3 z-teisenduse tabel

Olulisemad z-teisenduste paarid ja omadused on ära toodud järgnevas tabelis:

Signaal		z-teisendus
$\delta[n]$	$\xleftrightarrow{\mathcal{Z}}$	1
$u[n]$	$\xleftrightarrow{\mathcal{Z}}$	$\frac{1}{1 - z^{-1}}$
$-u[-n - 1]$	$\xleftrightarrow{\mathcal{Z}}$	$\frac{1}{1 - z^{-1}}$
$a^n u[n]$	$\xleftrightarrow{\mathcal{Z}}$	$\frac{1}{1 - az^{-1}}$
$-a^n u[-n - 1]$	$\xleftrightarrow{\mathcal{Z}}$	$\frac{1}{1 - az^{-1}}$
$a^n \cos(n\omega)u[n]$	$\xleftrightarrow{\mathcal{Z}}$	$\frac{1 - a \cos(\omega) z^{-1}}{1 - 2a \cos(\omega) z^{-1} + a^2 z^{-2}}$
$a^n \sin(n\omega)u[n]$	$\xleftrightarrow{\mathcal{Z}}$	$\frac{a \sin(\omega) z^{-1}}{1 - 2a \cos(\omega) z^{-1} + a^2 z^{-2}}$
$x[n]$	$\xleftrightarrow{\mathcal{Z}}$	$X(z)$
$ax_1[n] + bx_2[n]$	$\xleftrightarrow{\mathcal{Z}}$	$aX_1(z) + bX_2(z)$
$x[n - \tau]$	$\xleftrightarrow{\mathcal{Z}}$	$z^{-\tau}X(z)$
$x_1[n] * x_2[n]$	$\xleftrightarrow{\mathcal{Z}}$	$X_1(z) \cdot X_2(z)$
$x[-n]$	$\xleftrightarrow{\mathcal{Z}}$	$X(1/z)$
$nx[n]$	$\xleftrightarrow{\mathcal{Z}}$	$-z \frac{dX(z)}{dz}$

A.4 Mõned olulisemad MATLAB-i käsud

Järgnevalt on esitatud lühike nimekiri mõnedest olulisematest MATLAB-i käskudest, mida võib vaja minna signaalitöötluses. Iga käsu kohta on lisatud vaid lühike selgitus, täpsema info saamiseks tuleb MATLAB-is sisestada `help 'käsk'`. Näiteks info saamiseks käsu `filter` kohta kirjutame `help filter`.

`abs` — Absoluutväärtuse või kompleksarvu mooduli (amplituudi) leidmine.

`angle` — Kompleksarvu faasi leidmine.

`butter` — Butterworthi filtri disainimine.

`buttord` — Butterworthi filtri järgu leidmine.

`cheb1ord` — Tšebõšovi I tüüpi filtri järgu leidmine.

`cheby1` — Tšebõšovi I tüüpi filtri disainimine.

`cheb2ord` — Tšebõšovi II tüüpi filtri järgu leidmine.

`cheby` — Tšebõšovi II tüüpi filtri disainimine.

`conv` — Konvolutsiooni leidmine ja polünoomide korrutamine.

`ellip` — Elliptilise filtri disainimine.

`ellipord` — Elliptilise filtri järgu leidmine.

`fft` — Kiire Fourier' teisenduse (FFT) leidmine.

`filter` — Signaali filtreerimine.

`filtfilt` — Signaali filtreerimine nullise faasiga.

`fir1` — FIR-filtri disainimine akna meetodil.

`firpm` — Parks-McClellani optimaalse FIR-filtri disainimine.

`firpmord` — Parks-McClellani optimaalse FIR-filtri järgu leidmine.

`freqz` — Digitaalse filtri sageduskarakteristiku leidmine.

`grpdelay` — Digitaalse filtri rühmahilistuse leidmine.

`ifft` — Kiire Fourier' pöördteisenduse (IFFT) leidmine.

`impz` — Digitaalse filtri impulsskaja leidmine.

`poly` — Nullkohtade polünoomiks teisendamine.

`residuez` — Osamurdudeks jagamine.

`roots` — Polünoomi nullkohtade leidmine.

`zplane` — z -tasandi nullide-pooluste diagrammi leidmine.