

HIDRÁULICA

AUTORES:

**Prof.º Dr.º Sérgio António Neves Lousada
Eng.º Rafael Freitas Camacho**

Ficha Técnica

Título	Hidráulica: aulas teóricas
Autores	Sérgio António Neves Lousada Rafael Freitas Camacho
Editora	Universidade da Madeira
Edição	1ª
Ano da edição	2018
Volumes	I
ISBN	978-989-8805-20-1
Suporte	Eletrónico
Formato	PDF

Índice

CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO	27
1.1 Breve nota histórica da Hidráulica	27
1.2 Divisões da hidráulica	28
1.3 Conceito de fluido	29
1.4 Sistemas de unidades. Sistema internacional de unidades	29
1.4.1 Sistemas utilizados em Hidráulica	29
1.4.2 Sistema Internacional (SI)	29
1.5 Propriedades físicas dos fluidos	30
1.5.1 Peso e massa. Peso volúmico e massa volúmica	30
1.5.2 Densidade	30
1.5.3 Isotropia	31
1.5.4 Continuidade	31
1.5.5 Compressibilidade	31
1.5.6 Viscosidade	32
1.5.7 Coesão	34
1.5.8 Tensão superficial e capilaridade	34
1.5.9 Tensão do vapor de um líquido	35
1.5.10 Solubilidade dos gases na água	35
1.5.11 Velocidade de propagação das ondas elásticas	35
1.6 Equações da mecânica dos fluidos	36
1.5.1 Variáveis de Lagrange	38
1.5.2 Variáveis de Euler	38
1.5.3 Variáveis de Kraichnan	39
1.5.4 Tipos de equações da Mecânica dos Fluidos e Hidráulica	40
CAPÍTULO 2 - EQUAÇÕES FUNDAMENTAIS DO MOVIMENTO DOS FLUIDOS .	43
2.1 Parâmetros de carácter hidrocinemático	43
2.1.1 Trajetórias. Linhas de corrente. Linhas filamento. Linhas fluidas	43
2.1.2 Variáveis de Lagrange. Variáveis de Euler	44
2.1.3 Caudal. Velocidade média de escoamento	46
2.1.4 Aceleração	47
2.1.5 Vorticidade	50
2.2 Tipos de movimento	52
2.2.1. Movimentos não permanentes e permanentes	52
2.2.2. Movimentos/Escoamento rotacionais e irrotacionais	53
2.2.3. Movimentos laminares, de transição e turbulentos	54
2.2.4. Escoamentos exteriores, interiores e em meios porosos	54
2.3 Equação de continuidade	55
2.3.1 Dedução da equação geral	56
2.3.2 Aplicação a um tubo de corrente	58
2.4 Equações de equilíbrio dinâmico	59
2.4.1 Ações nos fluidos	59
2.4.2 Noção de equilíbrio dinâmico	60
2.4.3 Caracterização do estado de tensão	61
2.4.4 Equações de equilíbrio dinâmico	61
2.4.5 Equações de Euler	62

2.4.6 Equações de Navier-Stokes. Condições fronteira	62
CAPÍTULO 3 - HIDROSTÁTICA	69
3.1 Equações gerais de equilíbrio dos fluidos.....	69
3.1.1 Caso geral	69
3.1.2 Equilíbrio de um fluido a temperatura constante	70
3.1.3 Equilíbrio de fluidos pesados.....	70
3.1.4 Equilíbrio de líquidos pesados.....	71
3.1.5 Pressões absolutas e pressões efetivas	72
3.1.6 Equilíbrio de líquidos com densidades diferentes.....	73
3.1.7 Equilíbrio de líquidos submetidos a campos de forças não exclusivamente gravíticos	73
3.2 Manómetros de líquidos.....	76
3.3 Impulsões hidrostáticas em superfícies	80
3.3.1 Conceito	80
3.3.2 Impulsões hidrostáticas em superfícies planas	80
3.3.3 Impulsões hidrostáticas em superfícies curvas	85
3.3.4 Impulsões hidrostáticas em superfícies fechadas	87
3.3.5 Pressões uniformes em toda a massa líquida	87
3.4 Princípio de Pascal	89
3.5 Equilíbrio de corpos flutuantes.....	90
3.5.1 Impulsão. Princípio de Arquimedes	90
3.5.2 Definições. Teoremas fundamentais	92
3.5.3 Condição de equilíbrio de corpos flutuantes.....	98
CAPÍTULO 4 - Teorema de Bernoulli e suas aplicações	101
4.1 Teorema de Bernoulli no aspeto local.....	101
4.1.1 Dedução da equação local de Bernoulli	101
4.1.2 Interpretação da expressão local do teorema de Bernoulli.....	103
4.1.3 Teorema de Bernoulli aplicado ao regime permanente	106
4.2 Teorema de Bernoulli no aspeto global.....	108
4.2.1 Aplicação do teorema de Bernoulli a um tubo de corrente	108
4.2.2 Coeficientes globais da equação de Bernoulli.....	110
4.2.3 Expressão global do teorema de Bernoulli	115
4.2.4 Interpretação da expressão global do teorema de Bernoulli	116
4.2.5 Aplicação da equação global de Bernoulli ao regime permanente.....	118
4.3 Aplicações do teorema de Bernoulli.....	120
4.3.1 Medição de velocidades com auxílio de um Tubo de Pitot.....	120
4.3.2 Difusor de turbina hidráulica	121
4.3.3 Linhas de carga e piezométricas em instalações de máquinas hidráulicas	123
4.3.4 Ocorrência de cavitação.....	125
CAPÍTULO 5 - Teorema da quantidade de movimento e suas aplicações	129
5.1 Expressão do teorema da quantidade de movimento	129
5.1.1 Princípio da quantidade de movimento aplicado à mecânica dos fluidos.....	129
5.1.2 Teorema da quantidade de movimento aplicado a um tubo de corrente.....	131
5.2 Aplicações do teorema da quantidade de movimento	135
5.2.1 Condução com redução gradual de secção	135
5.2.2 Redução de secção e mudança de direção	136

5.2.3 Ação de um jato sobre uma superfície curva fixa	137
5.2.4 Ação de um jato sobre uma superfície plana	138
5.2.5 Forças em superfícies sólidas móveis	138
5.2.6 Teorema de Kutta-Joukowski	140
CAPÍTULO 6 - Escoamentos por orifícios e descarregadores.....	143
6.1 Escoamentos por orifícios.....	143
6.1.1 Esquema geral de um orifício	143
6.1.2 Classificação	144
6.1.3 Orifícios de paredes delgadas.....	145
6.1.4 Orifícios de parede espessa. Tubos adicionais	152
6.1.5 Tempos de esvaziamento de reservatórios	158
6.1.6 Configuração dos jatos líquidos	159
6.2 Escoamentos por descarregadores	160
6.2.1 Classificação de descarregadores.....	161
6.2.2 Influência da forma na veia líquida	162
6.2.3 Descarregador de soleira delgada.....	164
6.2.4 Descarregadores de soleira espessa	171
6.2.5 Descarregadores de soleira normal.....	172
6.2.6 Cuidados no uso de descarregadores para medição de caudal.....	173
CAPÍTULO 7 - Análise dimensional.....	175
7.1 Introdução	175
7.2 Unidades e dimensões.....	176
7.3 Teoremas da Análise Dimensional	177
7.3.1 Aplicação do Teorema dos π a um problema de Mecânica dos Fluidos	179
7.3.2 Significado físico dos parâmetros adimensionais	181
CAPÍTULO 8 - Semelhança.....	183
8.1 Semelhança mecânica e hidráulica	183
8.1.1 Semelhança de Euler, Froude e Reynolds	184
8.1.2 Parâmetros adimensionais comuns.....	186
8.1.3 Semelhanças a considerar nos estudos em modelo	186
8.1.4 Semelhança em turbomáquinas hidráulicas	187
8.1.5 Generalidades sobre modelos.....	188
CAPÍTULO 9 - Escoamentos sob pressão	191
9.1 Generalidades.....	191
9.1.1 Estabelecimento do escoamento.....	194
9.1.2 Rugosidade das paredes dos tubos	194
9.1.3 Regimes de escoamento. Experiências de Nikuradse	195
9.2 Perdas de carga uniformes nos escoamentos sob pressão.....	196
9.2.1 Perdas de carga em regime laminar.....	197
9.2.2 Perdas de carga em regime turbulento hidraulicamente liso	197
9.2.3 Perdas de carga em regime turbulento rugoso	197
9.2.4 Perdas de carga em condutas comerciais.....	197
9.3 Perdas de carga localizadas nos escoamentos sob pressão.....	199
9.3.1 Perda de carga num alargamento brusco	199
9.3.2 Perda de carga num alargamento gradual	200
9.3.3 Perda de carga na passagem de uma conduta para um reservatório	200

9.3.4	Perda de carga num estreitamento brusco.....	201
9.3.5	Perda de carga na passagem de um reservatório para uma conduta	202
9.3.6	Perdas de carga em mudanças de direção	202
9.3.7	Perdas de carga em derivações	204
9.3.8	Perdas de carga em válvulas	204
9.3.9	Perdas de carga em grelhas	207
9.3.10	Comprimento equivalente a uma perda de carga localizada.....	207
9.4	Problemas do movimento uniforme em tubos.....	208
9.4.1	Generalidades	208
9.4.2	Tipos de problemas.....	209
9.4.3	Determinação das alturas piezométricas, dados os diâmetros e os caudais	209
9.4.4	Determinação dos caudais, dados os diâmetros e as perdas de carga .	209
9.4.5	Determinação dos diâmetros, dados os caudais e as perdas de carga .	210
9.4.6	Posição das condutas em relação à linha piezométrica	210
9.4.7	Condutas alimentadas pelas duas extremidades	214
9.4.8	Dimensionamento de condutas gravíticas.....	216
9.5	Dimensionamento de condutas elevatórias	218
9.5.1	Generalidades	218
9.5.2	Considerações económicas	218
9.5.3	Estrutura de custos.....	219
9.5.4	Cálculo do diâmetro económico	220
9.5.5	Influência do consumo durante o ano.....	223
9.5.6	Fórmulas de dimensionamento aproximado.....	223
9.5.7	Dimensionamento das paredes das condutas.....	224
9.6	Problemas do movimento uniforme envolvendo grupos de condutas.....	224
9.6.1	Condutas em série	224
9.6.2	Condutas em paralelo	225
9.6.3	Nó de condutas	225
9.6.4	Rede de condutas. Sistemas de equações	226
10.6.5	Rede de condutas. Malhas.....	231
9.6.6	Redes de condutas. Dispositivos de controlo de pressões e caudais em redes	234
9.7	Movimento variado em condutas	237
9.7.1	Perdas de carga em movimento variado.....	237
9.7.2	Problemas do movimento variado em condutas.....	238
CAPÍTULO 10 - Escoamento permanente em condutas condicionado por máquinas hidráulicas		241
10.1	Turbinas hidráulicas.....	241
10.1.1	Características de funcionamento	241
10.1.2	Funcionamento de turbinas integradas numa instalação	245
10.1.3	Escolha de turbinas adequadas a uma dada instalação.....	263
10.2	Bombas hidráulicas.....	265
10.2.1	Características de funcionamento	265
10.2.2	Funcionamento de bombas integradas numa instalação	277
10.2.3	Escolha de bombas adequadas a uma dada instalação	285
CAPÍTULO 11 - Escoamentos com superfície livre		289

11.1	Generalidades.....	289
11.1.1	Classificação dos escoamentos	290
11.1.2	Tipos de canais	291
11.1.3	Geometria dos canais.....	292
11.2	Aplicação do teorema de Bernoulli aos escoamentos com superfície livre.	298
11.2.1	Expressão do teorema de Bernoulli.....	298
11.2.2	Distribuição de pressões na secção transversal.....	299
11.2.3	Distribuição de velocidades na secção transversal	301
11.2.4	Perdas de energia. Fórmulas de resistência	303
11.2.5	Energia específica	307
11.2.6	Superfícies de energia.....	308
11.2.7	Valores críticos	310
11.3	Aplicação do teorema da quantidade de movimento aos escoamentos com superfície livre	312
11.3.1	Princípios e definições.....	312
11.3.2	Quantidade de movimento total. Força específica.....	313
11.3.3	Superfícies de quantidade de movimento total.....	315
11.3.4	Relação entre a quantidade de movimento total e a energia específica	317
11.4	Regime uniforme em canais	319
11.4.1	Condições de estabelecimento do regime uniforme em canais	319
11.4.2	Altura normal	319
11.4.3	Secção de máximo caudal	322
11.4.4	Problemas do movimento uniforme em canais.....	324
11.4.5	Regime uniforme crítico.....	325
11.5	Regime permanente gradualmente variado em canais.....	325
11.5.1	Equações teóricas do movimento gradualmente variado em canais....	325
11.5.2	Regolfo em canais prismáticos com caudal constante	326
11.5.3	Regolfo em canais com caudal variável	333
11.6	Regime permanente rapidamente variado em canais.....	335
11.6.1	Considerações gerais.....	335
11.6.2	Ressalto hidráulico	336
11.6.3	Outros tipos de escoamentos rapidamente variados.....	348
	REFERÊNCIAS	351

Índice de Figuras

Figura 1 – Viscosidade.	32
Figura 2 – Relações entre tensões e deformações.	32
Figura 3 – Tensão superficial (White, 1948).	34
Figura 4 – Adesão.	34
Figura 5 – Tensor das tensões (https://commons.wikimedia.org).	36
Figura 6 – Esquema da ação de uma força sobre uma camada de fluido (http://www.mspc.eng.br).	36
Figura 7 – Velocidade vetorial (Junior & Colvara, 2010).	36
Figura 8 – Mistura de óleo, água e areia (http://mundoeducacao.bol.uol.com.br/)...	37
Figura 9 – Termómetro de imersão (https://www.3bscientific.es).	37
Figura 10 – Variáveis de Lagrange (Pinho et al., 2011).	38
Figura 11 – Variáveis de Euler (Pinho et al., 2011).	38
Figura 12 – Estudo da turbulência no escoamento (www.turbulencia.coppe.ufrj.br/).	39
Figura 13 – Volume e Superfície de controlo (Pinho et al., 2011).	40
Figura 14 – Trajetória (Pinho et al., 2011).	43
Figura 15 – Linhas de corrente (Pinho et al., 2011).	43
Figura 16 – Tubo de corrente (Pinho et al., 2011).	44
Figura 17 – Linhas fluídas (Pinho et al., 2011).	44
Figura 18 – Representação da velocidade em Variáveis de Lagrange (Vasconcelos, 2005).	45
Figura 19 – Representação da velocidade em Variáveis de Euler (Vasconcelos, 2005).	46
Figura 20 – Ilustração do caudal a atravessar uma determinada superfície S (adaptado de Pinho et al., 2011).	47
Figura 21 – Caracterização da aceleração em Representação de Euler (Vasconcelos, 2005).	48
Figura 22 – Deformação de cisalhamento no plano (x, y) de um elemento de fluido em escoamento (Gobbi et al., 2011).	50
Figura 23 – Movimento não permanente (Pinho et al., 2011).	52
Figura 24 – Movimento permanente variado (Pinho et al., 2011).	52
Figura 25 – Movimento permanente uniforme (Pinho et al., 2011).	53
Figura 26 – Representação gráfica do movimento laminar (Pinho et al., 2011).	54
Figura 27 – Representação gráfica do movimento turbulento (Pinho et al., 2011)...	54
Figura 28 – Superfície de controlo (Pinho et al., 2011).	56
Figura 29 – Tubo de corrente (Pinho et al., 2011).	58
Figura 30 – Exemplo de fluidos incompressíveis e movimento permanente (Pinho et al., 2011).	59
Figura 31 – Forças de volume ou de massa (Pinho et al., 2011).	59
Figura 32 – Forças de superfície ou forças de contacto (Pinho et al., 2011).	60
Figura 33 – Equilíbrio dinâmico (Pinho et al., 2011).	60
Figura 34 – Transformação dos eixos (Baliño, 2017).	63
Figura 35 – Condições de fronteira em superfície livre (cinemática) (Baliño, 2017).	67
Figura 36 – Condições de fronteira em superfície livre (normal) (Baliño, 2017).	67
Figura 37 – Condições de fronteira em superfície entre fluidos (Baliño, 2017).	68

Figura 38 – Equilíbrio de líquidos pesados (adaptado de Pinho et al., 2011).....	71
Figura 39 – Princípio fundamental da Hidrostática (Pinho et al., 2011).....	72
Figura 40 – Massa líquida constituída por líquidos de densidades diferentes (Pinho et al., 2011).....	73
Figura 41 – Líquido submetido a uma aceleração constante (Pinho et al., 2011). ...	73
Figura 42 – Equilíbrio de um líquido num vaso animado de velocidade angular constante (Pinho et al., 2011).....	74
Figura 43 – Velocidade angular ω_0 para a qual o vértice da parábola atinge o fundo do reservatório (Pinho et al., 2011).	76
Figura 44 – Ligação (Pinho et al., 2011).....	76
Figura 45 – Piezómetros verticais (Pinho et al., 2011).	77
Figura 46 – Piezómetro inclinado (Pinho et al., 2011).	77
Figura 47 – Pressões efetivas elevadas (Pinho et al., 2011).....	78
Figura 48 – Pressões efetivas baixas (Pinho et al., 2011).....	78
Figura 49 – Manómetros diferenciais, $\gamma_m > \gamma$ (Pinho et al., 2011).....	78
Figura 50 – Manómetros diferenciais, $\gamma_m < \gamma$ (Pinho et al., 2011).....	79
Figura 51 – Manómetros em reservatórios (Pinho et al., 2011).....	80
Figura 52 – Impulsão hidrostática sobre um elemento de superfície plana (Pinho et al., 2011).	81
Figura 53 – Superfície plana mergulhada num líquido (Pinho et al., 2011).	81
Figura 54 – Exemplo de impulsão hidrostática numa superfície plana (Pinho et al., 2011).	82
Figura 55 – Exemplo de superfície curva (Pinho et al., 2011).	85
Figura 56 – Componente horizontal da força de pressão (Pinho et al., 2011).....	85
Figura 57 – Componente vertical da força de pressão (Pinho et al., 2011).....	86
Figura 58 – Impulsões hidrostáticas em superfícies fechadas (Pinho et al., 2011)..	87
Figura 59 – Pressões uniformes em toda a massa líquida (Pinho et al., 2011).....	88
Figura 60 – Corpo cilíndrico submetido a uma pressão uniforme (caldeira ou conduta sobre pressão) (Pinho et al., 2011).	88
Figura 61 – Resultante das forças de pressão no sentido transversal (Pinho et al., 2011).	89
Figura 62 – Resultante das forças de pressão no sentido longitudinal (Pinho et al., 2011).	89
Figura 63 – Princípio de Pascal (Pinho et al., 2011).....	89
Figura 64 – Prensa hidráulica (Pinho et al., 2011).....	90
Figura 65 – Impulsão (http://blogcfqmariana.blogspot.pt/2015/).....	91
Figura 66 – Representação clássica unidimensional de um sistema com um estado metaestável (1), um estado instável (2) e um estado estável (3) (https://commons.wikimedia.org/).	92
Figura 67 – Paralelepípedo imerso (Martins, 2010).....	93
Figura 68 – Fotomontagem mostrando um iceberg inteiro flutuando com maior parte imersa (https://commons.wikimedia.org/).	94
Figura 69 – Centro de flutuabilidade e Impulsão (adaptado de PNA,1988).....	96
Figura 70 – Secção transversal uniforme de uma embarcação (Martins, 2010).....	97
Figura 71 – Condição de equilíbrio longitudinal (Fonte: Lewis, 1988).	98
Figura 72 – Condição de equilíbrio (adaptado de Martins, 2010).....	98

Figura 73 – Condição de equilíbrio para corpos submersos (adaptado de Lewis, 1988).	99
Figura 74 – Condição de equilíbrio para corpos flutuantes (adaptado de Lewis, 1988).	100
Figura 75 – Partícula fluida que se desloca ao longo da sua trajetória (Pinho et al., 2011).	101
Figura 76 – Linha piezométrica e linha de energia ou de carga (Pinho et al., 2011).	105
Figura 77 – Diferença entre perda de carga uniforme e perdas de carga localizadas (Pinho et al., 2011).	108
Figura 78 – Tubo de corrente (Pinho et al., 2011).	109
Figura 79 – Escoamento com superfície livre	110
Figura 80 – Distribuição de pressões (Pinho et al., 2011).	111
Figura 81 – Distribuição de pressões em escoamentos com superfície livre (Pinho et al., 2011).	112
Figura 82 – Filetes sensivelmente paralelos num mesmo plano vertical (Pinho et al., 2011).	113
Figura 83 – Linha piezométrica e linha de energia (Pinho et al., 2011).	117
Figura 84 – Associação do Tubo Piezométrico com o Tubo de Pitot para determinação do diagrama de velocidades numa secção transversal de um tubo de fluxo (Vasconcelos, 2005).	120
Figura 85 – Arranjo típico de uma turbina hidráulica (Tavares, 2014).	121
Figura 86 – Visualização do rotor: a) com difusor; b) sem difusor (Coelho, 2006). 122	
Figura 87 – Circuito hidráulico (Vasconcelos, 2005).	123
Figura 88 – Linha de energia e linha piezométrica no circuito hidráulico-conduta elevatória (Vasconcelos, 2005).	124
Figura 89 – Linha de energia e linha piezométrica no circuito hidráulico-conduta gravítica com turbina (Vasconcelos, 2005).	125
Figura 90 – Modelo de propulsor gerando cavitação num túnel de água experimental (https://commons.wikimedia.org).	126
Figura 91 – Danos causados por cavitação numa Turbina Francis (https://commons.wikimedia.org).	127
Figura 92 – Espectro de vibração coletado no mancal de uma bomba (Oliveira, 2007).	128
Figura 93 – Rotor danificado pela cavitação, pertencente a uma bomba de água (Oliveira, 2007).	128
Figura 94 – Esquema de bomba centrífuga (http://www.ebah.com.br) e Mancal (https://commons.wikimedia.org).	128
Figura 95 – Tubo de corrente (Brunetti, 2008).	132
Figura 96 – Pressões, tensões e campo de gravidade (Brunetti, 2008).	133
Figura 97 – Componentes da força resultante (Brunetti, 2008).	134
Figura 98 – Conduto com redução gradual de secção (Brunetti, 2008).	135
Figura 99 – Redução de secção e mudança de direção (Brunetti, 2008).	136
Figura 100 – Jato incidindo numa placa curva (Brunetti, 2008).	137
Figura 101 – Jato incidindo numa placa plana (Brunetti, 2008).	138
Figura 102 – Jato incidindo numa placa curva em movimento (Brunetti, 2008). ..	139

Figura 103 – (a): Evolução de uma massa de fluido ao encontrar o corpo; (b): Volume de controlo usado na determinação da força de sustentação atuando sobre o corpo (Pontes & Mangiavacchi, 2013).....	140
Figura 104 – Esquema geral de um orifício (adaptado de Silva, 2014).	144
Figura 105 – Orifícios de paredes delgadas (Junior L. B., 2005).....	145
Figura 106 – Caudal escoado por orifícios de pequenas dimensões (Pinho et al., 2011).	145
Figura 107 – Caudal escoado por orifícios de grandes dimensões. Orifício retangular (Pinho et al., 2011).	148
Figura 108 – Orifício totalmente submerso (DRHGSA, 2007).	150
Figura 109 – Orifícios parcialmente submersos (DRHGSA, 2007).....	152
Figura 110 – Orifícios de parede espessa (Junior L. B., 2005).....	152
Figura 111 – Orifício de bordos arredondados (https://pt.slideshare.net/IsaqueEliasCorreia/instrumentacaobasica2-pdf).	153
Figura 112 – (a) Contração completa (em todas as faces do orifício); (b) Contração incompleta (só na parte de cima do orifício) (Junior L. B., 2005).....	153
Figura 113 – Tubo adicional curto (Pinho et al., 2011).	155
Figura 114 – Tubo adicional com veia líquida aderente (Pinho et al., 2011).	156
Figura 115 – Tubo adicional cilíndrico (Pinho et al., 2011).	157
Figura 116 – Tubo adicional cónico divergente (Pinho et al., 2011).	157
Figura 117 – Esvaziamento de reservatório de secção variável (Pinho et al., 2011).	158
Figura 118 – Esvaziamento de reservatório de secção constante (Pinho et al., 2011).	159
Figura 119 – Inversão da veia líquida (Pinho et al., 2011).	160
Figura 120 – Configuração longitudinal da veia líquida (Pinho et al., 2011).	160
Figura 121 – Esquema de um descarregador retangular com lâmina vertente livre (Queiroz, 2017).....	161
Figura 122 – Descarregador (a) sem contrações laterais, (b) com uma contração lateral, (c) com duas contrações laterais (adaptado de Queiroz, 2017).	162
Figura 123 – Lâmina livre (Queiroz, 2017).	163
Figura 124 – Lâmina deprimida (Queiroz, 2017).	163
Figura 125 – Lâmina aderente (Queiroz, 2017).....	164
Figura 126 – Lâmina afogada (Queiroz, 2017).	164
Figura 127 – Descarregador retangular de soleira delgada, sem contrações laterais e descarga livre ou de Bazin (Queiroz, 2017).....	164
Figura 128 – Descarregador triangular (Queiroz, 2017).	167
Figura 129 – Descarregador trapezoidal (Queiroz, 2017).	168
Figura 130 – Descarregador trapezoidal (Cipolletti) (Queiroz, 2017).	169
Figura 131 – Descarregador circular (Queiroz, 2017).	169
Figura 132 – Descarregador tubular vertical de descarga livre (Queiroz, 2017).....	170
Figura 133 – Descarregador retangular de soleira espessa (Queiroz, 2017).	171
Figura 134 – Perfil Creager (Queiroz, 2017).....	172
Figura 135 – Perfil WES (EUA) (Queiroz, 2017).....	173
Figura 136 – Estudo de fenómenos físicos (adaptado de Vasconcelos, 2005).	175
Figura 137 – Representação esquemática da semelhança física (adaptado de Vasconcelos, 2005).	183

Figura 138 – Semelhanças (adaptado de Vasconcelos, 2005).	184
Figura 139 – Conduta circular (Pinho et al., 2011).	192
Figura 140 – Rugosidade absoluta (Pinho et al., 2011).	194
Figura 141 – Rugosidade artificial de Nikuradse (Pinho et al., 2011).	195
Figura 142 – Resultados experimentais de Nikuradse (Pinho et al., 2011).	195
Figura 143 – Regimes de escoamento em condutas (http://slideplayer.com.br/slide/7750390/#).	196
Figura 144 – Diagrama de Moody (tubos reais) (adaptado de https://www.slideshare.net/thiaggoneres/diagrama-moody-70133925).	196
Figura 145 – Perda de carga num alargamento brusco (Pinho et al., 2011).	199
Figura 146 – Alargamento gradual (KSB, 2003).	200
Figura 147 – Passagem em aresta viva de uma conduta para um reservatório (Pinho et al., 2011).	200
Figura 148 – Passagem com alargamento gradual de uma conduta para um reservatório (Pinho et al., 2011).	201
Figura 149 – Estreitamento brusco (Pinho et al., 2011).	201
Figura 150 – Passagem em aresta viva de um reservatório para uma conduta (Pinho et al., 2011).	202
Figura 151 – Passagem com estreitamento gradual de um reservatório para uma conduta (Pinho et al., 2011).	202
Figura 152 – Mudança gradual de direção em tubo de secção circular (curvas) (KSB, 2003).	203
Figura 153 – Mudança brusca de direção em tubo de secção circular (joelho ou cotovelo) (KSB, 2003).	203
Figura 154 – Válvula de gaveta (adaptado de http://www.globalspec.com).	205
Figura 155 – Válvula de borboleta (adaptado de http://www.sohanengg.com).	205
Figura 156 – Válvula esférica (adaptado de http://www.histarmar.com.ar e Pinho et al., 2011).	206
Figura 157 – Válvula de retenção de batente (adaptado de http://www.solucoesindustriais.com.br e https://www.unival.com.br).	206
Figura 158 – Grelha (adaptado de Pinho et al., 2011).	207
Figura 159 – Representação esquemática de um fluxo no interior de um tubo (Pinho et al., 2011).	208
Figura 160 – Conduta abaixo da linha piezométrica efetiva em toda a sua extensão (Pinho et al., 2011).	210
Figura 161 – Conduta acima da linha piezométrica efetiva (em CD), mantendo-se abaixo da linha piezométrica absoluta (Pinho et al., 2011).	211
Figura 162 – Conduta coincidindo com a linha piezométrica efetiva em toda a sua extensão (Pinho et al., 2011).	211
Figura 163 – A conduta corta a linha de carga efetiva (em CD), mantendo-se abaixo da linha piezométrica absoluta (Pinho et al., 2011).	212
Figura 164 – A conduta corta a linha piezométrica absoluta (em CD) mas não atinge a linha de carga efetiva (Pinho et al., 2011).	212
Figura 165 – A conduta corta a linha piezométrica absoluta e passa acima da linha de carga efetiva (Pinho et al., 2011).	213
Figura 166 – Condições de máximo transporte (Pinho et al., 2011).	213
Figura 167 – Reservatório de nível constante.	214

Figura 168 – Válvula parcialmente aberta.....	214
Figura 169 – Funcionamento do reservatório R1 ao reservatório R2 (Pinho et al., 2011).	214
Figura 170 – Funcionamento com derivação T e caudal q, piezométrica em $T > R2$ (Pinho et al., 2011).	215
Figura 171 – Funcionamento com derivação T e caudal q, piezométrica em $T = R2$ (Pinho et al., 2011).	215
Figura 172 – Funcionamento com derivação T e caudal q, piezométrica em $T < R2$ (Pinho et al., 2011).	216
Figura 173 – Funcionamento com derivação T e caudal q, piezométrica em $T = T$ (Pinho et al., 2011).	216
Figura 174 – Exemplos de aplicação (Pinho et al., 2011).	217
Figura 175 – Exemplo de conduta elevatória (Pinho et al., 2011).	218
Figura 176 – Custo de investimento (custo inicial) (Pinho et al., 2011).	218
Figura 177 – Custo de funcionamento (custo anual, mais significativo: custo de energia) (Pinho et al., 2011).	219
Figura 178 – Custo inicial (C_1) (Pinho et al., 2011).	219
Figura 179 – Diagrama de fluxos monetários-tempo (Pinho et al., 2011).	221
Figura 180 – Caudal/energia em função do tempo (Pinho et al., 2011).	223
Figura 181 – Exemplo de aplicação (Pinho et al., 2011).	224
Figura 182 – Condutas em série (Pinho et al., 2011).	224
Figura 183 – Condutas em paralelo (Pinho et al., 2011).	225
Figura 184 – Nó de condutas (Pinho et al., 2011).	225
Figura 185 – Equações nos Nós (Pinho et al., 2011).	227
Figura 186 – Exemplo de aplicação de equações em Q (Pinho et al., 2011).	228
Figura 187 – Exemplo de aplicação de equações em H (Pinho et al., 2011).	229
Figura 188 – Exemplo de aplicação de equações em ΔQ (Pinho et al., 2011).	230
Figura 189 – Métodos de resolução de problemas envolvendo malhas (adaptado de Pinho et al., 2011).	231
Figura 190 – Exemplo de aplicação do método de Hardy-Cross (Pinho et al., 2011).	232
Figura 191 – Arbítrio de caudais (Pinho et al., 2011).	232
Figura 192 – Determinação das pressões nos nós da rede (Pinho et al., 2011). ..	233
Figura 193 – Reservatório de controlo de pressões e caudais (Pinho et al., 2011). ..	234
Figura 194 – Válvula de retenção (Pinho et al., 2011).	234
Figura 195 – Curva característica da bomba (Pinho et al., 2011).	235
Figura 196 – Válvula redutora de pressão (http://www.vaportec.com.br).	236
Figura 197 – Exemplo de rede de condutas com dispositivos reguladores (Pinho et al., 2011).	236
Figura 198 – Tubo com distribuição de percurso (Pinho et al., 2011).	237
Figura 199 – Exemplo de um problema envolvendo movimento variado em condutas (Pinho et al., 2011).	238
Figura 200 – Turbina Pelton (https://www.zeco.it).	242
Figura 201 – Turbina Francis (https://hydrotu.en.ec21.com).	243
Figura 202 – Turbina Kaplan (https://www.zeco.it).	244
Figura 203 – Turbina Kaplan (bolbo) (https://www.zeco.it).	244
Figura 204 – Turbina Dériaz (http://www.directindustry.com/).	245

Figura 205 – A perda de carga ΔE_T numa singularidade que pode ser convertida em queda útil numa turbina (Cruz, 2006).	245
Figura 206 – Exemplos de definição da queda útil H nas turbinas Kaplan (a), Francis (b), idem de eixo horizontal (c) e Pelton (d) (Cruz, 2006).	247
Figura 207 – Teorema de Euler aplicado a um volume de controlo contido na roda de uma turbina (Cruz, 2006).	247
Figura 208 – Triângulo de velocidades (adaptado de Cruz, 2006).	249
Figura 209 – Rendimento versus potência (https://pt.slideshare.net/buti_81/hidraulica-turbinas).	253
Figura 210 – Variação do rendimento com a velocidade de rotação (http://www.antonioquilherme.web.br.com).	254
Figura 211 – Rendimento/caudal para turbinas: (1)Pelton, (2)Francis, (3)Kaplan, (4)Bolbo (Cruz, 2006).	254
Figura 212 – Esquema de um difusor de uma turbina de reação e definição da altura de aspiração (adaptado de http://slideplayer.com.br/slide/1473748/).	260
Figura 213 – Gráfico com o campo típico de aplicação dos três tipos de turbinas (www.hacker.ind.br).	263
Figura 214 – Campo de aplicação de turbinas (Filho, 2015).	264
Figura 215 – Bomba axial (Universidade Federal do ABC, 2013).	266
Figura 216 – Exemplo de impulsor fechado (a), semiaberto (b) e aberto (c) (http://hidromachinesudeg.blogspot.pt/2016/02/componentes-de-bombas-y-turbinas.html).	266
Figura 217 – Bomba de escoamento radial (Corte) (http://www.tecpa.es).	266
Figura 218 – Bomba de escoamento misto (http://xylemappliedwater.pt).	267
Figura 219 – Bomba de voluta de sucção dupla (www.sulzer.com).	267
Figura 220 – Bombas de estágio simples de estilo difusor horizontal (www.sulzer.com).	268
Figura 221 – Bombas monocelulares (http://www.bombaszeda.com).	268
Figura 222 – Bombas multicelulares (http://www.efafllu.pt).	268
Figura 223 – Exemplo de aplicação (determinação de H) (Pinho et al., 2011).	270
Figura 224 – Bombeamento ascendente entre reservatórios (Pinho et al., 2011).	272
Figura 225 – Plano de referência para NPSH (adaptado de http://www.nuevaingenieria.com/tag/cavitacion/).	273
Figura 226 – Bomba em elevação (Pinho et al., 2011).	274
Figura 227 – Bomba em carga (Pinho et al., 2011).	275
Figura 228 – Relação entre velocidade específica de alguns impulsores, eficiência e caudal (Escola da Vida, 2018).	277
Figura 229 – Influência da velocidade específica na forma das curvas características de uma bomba (adaptado de Pinho et al., 2011).	278
Figura 230 – Curvas características de uma bomba (adaptado de Area Mecânica, 2011).	279
Figura 231 – Exemplo de curva característica de instalações (Pinho et al., 2011).	279
Figura 232 – Exemplo de aplicação do conceito de curva característica da instalação (Pinho et al., 2011).	280
Figura 233 – Variação em caudal devido ao desvio provocado pela alteração das condições de funcionamento (Pinho et al., 2011).	281
Figura 234 – Regulação da admissão de caudal (Pinho et al., 2011).	282

Figura 235 – Utilização de “Bypass” (Pinho et al., 2011).....	282
Figura 236 – Variação da velocidade de rotação do impulsor (Pinho et al., 2011).	282
Figura 237 – Alteração do diâmetro do impulsor (redução) (Pinho et al., 2011). ...	283
Figura 238 – Condução de compressão ramificada (Pinho et al., 2011).....	284
Figura 239 – Operação de bomba em paralelo numa condução comum (Pinho et al., 2011).	284
Figura 240 – Operação de bombas em série numa mesma condução (Pinho et al., 2011).	285
Figura 241 – Campo de aplicação de bombas (Henn, 2006).	286
Figura 242 – Exemplo de diagrama de colina (http://www.escoladavida.eng.br/mecfluquimica/aulasfei/ccb.htm).....	286
Figura 243 – Exemplo de mosaicos de utilização de bombas, para escolha prévia da bomba (adaptado do catálogo das bombas KSB).	287
Figura 244 – Levada das 25 Fontes, Calheta. Canal (paredes sólidas); Água (superfície livre) (fonte: Autor).	289
Figura 245 – Classificação dos escoamentos.	290
Figura 246 – Tipos de canais (fonte: autor).	291
Figura 247 – Representação do tipo de secção do canal (adaptado de Costa & Lança, 2011).	292
Figura 248 – Representação das características geométricas em perfil longitudinal.	292
Figura 249 – Representação das características geométricas em secção plana (Costa & Lança, 2011).	293
Figura 250 – Alturas de água e inclinação da secção (adaptado de Costa & Lança, 2011).	293
Figura 251 – Canal de secção retangular.....	294
Figura 252 – Canal de secção trapezoidal.	294
Figura 253 – Canal de secção circular.	295
Figura 254 – Canal de secção circular (relações geométricas) (adaptado de Netto, 1998).	296
Figura 255 – Canal de secção irregular (relação gráfica).....	296
Figura 256 – Canal de secção irregular (relação através da forma monomial).	297
Figura 257 – Representação para dedução de simplificação do T. de Bernoulli (Costa & Lança, 2011).	298
Figura 258 – Distribuição de pressões na secção transversal, escoamento retilíneo (Soares, 2011).....	299
Figura 259 – Distribuição de pressões na secção transversal, escoamento côncavo (a) e convexo (b) (Soares, 2011).....	300
Figura 260 – Exemplo de escoamento não retilíneo, vertedor (Soares, 2011).....	300
Figura 261 – Curvas Isotáquicas para diferentes secções (adaptado de Soares, 2011).	301
Figura 262 – Distribuição de velocidades (Costa & Lança, 2011).	301
Figura 263 – Distribuição de caudais (http://www.escoladavida.eng.br/mecflubasica/aula2_unidade3.htm).	302
Figura 264 – Secção composta.....	306
Figura 265 – Superfície de energia.	309
Figura 266 – Curva da variação de energia com a altura da água.	309

Figura 267 – Curva da variação do caudal com a altura da água.	310
Figura 268 – Curva da variação do caudal e energia com a altura da água.	310
Figura 269 – Método gráfico para secção irregular.	311
Figura 270 – T.Q.M. na direção do escoamento.	313
Figura 271 – Variação da Quantidade de Movimento Total com a altura da água ($Q = Q_0$ cte.).	316
Figura 272 – Variação do caudal com a altura da água ($M = M_0$ cte.).	316
Figura 273 – Relação entre a Quantidade de Movimento Total e a Energia Específica.	317
Figura 274 – Determinação da altura normal pelo método gráfico.	320
Figura 275 – Secção retangular.	321
Figura 276 – Secção trapezoidal.	321
Figura 277 – Secção circular.	322
Figura 278 – Secção retangular.	322
Figura 279 – Secção trapezoidal.	323
Figura 280 – Secção semicircular.	324
Figura 281 – Declive.	326
Figura 282 – Curvas de regolfo em canais de declive fraco (adaptado de Barbosa, 1982).	328
Figura 283 – Curvas de regolfo em canais de declive crítico (adaptado de Barbosa, 1982).	329
Figura 284 – Curvas de regolfo em canais de declive forte (adaptado de Barbosa, 1982).	330
Figura 285 – Curvas de regolfo em canais de declive nulo (adaptado de Barbosa, 1982).	331
Figura 286 – Curvas de regolfo em canais de declive negativo (adaptado de Barbosa, 1982).	331
Figura 287 – Integração numérica de curvas de regolfo.	332
Figura 288 – Distância entre S_{i+1} e S_i	332
Figura 289 – Exemplos de escoamento permanente rapidamente variado (Vasconcelos, 2005).	336
Figura 290 – Ressalto hidráulico (adaptado de Barbosa, 1982).	336
Figura 291 – Ressalto hidráulico ondulado (adaptado de Barbosa, 1982).	337
Figura 292 – Ressalto hidráulico ordinário (adaptado de Barbosa, 1982).	337
Figura 293 – Ressalto afogado (adaptado de Nalluri e Featherstone, 2001).	338
Figura 294 – Formas do ressalto hidráulico (Lencastre, 1983).	339
Figura 295 – Perdas de energia em função das alturas conjugadas do ressalto (adaptado de Barbosa, 1982).	341
Figura 296 – Comprimento do ressalto (adaptado de Barbosa, 1982).	341
Figura 297 – Soleiras Venturi (Henriques et al., 2006).	343
Figura 298 – Soleira Parshall (Henriques et al., 2006).	344
Figura 299 – Ressalto a jusante provocado por uma soleira espessa ou sobrelevação (Barbosa, 1982).	345
Figura 300 – Ressalto a montante provocado por soleira espessa ou sobrelevação (Barbosa, 1982).	346
Figura 301 – Ressalto provocado pela mudança brusca do declive (Barbosa, 1982).	346

Figura 302 – Ressalto provocado por comporta em canal com declive forte (Barbosa, 1982).	347
Figura 303 – Ressalto provocado por comporta em canal com declive fraco (Barbosa, 1982).	348
Figura 304 – Ressalto afogado (Barbosa, 1982).	348

Índice de Tabelas

Tabela 1 – Sistema Internacional (SI).	29
Tabela 2 – Pesos e massas volúmicas da água e do ar.	30
Tabela 3 – Densidade de alguns líquidos.....	30
Tabela 4 – Valores de viscosidade (cinemática e dinâmica) em função da temperatura.	33
Tabela 5 – Tensões de saturação do vapor de água, a diferentes temperaturas.....	35
Tabela 6 – Centros de gravidade e momentos de inércia para superfícies planas comuns (Gaspar, 2005).	84
Tabela 7 – Valores de C_v para diferentes valores de carga e diâmetros do orifício (adaptado de Netto, 1998).	146
Tabela 8 – Valores de C_c para diferentes valores de carga e diâmetros do orifício (adaptado de Netto, 1998).	146
Tabela 9 – Valores de C_d para diferentes valores de carga e diâmetros do orifício (adaptado de Netto, 1998).	147
Tabela 10 – Valores de correção, x (adaptado de DRHGSA, 2007).	149
Tabela 11 – Valor de $C_{d,s}$ para orifícios afogados (Smith, 1886).	151
Tabela 12 – Relação entre perímetros, k , para diferentes posições de um orifício retangular (Junior L. B., 2005).	154
Tabela 13 – Valor de C_d segundo Eytelwein e para tubos muito curtos de ferro fundido (Silva, 2014).	155
Tabela 14 – C_d para bocal cónico convergente (Silva, 2014).	157
Tabela 15 – Valores de K em função de D_e (adaptado de Queiroz, 2017).	170
Tabela 16 – Grandezas de base e unidades de base do SI (adaptado de Ignácio & Nóbrega, 2004).	176
Tabela 17 – Exemplos de grandezas derivadas e de suas unidades (adaptado de Ignácio & Nóbrega, 2004).	176
Tabela 18 – Sistema de unidades MLT (adaptado de Vasconcelos, 2005).	180
Tabela 19 – Representação das forças no sistema (adaptado de Vasconcelos, 2005).	181
Tabela 20 – Parâmetros adimensionais comuns (adaptado de NETeF, 2012).	186
Tabela 21 – Valor de K em função do ângulo β (KSB, 2003).	200
Tabela 22 – Valores de K e C_c em função das secções de entrada e saída, segundo Weisbach (Pinho et al., 2011).	201
Tabela 23 – Comprimentos equivalentes a perdas de carga em derivações, expressos em metros (adaptado de http://hidrossanitariasutfprcm.blogspot.pt/).	204
Tabela 24 – Valores de K em função da relação h/D e consoante a forma da secção (adaptado de Pinho et al., 2011).	205
Tabela 25 – Valores de K em função de θ e consoante a forma da secção (adaptado de Pinho et al., 2011).	205
Tabela 26 – Valor de K em função de θ e consoante a forma da secção (adaptado de Pinho et al., 2011).	206
Tabela 27 – Valores de K para funcionamento em plena abertura (adaptado de Pinho et al., 2011).	206
Tabela 28 – Valores de K em função do ângulo de abertura, para $D_0 = 0,73 D$ (adaptado de Pinho et al., 2011).	206

Tabela 29 – Valores de β em função da forma da secção das barras (adaptado de Pinho et al., 2011).	207
Tabela 30 – Velocidades e caudais máximos recomendados para fibrocimento (Pinho et al., 2011).	217
Tabela 31 – Resumo dos cálculos efetuados (adaptado de Pinho et al., 2011).	233
Tabela 32 – Pressões nos nós da rede (Pinho et al., 2011).	233
Tabela 33 – Cálculo de caudais (adaptado de Pinho et al., 2011).	239
Tabela 34 – Altura barométrica em função da altitude do local (adaptado de Cruz, 2006).	261
Tabela 35 – Altura de vaporização da água em função da temperatura (adaptado de Cruz, 2006).	261
Tabela 36 – Coeficiente de Thoma em função de n_s (adaptado de http://slideplayer.es/slide/4161770/).	263
Tabela 37 – Seleção preliminar do tipo de turbina, função da queda e caudal turbinado (adaptado de Cruz, 2006).	264
Tabela 38 – Designações/Unidades básicas (adaptado de Pinho et al., 2011).	269
Tabela 39 – Valores de C_B em função da natureza das paredes.	304
Tabela 40 – Valores de C_K em função da natureza das paredes.	304
Tabela 41 – Fórmulas de Thijssse para C, em função do regime de escoamento... ..	304
Tabela 42 – Fórmulas de Powell para C, em função do regime de escoamento....	305
Tabela 43 – Valores de K em função do material.	305
Tabela 44 – Valores de K em função da natureza das paredes.	305
Tabela 45 – Valores de $(\sin\theta - J)$	327
Tabela 46 – Valores de $1 - Frcos\theta$	327
Tabela 47 – Discretização de curvas de regolfo em canais de declive fraco.	328
Tabela 48 – Discretização de curvas de regolfo em canais de declive forte.	330
Tabela 49 – Síntese de propostas para o cálculo do comprimento do ressalto.	342

Lista de Símbolos e Abreviaturas

SÍMBOLOS

δ_{ij}	Símbolo de Kronecker
∇	Gradiente de deformação
a	Aceleração; Dimensão; Índice
A	Área
b	Dimensão; Índice
c	Dimensão; Índice; Velocidade de propagação das ondas elásticas
C	Coefficiente; Custo
C'	Fator de contração
C ₁	Custo inicial
C ₂	Custo anual de energia
C _c	Coefficiente de contração
C _d	Coefficiente de descarga
C _p	Calor específico
C _v	Calor específico; Coeficiente de velocidade
d	Dimensão; Índice
D	Diâmetro
E	Energia
Eu	Número de Euler
F	Força
f	Função
g	Aceleração gravítica
H	Carga; Energia
h	Altura; Cota
i	Inclinação; Índice; Declive
I	Momento de Inércia
J	Perda de carga unitária
k	Coefficiente
K	Coefficiente de rugosidade
Kn	Número de Kundsén
L	Sustentação; Comprimento
l	Dimensão; Índice
M	Número de Mach; Quantidade de Movimento Total ou Impulsão Total
n	Coefficiente; Índice; Velocidade de rotação
N	Número de rotações
p	Pressão
P	Perímetro; Posição; Potência; Pressão
Q	Caudal; Matriz de transformação
q	Caudal instantâneo
r	Raio
R	Raio hidráulico
S	Área de uma secção; Capacidade de aspiração; Superfície plana

s	Comprimento de uma linha
St	Número de Strouhal
T	Tensor de tensões; Temperatura; Torque
t	Tempo
U	Velocidade média
v	Velocidade
V	Velocidade; Volume
We	Número de Weber
x	Coordenada
y	Altura; Coordenada
Z	Cota topográfica
Δ	Variação
ΔH	Perda de carga
Φ	Função
Ψ	Função
rot	Rotacional
α	Ângulo; Coeficiente
α'	Coeficiente de Boussinesq
γ	Ângulo; Peso volúmico
δ	Coeficiente de tensão superficial
ε	Coeficiente; Grau de reação das turbinas; Parâmetro de rugosidade de Nikuradse
η	Coeficiente; Rendimento; Rotação específica
θ	Ângulo
λ	Coeficiente; Função; Perda de carga;
μ	Coeficiente de viscosidade dinâmica ou absoluta
ρ	Massa volúmica
σ	Tensão superficial
τ	Tensão
u	Coeficiente de viscosidade cinemática ou relativa
χ	Perímetro molhado
ω	Velocidade angular; Vorticidade
ϵ	Tensor taxa de deformação

ABREVIATURAS

Aprox.	Aproximadamente
Cf.	Conforme
CG	Centro de gravidade
CGS	Sistema Centímetro–Grama–Segundo
Cte.	Constante
Eq.	Equação
NA	Nível da água
NPSH	<i>Net Positive Suction Head</i>
RAM	Região Autónoma da Madeira
S.L.	Superfície Livre
SI	Sistema Internacional
T.Q.M.	Teorema da Quantidade do Movimento
Teo.	Teorema
US	<i>United States</i>
USBR	<i>United States Bureau of Reclamation</i>
VRP	Válvula Redutora de Pressão
WES	<i>Waterways Experiment Station</i>

CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO

1.1 Breve nota histórica da Hidráulica

ANTIGUIDADE

- **EGIPTO-MESOPOTÂMIA**
 - Construção de canais para defesa e irrigação
- **GRÉCIA (CTESIBIOS, HERO, ARQUIMEDES [287-212 A.C.])**
 - Leis da hidrostática e impulsão
 - Projecto de equipamento hidráulico (Bomba de pistão, Relógio de água, Parafuso de Arquimedes)
- **ROMA [de 400 A.C. até ao início do Cristianismo]**
 - Obras hidráulicas

RENASCENÇA

- **LEONARDO DA VINCI [1452-1519]**
 - Descrição de escoamentos
- **GALILEO GALILEI [1564-1642]**
 - Início da Mecânica Experimental

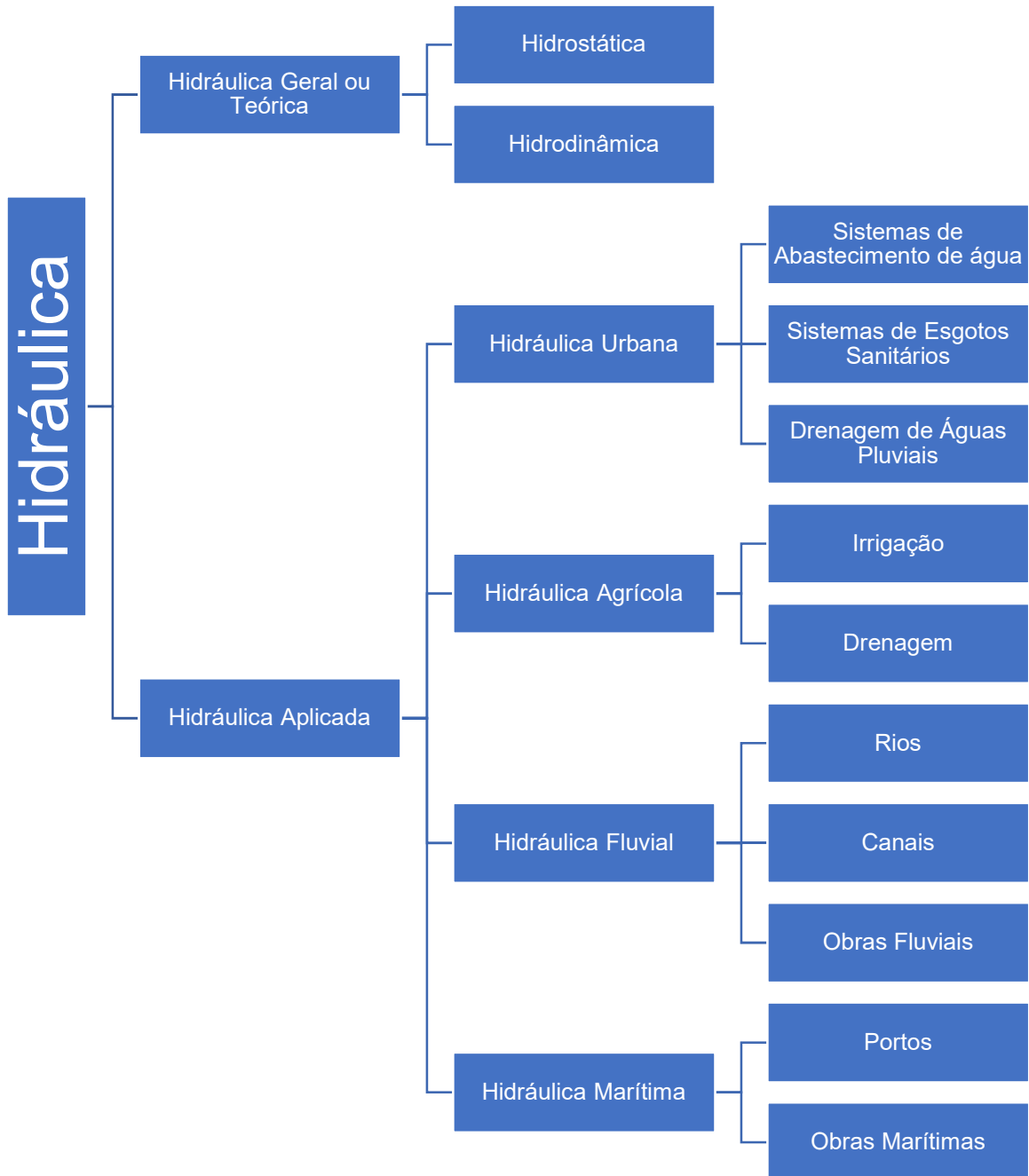
SÉC. XVII E XVIII

- **NEWTON, BERNOULLI, EULER e D’ALEMBERT**
 - Hidrodinâmica (estudo teórico ou matemático do fluido perfeito)
 - Hidráulica (estudo aplicado ou experimental do fluido real)

SÉC. XX

- **PRANDTL [1875-1953]**
 - Conceito de “camada limite”

1.2 Divisões da hidráulica



1.3 Conceito de fluido

Um **fluido** é uma substância que se deforma continuamente, quando submetida a esforços tangenciais, por mais pequenos que estes sejam (Pinho et al., 2011).

Esta noção engloba líquidos e gases, que se distinguem devido ao seu grau de compressibilidade, já que os líquidos submetidos a uma pressão são praticamente incompressíveis e os gases apresentam elevada compressibilidade. Além disso verifica-se o facto, dos líquidos possuírem superfície livre, enquanto que os gases se expandem até ocuparem completamente o recipiente que os contém (Pinho et al., 2011).

1.4 Sistemas de unidades. Sistema internacional de unidades

1.4.1 Sistemas utilizados em Hidráulica

Dentre os sistemas atualmente conhecidos, destacam-se:

- **CGS** - Unidades Fundamentais: cm, g, s;
- **Sistema Métrico Gravitatório (M, K_p, S)** - Unidades Fundamentais: m, kgf, s;
- **Sistema Internacional (SI)** - Unidades Fundamentais: m, kg, s;
- **Sistema Industrial Inglês** - Unidades Fundamentais: foot, pound, s.

De notar que em qualquer equação dimensionalmente homogénea (L, M, T) todas as variáveis devem estar expressas no mesmo sistema de unidades (Pinho et al., 2011).

1.4.2 Sistema Internacional (SI)

Tabela 1 – Sistema Internacional (SI).

Quantidade	Unidade	Símbolo SI
Unidades Básicas		
Comprimento	Metro	m
Massa	Quilograma	kg
Tempo	Segundo	s
Corrente elétrica	Ampere	A
Temperatura termodinâmica	Kelvin	K
Quantidade de substância	Mole	mol
Intensidade luminosa	Candela	cd
Unidades Suplementares		
Ângulo plano	Radiano	rad
Ângulo sólido	Esterradiano	sr

1.5 Propriedades físicas dos fluidos

1.5.1 Peso e massa. Peso volúmico e massa volúmica

Definindo:

- **Massa** - Quantidade de matéria que o corpo contém [kg];
- **Massa volúmica** - Massa por unidade de volume: ρ [kg/m³];
- **Peso** - Força atrativa exercida pela Terra sobre o corpo [m/s²];
- **Peso volúmico** - Peso por unidade de volume: $\gamma = \rho \times g = [N/m^3]$.

Na Tabela 2 segue-se os pesos e massas volúmicas da água e do ar em função da temperatura.

Tabela 2 – Pesos e massas volúmicas da água e do ar.

Temperatura	Peso volúmico				Massa volúmica			
	Água		Ar		Água		Ar	
°C	$\frac{N}{m^3}$	$\frac{kgf}{m^3}$	$\frac{N}{m^3}$	$\frac{kgf}{m^3}$	$\frac{kg}{m^3}$	* $\frac{UMM}{m^3}$	$\frac{kg}{m^3}$	* $\frac{UMM}{m^3}$
0	9809	999.9	12.68	1.293	999.9	101.93	1.293	0.132
4	9810	1000.0	12.50	1.274	1000.0	101.94	1.274	0.130
20	9792	998.2	11.81	1.204	998.2	101.75	1.204	0.123
40	9733	992.2	11.08	1.129	992.2	101.14	1.129	0.115
60	9645	983.2	10.42	1.062	983.2	100.22	1.062	0.108
80	9533	971.8	9.90	1.009	971.8	99.06	1.009	0.103
100	9402	958.4	9.28	0.946	958.4	97.70	0.946	0.096

*A unidade métrica de massa (UMM) é a massa à qual uma força de um *kgf* (quilogramas-força) imprime uma aceleração de 1 *m/s²*. Esta unidade é utilizada para medir a massa, quando a força se mede em quilogramas-força.

1.5.2 Densidade

A **densidade** é a quociente entre a massa de um certo volume da substância a que diz respeito e a massa de igual volume de água à temperatura de 4°C. Na Tabela 3 apresenta-se a densidade de alguns líquidos (Pinho et al., 2011).

Tabela 3 – Densidade de alguns líquidos.

Líquido	Densidade
Álcool etílico (100%)	0.79
Terebentina	0.86
Azeite	0.912-0.918
Óleos Lubrificantes	0.880-0.935
Fuelóleo	0.820-0.950
Glicerina (100%)	1.26
Tetracloro de Carbono	1.594
Mercúrio (Hg)	13.6

1.5.3 Isotropia

Isotropia é a propriedade de que gozam os corpos contínuos de apresentarem a mesma estrutura molecular (as mesmas características) em todos os pontos e em todas as direções (Pinho et al., 2011).

1.5.4 Continuidade

Em Mecânica dos Fluidos consideram-se valores médios das propriedades do fluido em qualquer ponto do seu domínio, considerando-se um **meio contínuo** (Pinho et al., 2011).

1.5.5 Compressibilidade

Compressibilidade é a diminuição do volume de um fluido correspondente a um aumento de pressão (Pinho et al., 2011).

A diferença entre **líquidos** e **gases** reside no facto de apresentarem um comportamento diferente quando sujeitos a um aumento de pressão:

- Líquidos: compressibilidade pequena
- Gases: compressibilidade grande

Coeficiente de compressibilidade, α

$$\alpha = \frac{dV}{V dp} \text{ ou } \alpha = -\frac{1}{V} \frac{dV}{dp}$$

Em que:

dV/V é variação relativa do volume, V ;

dp é o aumento de pressão, p ;

$\alpha(\text{H}_2\text{O}) = 5.1 \times 10^{-10} [\text{m}^2/\text{N}]$.

Coeficiente ou módulo de elasticidade de volume, ϵ

$$\epsilon = \frac{1}{\alpha} [\text{N}/\text{m}^2]$$

Coeficiente de elasticidade cinemático, η

$$\eta = \frac{\epsilon}{\rho} \Rightarrow \epsilon = K\rho$$

Pode demonstrar-se que o coeficiente de elasticidade é proporcional à pressão, sendo K o coeficiente de proporcionalidade, para um processo isotérmico (temperatura constante) e adiabático (não se verificam trocas de calor com o exterior).

1.5.6 Viscosidade

A **viscosidade** está relacionada com a resistência à deformação dos fluidos quando em movimento. Não se manifesta quando o fluido está em repouso (Pinho et al., 2011).

As ações de viscosidade representam uma forma de atrito interno, exercendo-se em partículas contíguas que se deslocam a velocidades diferentes (Figura 1).

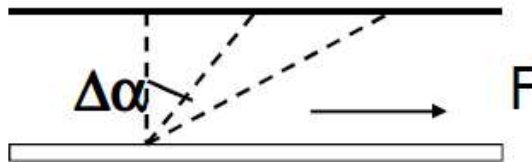
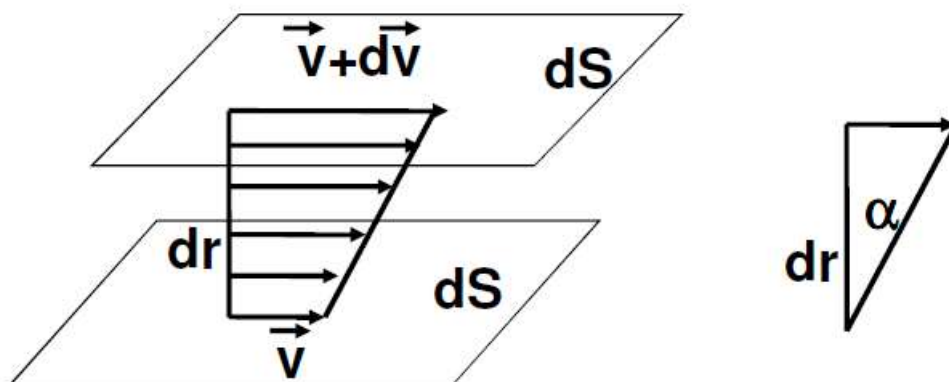


Figura 1 – Viscosidade.

Fluido newtoniano ou de viscosidade newtoniana

Fluido em que existe uma relação linear entre as tensões tangenciais aplicadas e a velocidade de deformação angular (variação de $\Delta\alpha$ no tempo), conforme a Figura 2.



$$dF = \mu dS \frac{dv}{dr} \Rightarrow \tau = \mu \frac{dv}{dr}; \alpha = \tan \alpha = \frac{dv}{dr}$$

Figura 2 – Relações entre tensões e deformações.

Coeficiente de viscosidade dinâmica ou absoluta [$ML^{-1}T^{-1}$] [$N.s/m^2$]:

$$\mu = \tau \times \frac{dr}{dv}$$

A unidade física de viscosidade no Sistema Internacional de Unidades é o pascal-segundo [Pa. s], que corresponde exatamente a 1 N.s/m² ou 1 kg/(m. s).

A unidade no Sistema CGS de unidades para a **viscosidade dinâmica** é o poise [P], cujo nome homenageia a Jean Louis Marie Poiseuille. Passou a ser mais usado o seu submúltiplo: o centipoise [cP]. O centipoise é mais usado, devido a que a água tem uma viscosidade de 1,0020 cP a 20°C e 0,891 cP a 25°C:

- 1 poise = 100 centipoise = 1 g/(cm.s) = 0,1 Pa.s;
- 1 centipoise = 1 mPa.s.

Coeficiente de viscosidade cinemática ou relativa [L²T⁻¹] [m²/s]:

Quociente entre a viscosidade dinâmica (ou absoluta) e a densidade. A unidade no SI é o [m²/s]. A unidade física da **viscosidade cinemática** no Sistema CGS é o stokes (abreviado S ou St), cujo nome provém de George Gabriel Stokes. Às vezes se expressa em termos de centistokes (cS ou cSt).

$$v = \frac{\mu}{\rho}$$

Na Tabela 4 apresenta-se os valores da viscosidade cinemática e dinâmica consoante o valor da temperatura.

Tabela 4 – Valores de viscosidade (cinemática e dinâmica) em função da temperatura.

Temperatura °C	Viscosidade cinemática		Viscosidade dinâmica		
	m ² /s	centistokes	N. s/m ²	kgf. s/m ²	centipoises
0	1.78x10 ⁻⁶	1.78	1.78x10 ⁻³	181x10 ⁻⁶	1.78
4	1.56x10 ⁻⁶	1.56	1.56x10 ⁻³	159x10 ⁻⁶	1.56
10	1.31x10 ⁻⁶	1.31	1.31x10 ⁻³	134x10 ⁻⁶	1.31
20	1.01x10 ⁻⁶	1.01	1.01x10 ⁻³	103x10 ⁻⁶	1.01
30	0.81x10 ⁻⁶	0.81	0.81x10 ⁻³	82x10 ⁻⁶	0.81
40	0.66x10 ⁻⁶	0.66	0.66x10 ⁻³	67x10 ⁻⁶	0.66
50	0.56x10 ⁻⁶	0.56	0.55x10 ⁻³	56x10 ⁻⁶	0.55
60	0.47x10 ⁻⁶	0.47	0.47x10 ⁻³	48x10 ⁻⁶	0.47
80	0.36x10 ⁻⁶	0.36	0.35x10 ⁻³	36x10 ⁻⁶	0.35
100	0.28x10 ⁻⁶	0.28	0.27x10 ⁻³	28x10 ⁻⁶	0.27

Fluido não newtoniano

Fluido em que as mesmas relações não são lineares.

1.5.7 Coesão

Propriedade derivada de ações atrativas entre as moléculas de líquidos (proporcionando resistências a esforços de tração - ainda que pequenos) (Pinho et al., 2011).

1.5.8 Tensão superficial e capilaridade

Coeficiente de tensão superficial, δ

Representa a energia superficial de área [MT^{-2}] [N/m].

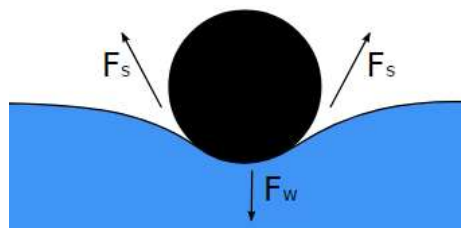


Figura 3 – Tensão superficial (White, 1948).

O diagrama da Figura 3 mostra, na seção transversal, uma agulha que está sobre a tensão superficial da água. O seu peso (F_w) faz uma força contra a superfície da água que é equilibrada pelas forças de tensão superficial da água em ambos os lados (F_s) (Pinho et al., 2011).

Adesão

Manifestação da tensão superficial em presença de paredes sólidas. A combinação de forças de **adesão** com forças de coesão explica os fenómenos capilares (Pinho et al., 2011).

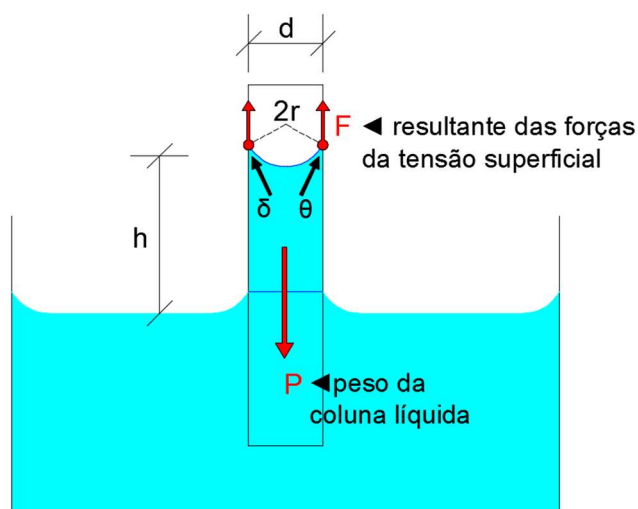


Figura 4 – Adesão.

Relativamente à Figura 4:

- Líquidos que molham a parede do tubo: **ascensão**;
- Líquidos que não molham a parede do tubo: **depressão**;
- Força de tensão tangencial sobre o interior do tubo: $2\pi r\delta$;
- Componente segundo a parede interior do tubo: $F=2\pi r\delta \cos \theta$;
- Peso da coluna de líquido de altura h: $P = \pi r^2 \delta h \gamma$
- Altura h: $h=(2\sigma/\gamma \cdot r) \cdot \cos \theta$

1.5.9 Tensão do vapor de um líquido

Tensão de vapor de um líquido (p_v) é a pressão que ele exerce num determinado volume (Pinho et al., 2011).

Tensão de saturação do vapor é a tensão do vapor saturado num certo volume (Ex.: Tabela 5) (Pinho et al., 2011).

Tabela 5 – Tensões de saturação do vapor de água, a diferentes temperaturas.

T [°C]	4	10	20	30	50	80	100
p_v [kPa]	0.814	1.226	2.333	4.247	12.36	47.38	101.3

1.5.10 Solubilidade dos gases na água

Coefficiente de solubilidade de um gás é o quociente entre o volume de gás dissolvido e o volume de líquido dissolvente, em condições de saturação. Para uma determinada temperatura, determina a quantidade de gás que pode ser dissolvida em saturação num dado líquido (Pinho et al., 2011).

1.5.11 Velocidade de propagação das ondas elásticas

Velocidade de propagação de ondas elásticas é a velocidade de propagação de uma variação de pressão no líquido. Muitas vezes designada por velocidade de propagação do som no fluido, pois coincide com ela (Pinho et al., 2011).

$$c = \sqrt{\eta} = \sqrt{\frac{\epsilon}{\rho}} \text{ [m/s]}; \quad c_{ar} = 340 \text{ m/s}; \quad c_{\text{água a } 10^\circ\text{C}} = 1425 \text{ m/s}$$

1.6 Equações da mecânica dos fluidos

Considerando o fluido como meio contínuo, a resolução de qualquer **problema da dinâmica dos fluidos** passa pelo conhecimento em cada ponto do domínio e em cada instante de **23** parâmetros (Pinho et al., 2011):

- **9** elementos do tensor das tensões (Figura 5);

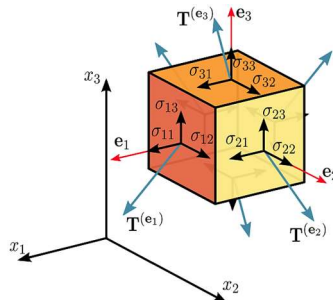


Figura 5 – Tensor das tensões (<https://commons.wikimedia.org>).

- **9** elementos do tensor da velocidade de deformação (Figura 6);

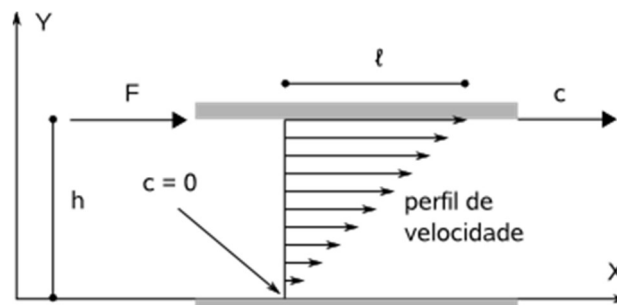


Figura 6 – Esquema da ação de uma força sobre uma camada de fluido (<http://www.mspc.eng.br>).

- **3** componentes da velocidade (Figura 7);

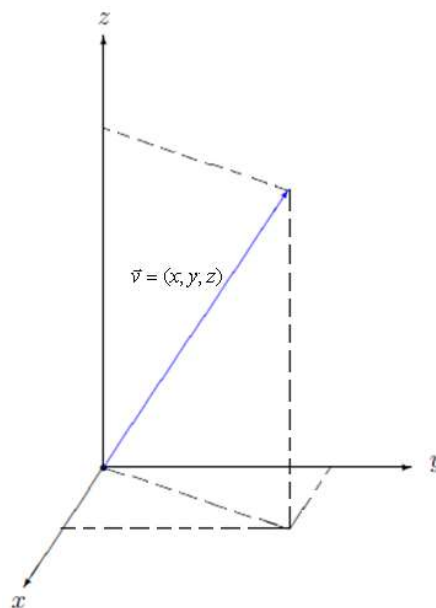


Figura 7 – Velocidade vetorial (Junior & Colvara, 2010).

- **Massa volúmica** (Figura 8);



Figura 8 – Mistura de óleo, água e areia (<http://mundoeducacao.bol.uol.com.br/>).

- **Temperatura** (Figura 9).



Figura 9 – Termómetro de imersão (<https://www.3bscientific.es>).

No entanto para determinar os **23** parâmetros basta conhecer os **6** seguintes (Pinho et al., 2011):

- pressão em cada ponto e em cada instante: $p = p(P, t)$;
- massa volúmica em cada ponto e em cada instante: $\rho = \rho(P, t)$;
- temperatura em cada ponto e em cada instante: $T = T(P, t)$;
- as três componentes do vetor velocidade: em variáveis de **Lagrange** ou variáveis de **Euler**, ou variáveis de **Kraichnan**.

1.5.1 Variáveis de Lagrange

Partícula - Elementos de Volume de fluido

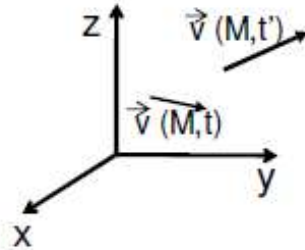


Figura 10 – Variáveis de Lagrange (Pinho et al., 2011).

O ponto de aplicação da velocidade $\vec{v}(M, t)$ varia de t a t' . A velocidade é a derivada do vetor posição da partícula:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}(M, t)}{dt}$$

Podem, pois, adotar-se as componentes do vetor posição em vez das componentes do vetor velocidade.

Se x, y, z forem função de x_0, y_0, z_0 e t , o movimento do fluido fica determinado:

$$\begin{cases} x = x(x_0, y_0, z_0, t) \\ y = y(x_0, y_0, z_0, t) \\ z = z(x_0, y_0, z_0, t) \end{cases}$$

Na prática é difícil definir a trajetória da partícula visto que esta não conserva a sua individualidade devido à difusão molecular (Pinho et al., 2011).

1.5.2 Variáveis de Euler

A cada ponto do domínio fluido a velocidade é referida a cada instante t .

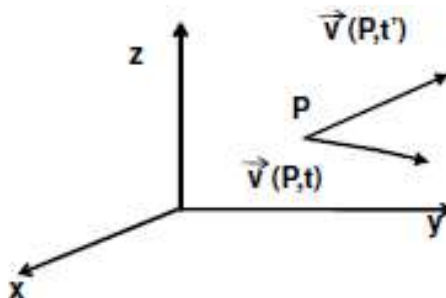


Figura 11 – Variáveis de Euler (Pinho et al., 2011).

No ponto $P(x, y, z)$:

- no instante t passa partícula com velocidade $\vec{v}(x, y, z, t)$;
- no instante t' passa outra partícula com velocidade $\vec{v}(x, y, z, t')$.

A velocidade não é a derivada do vetor de posição (P) em ordem ao tempo. Desta forma procura-se determinar a velocidade das partículas ao passarem em certos pontos do domínio do fluido. As variáveis de Euler constituem as projeções u, v, w sobre os eixos coordenados da velocidade (v) da partícula que passa no ponto $P(x, y, z)$ no instante t :

$$\begin{cases} u = u(x_0, y_0, z_0, t) \\ v = v(x_0, y_0, z_0, t) \\ w = w(x_0, y_0, z_0, t) \end{cases}$$

Define-se um **campo vetorial** (campo de velocidades) e três **campos escalares** (pressão, massa volúmica, temperatura).

A representação de Euler é mais simples e adequada para as finalidades práticas da Mecânica dos Fluidos (Pinho et al., 2011):

1.5.3 Variáveis de Kraichnan

$\vec{v}(P, t_1/t_2)$: velocidade no instante t_2 de uma partícula que coincidia com o ponto P no instante t_1 (aplica-se no estudo matemático da turbulência, cf. Figura 12) (Pinho et al., 2011).

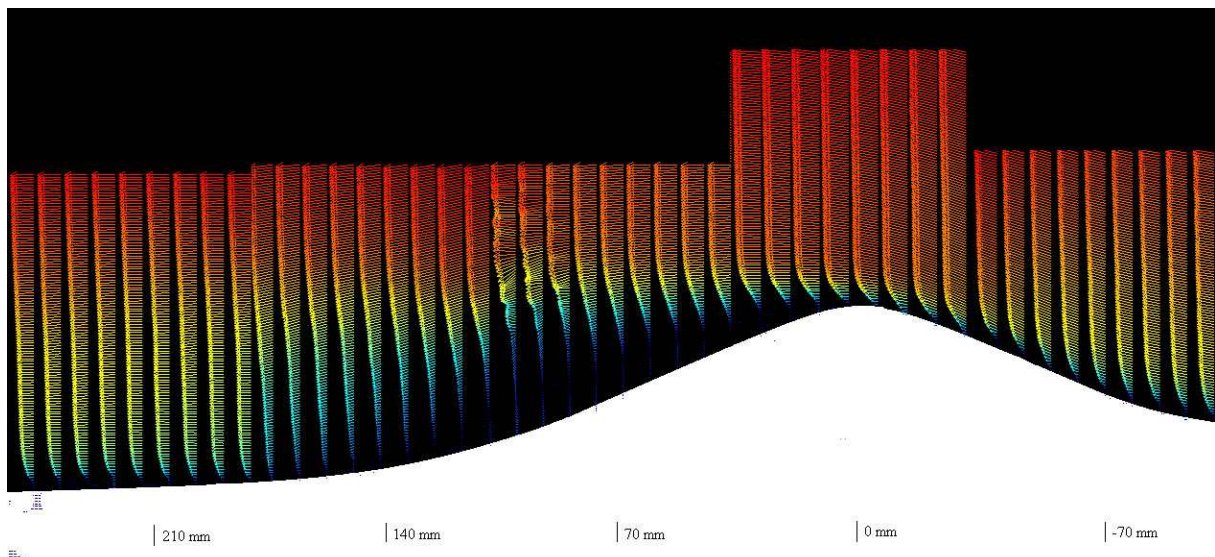


Figura 12 – Estudo da turbulência no escoamento (www.turbulencia.coppe.ufrj.br/).

1.5.4 Tipos de equações da Mecânica dos Fluidos e Hidráulica

Noção de volume de controlo

Região bem definida, onde se efetua a análise da variação de grandezas físicas, limitada por sua vez por uma superfície fechada, **superfície de controlo (S)**, que é a fronteira da região (Figura 13) (Pinho et al., 2011).

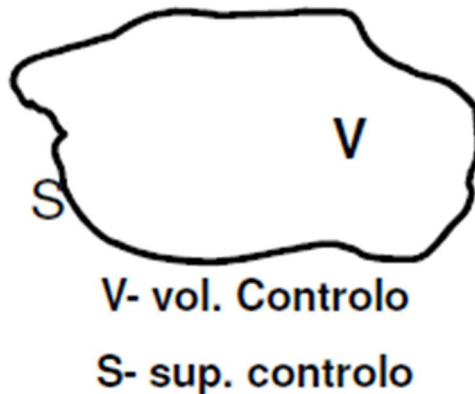


Figura 13 – Volume e Superfície de controlo (Pinho et al., 2011).

A – Equações locais e Equações globais

Equações locais - Aplicáveis a cada ponto do domínio fluido ou a cada partícula, definindo as condições locais de escoamento (Pinho et al., 2011).

Equações globais - Aplicáveis a regiões individualizadas do domínio fluido ou até à totalidade do escoamento em certas secções (Pinho et al., 2011).

B – Equações de conservação e Equações de balanço

Equações de conservação - as grandezas mantêm o seu valor global invariável no interior das regiões. Ex.: Massa, Energia e Quantidade de Movimento, são grandezas que apresentam a propriedade de conservação em relação a sistemas fechados devidamente escolhidos (Pinho et al., 2011).

Equações de balanço - as regiões funcionam como sistemas abertos, com entradas e saídas através da sua fronteira. Podem escrever-se equações matemáticas do tipo (Pinho et al., 2011):

$$\Phi_S - \Phi_E = \Delta G_I$$

Em que:

Φ_S é a quantidade que sai;

Φ_E é a quantidade que entra;

ΔG_I é a diminuição do valor global da grandeza no interior da superfície de controlo.

Para a resolução de **problemas da mecânica dos fluidos** tem de conhecer-se os valores locais de **6** variáveis (massa volúmica, pressão, temperatura, componentes do vetor velocidade). Logo são necessárias **6** equações (Pinho et al., 2011):

- **Equação da Continuidade**: traduz o princípio da conservação de massa (**propriedade da continuidade**);
- **Equações de Equilíbrio Dinâmico**: eq. vetorial correspondendo a 3 equações de projeção segundo os eixos coordenados. Com o estabelecimento das relações entre o estado de tensão e de velocidade de deformação, e a admissão de comportamento de fluido de viscosidade newtoniana estas equações transformam-se nas **equações de Navier-Stokes**;
- **Equação de Estado do Fluido**: traduz a relação entre pressão, massa volúmica e temperatura;
- **Princípio de conservação da Energia**: equação **complementar de carácter termodinâmico**, que em casos correntes é escrita sob a forma de uma equação de balanço.

CAPÍTULO 2 - EQUAÇÕES FUNDAMENTAIS DO MOVIMENTO DOS FLUIDOS

2.1 Parâmetros de carácter hidrocinemático

2.1.1 Trajetórias. Linhas de corrente. Linhas filamento. Linhas fluidas

Trajectoria

Trajectoria é o lugar geométrico das posições da partícula fluida ao longo do tempo (relacionada com partículas fluidas e intervalo de tempo, cf. Figura 14) (Pinho et al., 2011).

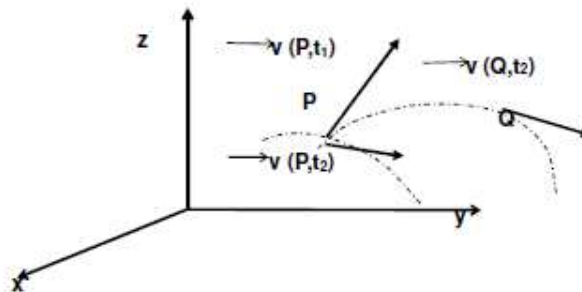


Figura 14 – Trajetória (Pinho et al., 2011).

Linhas de corrente

Linhas de corrente são curvas tangentes, em cada ponto, ao vetor velocidade nesse ponto. As linhas de corrente são definidas em cada instante (Figura 15) (Pinho et al., 2011).

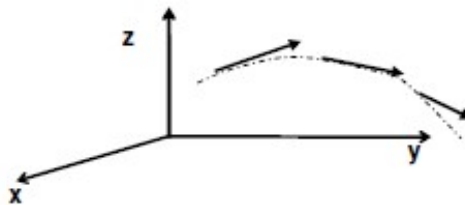


Figura 15 – Linhas de corrente (Pinho et al., 2011).

Linhas filamento

Linhas filamento são o lugar geométrico, num dado instante, das partículas do fluido que passaram (ou virão a passar) num dado ponto. **Em cada instante** as linhas de corrente são tangentes às trajetórias das partículas nos pontos em que as partículas se situam nesse instante. **Em movimento permanente** as trajetórias, linhas de corrente e linhas filamento coincidem (Pinho et al., 2011).

Tubo de corrente

Tubo de corrente é o lugar geométrico das linhas de corrente que se apoiam num contorno fechado (C) que não seja linha de corrente (Figura 16) (Pinho et al., 2011).

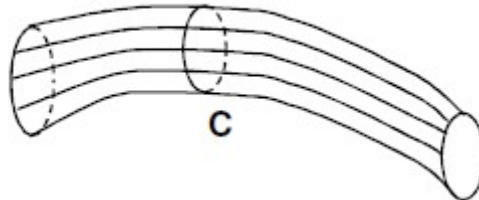


Figura 16 – Tubo de corrente (Pinho et al., 2011).

Filete

Filete é um tubo de corrente com área de secção transversal infinitesimal (Pinho et al., 2011).

Linhas fluidas

Linhas fluidas são linhas que ao longo do tempo, **são sempre** constituídas pelas mesmas partículas de fluido (Figura 17) (Pinho et al., 2011).

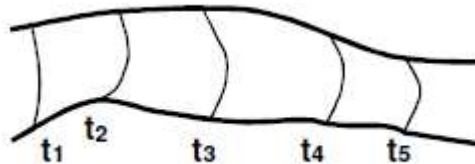


Figura 17 – Linhas fluidas (Pinho et al., 2011).

Superfície fluida

Denomina-se por **superfície fluida** uma superfície que ao longo do tempo, **é sempre** constituída pelas mesmas partículas de fluido (Pinho et al., 2011).

2.1.2 Variáveis de Lagrange. Variáveis de Euler

Considere uma grandeza qualquer (G) escalar ou vetorial, que possa ser estudada em função do tempo (Pacífico, 2016).

Método de Lagrange (Joseph L. Lagrange, 1736 a 1813): consiste em acompanhar a partícula ao longo da sua trajetória, de uma posição inicial A, para, em cada instante,

encontrar o valor da grandeza $G = G_L(x_A, y_A, z_A, t)$. Note que o ponto (x_A, y_A, z_A) define o ponto inicial - o nome - de cada partícula. Este método aplicado à mecânica dos fluidos resulta em acompanhar muitas partículas, o que torna esta tarefa extremamente difícil. Porém, há algumas situações práticas onde o método de Lagrange é útil, tais como: a descrição do movimento de boias oceânicas, balões meteorológicos, migração de pássaros, rastreamento de veículos por satélite (Pacífico, 2016).

Método de Euler (Leonhard Euler, 1707 a 1783): consiste em se fixar um ponto geométrico $P(x_P, y_P, z_P)$ para se detetar aí a grandeza física associada às partículas que, em diferentes instantes, passam por P. Assim, $G = G_F(x_P, y_P, z_P, t)$. Neste caso, as grandezas passam a ser funções tanto do espaço como do tempo. A região física do escoamento quando estudada por esse método recebe o nome de **campo de escoamento** (Pacífico, 2016).

Geralmente, o método de Euler é mais utilizado (Pacífico, 2016):

- Na maioria dos casos práticos as partículas não conservam sua individualidade física (seja por difusão, seja por turbulência), o que prejudica a descrição da trajetória (se fosse, então, utilizado o Método de Lagrange);
- As leis físicas obtidas pelo Método de Euler são mais fáceis de aplicar em situações reais;
- A dimensão das partículas num escoamento resulta proibitivo o uso de instrumentos que possam ser utilizados durante a sua trajetória.

Variáveis de Lagrange

A representação do vetor velocidade em Variáveis de Lagrange significa o estudo do comportamento de cada partícula ao longo do tempo. É registada a história de cada partícula (Vasconcelos, 2005).

A nomenclatura usada é $\vec{v} = \vec{v}(M, t)$, que significa a **velocidade da partícula M no instante t**. Interessa conhecer a velocidade de cada partícula em diferentes instantes, Figura 18 (Vasconcelos, 2005).

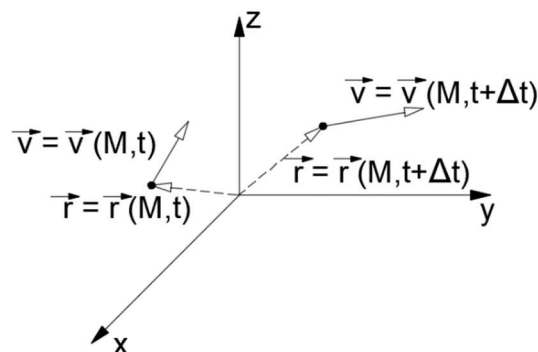


Figura 18 – Representação da velocidade em Variáveis de Lagrange (Vasconcelos, 2005).

A velocidade é determinada como a variação do **vetor de posição \vec{r}** , da **partícula M**, no tempo (Vasconcelos, 2005):

$$\vec{v}(M, t) = \frac{d\vec{r}(M, t)}{dt}$$

Esta representação torna-se, em Mecânica dos Fluidos, de difícil representação por não ser possível seguir cada partícula no seio do volume fluido (Vasconcelos, 2005).

Variáveis de Euler

Neste caso são estudadas as características das partículas que passam numa dada posição do domínio fluido, ao longo do tempo. Em cada instante, é determinada a velocidade das partículas que nesse instante se encontram nas várias posições do domínio fluido (Vasconcelos, 2005).

A cada posição do domínio fluido corresponde um vetor velocidade e um valor da pressão (relativos à partícula que se encontra naquela posição), constituindo um campo de vetores e um campo escalar (Vasconcelos, 2005).

A nomenclatura aplicada é $\vec{v} = \vec{v}(P, t)$ que significa a **velocidade da partícula que está na posição P no instante t**, Figura 19 (Vasconcelos, 2005).

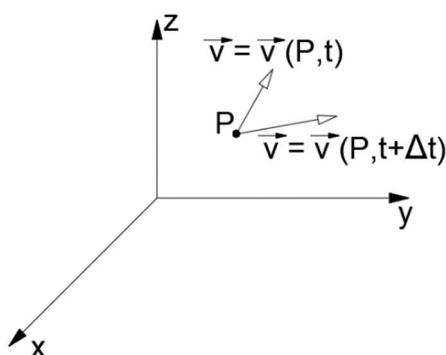


Figura 19 – Representação da velocidade em Variáveis de Euler (Vasconcelos, 2005).

No âmbito da Engenharia Hidráulica será aplicada a representação pelas variáveis de Euler (Vasconcelos, 2005).

2.1.3 Caudal. Velocidade média de escoamento

Caudal (Q) é o volume de fluido que atravessa uma determinada superfície por unidade de tempo (Figura 20) (Pinho et al., 2011).

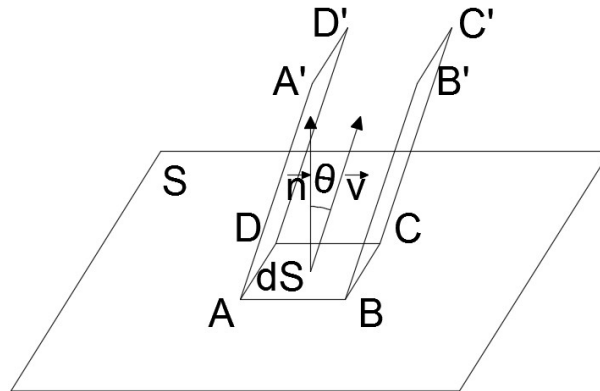


Figura 20 – Ilustração do caudal a atravessar uma determinada superfície S (adaptado de Pinho et al., 2011).

$$\begin{aligned}
 v &= \text{constante em } dt \\
 \overline{AA'} &= \overline{BB'} = \overline{CC'} = \overline{DD'} = v \, dt \\
 dV &= v \, dt \, \cos \theta \, dS \\
 dQ &= v \, \cos \theta \, dS \\
 dQ &= \vec{v} \cdot \vec{n} \, dS \\
 Q &= \int_S \vec{v} \cdot \vec{n} \, dS
 \end{aligned}$$

Assim, **caudal** pode também ser definido como o fluxo do vetor velocidade através da superfície de área (S) (Pinho et al., 2011).

Velocidade média do escoamento (U) é o valor que teria a componente normal da velocidade se fosse constante em cada ponto da superfície em causa. Normalmente é definida para a secção transversal de um tubo de corrente cujas paredes coincidem com a fronteira do escoamento (Pinho et al., 2011).

$$v_n = \vec{v} \cdot \vec{n} \Rightarrow U = \frac{Q}{S} = \frac{\int_S v_n \, dS}{S}$$

2.1.4 Aceleração

A **aceleração** mede a variação da velocidade no tempo e no espaço. Em representação de Euler, a caracterização é feita relativamente a cada posição contida no volume de controlo, ou seja, relativamente às partículas fluidas que se encontram localizadas em posições dentro do volume de controlo (Vasconcelos, 2005).

Na representação de Euler, a aceleração é caracterizada pelo gradiente de velocidade das partículas localizadas em posições diferentes do volume de controlo, num dado instante, e pelo gradiente de velocidade ao longo do tempo, em cada posição do volume de controlo, Figura 21 (Vasconcelos, 2005).

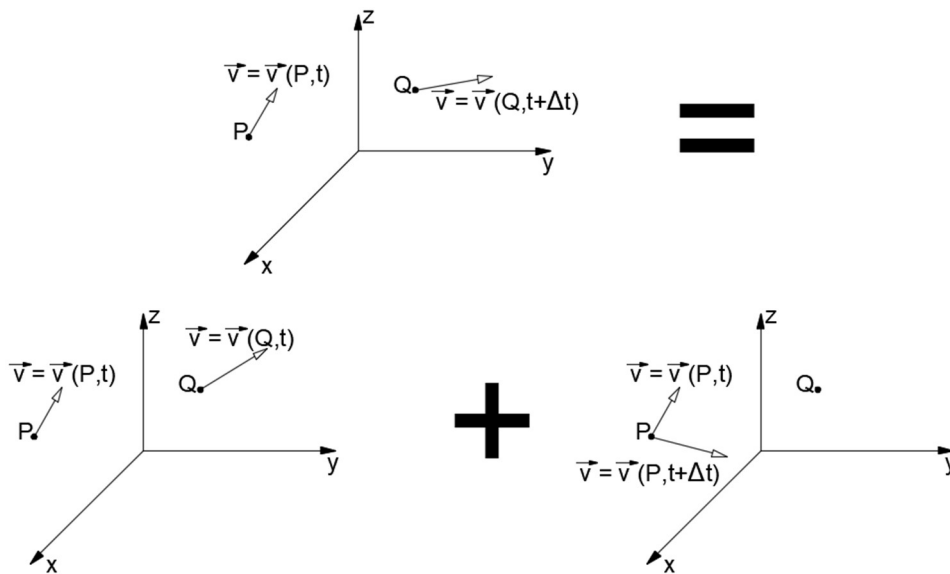


Figura 21 – Caracterização da aceleração em Representação de Euler (Vasconcelos, 2005).

No caso geral, o vetor velocidade é dependente das variáveis independentes tempo e posição no meio fluido (Vasconcelos, 2005).

$$\begin{cases} \vec{v} = \vec{v}(t, x, y, z) \\ v_x = v_x(t, x, y, z) \\ v_y = v_y(t, x, y, z) \\ v_z = v_z(t, x, y, z) \end{cases}$$

Com base na definição de variável, a aceleração é determinada por:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{v}(Q, t + \Delta t) - \vec{v}(P, t)}{\Delta t}$$

Se à equação anterior somarmos e subtrairmos no numerador o valor da velocidade na posição **P** e instante **t + Δt**, vem:

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{[\vec{v}(Q, t + \Delta t) - \vec{v}(P, t + \Delta t)] + [\vec{v}(P, t + \Delta t) - \vec{v}(P, t)]}{\Delta t} \Rightarrow \\ \Rightarrow \vec{a} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{[\vec{v}(Q, t + \Delta t) - \vec{v}(P, t + \Delta t)]}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{[\vec{v}(P, t + \Delta t) - \vec{v}(P, t)]}{\Delta t} \end{aligned}$$

A primeira parcela do membro da direita representa a variação da velocidade no espaço, para um dado instante, e a segunda parcela representa a variação da velocidade no tempo, para uma dada posição (Vasconcelos, 2005).

A variação no espaço pode ser decomposta nas três direções do sistema de coordenadas ortogonais (Vasconcelos, 2005).

$$\vec{a} = \lim_{\substack{\Delta t \rightarrow 0 \\ \Delta x \rightarrow 0}} \frac{[\vec{v}(Q, t + \Delta t) - \vec{v}(P, t + \Delta t)] \Delta x}{\Delta x} \frac{1}{\Delta t} + \lim_{\substack{\Delta t \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{[\vec{v}(Q, t + \Delta t) - \vec{v}(P, t + \Delta t)] \Delta y}{\Delta y} \frac{1}{\Delta t} + \\ + \lim_{\substack{\Delta t \rightarrow 0 \\ \Delta z \rightarrow 0}} \frac{[\vec{v}(Q, t + \Delta t) - \vec{v}(P, t + \Delta t)] \Delta z}{\Delta z} \frac{1}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{[\vec{v}(P, t + \Delta t) - \vec{v}(P, t)]}{\Delta t}$$

Os limites da equação anterior correspondem a derivadas parciais do vetor velocidade em ordem às variáveis independentes; tempo e posição no meio fluido (Vasconcelos, 2005).

$$\vec{a} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} \frac{dz}{dt} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$$

A variação das componentes, num sistema de eixos cartesianos, da variável independente posição no meio fluido com a variável independente tempo é igual à respetiva componente da velocidade e a equação vetorial da aceleração é representada por (Vasconcelos, 2005):

$$\vec{a} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} v_x + \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} v_y + \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} v_z + \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$$

As componentes da equação anterior, segundo os três eixos cartesianos são:

$$\begin{cases} a_x = \frac{\partial v_x}{\partial x} v_x + \frac{\partial v_x}{\partial y} v_y + \frac{\partial v_x}{\partial z} v_z + \frac{\partial v_x}{\partial t} \\ a_y = \frac{\partial v_y}{\partial x} v_x + \frac{\partial v_y}{\partial y} v_y + \frac{\partial v_y}{\partial z} v_z + \frac{\partial v_y}{\partial t} \\ a_z = \frac{\partial v_z}{\partial x} v_x + \frac{\partial v_z}{\partial y} v_y + \frac{\partial v_z}{\partial z} v_z + \frac{\partial v_z}{\partial t} \end{cases}$$

Introduzindo a definição de **grad** a equação que representa a aceleração, toma a seguinte forma:

$$\vec{a} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v}$$

A primeira parcela do segundo membro da equação anterior corresponde à variação da velocidade no tempo, denomina-se por aceleração local; o segundo termo, correspondente à variação da velocidade no espaço, denomina-se por aceleração convectiva (Vasconcelos, 2005).

2.1.5 Vorticidade

O rotacional

O **rotacional** de um vetor é o vetor definido em coordenadas cartesianas por (Gobbi *et al.*, 2011):

$$\text{rot } \mathbf{v} = \nabla \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}$$

Onde se utilizou a notação do produto vetorial. As barras verticais denotam o determinante da matriz cuja primeira linha contém os vetores unitários normais do sistema cartesiano, a segunda contém ∇ e a terceira contém o campo vetorial \mathbf{v} . No caso em que o campo vetorial é um campo de velocidade em um meio contínuo, o rotacional deste campo em cada ponto é igual a duas vezes o vetor velocidade angular local, daí o nome rotacional. Em mecânica dos fluidos, o **rotacional do campo de velocidade** é chamado de **vorticidade**: $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{v}$ (Gobbi *et al.*, 2011).

Rotação de um fluido: vorticidade

Considere a Figura 22, porém, admita que os ângulos α e β tivessem ambos o mesmo sentido de rotação (na Figura 22 os ângulos estão em sentidos opostos) (Gobbi *et al.*, 2011).

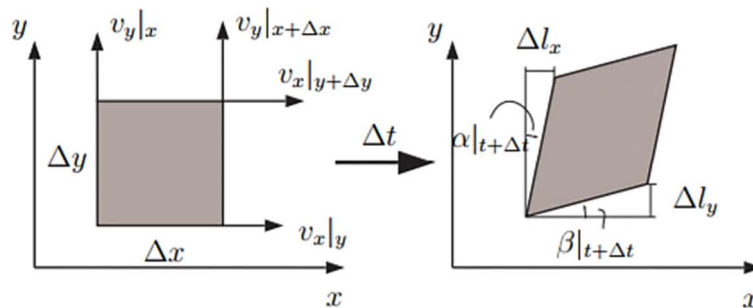


Figura 22 – Deformação de cisalhamento no plano (x, y) de um elemento de fluido em escoamento (Gobbi *et al.*, 2011).

Claramente, neste caso, temos o que se assemelharia mais a uma rotação que a uma simples deformação. Assim, definimos a taxa de rotação de forma análoga à taxa de deformação de cisalhamento, porém com um dos ângulos com sinal trocado (Gobbi *et al.*, 2011):

$$\frac{1}{2} \left(\frac{d\beta}{dt} - \frac{d\alpha}{dt} \right) = \frac{1}{2} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\beta|_{t+\Delta t} - \beta|_t}{\Delta t} - \frac{\alpha|_{t+\Delta t} - \alpha|_t}{\Delta t} \right)$$

Analogamente ao caso da deformação, o que temos é:

$$\frac{1}{2} \frac{d(\beta - \alpha)}{dt} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right)$$

Que dá, essencialmente, a velocidade angular local da partícula de fluido em torno do eixo z. Podemos definir esta velocidade como a componente z de um vetor velocidade angular. Aplicando a mesma ideia para a rotação nos planos (x, z) e (y, z), temos então um vetor velocidade angular (Gobbi *et al.*, 2011):

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}, \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}, \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right)$$

Ao que aparece entre parênteses na equação anterior, dá-se o nome de **vorticidade**, ou seja, a vorticidade é um vetor igual a duas vezes a velocidade angular do fluido em um ponto, e, portanto, mede a taxa de rotação no ponto. Claramente, pode-se perceber que a vorticidade (ω) é igual ao rotacional do campo de velocidades (Gobbi *et al.*, 2011):

$$\omega = (\omega_x, \omega_y, \omega_z) = \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}, \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}, \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) = \nabla \times \mathbf{v}$$

Linha e tubo de vorticidade

Dado um campo vetorial de velocidades (\mathbf{v}) de um fluido, é possível calcular o campo de vorticidade (ω) associado a esse campo de velocidades, simplesmente aplicando-se o rotacional de \mathbf{v} . Assim como definimos linha de corrente como as linhas, às quais os vetores velocidade são tangentes a elas, podemos, analogamente, definir linhas cujos vetores vorticidade são tangentes a elas, ou, **linhas de vorticidade**. Essas linhas são definidas pelas equações:

$$\frac{dx}{\omega_x} = \frac{dy}{\omega_y} = \frac{dz}{\omega_z}$$

Analogamente a um tubo de corrente, o tubo de vorticidade é uma superfície gerada por linhas de vorticidade adjacentes. Um exemplo prático aproximado de um tubo de vorticidade é o funil de um tornado ou de um furacão (Gobbi *et al.*, 2011).

Se em uma região do domínio o escoamento é tal que a vorticidade é nula, ou seja, $\omega = \nabla \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$, tal escoamento é chamado de **escoamento irrotacional ou potencial**, naquela região (Gobbi *et al.*, 2011).

2.2 Tipos de movimento

2.2.1. Movimentos não permanentes e permanentes

Movimento não-permanente: sempre que pelo menos uma variável seja dependente do tempo (Figura 23) (Pinho et al., 2011).

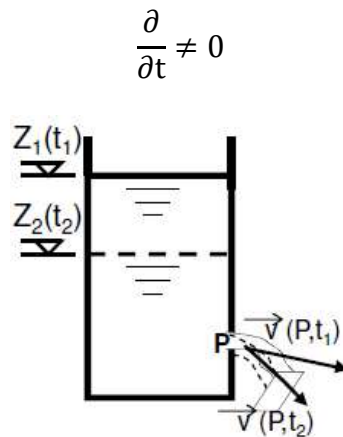


Figura 23 – Movimento não permanente (Pinho et al., 2011).

Movimento permanente: sempre que todas as variáveis em jogo sejam independentes do tempo (Pinho et al., 2011).

$$\frac{\partial}{\partial t} = 0$$

Movimento permanente variado: se a velocidade varia ao longo da trajetória (Figura 24) (Pinho et al., 2011).

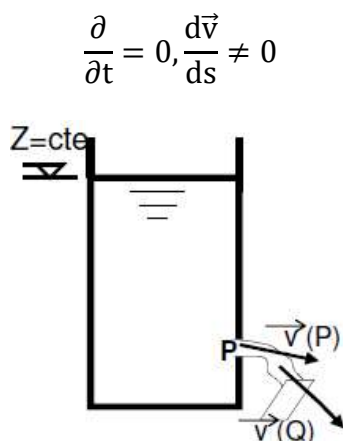


Figura 24 – Movimento permanente variado (Pinho et al., 2011).

Movimento permanente uniforme: se a velocidade é constante ao longo da trajetória (Figura 25) (Pinho et al., 2011).

$$\frac{\partial}{\partial t} = 0, \frac{d\vec{v}}{ds} = 0$$

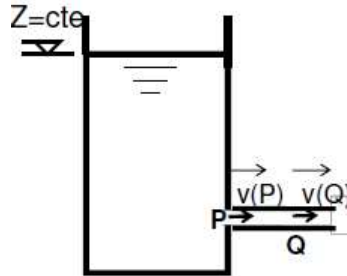


Figura 25 – Movimento permanente uniforme (Pinho et al., 2011).

2.2.2. Movimentos/Escoamento rotacionais e irrotacionais

Esta classificação prende-se com a existência ou não de **rotação** das partículas em movimento, sendo ω a vorticidade ou vetor turbilhão (Pinho et al., 2011).

Movimento/Escoamento rotacional

Movimento no qual partícula está sujeita a uma velocidade angular, em relação ao seu centro de massa. Um exemplo deste escoamento é característico no fenómeno do equilíbrio relativo em um recipiente cilíndrico aberto, que contenha um líquido e que gira em torno de seu eixo vertical. Em virtude da viscosidade, o escoamento de fluidos reais sempre se comporta como um escoamento rotacional (presente em pelo menos um ponto do domínio fluido) (Pordeus, 2015).

$$\omega = \nabla \times v \neq 0$$

Movimento/Escoamento irrotacional

Movimento que é uma aproximação na prática, em que se desconsidera o comportamento rotacional dos escoamentos (não há redemoinhos), considerando-se o escoamento em tratamento como irrotacional, através dos princípios clássicos da fluidodinâmica. Num escoamento teoricamente irrotacional, as partículas são consideradas indeformáveis, despreza-se a influência da viscosidade e faz-se uma conceção matemática do escoamento (presente em todos os pontos do domínio fluido) (Pordeus, 2015).

$$\omega = \nabla \times v = 0$$

2.2.3. Movimentos laminares, de transição e turbulentos

Movimentos laminares

As linhas de corrente apresentam-se completamente individualizadas constituindo um campo regular e estável de modo que qualquer perturbação introduzida no escoamento é rapidamente amortecida (Figura 26) (Pinho et al., 2011).

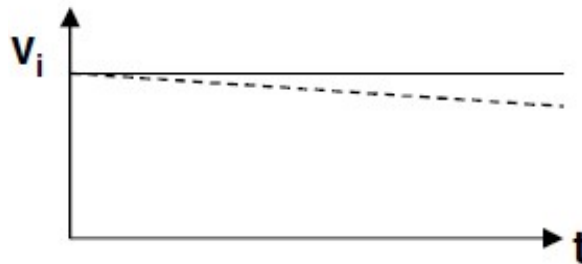


Figura 26 – Representação gráfica do movimento laminar (Pinho et al., 2011).

Movimentos de transição

Na passagem de movimento laminar para movimento turbulento define-se o regime de transição (Pinho et al., 2011).

Movimentos turbulentos

A estrutura laminar dissipa-se verificando-se a ocorrência de rápidas flutuações das grandezas no espaço e no tempo (Figura 27) (Pinho et al., 2011).

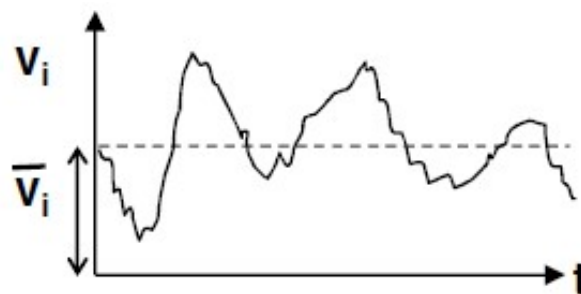


Figura 27 – Representação gráfica do movimento turbulento (Pinho et al., 2011).

$$v_i = \bar{v}_i + v_i'$$

2.2.4. Escoamentos exteriores, interiores e em meios porosos

Esta classificação prende-se com a **posição relativa** do domínio fluido e das paredes sólidas que com ele contactam (Pinho et al., 2011).

Escoamentos exteriores

O fluido em movimento **envolve completamente** as paredes sólidas que constituem as fronteiras do escoamento, como por exemplo o movimento do ar no perfil da asa de um avião/edifício de grande altura ou o movimento da água no pilar de uma ponte (Pinho et al., 2011).

Escoamentos interiores

O fluido em movimento é **total ou parcialmente envolvido** por paredes sólidas. Dentro destes pode-se ainda dividir em (Pinho et al., 2011):

- **Esc. sob pressão:** verificam-se no interior de tubos, ocupando o fluido toda a secção dos mesmos, exercendo sobre as paredes que o envolvem pressões geralmente diferentes da pressão atmosférica em todos os seus pontos;
- **Esc. com superfície livre:** verificam-se com contacto permanente da corrente líquida com um meio exterior gasoso, geralmente a atmosfera.

Escoamentos em meios porosos

Reúnem características de escoamentos exteriores e interiores. Verificam-se em contacto permanente da corrente líquida com o meio poroso (Pinho et al., 2011).

2.3 Equação de continuidade

A resolução de problemas de **Dinâmica dos Fluidos** exige **6 equações** (Pinho et al., 2011):

- Equação da Continuidade;
- Três Equações de Equilíbrio Dinâmico;
- Equação de Estado do Fluido;
- Equação de Balanço de Energia.

A resolução de problemas de **Mecânica dos Fluidos** exige **4 equações** (Pinho et al., 2011):

- Equação da Continuidade;
- Três Equações de Equilíbrio Dinâmico.

Equações adotando variáveis de Euler consideram-se válidas para movimentos laminares e para movimentos turbulentos em valores instantâneos. As equações serão deduzidas em termos locais atribuindo-se a cada ponto geométrico do espaço no domínio fluido um conjunto de valores que se farão corresponder a determinadas grandezas tensoriais, características do fluido ou do escoamento (Pinho et al., 2011):

- Campos tensoriais de ordem zero ou escalares: **ρ , γ , T** ;
- Campos tensoriais de ordem um: **velocidades, vorticidades, forças**;

- Campos tensoriais de ordem dois: **tensões**, **velocidade de deformação angular**.

2.3.1 Dedução da equação geral

Equação de Continuidade ou de **Conservação de Massa** traduz a propriedade de conservação de massa e escreve-se sobre a forma de equação de balanço aplicada a uma superfície de controlo (**S**) fixa relativamente a um sistema de eixos de referência, limitando um volume de controlo (**V**) (Pinho et al., 2011).

$$(1): \Phi_S - \Phi_e = \Delta G_I$$

Em que:

$\Phi_S - \Phi_E$ é a diferença entre quantidades que saem e que entram;

ΔG_I é a diminuição do valor global da grandeza no interior da superfície de controlo (Figura 28).

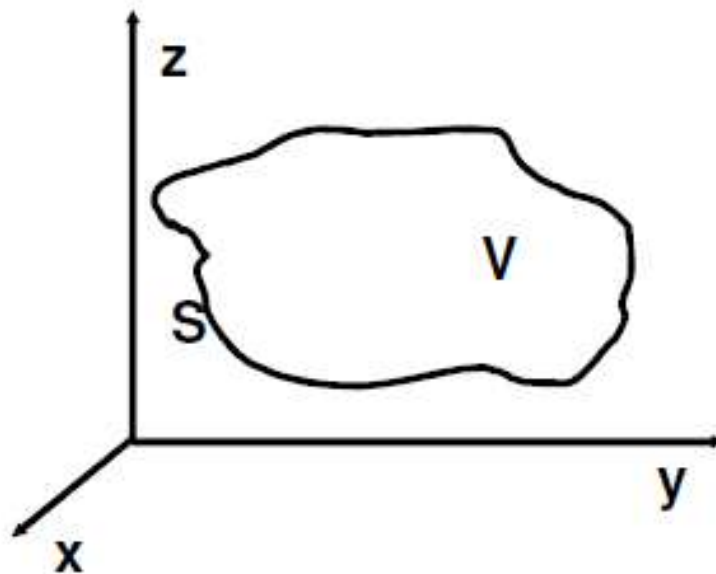


Figura 28 – Superfície de controlo (Pinho et al., 2011).

Expressão Geral

É necessário definir a diferença ($\Phi_S - \Phi_E$) entre a massa de fluido que atravessa a superfície fechada do interior para o exterior e a massa de fluido que a transpõe em sentido contrário, num dado intervalo de tempo (Pinho et al., 2011).

Massa que atravessa o elemento de área (**dS**) na unidade de tempo:

$$dm = \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dS \text{ (Positiva quando o fluido passa do interior para o exterior)}$$

Integrando a toda a superfície de controlo (**S**) temos:

$$(2): \Phi_S - \Phi_e = \int_S \rho \vec{v} \cdot \vec{n} \, dS$$

É necessário definir a diminuição (ΔG_I) da massa existente no volume de controlo, na unidade de tempo (Pinho et al., 2011).

Massa total contida no interior da superfície de controlo (**S**):

$$m = \int_V \rho \, dV$$

Variação da massa na unidade de tempo:

$$(3): \Delta G_I = - \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \, dV$$

Sendo os limites de integração independentes do tempo:

$$\text{Transformando (1) em: } (\Phi_S - \Phi_e) - \Delta G_I = 0$$

$$\text{E subst. por (2) e (3) temos (4): } \int_S \rho \vec{v} \cdot \vec{n} \, dS + \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \, dV = 0$$

$$\text{Sabendo que o Teorema de Ostrogradsky postula: } \int_S \vec{v} \cdot \vec{n} \, dS = \int_V \text{div} \vec{v} \, dV$$

$$\text{Então (4) passa a (5): } \int_V \left[\text{div}(\rho \vec{v}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} \right] dV = 0$$

Sendo o volume (**V**) inteiramente arbitrário:

$$\text{div}(\rho \vec{v}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\partial(\rho v_i)}{\partial x_i} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

Para **escoamentos permanentes**:

$$\frac{\partial}{\partial t} = 0 \wedge \text{div}(\rho \vec{v}) = 0$$

Para **fluidos incompressíveis**:

$$\rho = \text{constante} \wedge \text{div} \vec{v} = 0$$

2.3.2 Aplicação a um tubo de corrente

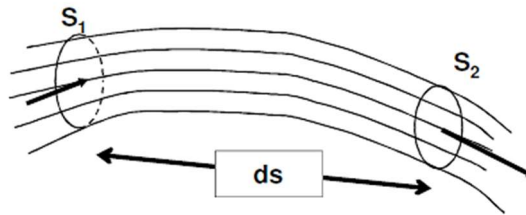


Figura 29 – Tubo de corrente (Pinho et al., 2011).

Massa que atravessa S_1 no intervalo de tempo dt :

$$\rho Q dt$$

Massa que atravessa S_2 no intervalo de tempo dt :

$$\left[\rho Q + \frac{\partial(\rho Q)}{\partial s} ds \right] dt$$

Diminuição de massa no volume (V):

$$- \frac{\partial(\rho Q)}{\partial s} ds dt$$

Considerando S a área da secção transversal média no comprimento ds :

$$dV = S ds$$

Variação da massa no interior do volume no intervalo de tempo dt :

$$- \frac{\partial(\rho S)}{\partial t} dt ds$$

Equação da continuidade aplicada a um **tubo de corrente**:

$$\frac{\partial(\rho Q)}{\partial s} + \frac{\partial(\rho S)}{\partial t} = 0$$

Para **fluidos incompressíveis**:

$$\frac{\partial Q}{\partial s} + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$$

Para **fluidos incompressíveis e movimento permanente**:

$$Q = U \cdot S = \text{constante}$$

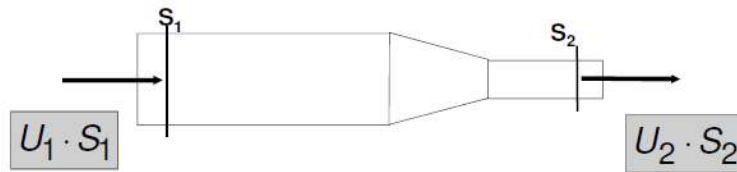


Figura 30 – Exemplo de fluidos incompressíveis e movimento permanente (Pinho et al., 2011).

$$U_1 \cdot S_1 = U_2 \cdot S_2$$

2.4 Equações de equilíbrio dinâmico

As **Equações de Equilíbrio Dinâmico** resultam da aplicação das equações gerais da dinâmica dos sistemas de partículas ao movimento do fluido (Pinho et al., 2011).

$$\vec{F} = m\vec{a} \text{ (Equação de Newton)}$$

2.4.1 Ações nos fluidos

Uma **superfície fluida** (S) limitando um volume (V) em movimento encontra-se submetida a distribuições de forças de dois tipos (Pinho et al., 2011):

1. **Forças de volume ou forças de massa** - resultantes de atrações ou repulsões exercidas pelo meio fluido e que são proporcionais ao volume ou massa de fluido correspondentes a cada elemento de volume.
2. **Forças de superfície ou forças de contacto** - resultantes de ações exercidas ao longo da superfície S pelo fluido envolvente sobre o que se encontra no interior da referida superfície.

Forças de volume ou de massa

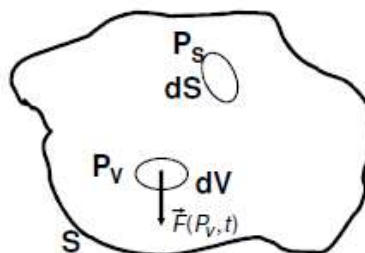


Figura 31 – Forças de volume ou de massa (Pinho et al., 2011).

Resultante das forças de volume no interior de S :

$$\int_V \vec{F}(P_v, t) dV$$

Forças por unidade de massa:

$$\vec{G}(P_v, t) = \frac{\vec{F}(P_v, t)}{\rho}$$

Forças de superfície ou forças de contacto

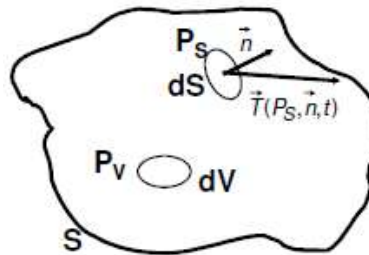


Figura 32 – Forças de superfície ou forças de contacto (Pinho et al., 2011).

Resultante da distribuição de forças em P_S :

$$d\vec{\Phi}$$

Resultante das tensões em dS :

$$\vec{T}(P_S, \vec{n}, t) = \frac{d\vec{\Phi}}{dS}$$

Em S :

$$\int_S \vec{T}(P_S, \vec{n}, t) dS$$

2.4.2 Noção de equilíbrio dinâmico

Entende-se por **Equilíbrio Dinâmico** a anulação do vetor principal do sistema de forças e do momento resultante do mesmo sistema de forças e ainda das forças de inércia (Figura 33) (Pinho et al., 2011).

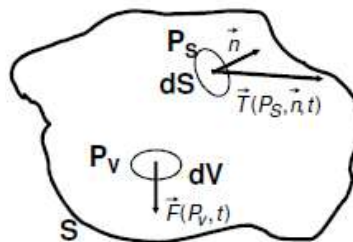


Figura 33 – Equilíbrio dinâmico (Pinho et al., 2011).

$$\int_V \vec{F}(P_v, t) dV + \int_S \vec{T}(P_S, \vec{n}, t) dS - \int_V \rho \vec{a}(P_v, t) dV = 0$$

Sendo $\vec{a}(P_v, t)$ a aceleração no ponto P_v no instante t (Pinho et al., 2011).

Utilizando forças por unidade de massa:

$$\int_V \rho \vec{G} dV + \int_S \vec{T} dS = \int_V \rho \vec{a} dV$$

Ou em notação tensorial cartesiana:

$$\int_V \rho G_i dV + \int_S T_i dS = \int_V \rho a_i dV$$

2.4.3 Caracterização do estado de tensão

Admitindo que a tensão correspondente a uma orientação qualquer de uma faceta, é dada a partir do conhecimento dos elementos do tensor das tensões (Pinho et al., 2011):

$$\vec{T}(P_S, \vec{n}) = \tau_{ji}(P_S) n_j$$

Atendendo à expressão de **Euler** da aceleração:

$$a_i = \frac{Dv_i}{Dt} = \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_i = \underbrace{\frac{\partial v_i}{\partial t}}_{\text{Aceleração local}} + \underbrace{v_1 \frac{\partial v_i}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_i}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial v_i}{\partial x_3}}_{\text{Aceleração convectiva}}$$

2.4.4 Equações de equilíbrio dinâmico

Assim as **equações de equilíbrio dinâmico** podem assumir as formas (Pinho et al., 2011):

$$\int_V \rho a_i dV = \int_V \rho G_i dV + \int_S \tau_{ji} n_j dS$$

ou

$$\int_V \rho a_i dV = \int_V \rho G_i dV + \int_S \frac{\partial \tau_{ji}}{\partial x_j} dS$$

Sendo o volume arbitrário:

$$a_i = G_i + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{ji}}{\partial x_j} \quad \text{ou} \quad \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = G_i + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{ji}}{\partial x_j}$$

Por exemplo, para $i = 1$ a expressão toma a forma:

$$\frac{\partial v_1}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + v_j \frac{\partial v_1}{\partial x_2} + v_j \frac{\partial v_1}{\partial x_3} = G_i + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{ji}}{\partial x_j} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{ji}}{\partial x_j} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{ji}}{\partial x_j}$$

2.4.5 Equações de Euler

Considerando desprezáveis as tensões distorcionais (fluidos perfeitos) e que o tensor das tensões é esférico, reduzindo-se ao tensor hidrostático (Pinho et al., 2011):

$$\tau_{ij} = -p\delta_{ij}$$

Sendo o **símbolo de Kronecker**:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}$$

$$\frac{\partial \tau_{ji}}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_j} \delta_{ji} = -\frac{\partial p}{\partial x_i}$$

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = G_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} \text{ Componente do gradiente de pressões na direção } 0_{x_i}$$

Equação vetorial a que correspondem três equações escalares de projeção segundo os eixos coordenados (Pinho et al., 2011).

Na **Hidrostática** não se manifesta a viscosidade:

$$G_i = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} \quad \text{ou} \quad \vec{G} = \frac{1}{\rho} \text{grad } p$$

2.4.6 Equações de Navier-Stokes. Condições fronteira

Relação constitutiva para um fluido newtoniano

É a relação mais simples entre os tensores de estado de tensão e taxa de deformação (Claude-Louis Navier, 1822; George Gabriel Stokes, 1845). Baseada em três postulados (Baliño, 2017):

1. O fluido é contínuo e o tensor de **tensor de tensões (T)** é no máximo uma função linear do **tensor taxa de deformação (ε)**. **Corolário**: não há efeito da translação ou rotação nem de eventos passados (*stress*);

- O fluido é isotrópico (propriedades independentes da direção) e, portanto, a lei é independente dos eixos coordenados escolhidos para descrevê-la.
Corolário: os eixos principais dos tensores relacionados são coincidentes;
- Na ausência de taxa de deformação, o estado de tensão se reduz ao estado hidrostático $\mathbf{T} = -p\mathbf{I}$.

Escolheu-se os eixos principais (x_1, y_1, z_1) para estabelecer a relação constitutiva. Nestes eixos, as matrizes associadas aos tensores são diagonais, resultando das hipóteses (Baliño, 2017):

$$T_{11} = -p + C_1\epsilon_{11} + C_2\epsilon_{22} + C_3\epsilon_{33}$$

Pela condição de isotropia, as direções perpendiculares a x_1 são equivalentes, isto é, $C_2 = C_3$, resultando dois coeficientes independentes (Baliño, 2017):

$$T_{11} = -p + (C_1 - C_2)\epsilon_{11} + C_2(\epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33}) = -p + k\epsilon_{11} + C_2(\nabla \cdot \mathbf{V})$$

Onde $k = C_1 - C_2$. Analogamente para as outras componentes:

$$T_{22} = -p + k\epsilon_{22} + C_2(\nabla \cdot \mathbf{V})$$

$$T_{33} = -p + k\epsilon_{33} + C_2(\nabla \cdot \mathbf{V})$$

Faz-se uma transformação aos eixos (x, y, z) onde as matrizes associadas têm elementos extra-diagonais. Se T_1 e ϵ_1 são as matrizes associadas aos eixos principais, enquanto T e ϵ são as matrizes associadas aos eixos transformados, a transformação resulta (Baliño, 2017):

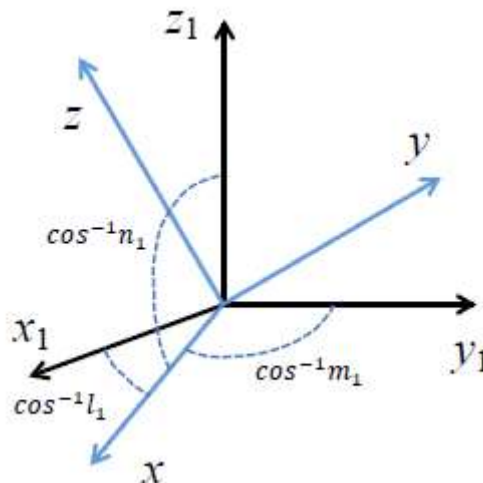


Figura 34 – Transformação dos eixos (Baliño, 2017).

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= \mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{T}_1 \cdot \mathbf{Q} \\ \boldsymbol{\epsilon} &= \mathbf{Q}^T \cdot \boldsymbol{\epsilon}_1 \cdot \mathbf{Q} \end{aligned}$$

Em que Q é a **matriz de transformação** (cossenos diretores dos eixos transformados colocados em coluna) (Baliño, 2017):

$$\{Q\} = \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{pmatrix}; \begin{cases} \check{i}_1 = l_1\check{i} + l_2\check{j} + l_3\check{k} \\ \check{i}_2 = m_1\check{i} + m_2\check{j} + m_3\check{k} \\ \check{i}_3 = n_1\check{i} + n_2\check{j} + n_3\check{k} \end{cases}$$

A transformação para um elemento diagonal (por exemplo T_{xx} e ϵ_{xx}) e um elemento extra-diagonal (por exemplo T_{xy} e ϵ_{xy}) resulta (Baliño, 2017):

$$T_{xx} = l_1^2 T_{11} + m_1^2 T_{22} + n_1^2 T_{33} \quad \wedge \quad \epsilon_{xx} = l_1^2 \epsilon_{11} + m_1^2 \epsilon_{22} + n_1^2 \epsilon_{33}$$

$$T_{xy} = l_1 l_2 T_{11} + m_1 m_2 T_{22} + n_1 n_2 T_{33} \quad \wedge \quad \epsilon_{xy} = l_1 l_2 \epsilon_{11} + m_1 m_2 \epsilon_{22} + n_1 n_2 \epsilon_{33}$$

Substituindo as tensões nas direções principais e levando em conta as relações:

$$\begin{cases} \check{i} \cdot \check{i} = l_1^2 + m_1^2 + n_1^2 \\ \check{i} \cdot \check{j} = l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} T_{xx} &= l_1^2 [-p + k\epsilon_{11} + C_2(\nabla \cdot V)] + m_1^2 [-p + k\epsilon_{22} + C_2(\nabla \cdot V)] + n_1^2 [-p + k\epsilon_{33} + C_2(\nabla \cdot V)] = \\ &= -p(l_1^2 + m_1^2 + n_1^2) + k(l_1^2 \epsilon_{11} + m_1^2 \epsilon_{22} + n_1^2 \epsilon_{33}) + C_2(\nabla \cdot V)(l_1^2 + m_1^2 + n_1^2) = \\ &= -p + k\epsilon_{xx} + C_2(\nabla \cdot V) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_{xy} &= l_1 l_2 [-p + k\epsilon_{11} + C_2(\nabla \cdot V)] + m_1 m_2 [-p + k\epsilon_{22} + C_2(\nabla \cdot V)] + n_1 n_2 [-p + k\epsilon_{33} + C_2(\nabla \cdot V)] = \\ &= -p(l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2) + k(l_1 l_2 \epsilon_{11} + m_1 m_2 \epsilon_{22} + n_1 n_2 \epsilon_{33}) + C_2(\nabla \cdot V)(l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2) = k\epsilon_{xy} \end{aligned}$$

Definindo $k = 2\mu$ e $C_2 = \lambda$, onde μ é a **viscosidade dinâmica** e λ é o **segundo coeficiente de viscosidade**, resultam finalmente (Baliño, 2017):

$$T_{xx} = -p + 2\mu\epsilon_{xx} + \lambda(\nabla \cdot V)$$

$$T_{yy} = -p + 2\mu\epsilon_{yy} + \lambda(\nabla \cdot V)$$

$$T_{zz} = -p + 2\mu\epsilon_{zz} + \lambda(\nabla \cdot V)$$

$$T_{xy} = 2\mu\epsilon_{xy}$$

$$T_{yz} = 2\mu\epsilon_{yz}$$

$$T_{zx} = 2\mu\epsilon_{zx}$$

Em forma compacta:

$$T_{ij} = [-p + \lambda(\nabla \cdot V)]\delta_{ij} + 2\mu \cdot \epsilon_{ij} = [-p + \lambda(\nabla \cdot V)]\delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

$$T = [-p + \lambda(\nabla \cdot V)]I + 2\mu\epsilon = [-p + \lambda(\nabla \cdot V)]I + \mu(\nabla V + \nabla V^T)$$

Pressão mecânica e pressão termodinâmica

Somando as tensões normais, o invariante I_1 do tensor de tensões resulta:

$$I_1 = -3p + 2\mu(\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy} + \epsilon_{zz}) + 3\lambda(\nabla \cdot V) = -3p + (2\mu + 3\lambda)(\nabla \cdot V)$$

Definindo a pressão mecânica como:

$$\bar{p} = -\frac{I_1}{3}$$

Resulta:

$$\bar{p} = p - \left(\lambda + \frac{2}{3}\mu \right) (\nabla \cdot V)$$

A pressão mecânica não é igual à pressão termodinâmica. O termo conflituoso tem a ver com escoamentos compressíveis (tornando-se irrelevante se $\nabla \cdot V = 0$) e é objeto de controvérsia. Stokes superou o assunto estabelecendo a condição $\bar{p} = p$, isto é, $\lambda = -(2/3)\mu$, o que se conhece como **hipótese de Stokes** (Baliño, 2017).

Termo de força de estado de tensão

Deve-se acrescentar, na equação de conservação do momento linear, os termos de força do estado de tensão ($\nabla \cdot T$):

$$\begin{aligned} \nabla \cdot T &= \nabla \cdot \{ [-p + \lambda(\nabla \cdot V)]I + \mu(\nabla V + \nabla V^T) \} = \\ &= -\nabla p + (\nabla \cdot V)\nabla\lambda + \lambda\nabla(\nabla \cdot V) + (\nabla V + \nabla V^T) \cdot \nabla\mu + \mu\nabla \cdot (\nabla V + \nabla V^T) \end{aligned}$$

Calcula-se o último termo utilizando a **convenção de somatório de Einstein** (quando um índice aparece duplicado, significa que deve ser somado em todos seus valores) (Baliño, 2017):

$$[\nabla \cdot (\nabla V + \nabla V^T)]_i = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right) = (\nabla^2 V)_i + [\nabla(\nabla \cdot V)]_i$$

$$\nabla \cdot (\nabla V + \nabla V^T) = \nabla^2 V + \nabla(\nabla \cdot V)$$

Substituindo, obtém-se:

$$\nabla \cdot \mathbf{T} = -\nabla p + (\nabla \cdot \mathbf{V})\nabla\lambda + (\lambda + \mu)\nabla(\nabla \cdot \mathbf{V}) + (\nabla\mathbf{V} + \nabla\mathbf{V}^T) \cdot \nabla\mu + \mu\nabla^2\mathbf{V}$$

Em termos de operadores "genuínos", o laplaciano vetorial resulta:

$$\nabla^2\mathbf{V} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{V}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{V})$$

A equação de conservação do momento linear resulta, finalmente:

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = \frac{\partial\mathbf{V}}{\partial t} + \nabla\mathbf{V} \cdot \mathbf{V} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \mathbf{G} + \nu\nabla^2\mathbf{V} + \frac{1}{\rho}[(\lambda + \mu)\nabla(\nabla \cdot \mathbf{V}) + (\nabla \cdot \mathbf{V})\nabla\lambda + (\nabla\mathbf{V} + \nabla\mathbf{V}^T) \cdot \nabla\mu]$$

A relação anterior mostra o acoplamento com a equação da energia, através da massa específica e o gradiente da viscosidade (Baliño, 2017).

Equação de Navier-Stokes

Considerando a hipótese de Stokes e viscosidade constante, resulta:

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = \frac{\partial\mathbf{V}}{\partial t} + \nabla\mathbf{V} \cdot \mathbf{V} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \mathbf{G} + \nu\nabla^2\mathbf{V} + \frac{1}{3}\nu\nabla(\nabla \cdot \mathbf{V})$$

Finalmente, considerando escoamento incompressível, resulta a **equação de Navier-Stokes** (Baliño, 2017):

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = \frac{\partial\mathbf{V}}{\partial t} + \nabla\mathbf{V} \cdot \mathbf{V} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \mathbf{G} + \nu\nabla^2\mathbf{V}$$

A equação de Navier-Stokes é de segunda ordem na velocidade e está desacoplada da equação da energia. Em coordenadas cartesianas, a componente x resulta (Baliño, 2017):

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + G_x + \nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$$

Condições de fronteira em interface fluido-sólido

Em interfaces fluido-sólido, desprezando efeitos de microescala caracterizados por grandes **números de Knudsen** ($\mathbf{Kn} = l/L < 0.1$, onde l é o caminho livre médio das moléculas e L é o comprimento característico do problema), é costume supor a **condição de não escorregamento** (Baliño, 2017);

$$\mathbf{V}(\mathbf{r}_s, t) = \mathbf{V}_s(t)$$

Se o sólido for permeável (por exemplo, nos casos de sucção ou injeção de fluido) ou se existir mudança de fase (vaporização, condensação, sublimação, deposição) a componente normal da velocidade afrouxa, isto é, $V_n(\mathbf{r}_s, t) \neq 0$ (Baliño, 2017).

Condições de fronteira em superfície livre (cinemática)

Para o caso de uma superfície livre ideal que exerce uma pressão conhecida na interface, caracterizada pela posição $z = \eta(x, y, t)$ (Baliño, 2017):

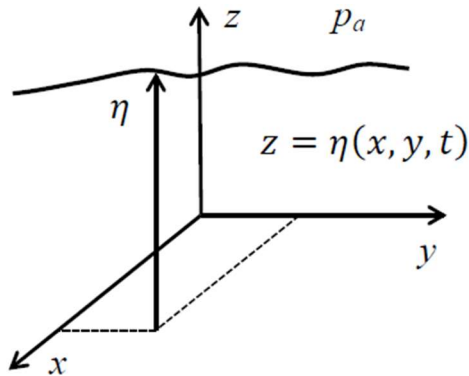


Figura 35 – Condições de fronteira em superfície livre (cinemática) (Baliño, 2017).

Aplica-se a condição cinemática de que as partículas na superfície permanecem nela, isto é, a velocidade da partícula na direção vertical é igual ao deslocamento vertical acompanhando as partículas (Baliño, 2017):

$$w(x, y, \eta, t) = \frac{d\eta}{dt} = \frac{\partial \eta}{\partial t} + u \frac{\partial \eta}{\partial x} + v \frac{\partial \eta}{\partial y}$$

Desprezando a inclinação da superfície, resulta:

$$w(x, y, \eta, t) \cong \frac{\partial \eta}{\partial t}$$

Condições de fronteira em superfície livre (normal)

A **curvatura** na interface está relacionada com uma força na direção normal (Baliño, 2017):

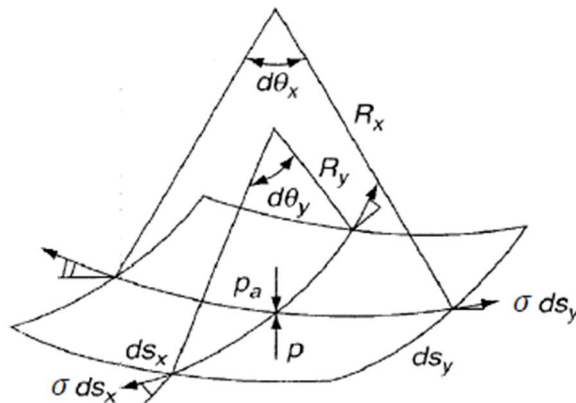


Figura 36 – Condições de fronteira em superfície livre (normal) (Baliño, 2017).

Um balanço na direção normal à interface resulta na **equação de Young-Laplace**:

$$p(x, y, \eta, t) = p_a - \sigma \left(\frac{1}{R_x} + \frac{1}{R_y} \right)$$

$$\frac{1}{R_x} + \frac{1}{R_y} = \frac{\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2}}{\left[1 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2 \right]^{3/2}}$$

onde σ é a tensão superficial. Desprezando efeitos de tensão superficial ou para grandes raios de curvatura, resulta $p \cong p_a$ (Baliño, 2017).

Condições de fronteira em superfície entre fluidos

Considerando que a interface tem inércia desprezível e possibilidade de variação da tensão superficial ao longo da superfície (escoamento de Marangoni) (Baliño, 2017):

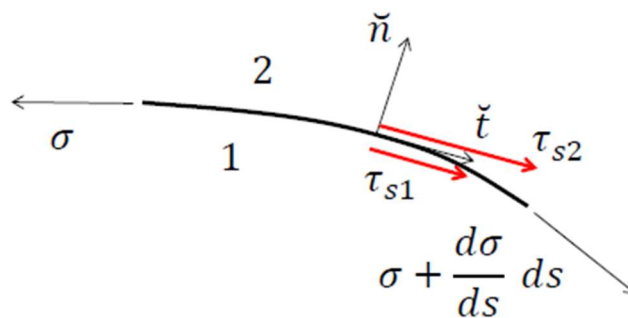


Figura 37 – Condições de fronteira em superfície entre fluidos (Baliño, 2017).

As condições de fronteira resultam (Baliño, 2017):

Continuidade da velocidade

$$V_1 = V_2$$

Balanço na direção tangencial

$$\tau_{s1} + \tau_{s2} = - \frac{d\sigma}{ds}$$

Onde:

$$\tau_{s2} = (\tau_2 \cdot \tilde{n}) \cdot \tilde{t}$$

$$\tau_{s1} = -(\tau_1 \cdot \tilde{n}) \cdot \tilde{t}$$

CAPÍTULO 3 - HIDROSTÁTICA

3.1 Equações gerais de equilíbrio dos fluidos

Noção de pressão

A **pressão** é a força normal exercida por unidade de área num determinado ponto, atuando num determinado plano (direção) no interior da massa de fluido em repouso. A pressão num ponto no interior de um fluido em repouso é independente da direção (Pinho et al., 2011).

$$p = \gamma \times g$$

3.1.1 Caso geral

A resolução de um problema da estática dos fluidos consiste na determinação de **3** variáveis: **pressão**, **massa volúmica**, **temperatura**, em cada ponto do domínio fluido, a partir do conhecimento do campo de forças exteriores. São necessárias, portanto, **3 equações** (Pinho et al., 2011).

1ª Equação - a partir das equações de equilíbrio dinâmico aplicadas a um fluido em repouso:

$$\frac{1}{\rho} \text{grad } p = \vec{G} \quad \text{Resultante das forças exteriores por unidade de massa}$$

Projetando sobre 3 eixos cartesianos ortogonais:

$$G_i = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} \Rightarrow \begin{cases} G_1 = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \\ G_2 = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \\ G_3 = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} G_1 dx = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} dx \\ G_2 dy = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} dy \\ G_3 dz = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} dz \end{cases}$$

Somando:

$$\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz \right) = G_1 dx + G_2 dy + G_3 dz$$

Donde:

$$\frac{1}{\rho} dp = G_1 dx + G_2 dy + G_3 dz$$

Equação fundamental da estática dos fluidos

2ª Equação - equação de estado:

$$f(p, \rho, T) = 0$$

3ª Equação - equação complementar de carácter termodinâmico relacionada com o princípio de conservação, ou balanço, de energia.

3.1.2 Equilíbrio de um fluido a temperatura constante

Sendo **T = constante** o número de incógnitas reduz-se a duas, logo necessita-se de 2 equações (Pinho et al., 2011).

A **1ª Equação**:

$$\rho = \rho(p)$$

A **2ª Equação**:

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho G_1 = \frac{\partial p}{\partial x} \\ \rho G_2 = \frac{\partial p}{\partial y} \\ \rho G_3 = \frac{\partial p}{\partial z} \end{array} \right. \text{ pode provar -- se que: } \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial G_1}{\partial x} = \frac{\partial G_2}{\partial y} \\ \frac{\partial G_2}{\partial y} = \frac{\partial G_3}{\partial z} \\ \frac{\partial G_3}{\partial z} = \frac{\partial G_1}{\partial x} \end{array} \right.$$

Donde:

$$G_1 dx + G_2 dy + G_3 dz = dU, \text{ com } U(x_1, x_2, x_3) \quad \text{ou} \quad dU = \frac{dp}{\rho}$$

Um fluido **a temperatura constante** só pode estar em repouso se **o campo de forças que sobre ele atua for conservativo**:

$$G_1 dx + G_2 dy + G_3 dz = 0$$

3.1.3 Equilíbrio de fluidos pesados

Denomina-se por **fluidos pesados** os fluidos submetidos a forças exteriores (de carácter estático) apenas devidas à **ação da gravidade** (Pinho et al., 2011).

Assim:

$$G_1 = 0, G_2 = 0, G_3 = -g$$

Em que g é a aceleração gravítica.

Da equação fundamental da estática:

$$\frac{1}{\rho} dp = -g dz \quad \text{ou} \quad dp + \gamma dz = 0$$

Para fluidos pesados a **temperatura constante**:

$$\gamma dz = 0 \Rightarrow dz = 0 \Rightarrow z = \text{constante}$$

No caso de fluidos pesados, as **superfícies equipotenciais** são horizontais, ou seja, são **superfícies de nível** (Pinho et al., 2011).

3.1.4 Equilíbrio de líquidos pesados

Para **líquidos pesados** ($\gamma = \text{cte.}$) e integrando:

$$dp + \gamma dz = 0$$

Entre dois pontos de cotas z_0 e z_1 e pressões p_0 e p_1 , temos:

$$p_1 - p_0 = \gamma(z_0 - z_1)$$

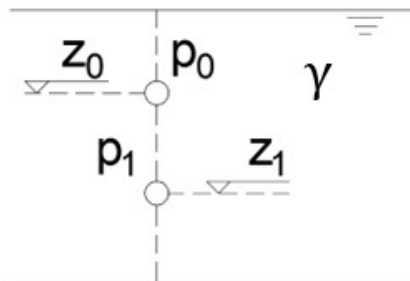


Figura 38 – Equilíbrio de líquidos pesados (adaptado de Pinho et al., 2011).

Princípio Fundamental da Hidrostática

A diferença de pressões entre dois pontos de uma massa líquida pesada em repouso é igual ao peso de uma coluna de líquido cuja base tem uma área unitária e cuja altura é a diferença de nível entre os dois pontos considerados (Pinho et al., 2011).

O integral de $dp + \gamma dz = 0$ pode escrever-se $p + \gamma z = \text{cte.}$ ou ainda:

$$z + \frac{p}{\gamma} = h = \text{constante}$$

Em que:

z é a cota topográfica do ponto considerado [L];

p/γ é a altura piezométrica [L];

h é a cota piezométrica [L].

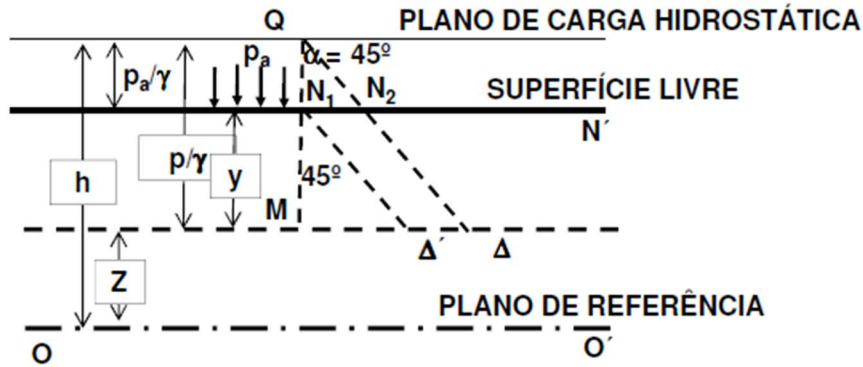


Figura 39 – Princípio fundamental da Hidrostática (Pinho et al., 2011).

$$\frac{p}{\gamma} = y + \frac{p_a (\times \gamma)}{\gamma} \implies p = p_a + \gamma y$$

M é o ponto à profundidade y com pressão p :

$$p = \gamma(h - Z) = \gamma \overline{MQ}$$

3.1.5 Pressões absolutas e pressões efetivas

A **pressão absoluta** é a pressão total de um certo ponto ou lugar, ou seja, é o somatório de todas as contribuições para o aumento da mesma. A sua determinação depende de diversos fatores que podem provocar um aumento de pressão no sistema (Pinho et al., 2011).

A **pressão efetiva** é a pressão que um fluido exerce em um ponto, excedente a pressão atmosférica (Pinho et al., 2011).

$$p = p_a + \gamma \cdot h$$

Em que:

p é a pressão absoluta;

p_a é a pressão atmosférica;

$\gamma \cdot h$ é a pressão efetiva.

Na Hidrostática (como na Hidrodinâmica) as pressões são normalmente consideradas efetivas (Pinho et al., 2011).

3.1.6 Equilíbrio de líquidos com densidades diferentes

Se uma massa líquida for constituída por vários líquidos, não miscíveis, de pesos volúmicos diferentes, eles sobrepõem-se por ordem de densidades decrescentes (Figura 40) (Pinho et al., 2011).

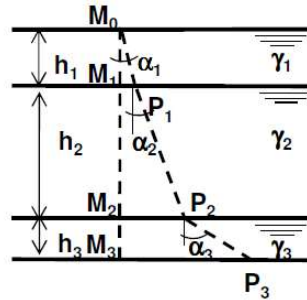


Figura 40 – Massa líquida constituída por líquidos de densidades diferentes (Pinho et al., 2011).

$$p_1 = \gamma_1 h_1; \alpha_1 = K_1(\gamma_1)$$

$$p_2 - p_1 = \gamma_2 h_2; \alpha_2 = K_2(\gamma_2)$$

$$p_3 - p_2 = \gamma_3 h_3; \alpha_3 = K_3(\gamma_3)$$

$$\text{com } \alpha_3 > \alpha_2 > \alpha_1$$

$$p_3 = \gamma_1 h_1 + \gamma_2 h_2 + \gamma_3 h_3$$

Para n líquidos, com pesos volúmicos $\gamma_i (i = 1, 2, \dots, N)$, em repouso constituindo camadas de espessura h_i pode escrever-se:

$$p_n = \sum_{i=1}^n \gamma_i h_i$$

3.1.7 Equilíbrio de líquidos submetidos a campos de forças não exclusivamente gravíticas

Equilíbrio de líquido submetido a uma aceleração constante

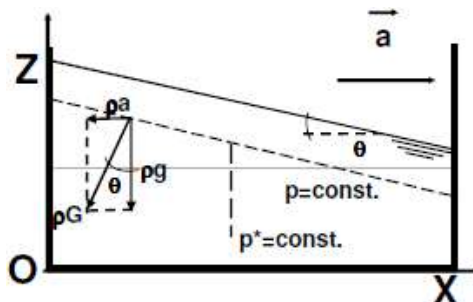


Figura 41 – Líquido submetido a uma aceleração constante (Pinho et al., 2011).

Em que:

\vec{a} é a aceleração constante e horizontal;

$\rho \vec{G}$ é a resultante das forças por unidade de volume $\begin{cases} \rho \vec{g} \text{ (peso)} \\ \rho \vec{a} \text{ (inércia)} \end{cases}$;

p^* é a pressão dinâmica.

De:

$$\vec{a} = \vec{G} - \frac{1}{\rho} \text{grad } p$$

Projetando sobre **OX** e **OZ**:

$$\begin{cases} -\rho a - \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \\ -\rho g - \frac{\partial p}{\partial z} = 0 \end{cases} \quad \text{somando} \quad \begin{cases} -\rho a dx - \rho g dz = \frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial z} dz \\ -\rho a dx - \rho g dz = dp \end{cases}$$

Para **superfícies equipotenciais** coincidentes com as **isobáricas** (Pinho et al., 2011):

$$dp = 0 \text{ (} p = \text{constante)} \Rightarrow -\rho a dx - \rho g dz = 0$$

Integrando:

$$z = -\frac{a}{g}x + \text{const.}$$

As superfícies $p=\text{constante}$ são normais ao vetor \vec{G} e são planos inclinados fazendo um ângulo θ com a horizontal: $\tan \theta = -\frac{a}{g}$. As superfícies $p^* = \text{cte.}$ são normais ao vetor \vec{a} .

Equilíbrio de um líquido num vaso animado de velocidade angular constante

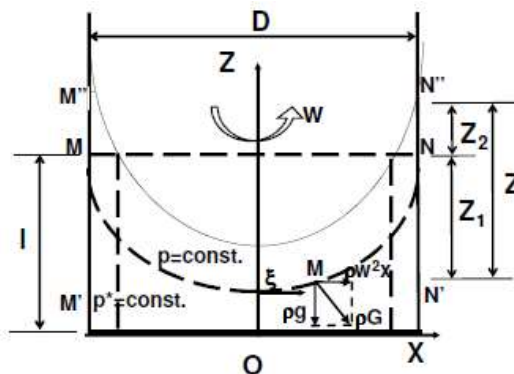


Figura 42 – Equilíbrio de um líquido num vaso animado de velocidade angular constante (Pinho et al., 2011).

Em que w é a velocidade constante em movimento circular uniforme em torno de Z .

Equilíbrio de Forças - a partícula M situada na superfície livre está em repouso e submetida à força $\rho \vec{G}$ por unidade de volume, equilibrada pelo seu peso (força vertical, $-\rho g$) e pela força de inércia de componente horizontal (força centrífuga, $\rho w^2 r$) (Pinho et al., 2011).

Projetando a equação de equilíbrio sobre OX e OZ temos:

$$\begin{cases} \rho w^2 r - \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \\ -\rho g - \frac{\partial p}{\partial z} = 0 \end{cases} \Rightarrow dp = \rho w^2 r dx - \rho g dz$$

Integrando:

$$p = \frac{\rho w^2}{2} x^2 - \rho g z + \text{const.}$$

As **isobáricas** $p = \text{cte.}$ têm por equação:

$$w^2 \frac{x^2}{2} - g z = \text{const.}$$

As **superfícies isobáricas** são paraboloides de revolução de eixo OZ , em cada ponto, normais ao vetor \vec{G} , resultante das forças gravíticas com as forças de inércia (Pinho et al., 2011).

Referindo-se a equação da parábola aos eixos OZ e $O\xi//OX$ e com origem no vértice da parábola:

$$w^2 \frac{x^2}{2} - g z = 0 \Rightarrow z = \frac{w^2 \xi^2}{2g} = \frac{v^2}{2g}$$

Sendo a velocidade no ponto considerado $v = w\xi$.

A **ordenada de um ponto qualquer** relativamente ao plano que contem o vértice do paraboloide é igual à altura cinética ($v^2/2g$), correspondente à velocidade v (Pinho et al., 2011):

$$h_c = \frac{v^2}{2g}$$

Em **repouso**:

$$\text{volume } M'N'M''N'' \sim \text{água: } \pi D^2/4Z_1; \text{ ar: } \pi D^2/4Z_2$$

Em **movimento**:

$$\text{volume ar} \sim 1/2 \pi D^2 / 4Z = \pi D^2 (Z_1 + Z_2) / 2$$

Como os volumes de ar são iguais:

$$\pi D^2 / 4Z_2 = \pi D^2 (Z_1 + Z_2) / 2 \Rightarrow Z_2 = (Z_1 + Z_2) / 2 \quad \text{ou} \quad Z_1 = Z_2$$

Velocidade angular w_0 para a qual o vértice da parábola atinge o fundo do reservatório:

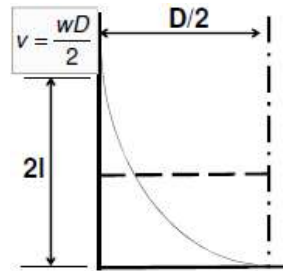


Figura 43 – Velocidade angular w_0 para a qual o vértice da parábola atinge o fundo do reservatório (Pinho et al., 2011).

$$2I = \frac{v^2}{2g} = \frac{w_0^2 D^2}{8g} \Rightarrow w_0 = \frac{4\sqrt{gI}}{D}$$

Em que I é a altura da água em repouso.

Para $w > w_0$ fica a seco no fundo do reservatório uma área circular com raio crescente com w (Pinho et al., 2011).

As superfícies $p^* = \text{cte.}$ são cilindros de revolução com eixo coincidente com o dos paraboloides, cuja equação é (Pinho et al., 2011):

$$\rho \frac{w^2 x^2}{2} = \text{cte.}$$

3.2 Manómetros de líquidos

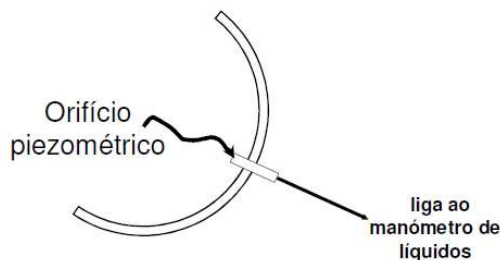


Figura 44 – Ligação (Pinho et al., 2011).

Piezómetros verticais

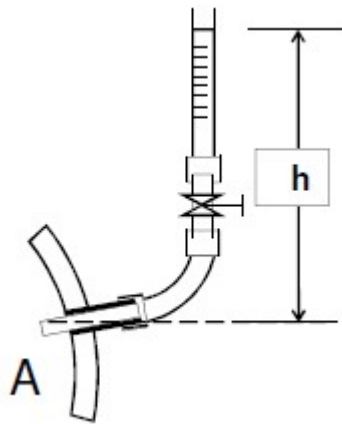


Figura 45 – Piezómetros verticais (Pinho et al., 2011).

Pressão efetiva em A:

$$p = \gamma h$$

Em que:

γ é o peso específico do líquido (cte.);

h é o desnível entre a superfície livre do líquido do manómetro e o ponto A.

Piezómetros inclinados

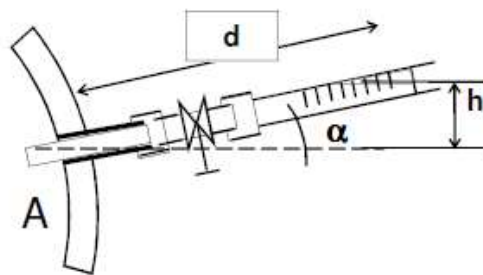


Figura 46 – Piezómetro inclinado (Pinho et al., 2011).

$$\text{Para } h \ll d: d = \frac{h}{\sin \alpha}$$

$$p = \gamma h = \gamma d \sin \alpha$$

Manómetros de tubo em U

Os **manómetros de tubo em U** utilizam-se para medição de pressões efetivas muito elevadas ou muito baixas (Pinho et al., 2011).

Para pressões efetivas elevadas:

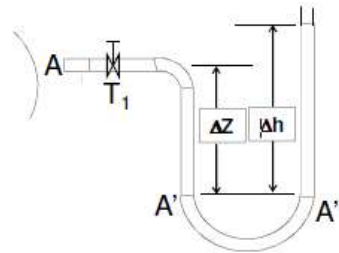


Figura 47 – Pressões efetivas elevadas (Pinho et al., 2011).

$$\gamma_m > \gamma \wedge p_{A'} = p_{A''} \Rightarrow p_A + \gamma \Delta Z = \gamma_m \Delta h \Rightarrow p_A = \gamma_m \Delta h - \gamma \Delta Z$$

Para pressões efetivas baixas:

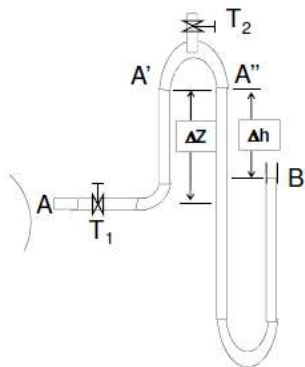


Figura 48 – Pressões efetivas baixas (Pinho et al., 2011).

$$\gamma_m < \gamma \wedge p_{A'} = p_{A''} \Rightarrow p_A - \gamma \Delta Z = -\gamma_m \Delta h \Rightarrow p_A = \gamma \Delta Z - \gamma_m \Delta h$$

Para manómetros **com vários líquidos manométricos não miscíveis** utiliza-se a **metodologia adotada** (Pinho et al., 2011).

Manómetros diferenciais

$\gamma_m > \gamma$

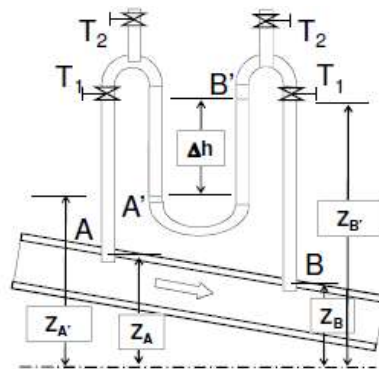


Figura 49 – Manómetros diferenciais, $\gamma_m > \gamma$ (Pinho et al., 2011).

Na figura anterior T_1 e T_2 representam, respetivamente, válvulas de secionamento e válvulas de purga (Pinho et al., 2011).

$$A \rightarrow A': \quad Z_A + \frac{p_A}{\gamma} = Z_{A'} + \frac{p_{A'}}{\gamma} \quad (1)$$

$$B \rightarrow B': \quad Z_B + \frac{p_B}{\gamma} = Z_{B'} + \frac{p_{B'}}{\gamma} \quad (2)$$

$$A' \rightarrow B': \quad Z_{A'} + \frac{p_{A'}}{\gamma_m} = Z_{B'} + \frac{p_{B'}}{\gamma_m} \Rightarrow p_{A'} - p_{B'} = \gamma_m(Z_{B'} - Z_{A'}) \quad (3)$$

$$(1) - (2): \left(Z_A + \frac{p_A}{\gamma} \right) - \left(Z_B + \frac{p_B}{\gamma} \right) = \frac{p_{A'} - p_{B'}}{\gamma} + Z_{A'} - Z_{B'} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{subst. (3):} \left(Z_A + \frac{p_A}{\gamma} \right) - \left(Z_B + \frac{p_B}{\gamma} \right) = \frac{\gamma_m - \gamma}{\gamma} (Z_{B'} - Z_{A'}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p_A - p_B = (\gamma_m - \gamma)\Delta h - \gamma(Z_A - Z_B) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p_A - p_B = (\gamma_m - \gamma)\Delta h$$

$\gamma_m < \gamma$

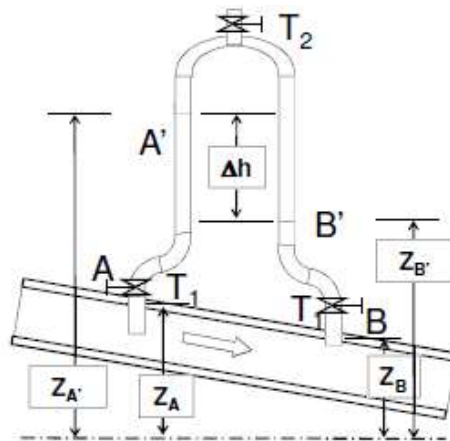


Figura 50 – Manómetros diferenciais, $\gamma_m < \gamma$ (Pinho et al., 2011).

Na figura anterior T_1 e T_2 representam, respetivamente, válvulas de secionamento e válvulas de purga (Pinho et al., 2011).

Reservatórios

$$p_A - p_B = (\gamma - \gamma_m)\Delta h - \gamma(Z_A - Z_B) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p_A - p_B = (\gamma - \gamma_m)\Delta h$$

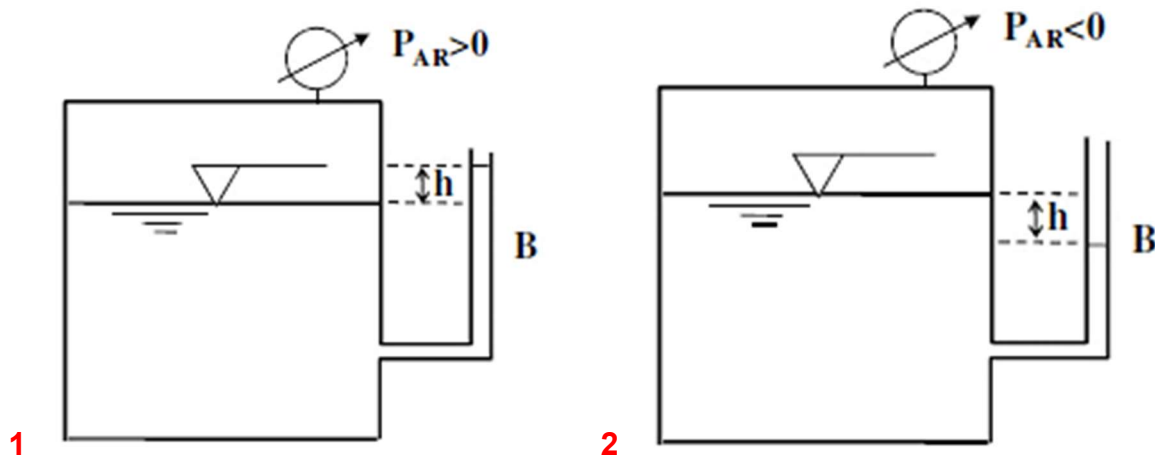


Figura 51 – Manómetros em reservatórios (Pinho et al., 2011).

$$h = \frac{p_{AR}}{\gamma} \text{ para } p_{AR} > 0 \text{ (Fig. 14.1)}$$

ou

$$p_{AR} > 0 \text{ (Fig. 14.2)}$$

3.3 Impulsões hidrostáticas em superfícies

3.3.1 Conceito

Chama-se **impulsão hidrostática** à resultante das forças de pressão que um fluido exerce sobre uma superfície com que esteja em contacto (quando exista essa resultante) (Vasconcelos, 2005).

Designando por força elementar de pressão a força de pressão sobre uma área elementar (**dA**) em que a pressão se considera constante (Vasconcelos, 2005).

As forças de pressão têm resultante única se as forças elementares são concorrentes ou paralelas, o que acontece no caso de superfícies planas ou superfícies curvas cilíndricas ou esféricas (Vasconcelos, 2005).

Tratando-se de uma força, a impulsão hidrostática só fica bem definida quando determinados: o módulo, a direção, o sentido e o ponto de aplicação. Ao ponto de aplicação da impulsão chama-se centro de impulsão (Vasconcelos, 2005).

3.3.2 Impulsões hidrostáticas em superfícies planas

Impulsão hidrostática sobre um elemento de superfície plana (Pinho et al., 2011):

$$dF_1 = (p_a + \rho gZ) dS \wedge dF_2 = p_a dS$$

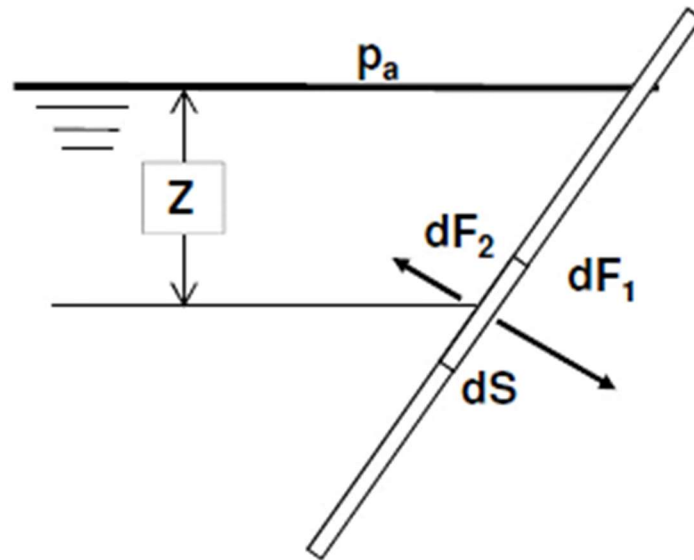


Figura 52 – Impulsão hidrostática sobre um elemento de superfície plana (Pinho et al., 2011).

Resultante:

$$dF = dF_1 - dF_2 = \gamma Z dS$$

Considerando uma superfície plana (**S**) mergulhada num líquido fazendo um ângulo θ com a horizontal (superfície livre) (Pinho et al., 2011):

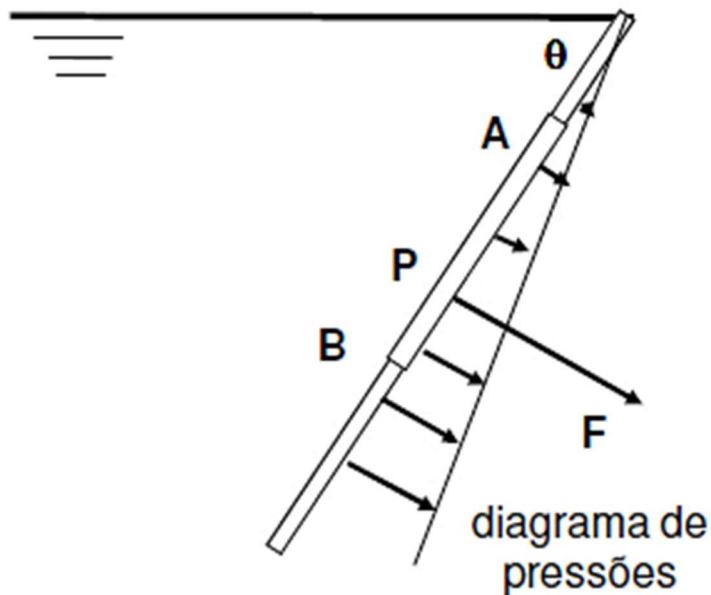


Figura 53 – Superfície plana mergulhada num líquido (Pinho et al., 2011).

Em que:

F é a resultante das pressões;

P é o centro de pressões (ponto de aplicação de **F**).

Metodologia

Pretende determinar-se o **valor de F** e a **posição do ponto de aplicação de F (Z_P)** (Pinho et al., 2011):

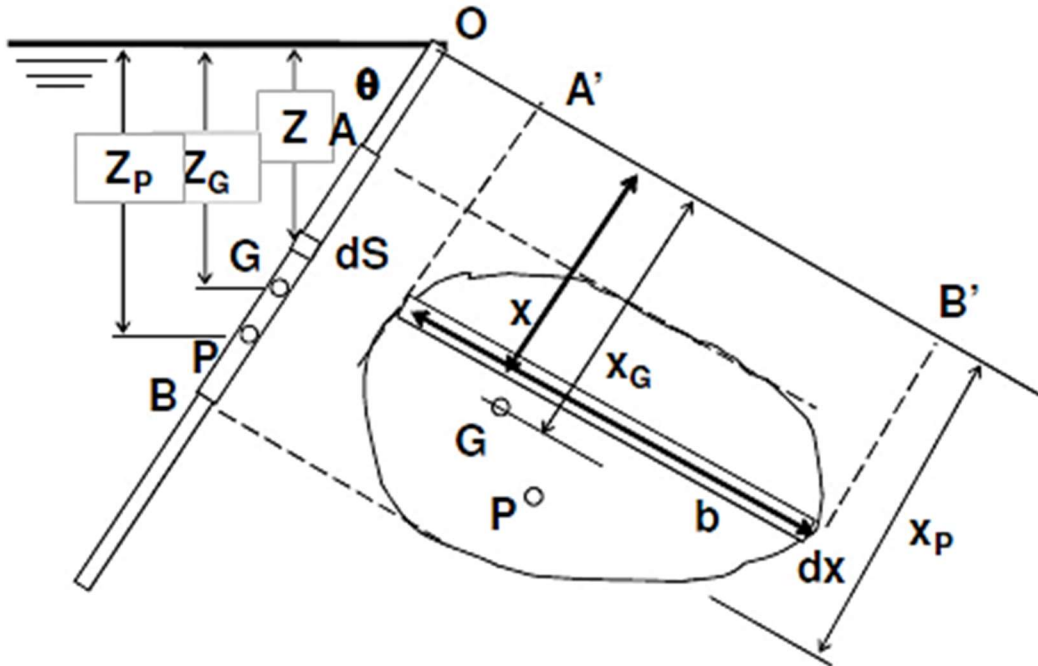


Figura 54 – Exemplo de impulsão hidrostática numa superfície plana (Pinho et al., 2011).

1. Valor de F:

Em dS pode supor-se a pressão hidrostática constante e igual a γZ .

Sendo a resultante:

$$dF = \gamma Z dS = \gamma Z b dx \quad \text{ou} \quad dF = \gamma b x dx \sin \theta$$

A resultante em toda a superfície S :

$$F = \gamma \sin \theta \int b x dx$$

Sabendo que momento estático de S em relação a OB' :

$$\int b x dx = Sx_G = S \frac{Z_G}{\sin \theta}$$

Então:

$$F = \gamma \sin \theta S \frac{Z_G}{\sin \theta} \Rightarrow F = \gamma S Z_G$$

2. Valor de Z_P :

O momento da resultante é igual à soma dos momentos das componentes (em relação a OB') (Pinho et al., 2011):

$$F_{x_P} = \gamma \sin \theta \int b x^2 dx$$

$$\begin{cases} F = \gamma S Z_G \\ x_P = \frac{Z_P}{\sin \theta} \end{cases} \Rightarrow \gamma S Z_G x_P = \gamma \sin \theta \int b x^2 dx \Rightarrow S Z_G Z_P = \sin^2 \theta \int b x^2 dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Z_P = \frac{\sin^2 \theta \int b x^2 dx}{S Z_G}$$

Sabendo que o momento de inércia I' de S em relação a OB' :

$$\int b x^2 dx = I'$$

Logo:

$$Z_P = \frac{I' \sin^2 \theta}{S Z_G}$$

Para superfície S perpendicular à superfície livre ($\theta = \pi/2$, $\sin^2 \theta = 1$):

$$Z_P = \frac{I}{S Z_G}$$

É importante notar que o centro de pressões fica abaixo do centro de gravidade:

$$Z_P = \frac{I' \sin^2 \theta}{S Z_G} \Rightarrow x_P \sin \theta = \frac{I' \sin^2 \theta}{S x_G \sin \theta} \Rightarrow x_P = \frac{I'}{S x_G}$$

Pelo **Teorema de Huyghens**:

$$I' = I_G + S x_G^2$$

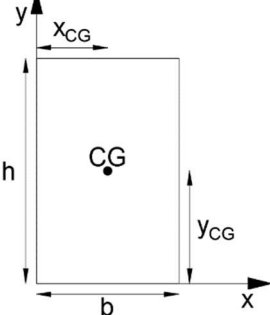
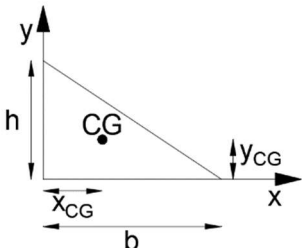
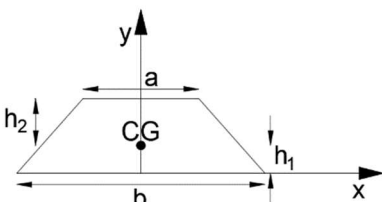
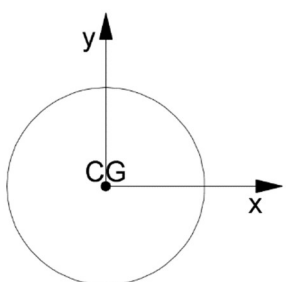
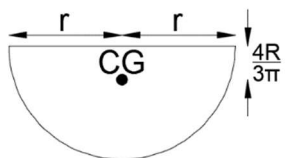
Logo:

$$x_P = x_G + \frac{I_G}{S x_G} > 0$$

$$x_P > x_G$$

Centros de gravidade e momentos de inércia

Tabela 6 – Centros de gravidade e momentos de inércia para superfícies planas comuns (Gaspar, 2005).

Superfície plana	Centro	Inércia
Retângulo 	$x_{CG} = \frac{b}{2}$ $y_{CG} = \frac{h}{2}$	$I_{x_{CG}} = \frac{bh^3}{12}$
Triângulo 	$x_{CG} = \frac{b}{3}$ $y_{CG} = \frac{h}{3}$	$I_{x_{CG}} = \frac{bh^3}{36}$
Trapézio 	$h_2 = \frac{h}{3} \cdot \frac{a + 2b}{a + b}$ $h_1 = \frac{h}{3} \cdot \frac{2a + b}{a + b}$	$I_{x_{CG}} = \frac{h^3(a^2 + 4ab + b^2)}{36(a + b)}$
Círculo 	$x_{CG} = 0$ $y_{CG} = 0$	$I_{x_{CG}} = \frac{\pi r^4}{4}$
Semicírculo 	$y_{CG} = \frac{4r}{3\pi}$	$I_{x_{CG}} = 0,1098 r^4$

3.3.3 Impulsões hidrostáticas em superfícies curvas

Quando a superfície **não é plana** as forças elementares não são paralelas e o sistema de forças **não é equivalente** a uma força única. Pode, no entanto, definir-se as componentes da resultante nos eixos coordenados (Pinho et al., 2011):

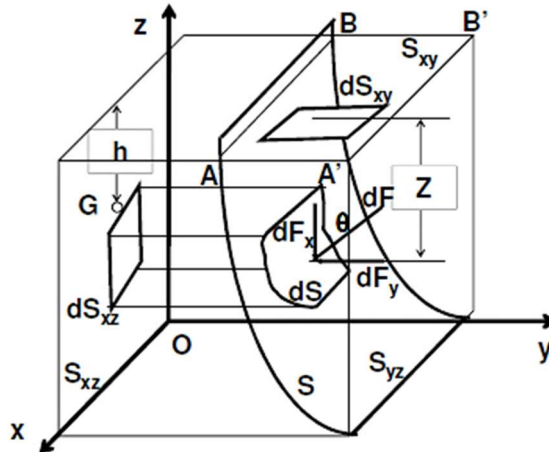


Figura 55 – Exemplo de superfície curva (Pinho et al., 2011).

Em que θ é o ângulo de dF com OZ .

Força de pressão exercida na área elementar dS :

$$dF = p \, dS$$

Sendo Z a profundidade da área elementar dS :

$$dF = \rho g z \, dS \rightarrow \begin{cases} \text{Componente horizontal: } dF_y = \rho g z \, dS \sin \theta \\ \text{Componente vertical: } dF_z = \rho g z \, dS \cos \theta \end{cases}$$

Componente horizontal

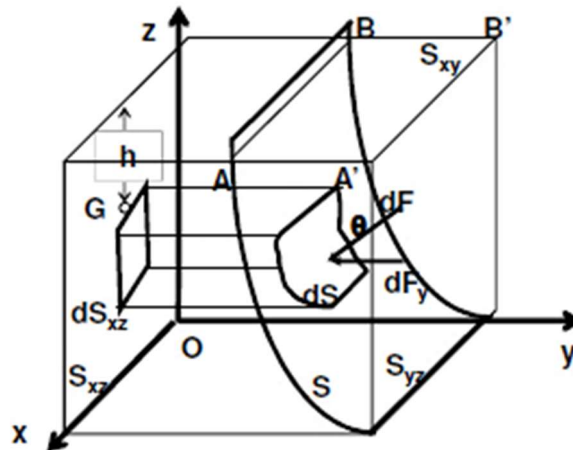


Figura 56 – Componente horizontal da força de pressão (Pinho et al., 2011).

Como $dS \sin \theta$ é a projeção dS_{XZ} da superfície dS sobre o plano OXZ (Pinho et al., 2011),

$$dF_y = \rho g z dS_{XZ}$$

Alargando a toda a superfície S :

$$F_y = \rho g \int_S z dS_{XZ}$$

Sendo h a profundidade do centro de gravidade de S_{XZ} :

$$F_y = \rho g h S_{XZ}$$

Em que F_y é a resultante hidrostática que se exerce sobre a projeção S_{XZ} da superfície sobre um plano normal a OY .

Componente vertical

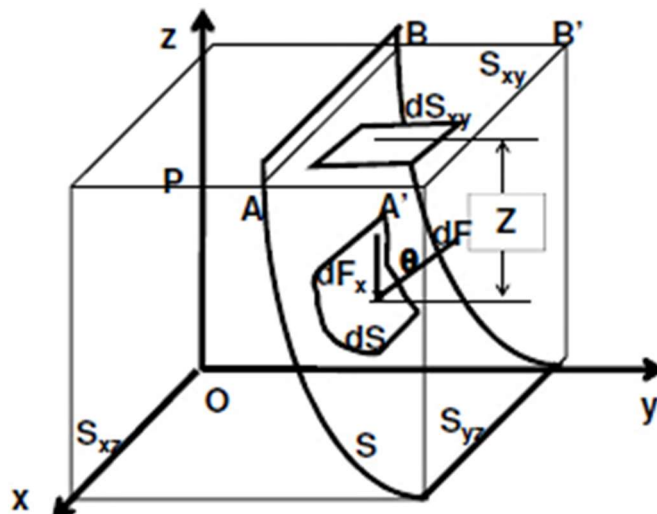


Figura 57 – Componente vertical da força de pressão (Pinho et al., 2011).

Como $dS \cos \theta$ é a projeção dS_{XY} da superfície dS sobre o plano OXY (Pinho et al., 2011),

$$dF_z = \rho g z dS_{XY}$$

Alargando a toda a superfície S :

$$F_z = \rho g \int_S z dS_{XY}$$

Sendo h a profundidade do centro de gravidade de S_{XY} :

$$F_z = \rho g h S_{XY}$$

Em que F_z é igual ao peso do líquido que repousa sobre a superfície curva.

3.3.4 Impulsões hidrostáticas em superfícies fechadas

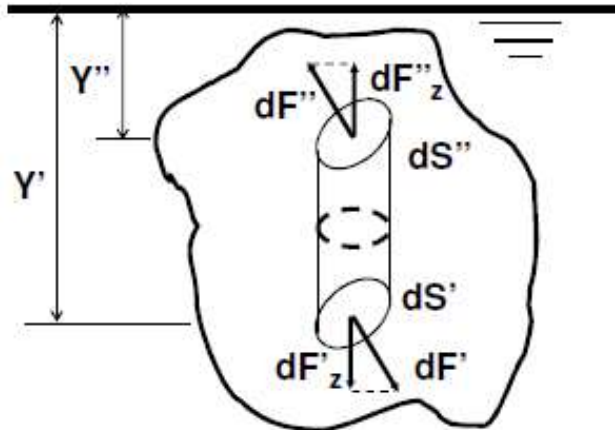


Figura 58 – Impulsões hidrostáticas em superfícies fechadas (Pinho et al., 2011).

$$\begin{cases} dF' = \gamma y' dS' \\ dF'' = \gamma y'' dS'' \end{cases} \xrightarrow{\text{Em projeção vertical}} \begin{cases} dF'_z = \gamma y' dS \\ dF''_z = \gamma y'' dS \end{cases}$$

Subtraindo ordenadamente:

$$dF'_z - dF''_z = \gamma(y' - y'') dS$$

Em que $\gamma(y' - y'') dS$ é o peso do líquido no interior do cilindro elementar.

Componente vertical da resultante F_z das forças de pressão (Pinho et al., 2011):

$$F_z = \int_S (dF'_z - dF''_z) = \text{peso total do líquido}$$

A resultante das forças de pressão no interior de uma superfície fechada é vertical e igual ao peso do líquido contido no seu interior. **De outra forma:** um sólido mergulhando num líquido recebe deste uma impulsão de baixo para cima, igual ao peso do volume de líquido deslocado, mais conhecido como o **Princípio de Arquimedes** (Pinho et al., 2011).

3.3.5 Pressões uniformes em toda a massa líquida

Seja S uma superfície curva que limita um volume de fluido não pesado à pressão p (Pinho et al., 2011):

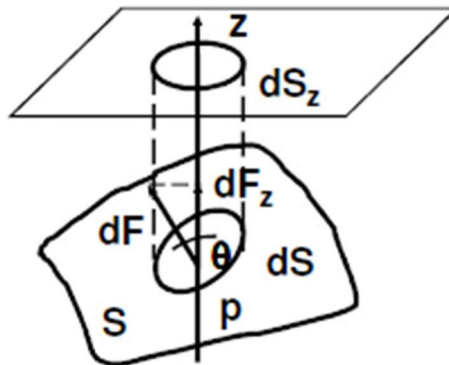


Figura 59 – Pressões uniformes em toda a massa líquida (Pinho et al., 2011).

Sobre **dS** atua uma força:

$$dF = p \, dS$$

Componente segundo **OZ**:

$$dF_z = p \, dS \, \cos \theta = p \, dS_z$$

Integrando:

$$F_z = p \int_S dS_z$$

A resultante **F_z** das pressões segundo a direção **OZ** das forças de pressão uniforme, que se exercem sobre uma superfície curva é igual à força de pressão uniforme que atua sobre a projeção da superfície sobre um plano perpendicular a **OZ**. **Nota:** esta conclusão é válida para uma outra direção qualquer (Pinho et al., 2011).

Aplicação prática: dimensionamento de um corpo cilíndrico submetido a uma pressão uniforme (caldeira ou conduta sobre pressão), cf. Figura 60 (Pinho et al., 2011).

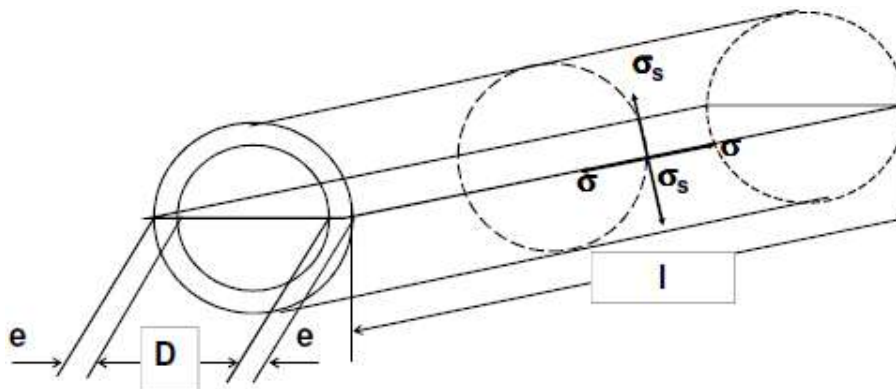


Figura 60 – Corpo cilíndrico submetido a uma pressão uniforme (caldeira ou conduta sobre pressão) (Pinho et al., 2011).

Fazendo um estudo para a parte superior (cilindro cortado longitudinalmente em duas partes iguais) (Pinho et al., 2011):

1. Resultante das forças de pressão no sentido transversal

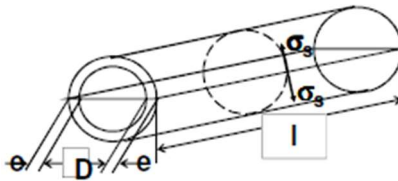


Figura 61 – Resultante das forças de pressão no sentido transversal (Pinho et al., 2011).

$$F_p = D \cdot l \cdot p$$

Em que $D \cdot l$ é a área projeção da superfície lateral no plano diametral.

A esta força resiste a chapa com duas secções de área $e \cdot l$ e se o material estiver a trabalhar a uma tensão σ_s (Pinho et al., 2011):

$$Dlp = 2el\sigma_s \Rightarrow e = \frac{pD}{2\sigma_s} \Rightarrow \sigma_s = \frac{pD}{2e}$$

2. Resultante das forças de pressão no sentido longitudinal

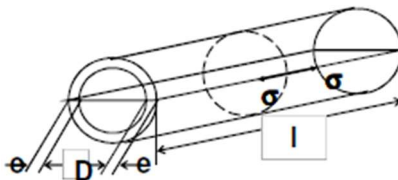


Figura 62 – Resultante das forças de pressão no sentido longitudinal (Pinho et al., 2011).

$$F_p = p \frac{\pi D^2}{4}$$

$$p \frac{\pi D^2}{4} = \pi D e \sigma \Rightarrow e = \frac{pD}{4\sigma} \Rightarrow \sigma = \frac{pD}{4e} = \frac{\sigma_s}{2}$$

3.4 Princípio de Pascal

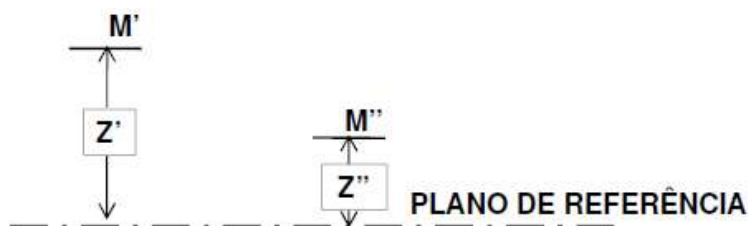


Figura 63 – Princípio de Pascal (Pinho et al., 2011).

Admitindo um líquido em equilíbrio (Pinho et al., 2011):

$$p'' - p' = -\gamma(z'' - z')$$

Se variar a pressão, sem perturbar o equilíbrio, em M' de $\Delta p'$, então em M'' a pressão sofrerá um acréscimo de $\Delta p''$. Como o **líquido é incompressível** (Pinho et al., 2011):

$$(p'' + \Delta p'') - (p' + \Delta p') = -\gamma(z'' - z') \Rightarrow \Delta p' = \Delta p''$$

Princípio de Pascal: Numa massa líquida em equilíbrio, as variações de pressão transmitem-se integralmente a todos os pontos (Pinho et al., 2011).

Aplicação prática: Prensa hidráulica (Figura 64) (Pinho et al., 2011).

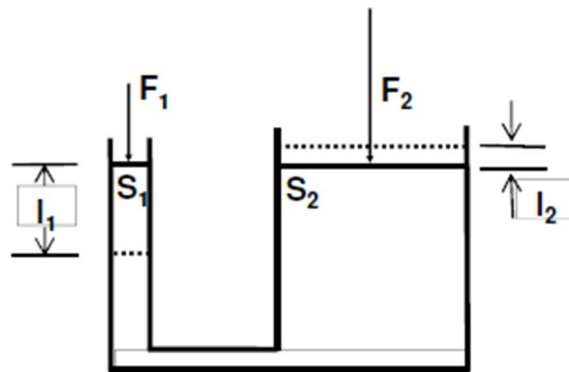


Figura 64 – Prensa hidráulica (Pinho et al., 2011).

$$\begin{cases} F_1 = pS_1 \\ F_2 = pS_2 \end{cases} \wedge S_1 l_1 = S_2 l_2 \Rightarrow \frac{F_1}{F_2} = \frac{S_1}{S_2} = \frac{l_2}{l_1} \quad \therefore \underbrace{F_1 l_1 = F_2 l_2}_{\text{Expressão que traduz a conservação do trabalho}}$$

3.5 Equilíbrio de corpos flutuantes

3.5.1 Impulsão. Princípio de Arquimedes

Um corpo flutuante apresenta, necessariamente, o peso inferior ao peso do volume do líquido que pode deslocar. Portanto, para que o corpo flutue a sua massa volúmica tem que ser inferior à do líquido (Mata-Lima, 2010).

Nesse caso, o peso total do corpo vai ser igual ao produto do volume submerso pelo peso volúmico (ou específico) do corpo. A porção submersa do corpo é designada, na literatura brasileira, por carena ou querena (Mata-Lima, 2010).

É ainda comum designar-se o centro de gravidade da parte submersa por **centro flutuabilidade** (ou carena) que corresponde ao ponto de aplicação da impulsão (Mata-Lima, 2010).

O **Princípio de Arquimedes** foi enunciado pela primeira vez pelo sábio grego Arquimedes, e pode ser enunciado como: “*Todo corpo mergulhado num fluido em repouso sofre, por parte do fluido, uma força vertical para cima (I), cuja intensidade é igual ao peso do fluido deslocado pelo corpo (P).*”, cf. Figura 65 (UALG, 2018)

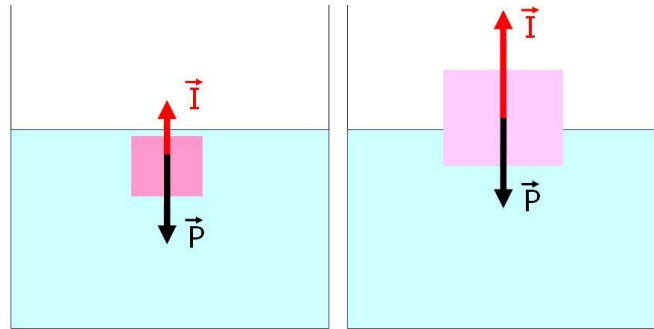


Figura 65 – Impulsão (<http://blogcfqmariana.blogspot.pt/2015/>).

Se denotarmos por:

m , a massa do corpo imerso;

V , o volume do corpo imerso;

ρ , a densidade ou massa específica do fluido;

g , a aceleração gravítica;

I , a força de impulsão.

O princípio de Arquimedes resume-se a (UALG, 2018):

$$I = gV\rho$$

Como o peso do corpo é dado pelo produto entre a massa e a aceleração gravítica ($m \cdot g$) podemos enunciar o seguinte critério (UALG, 2018):

- $V\rho < m$, o corpo afunda;
- $V\rho = m$, o corpo fica em **equilíbrio metaestável**;
- $V\rho > m$, o corpo flutua.

Quando um corpo mais denso que um líquido é totalmente imerso nesse líquido, observamos que o valor do seu peso, dentro desse líquido, é aparentemente menor que no ar. A diferença entre o valor do peso real e do peso aparente corresponde à impulsão exercida pelo líquido (UALG, 2018):

$$\text{Peso Aparente} = \text{Peso real} - \text{Impulsão}$$

Se a massa do corpo imerso for expressa como o produto da densidade média (ρ_c) com o volume (V), então o critério de Arquimedes assume a seguinte forma (UALG, 2018):

- $\rho < \rho_c$, o corpo afunda;
- $\rho = \rho_c$, o corpo fica em **equilíbrio metaestável**;
- $\rho > \rho_c$, o corpo flutua.

3.5.2 Definições. Teoremas fundamentais

Estado metaestável

Um **estado metaestável** - ou de forma equivalente **estado metastável** - corresponde a qualquer estado do sistema diferente do estado de equilíbrio mais estável - diferente do equilíbrio termodinâmico - que tenha consigo associado uma restrição que impeça a transição imediata deste para o estado mais estável sem alguma perturbação significativa de origem geralmente externa ao sistema. O sistema pode assim permanecer por longos períodos de tempo no estado metaestável sem transitar para o estado mais estável. Contudo, perante a influência externa - ou interna adequada - o sistema irá transitar para o estado mais estável (Eisberg & Resnick, 1979):

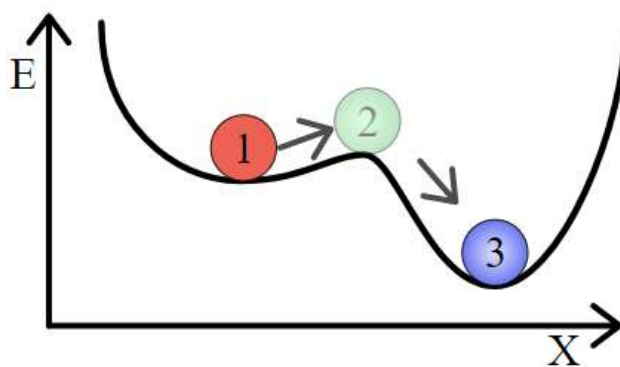


Figura 66 – Representação clássica unidimensional de um sistema com um estado metaestável (1), um estado instável (2) e um estado estável (3) (<https://commons.wikimedia.org/>).

A bola é assumida estática em cada um dos pontos indicados. No eixo vertical tem-se a altura, diretamente relacionada à energia potencial do sistema - que corresponde, no caso representado, à energia total do sistema - e na horizontal, a posição espacial da bola ao longo da rampa (Eisberg & Resnick, 1979).

Pressão Hidrostática e Impulsão

Pressão é definida como força por unidade de área. A pressão em um ponto situado a uma profundidade **h** de um meio fluido é obtida por meio da **Lei de Stevin** (Martins, 2010):

$$p = p_0 + \rho gh = p_0 + \gamma h$$

Em que:

- p é a pressão no ponto considerado;
- p_0 é a pressão na superfície do fluido;
- ρ é a densidade do fluido;
- g é a aceleração gravítica;
- h é a profundidade de imersão;
- γ é o peso específico do fluido.

A pressão atuante em um ponto corresponde, portanto, ao peso de fluido por unidade de área, localizado acima do referido ponto, somada à **pressão atuante na sua superfície (p_0)**. Tratando-se de **água**, a pressão aumenta cerca de **1 atm (10^5 N/m^2) a cada 10 metros de profundidade** (Martins, 2010).

A pressão hidrostática atuante sobre a superfície de um corpo submerso produz uma força. Quando esta força é integrada ao longo de todo o contorno do corpo resulta na **impulsão (I)** que é a responsável pela flutuação do mesmo (Martins, 2010).

Assim, em princípio, para a determinação da impulsão deve-se integrar o campo de pressão atuante ao longo de sua superfície, ou seja (Martins, 2010):

$$\vec{I} = \oint_S p \, d\vec{S}$$

onde **S** é a superfície do corpo e **p** a pressão atuante no elemento de área **dS**.

Para um paralelepípedo totalmente imerso, o campo de pressões atuante nas suas faces pode ser representado como na Figura 67. A figura apresenta o corpo numa posição tal que duas de suas faces estão paralelas à superfície da água (Martins, 2010).

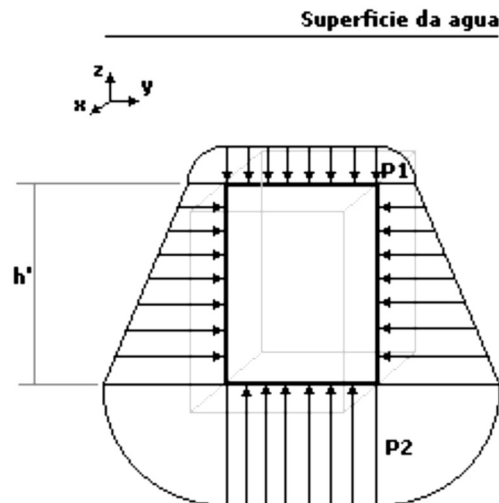


Figura 67 – Paralelepípedo imerso (Martins, 2010).

Os campos de pressão atuante nas faces verticais do paralelepípedo são idênticos uma vez que a pressão atuante em uma dada profundidade é constante. Como consequência, a resultante das forças que atuam no paralelepípedo na direção horizontal é nula (Martins, 2010).

A força resultante na face superior possui módulo igual a $F_s = A_s \cdot p_s$, sendo p_s a pressão atuante na face superior e A_s a área da face. Analogamente, a força resultante na face inferior possui módulo igual a $F_i = A_i \cdot p_i$, onde p_i é a pressão atuante na face inferior e A_i a área da face (Martins, 2010).

Como $p_i = \rho \cdot g \cdot h' + p_s$ e sendo a impulsão a resultante das forças atuantes no corpo devido ao campo de pressão hidrostática, pode-se escrever (Martins, 2010):

$$I = F_i - F_s = (\rho g h' + p_s)A_s - p_s A_s$$

E, portanto:

$$I = \rho g \nabla$$

Onde ∇ representa o volume interno do corpo ou do fluido deslocado.

Desta forma, o módulo da impulsão é igual ao peso do líquido deslocado. Assim, verifica-se que se o espaço ocupado por um corpo em equilíbrio e totalmente submerso num fluido estacionário, for preenchido pelo mesmo fluido, a pressão atuante sobre esta porção do fluido introduzida será exatamente a mesma da atuante no corpo. Como esta porção de fluido permanecerá também em equilíbrio, pode-se afirmar que o seu peso está sendo equilibrado pela impulsão (Martins, 2010).

Este fato conduz ao enunciado do princípio de Arquimedes: “*Todo corpo mergulhado num fluido em repouso sofre, por parte do fluido, uma força vertical para cima (I), cuja intensidade é igual ao peso do fluido deslocado pelo corpo (P).*” (Martins, 2010)

Assim, com base no princípio de Arquimedes, não se faz necessário integrar o campo de pressões sobre um determinado corpo para determinar a impulsão, bastando, para tal, determinar o peso do fluido deslocado (Martins, 2010).

Exercício resolvido 1: quando um corpo é composto de material menos denso que o fluido onde está imerso, pode encontrar uma posição de equilíbrio, flutuando na superfície. Este é o caso dos icebergs (Figura 68) que ficam estáveis flutuando na água quando a porção de volume imersa gera impulsão suficiente para sustentar seu peso (Martins, 2010).

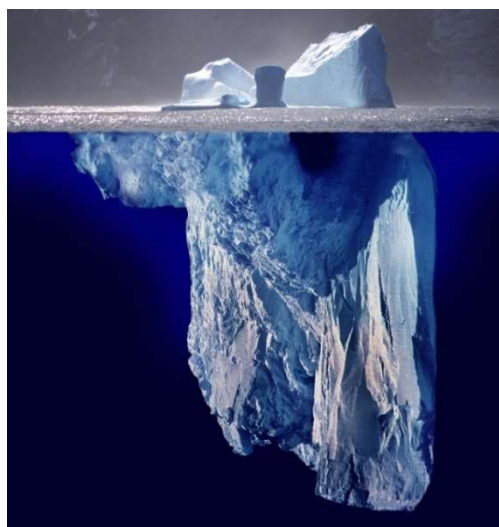


Figura 68 – Fotomontagem mostrando um iceberg inteiro flutuando com maior parte imersa (<https://commons.wikimedia.org/>).

Ou seja, denotando por V_i o volume imerso do iceberg, V_T o volume total e ρ_g a densidade do gelo, a condição de equilíbrio se torna:

$$I = \rho V_i = \rho_g V_T$$

Resolvendo em ordem a V_i :

$$V_i = \frac{\rho_g}{\rho} V_T = \frac{0.92 \text{ g/cm}^3}{1 \text{ g/cm}^3} V_T = 0.92 V_T$$

Assim, obtemos que o volume imerso de um iceberg equivale a 92% do seu volume total, ficando apenas 8% visível fora de água, dando origem à expressão: *“Isto é só a ponta do iceberg!”*.

Exercício resolvido 2: um bloco maciço de ferro de densidade 8.0 g/cm^3 com 80 kg encontra-se no fundo de uma piscina com água de densidade 1.0 g/cm^3 e profundidade 3.0 m . Amarrando-se a esse bloco um fio e, puxando esse fio de fora da água, leva-se o bloco à superfície com velocidade constante. Considerando $g = 10 \text{ m/s}^2$, qual a intensidade da força aplicada ao fio? Considere o peso do fio desprezível (Martins, 2010).

A força no fio será a diferença entre o peso do bloco e o empuxo nele atuante, ou seja:

$$F = P - I$$

Onde $P = m \cdot g = (80 \text{ kg}) \cdot (10 \text{ m/s}^2) = 800 \text{ N}$ e a impulsão calculada por:

$$I = V \cdot \rho_{\text{água}} \cdot g = \frac{m_{\text{bloco}}}{\rho_{\text{bloco}}} \cdot \rho_{\text{água}} \cdot g = \frac{(80 \text{ kg})}{(8.0 \text{ g/cm}^3)} \cdot (1.0 \text{ g/cm}^3) \cdot (10 \text{ m/s}^2) = 100 \text{ N}$$

Assim, $F = 800 \text{ N} - 100 \text{ N} = 700 \text{ N}$.

Deslocamento e Centro de flutuabilidade

Volume de deslocamento (∇) de um corpo é o volume de fluido deslocado pela sua porção submersa e, portanto, está associado à condição de **calado** (distância entre a quilha do navio e a linha de flutuação, ou seja, o espaço ocupado pelo navio dentro da água) em que se encontra. Pode ser utilizando um procedimento numérico de integração (como Regra do Trapézio e Primeira Regra de Simpson) para o cálculo do deslocamento de uma embarcação a partir de sua geometria submersa (Martins, 2010).

Conhecendo-se a densidade do fluido no qual o corpo está flutuando, é possível determinar o **peso do fluido deslocado (P)**, ou seja:

$$P = \rho g \nabla$$

Lembrando-se do Princípio de Arquimedes, o empuxo atuante na porção submersa do corpo será também igual a **P** e, conforme será visto na próxima seção, o peso total do corpo deverá ser também igual a **P** para se ter garantida a flutuabilidade do corpo nesta situação (Martins, 2010).

É comum se referir à condição de carregamento de uma embarcação utilizando-se simplesmente o termo **“deslocamento (Δ)” em substituição ao “volume de deslocamento (∇)”**. Neste caso, estará sendo referenciado o peso da embarcação e não seu volume deslocado (Martins, 2010). Assim sendo:

$$\Delta = \gamma \nabla$$

onde γ é o peso específico do fluido [t/m^3].

Porém, é comum ainda se referir ao deslocamento utilizando-se a unidade de tonelada métrica de massa [ton], onde 1 tonelada métrica de massa é igual à massa de uma tonelada de água doce (Martins, 2010).

Centro de flutuabilidade (B) é um ponto imaginário no centro exato do volume de água deslocado, onde toda a flutuabilidade pode ser considerada. (A força) flutuabilidade sempre atua verticalmente de baixo para cima. Pode ser calculado utilizando um procedimento numérico de integração (como Regra do Trapézio e Primeira Regra de Simpson) ou, para formas simples, consultado tabelas semelhantes à Tabela 6 (Martins, 2010).

Nota: no caso de uma figura composta, o centro de gravidade dessa figura é calculado através da expressão (Martins, 2010):

$$x_{CG} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i A_i}{\sum_{i=1}^n A_i}; \quad y_{CG} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i A_i}{\sum_{i=1}^n A_i}$$

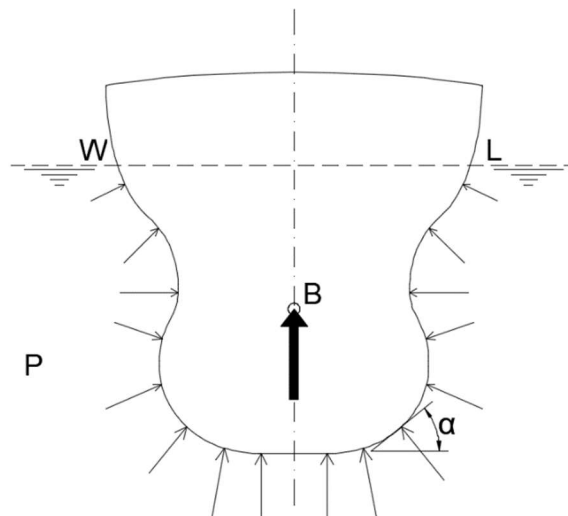


Figura 69 – Centro de flutuabilidade e Impulsão (adaptado de PNA, 1988).

Exercício resolvido 1: Qual o calado e a posição do centro de flutuabilidade de uma embarcação que possui 100 m de comprimento (c), deslocamento $\Delta = 7000$ t e seção transversal uniforme, como representada na Figura 70 (Martins, 2010).

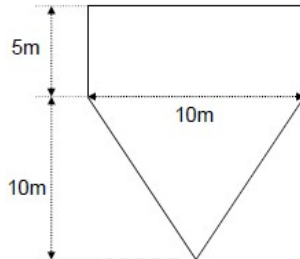


Figura 70 – Seção transversal uniforme de uma embarcação (Martins, 2010).

Para obter o **valor do calado**:

- A massa de água deslocada (Δ) é igual à massa da parte submersa do navio, à qual corresponde um volume de deslocamento:

$$\nabla = \frac{\Delta}{\gamma} = \frac{7000 \text{ t}}{1 \text{ t/m}^3} = 7000 \text{ m}^3$$

- Sabendo que o volume total do navio é:

$$V_t = A \times c = (A_{\text{tri}} + A_{\text{ret}}) \times c = \left(\frac{10^2}{2} + \frac{10 \times 5}{2} \right) \times 100 = 10000 \text{ m}^3$$

- E sabendo que o volume da seção triangular corresponde a $50 \times 100 = 5000 \text{ m}^3$, então o calado está acima desta e tem, desde já, um valor > 10 m. Sobrando 2000 m^3 de água e, através da relação

$$\frac{2000 \text{ m}^3}{50 \times 100 = 5000 \text{ m}^3} = 0.4$$

- Chega-se à conclusão de que o volume submerso da seção retangular corresponde a uma altura submersa igual a $0.4 \times h_{\text{ret}} = 0.4 \times 5 \text{ m} = 2 \text{ m}$.

Assim, o **calado do navio** = $10 + 2 = 12 \text{ m}$.

Para obter o **centro de flutuabilidade** (B_x, B_y):

- Aproveitando a simetria da seção transversal, admite-se que o eixo YY passa no centro de gravidade da mesma, fazendo com que $B_x = 0 \text{ m}$;
- O eixo XX passa na quilha. B_y será determinado tendo em conta a figura composta por um retângulo de seção $2 \times 10 \text{ m}^2$ (tendo em conta o calado) e um triângulo de base 10 m e altura 10 m:

$$B_y = \frac{y_{ret}A_{ret} + y_{tri}A_{tri}}{A_{ret} + A_{tri}} = \frac{(1 + 10) \times (2 \times 10) + (10 - 10/3) \times (10^2/2)}{(2 \times 10) + (10^2/2)} \cong 7.9 \text{ m}$$

O **centro de flutuabilidade** tem como **coordenadas (0, 7.9) m**, em relação à quilha.

3.5.3 Condição de equilíbrio de corpos flutuantes

A condição para um corpo qualquer permanecer em equilíbrio é apresentar o somatório das forças e momentos atuantes nulo, ou seja (Martins, 2010):

$$\begin{cases} \sum F_{\text{externas}} = \vec{0} \\ \sum M_{\text{externos}} = \vec{0} \end{cases}$$

Para um corpo flutuante, a primeira condição impõe que o peso deve ser igual à impulsão, e a segunda que as forças peso e impulsão apresentem a mesma reta como linha de atuação. Esta segunda condição impõe que o centro de flutuabilidade e o centro de gravidade do corpo estejam na mesma vertical, conforme apresentado na Figura 71 (Martins, 2010).

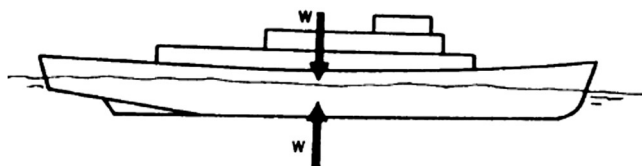


Figura 71 – Condição de equilíbrio longitudinal (Fonte: Lewis, 1988).

Esta **posição de equilíbrio** é dita **estável ou positiva**, se uma pequena perturbação nesta posição de equilíbrio levar ao aparecimento de forças, ou momentos, que tendam a retornar o corpo à posição inicial. Se um pequeno deslocamento leva ao aparecimento de esforços que tendam a afastá-lo da sua posição inicial, o ponto de equilíbrio é dito **instável ou negativo**. Existe ainda o ponto de **equilíbrio indiferente ou neutro**, sendo aquele para o qual o afastamento da posição de equilíbrio sempre leva a uma nova posição de equilíbrio. A Figura 72 apresenta estas três possíveis condições de equilíbrio (Martins, 2010).

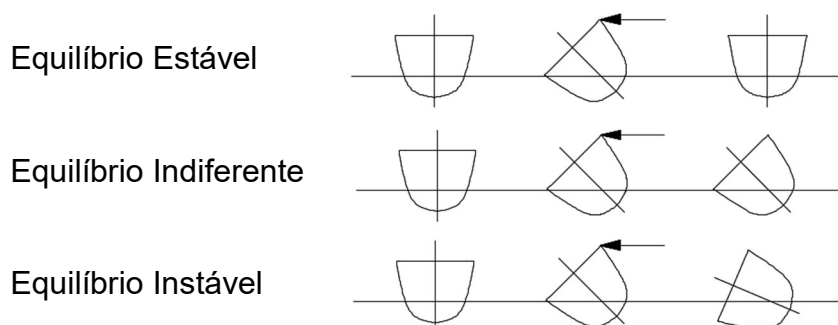


Figura 72 – Condição de equilíbrio (adaptado de Martins, 2010).

A **posição relativa entre o centro de gravidade e o centro de flutuabilidade** define também a **condição de equilíbrio**. Em corpos totalmente submersos, a posição do centro de flutuabilidade é fixa, uma vez que não há variação da geometria submersa quando na presença de uma perturbação da condição de equilíbrio; condição esta definida pela posição do centro de gravidade. Caso o **centro de gravidade esteja acima do centro de flutuabilidade**, a posição de equilíbrio será **instável**; **se estiver abaixo** será **estável** e **se coincidir com o centro de flutuabilidade** o equilíbrio será **indiferente** (Martins, 2010).

A Figura 73 ilustra as **condições de equilíbrio estável e instável de corpos totalmente submersos**. Nesta figura, a condição (a) representa um corpo em equilíbrio **instável**, com o centro de gravidade acima do centro de flutuabilidade. Nesta situação, uma pequena perturbação provocará uma alteração da posição de equilíbrio devido ao aparecimento de um binário que tende a potencializar o efeito da perturbação, conforme ilustrado na situação (b). A situação (c) representa um corpo em equilíbrio **estável**, com o centro de gravidade abaixo do centro de flutuabilidade. Nesta situação, uma pequena perturbação não provocará uma alteração da posição de equilíbrio devido ao aparecimento de um binário que tende a retornar o corpo para a posição de equilíbrio original, compensando o efeito da perturbação, conforme apresentado na situação (d) (Martins, 2010).

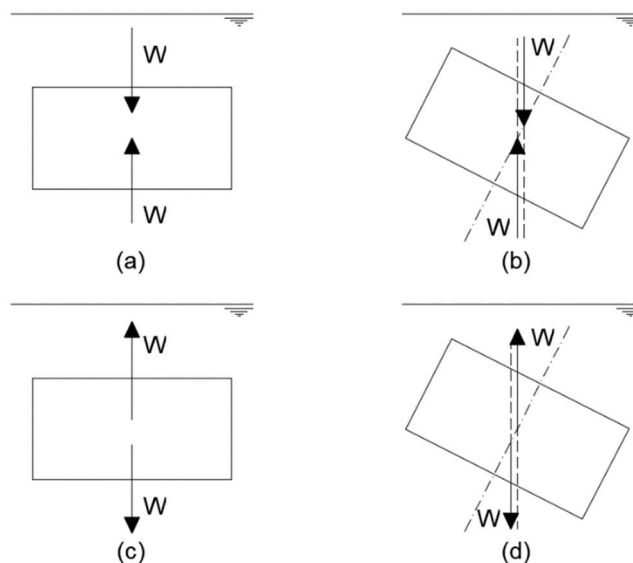


Figura 73 – Condição de equilíbrio para corpos submersos (adaptado de Lewis, 1988).

Para **corpos flutuantes, não totalmente submersos**, o fato do centro de gravidade estar acima do centro de flutuabilidade não implica necessariamente uma condição de equilíbrio instável. Isto se verifica devido à alteração da posição do centro de flutuabilidade após uma perturbação que provoque uma modificação na geometria submersa do corpo. A situação (a) da Figura 74 ilustra esta situação, mostrando que se trata de uma condição de equilíbrio **estável**. À medida que o centro de gravidade se aproxima do centro de flutuabilidade, o momento (binário) restaurador aumenta, conforme se verifica nas situações (c) e (d) da mesma figura. À medida que o centro de gravidade se eleva, o ponto de equilíbrio tende à instabilidade (Martins, 2010).

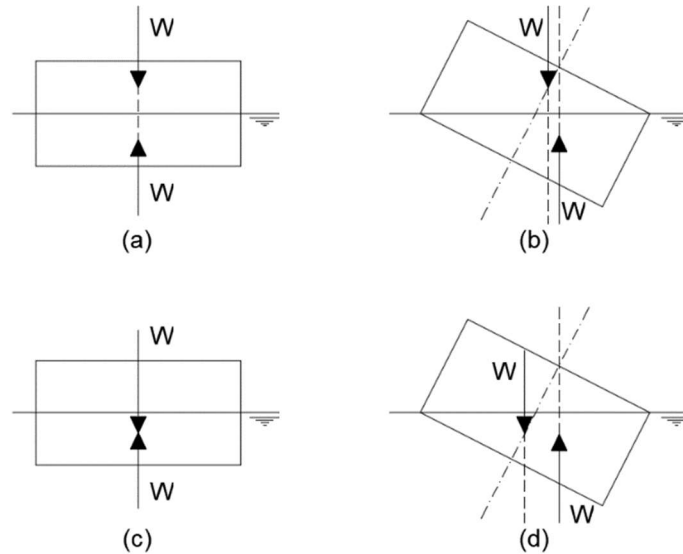


Figura 74 – Condição de equilíbrio para corpos flutuantes (adaptado de Lewis, 1988).

Exercício resolvido: considere um recipiente com **volume** igual a **v** e **peso próprio** igual a **p** flutuando em água doce. Até que o **volume (V)** de **líquido de densidade ρ** , maior que a da água, pode ser introduzido no recipiente antes que ele perca sua flutuabilidade (Martins, 2010).

Neste tipo de exercício o essencial é a abordagem inicial/decomposição do problema:

1. Recipiente que flutua (Impulsão, I) em água doce (densidade, ρ_a), de peso próprio p e volume v;
2. Introdução de um líquido de densidade ρ que ocupa um dado volume V e, portanto, de peso próprio p_ρ ;
3. Neste momento temos 3 forças: p (dado), $p_\rho = \rho \cdot V \cdot g$ e $I = \rho_a \cdot v \cdot g$. Atendendo ao enunciado, o peso total do sistema a considerar é $p_T = p + p_\rho$, cujo terá de ser inferior a I (atendendo à teoria), para o recipiente continuar a flutuar, constituído o ponto de partida para a resolução do exercício, como de seguida se expõe:

$$\begin{aligned}
 p_T &= p + p_\rho < I \Rightarrow \\
 \Rightarrow p + \rho V g &< \rho_a v g \Rightarrow \\
 \Rightarrow \rho V g &< \rho_a v g - p \Rightarrow \\
 \Rightarrow V &< \frac{\rho_a v g}{\rho g} - \frac{p}{\rho g} \Rightarrow V < \frac{\rho_a}{\rho} \cdot v - \frac{p}{\rho g}
 \end{aligned}$$

CAPÍTULO 4 - TEOREMA DE BERNOULLI E SUAS APLICAÇÕES

4.1 Teorema de Bernoulli no aspeto local

4.1.1 Dedução da equação local de Bernoulli

Consideram-se os parâmetros característicos do escoamento traduzidos em **variáveis de Lagrange**. Para um sistema de partículas materiais, as **equações de Lagrange** podem escrever-se (Pinho et al., 2011):

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_K} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_K} = 0 \quad (K = 1, 2, \dots, n)$$

Em que:

L é a função de Lagrange (Lagrangeana) do sistema de partículas;

q_K é a coordenada generalizada genérica ($K = 1, 2, \dots, n$, sistema com n graus de liberdade);

\dot{q}_K é a derivada total em ordem ao tempo da coordenada generalizada q_K .

Aplicando a uma partícula fluida que se desloca ao longo da sua **trajetória** (com um só grau de liberdade) (Pinho et al., 2011):

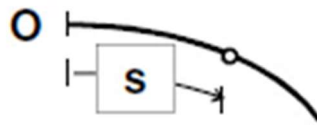


Figura 75 – Partícula fluida que se desloca ao longo da sua trajetória (Pinho et al., 2011).

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{s}} \right) - \frac{\partial L}{\partial s} = 0$$

Como:

$$\dot{s} = \frac{ds}{dt} = v \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial v} \right) - \frac{\partial L}{\partial s} = 0$$

Sendo a Lagrangeana (L) definida por:

$$L = \underbrace{T}_{\text{energia cinética}} - \underbrace{U}_{\text{energia potencial}}$$

Energia cinética de uma partícula, de volume dV (massa ρdV) animada de velocidade v (Pinho et al., 2011):

$$T = \frac{1}{2} \rho v^2 dV \quad (\text{função apenas de } v \text{ e não de } s)$$

Energia potencial da mesma partícula, função explícita de s . Pode decompor-se em três parcelas (ações) (Pinho et al., 2011):

1. Forças por unidade de massa, \vec{G} : na Hidráulica dos fluidos pesados reduzem-se às ações gravíticas;

2. Forças de pressão, H_{ij} : atuando normalmente à superfície em que se consideram;

$$H_{ij} = \frac{1}{3} \tau_{kk} \delta_{ij} \quad (\text{Tensor hidrostático})$$

3. Forças que traduzem a resistência do meio, τ'_{ij} : representam uma ação exercida em sentido contrário ao do movimento.

$$\delta'_{ij} \quad (\text{Tensor distorcional})$$

Energias potenciais correspondentes:

1. Energia potencial relativa ao peso da partícula (energia potencial de posição);

$$U_1 = \gamma z \, dV$$

Em que z é a coordenada vertical com sentido ascendente.

2. Energia potencial de pressão (energia potencial piezométrica);

$$U_2 = p \, dV$$

3. Energia potencial correspondente à resistência do meio.

$$U_3 = -\gamma H_r \, dV$$

Em que H_r é a energia potencial das forças de resistência por unidade de peso, que a partícula opõe ao movimento (por sua vez, $-H_r$ representa ações do exterior sobre a partícula) (Pinho et al., 2011).

Então a **energia potencial** (Pinho et al., 2011):

$$U = U_1 + U_2 + U_3 = \gamma z \, dV + p \, dV - \gamma H_r \, dV$$

Assim:

$$L = \frac{1}{2} \rho v^2 \, dV - \gamma z \, dV - p \, dV + \gamma H_r \, dV$$

Sabendo que:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial v} \right) - \frac{\partial L}{\partial s} = 0$$

$$\underbrace{\Rightarrow \rho v \, dv}_{\Rightarrow \rho \frac{dv}{dt} \, dv} - \gamma \frac{\partial z}{\partial s} \, dv + \frac{\partial p}{\partial s} \, dv + \gamma \frac{\partial H_r}{\partial s} \, dv = 0$$

Considerando massa (ρdV), peso (γdV) constantes:

$$\rho \frac{dv}{dt} \, dV + \gamma \frac{\partial z}{\partial s} \, dV + \frac{\partial p}{\partial s} \, dV - \gamma \frac{\partial H_r}{\partial s} \, dV = 0$$

Por unidade de peso da partícula ($1/\gamma dV$):

$$\frac{1}{g} \frac{dv}{dt} + \frac{\partial z}{\partial s} + \frac{1}{\gamma} \frac{\partial p}{\partial s} - \frac{\partial H_r}{\partial s} = 0$$

Como:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial s} \frac{ds}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial s} v = \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{v^2}{2} \right) \quad \wedge \quad \frac{\partial H_r}{\partial s} = j$$

Então, em variáveis de Lagrange:

$$\frac{\partial}{\partial s} \left(z + \frac{v^2}{2g} \right) + \frac{1}{\gamma} \frac{\partial p}{\partial s} = - \frac{1}{g} \frac{\partial v}{\partial t} - j$$

Expressão local generalizada do Teorema de Bernoulli aplicável (em coordenadas de Lagrange) ao movimento de uma partícula ao longo da trajetória num escoamento de um fluido pesado, em qualquer trecho em que não haja resistências singulares localizadas (admitiu-se continuidade de H_r e j). No caso de **fluido incompressível** (caso de maior importância em Hidráulica) (Pinho et al., 2011):

$$\frac{\partial}{\partial s} \left(z + \frac{p}{\gamma} + \frac{v^2}{2g} \right) = - \frac{1}{g} \frac{\partial v}{\partial t} - j$$

Expressão do Teorema de Bernoulli (válida para variáveis de Lagrange) para movimento de uma partícula de um fluido pesado e incompressível ao longo da trajetória (Pinho et al., 2011).

4.1.2 Interpretação da expressão local do teorema de Bernoulli

Significado físico (Pinho et al., 2011)

$$\frac{\partial}{\partial s} \left(z + \frac{p}{\gamma} + \frac{v^2}{2g} \right) = - \frac{1}{g} \frac{\partial v}{\partial t} - j$$

z é a cota da partícula em relação a um plano de referência horizontal. Corresponde à energia potencial de posição da partícula fluida por unidade de peso (altura topográfica).

p/γ é a altura piezométrica da partícula. Corresponde à energia potencial de pressão da partícula fluida por unidade de peso.

h = z + p/γ é a cota piezométrica da partícula.

v²/2g é a altura cinética da partícula. Corresponde à energia cinética por unidade de peso de uma partícula animada de velocidade v.

1/g · ∂v/∂t são as forças locais de inércia por unidade de peso. Corresponde ao trabalho realizado pelas forças locais de inércia por unidade de peso e por unidade de percurso:

- Forças de inércia: $F = -ma$;
- Para uma partícula de volume dV: $-\rho \cdot \partial v / \partial t \cdot dV$
- Por unidade de peso: $1/g \cdot \partial v / \partial t$

j é o trabalho efetuado por unidade de peso e por unidade de percurso pelas forças resistentes que se opõem ao movimento da partícula.

Energia mecânica total da unidade de peso da partícula

$$H = z + \frac{p}{\gamma} + \frac{v^2}{2g}$$

Varição de **H** por unidade de percurso:

$$\frac{\partial H}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial s} \left(z + \frac{p}{\gamma} + \frac{v^2}{2g} \right)$$

Energia ou **Carga**:

$$H \begin{cases} z, \text{ energia potencial de posição} \\ \frac{p}{\gamma}, \text{ energia potencial de pressão} \\ \frac{v^2}{2g}, \text{ energia cinética} \end{cases}$$

Por unidade de peso $\sim [L]$

Trabalho realizado pelas forças locais de inércia e pelas forças resistentes do meio por unidade de peso e por unidade de percurso (Pinho et al., 2011):

$$-\frac{1}{g} \frac{\partial v}{\partial t} - j$$

Teorema de Bernoulli: a variação da energia mecânica total é igual ao trabalho das forças locais de inércia e de resistência. Toda a energia perdida é consumida em trabalho. O **Teorema de Bernoulli** representa uma equação de **balanço de energia** (Pinho et al., 2011).

Linha piezométrica e linha de energia (ou de carga)

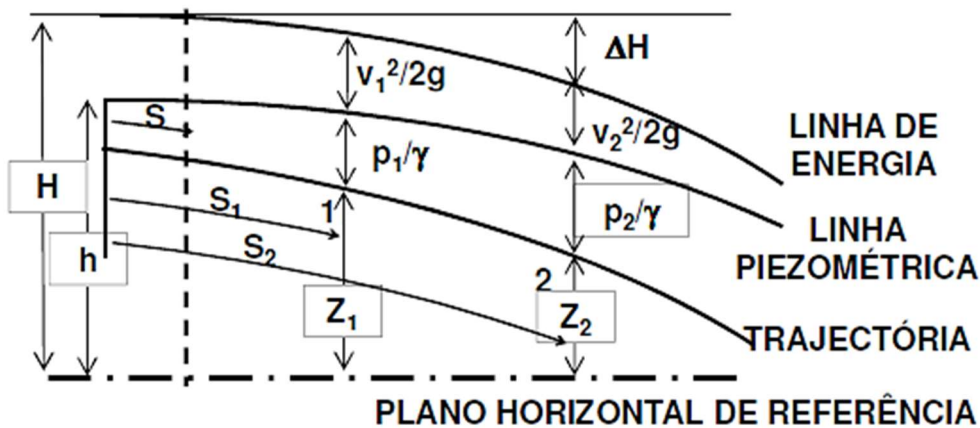


Figura 76 – Linha piezométrica e linha de energia ou de carga (Pinho et al., 2011).

Z é a cota dos pontos da trajetória da partícula relativamente a um plano de referência horizontal (altura topográfica) (Pinho et al., 2011).

Linha piezométrica é o lugar geométrico dos pontos cujas ordenadas valem, relativamente ao plano horizontal de referência (Pinho et al., 2011):

$$h = z + \frac{p}{\gamma}$$

A ordenada da piezométrica indica a altura que o líquido atingiria num tubo vertical aberto nas extremidades e com a inferior colocada no ponto em consideração normalmente à trajetória (piezómetro) (Pinho et al., 2011).

Linha de Energia ou de Carga é o lugar geométrico dos pontos cuja ordenada é obtida somando ao valor da cota piezométrica o valor correspondente à altura cinética ($v^2/2g$) (Pinho et al., 2011):

$$H = z + \frac{p}{\gamma} + \frac{v^2}{2g}$$

Os termos **Carga** e **Energia** são empregues consoante, respetivamente, se estuda escoamentos em pressão ou escoamentos com superfície livre (Pinho et al., 2011).

De:

$$\frac{\partial H}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial s} \left(z + \frac{p}{\gamma} + \frac{v^2}{2g} \right)$$

Aplicando entre as secções **1** e **2** (Figura 76), integrando:

$$\Delta H = H_1 - H_2 = \int_{S_1}^{S_2} \left(-\frac{1}{g} \frac{\partial v}{\partial t} - j \right) ds$$

Em que:

H_1 e H_2 representam as energias (cargas) correspondentes às posições referenciadas por S_1 e S_2 , respetivamente;

ΔH representa a perda de energia (escoamentos com superfície livre) ou a perda de carga (escoamentos sob pressão).

Aplicando a equação de Bernoulli às posições da partícula **1** e **2** (Figura 76), temos:

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g} + \Delta H$$

A **linha de energia** é sempre descendente no sentido do escoamento desde que não haja fornecimento de energia do exterior (Pinho et al., 2011).

Havendo **trocas de energia com o exterior** entre S_1 e S_2 (fornecimento ou cedência) a equação de Bernoulli pode escrever-se:

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g} + \Delta H \pm \Delta B$$

Quando na expressão é usado **$+\Delta B$** , esta variação representa cedência de energia (ex.: turbina) e quando é usado **$-\Delta B$** , esta variação representa fornecimento de energia (ex.: bomba) (Pinho et al., 2011).

4.1.3 Teorema de Bernoulli aplicado ao regime permanente

Simplificação da equação local (Pinho et al., 2011)

Para um escoamento permanente:

$$-\frac{1}{g} \frac{\partial v}{\partial t} = 0$$

E a forma das equações escritas em coordenadas de **Lagrange** coincide com a forma que apresentam quando escritas em variáveis de **Euler**:

$$\frac{\partial}{\partial s} \left(z + \frac{p}{\gamma} + \frac{v^2}{2g} \right) = -j$$

Onde v pode ser interpretada em variáveis de **Euler**.

$$H_r = H$$

Em movimento permanente a energia (ou carga) representa a energia potencial das forças de resistência por unidade de peso que a partícula opõe ao movimento.

Em **regime uniforme** (tubos de corrente coincidem com trajetórias das partículas):

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g} + \Delta H$$

Pode ser aplicável não só a duas posições **1** e **2** da partícula, mas também às características do escoamento em dois pontos de uma trajetória e ΔH traduz a energia dissipada por unidade de peso e de percurso, pelas forças de resistência do meio.

Válida para dois pontos numa mesma linha de corrente, quando o escoamento é incompressível e o fluido pesado.

Perdas de carga em regime uniforme (Pinho et al., 2011)

Em regime uniforme:

$$\frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{v^2}{2g} \right) = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial s} \left(z + \frac{p}{\gamma} \right) = -j \text{ ou } z_1 + \frac{p_1}{\gamma} - \left(z_2 + \frac{p_2}{\gamma} \right) = \Delta H$$

A perda de energia pode ser traduzida pela diferença de cotas piezométricas.

Movimento uniforme: o trabalho das forças resistentes por unidade de peso e de percurso é constante em qualquer ponto da sua trajetória:

$$\Delta H = H_1 - H_2 = -j \int_{S_1}^{S_2} ds = j(s_2 - s_1)$$

Sendo L a distância entre **1** e **2** medida ao longo da trajetória.

$$\Delta H = jL$$

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} - \left(z_2 + \frac{p_2}{\gamma} \right) = \Delta H$$

Em que $j = \Delta H/L$ representa a perda de energia por unidade de comprimento.

Conclusão: em movimento uniforme a linha de energia é retilínea quando a trajetória também o é. A piezométrica é também retilínea e paralela à linha de energia ($v^2/2g = \text{cte.}$).

Em zonas de movimento variado em curtas extensões podem considerar-se descidas bruscas da linha de energia. Designam-se essas perdas de energia por **perdas de carga localizadas** (ΔH_{L_i}).

$$\Delta H = jL + \sum_{i=1}^n \Delta H_{L_i}$$

Em que:

jL representa a perda de carga uniforme (contínua, principal);

$\sum \Delta H_{L_i}$ é o somatório das perdas de carga localizadas (concentradas, acidentais).

Considerando trocas de energia com o exterior a equação de Bernoulli para movimento uniforme pode escrever-se:

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} - \left(z_2 + \frac{p_2}{\gamma} \right) = jL + \sum_{i=1}^n \Delta H_{L_i} \pm \Delta B$$

Na figura, apresenta-se graficamente a diferença entre **perda de carga uniforme** e **perdas de carga localizadas**.

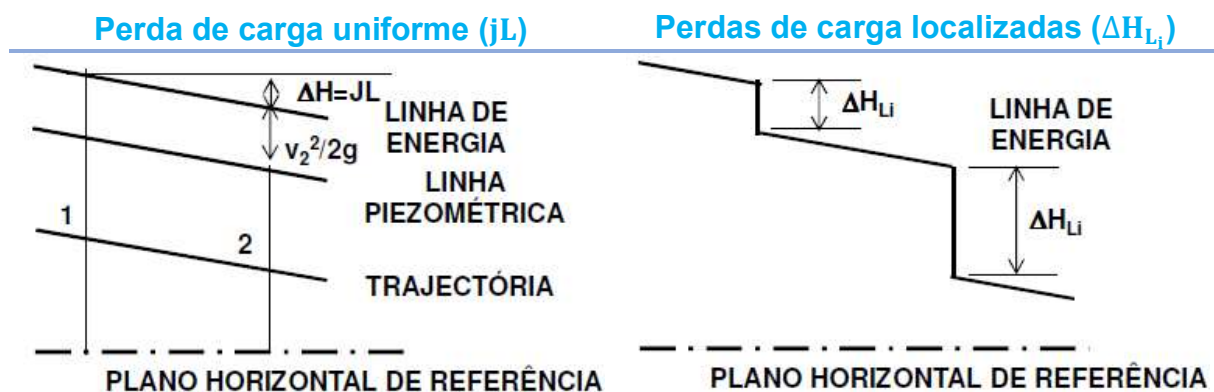


Figura 77 – Diferença entre perda de carga uniforme e perdas de carga localizadas (Pinho et al., 2011).

4.2 Teorema de Bernoulli no aspeto global

4.2.1 Aplicação do teorema de Bernoulli a um tubo de corrente

A expressão local do Teorema de Bernoulli pode adaptar-se à totalidade do fluido que escoa num **tubo de corrente** (Figura 78) obtendo-se a sua **expressão global** (Pinho et al., 2011).

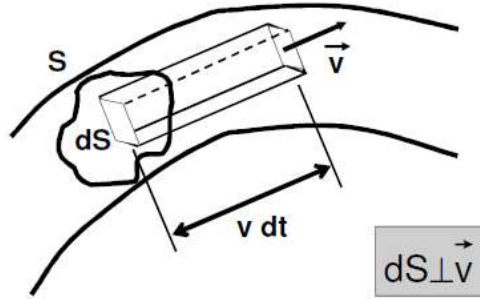


Figura 78 – Tubo de corrente (Pinho et al., 2011).

Vimos que para um fluido pesado e incompressível a expressão local generalizada do Teorema de Bernoulli é:

$$\frac{\partial}{\partial s} \left(z + \frac{p}{\gamma} + \frac{v^2}{2g} \right) = -\frac{1}{g} \frac{\partial v}{\partial t} - j \text{ (por unidade de peso)}$$

Caudal que passa em **dS**:

$$dQ = v \, dS$$

Peso do fluido que atravessa **dS** na unidade de tempo:

$$\gamma v \, dS \frac{dt}{ds} = \gamma \, dQ$$

Aplicando o Teorema de Bernoulli a esse peso de fluido:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s} \left(z + \frac{p}{\gamma} + \frac{v^2}{2g} \right) &= -\frac{1}{g} \frac{\partial v}{\partial t} - j \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{\partial}{\partial s} \left(\left(z + \frac{p}{\gamma} \right) \gamma v \, dS \right) + \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{v^2}{2g} \gamma v \, dS \right) &= -\frac{1}{g} \frac{\partial v}{\partial t} (\gamma v \, dS) - j \gamma v \, dS \end{aligned}$$

Integrando a equação anterior ao longo de toda a superfície **S**, dividindo por **γ** (constante), afetando **z** e **p** de um índice **x** (valores num ponto corrente, x, sobre a secção):

$$\text{Sabendo que } Q = \int_S v \, dS \Rightarrow \int_Q \frac{\partial}{\partial s} \left(z_x + \frac{p_x}{\gamma} \right) dQ + \frac{1}{2g} \int_Q \frac{\partial v^2}{\partial s} dQ = -\frac{1}{g} \int_Q \frac{\partial v}{\partial t} dQ - \int_Q j \, dQ$$

Demonstra-se que pode alterar-se, nesta equação, a ordem das operações derivação e integração:

$$\frac{\partial}{\partial s} \int_S \left(z_x + \frac{p_x}{\gamma} \right) v \, dS + \frac{1}{2g} \frac{\partial}{\partial s} \int_S v^3 \, dS = -\frac{1}{g} \frac{\partial}{\partial t} \int_S v^2 \, dS - \int_S j v \, dS$$

4.2.2 Coeficientes globais da equação de Bernoulli

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial s} \int_S \left(z_x + \frac{p_x}{\gamma} \right) v \, dS}_1 + \underbrace{\frac{1}{2g} \frac{\partial}{\partial s} \int_S v^3 \, dS}_2 = - \underbrace{\frac{1}{g} \frac{\partial}{\partial t} \int_S v^2 \, dS}_3 - \underbrace{\int_S jv \, dS}_4$$

O aspeto global do teorema de Bernoulli obtém-se a partir da introdução de 3 coeficientes que se definem seguidamente (Pinho et al., 2011).

A. Coeficiente de distribuição de pressões (Pinho et al., 2011)

A.1. escoamentos lineares (Pinho et al., 2011)

Se as trajetórias se apresentam retilíneas e paralelas a distribuição de pressões é do tipo hidrostático na secção do escoamento (secção reta).

A cota piezométrica num ponto qualquer (**x**) é igual à cota piezométrica num ponto (**P**) da mesma secção:

$$h_x = z_x + \frac{p_x}{\gamma} = h_p = z + \frac{p}{\gamma}$$

A parcela 1 toma a forma:

$$\frac{\partial}{\partial s} \int_S \left(z_x + \frac{p_x}{\gamma} \right) v \, dS = \frac{\partial}{\partial s} \left[\left(z + \frac{p}{\gamma} \right) \int_S v \, dS \right] = \frac{\partial}{\partial s} \left[\left(z + \frac{p}{\gamma} \right) Q \right]$$

Desta forma existirá uma só cota piezométrica para toda a secção. Convenciona-se que a cota **Z** se refere a:

- Intersecção do eixo do tubo de corrente com a secção (escoamentos sob pressão);
- Ao ponto que, na secção, se encontra a cota topográfica mais baixa (escoamentos com superfície livre).

Em escoamentos com superfície livre:

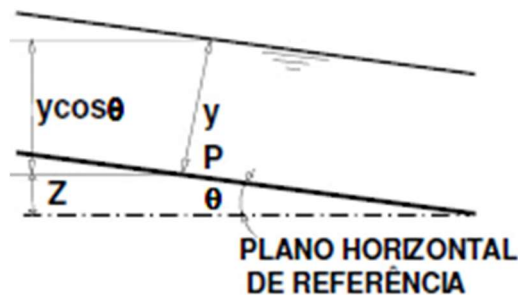


Figura 79 – Escoamento com superfície livre.

Pressão no ponto **P**:

$$p = p_a + \gamma y \cos \theta$$

$$z + \frac{p}{\gamma} = z + y \cos \theta + \frac{p_a}{\gamma}$$

Onde p_a representa a pressão na superfície livre.

A parcela **1** toma a forma:

$$\frac{\partial}{\partial s} \int_S \left(z_x + \frac{p_x}{\gamma} \right) v \, dS = \frac{\partial}{\partial s} \left[\left(z + y \cos \theta + \frac{p_a}{\gamma} \right) Q \right]$$

Definindo $\xi = \cos \theta$ (coeficiente de Boudin) e considerando pressões efetivas:

$$\frac{\partial}{\partial s} \int_S \left(z_x + \frac{p_x}{\gamma} \right) v \, dS = \frac{\partial}{\partial s} [(z + \xi y) Q]$$

A.2. Expressão geral do coeficiente de distribuição de pressões (Pinho et al., 2011)

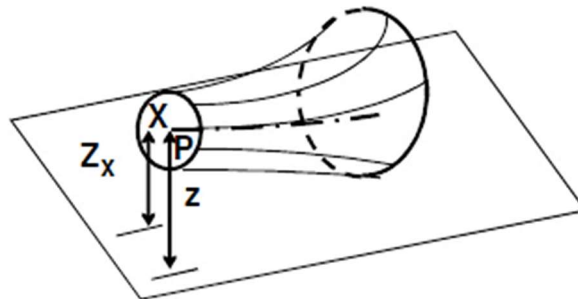


Figura 80 – Distribuição de pressões (Pinho et al., 2011).

Devido à curvatura e à não-hidrostaticidade da distribuição de pressões existe um desnível piezométrico (p'/γ):

$$h_p - h_x = \frac{p'}{\gamma}$$

$$z_x + \frac{p_x}{\gamma} = z + \frac{p}{\gamma} - \frac{p'}{\gamma}$$

O integral da parcela **1** toma a forma:

$$\int_S \left(z_x + \frac{p_x}{\gamma} \right) v \, dS = \int_S \left(z + \frac{p}{\gamma} \right) v \, dS - \int_S \frac{p'}{\gamma} v \, dS$$

Sendo $z + p/\gamma$ um valor particular da cota piezométrica:

$$\int_S \left(z_x + \frac{p_x}{\gamma} \right) v \, dS = \left(z + \frac{p}{\gamma} \right) Q - \int_S \frac{p'}{\gamma} v \, dS = Q \left[z + \frac{p}{\gamma} \left(1 - \frac{\int_S p' v \, dS}{pQ} \right) \right]$$

Sabendo que o coeficiente b que designa o **coeficiente de distribuição de pressões** toma a forma:

$$b = 1 - \frac{\int_S p' v \, dS}{pQ}$$

Assim:

$$\int_S \left(z_x + \frac{p_x}{\gamma} \right) v \, dS = Q \left(z + b \frac{p}{\gamma} \right)$$

Define-se assim a **cota piezométrica**,

$$h = z + b \frac{p}{\gamma}$$

de forma generalizada a um escoamento de distribuição não-hidrostática adaptando-se ao caso de distribuições de pressões hidrostáticas quando $b = 1$. Nas situações que $b \neq 1$, atende-se ao facto de que quando:

- $b > 1$ (p' negativo) \sim concavidade virada para cima \cup ;
- $b < 1$ (p' positivo) \sim concavidade virada para baixo \cap .

Em escoamentos com superfície livre:

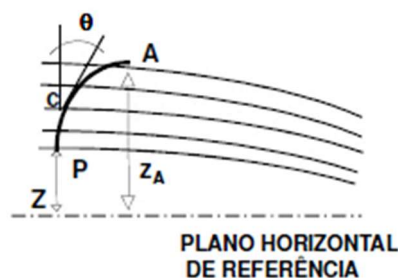


Figura 81 – Distribuição de pressões em escoamentos com superfície livre (Pinho et al., 2011).

$$z_A = z + \int_P^A \cos \theta \, dc$$

Em que:

z é a cota do ponto, que na secção, se encontra a nível mais baixo;

z_A é a cota do ponto de superfície livre;

$\cos \theta \, dc$ é a projeção vertical do arco elementar dc da curva de intersecção da secção do escoamento com o plano em que o escoamento está a ser analisado.

Se se considerarem pressões efetivas e superfície livre em contacto com a atmosfera:

- Para distribuição de pressões do tipo hidrostático;

$$z_x + \frac{p_x}{\gamma} = z_A$$

- Para distribuição de pressões do tipo não-hidrostático.

$$z_x + \frac{p_x}{\gamma} = z_A - \frac{\Delta p'}{\gamma} \quad \text{ou} \quad z_x + \frac{p_x}{\gamma} = z + \int_P^A \cos \theta \, dc - \frac{\Delta p'}{\gamma}$$

O integral da parcela **1** toma a forma:

$$\int_S \left(z_x + \frac{p_x}{\gamma} \right) v \, dS = \int_S \left(z + \int_P^A \cos \theta \, dc - \frac{\Delta p'}{\gamma} \right) v \, dS = zQ + \int_S \int_P^A \cos \theta \, v \, dc \, dS - \int_S \frac{\Delta p'}{\gamma} v \, dS$$

Definindo um **coeficiente de distribuição de pressões b'**:

$$b' = \frac{1}{cQ} \left(\int_S \int_P^A \cos \theta \, v \, dc \, dS - \int_S \frac{\Delta p'}{\gamma} v \, dS \right)$$

Em que:

$\int_S \int_P^A \cos \theta \, v \, dc \, dS$ representa a **curvatura da secção**;

$\int_S \Delta p' / \gamma \, v \, dS$ representa **curvatura dos filetes (força centrífuga)**.

Como $c = \int_P^A dc$ e representa o comprimento do arco de curva \overline{PA} , então:

$$\int_S \left(z_x + \frac{p_x}{\gamma} \right) v \, dS = (z + b'c)Q$$

Considerando o caso de filetes sensivelmente paralelos num mesmo plano vertical e $\xi = \cos \theta$ (coeficiente de Boudin):

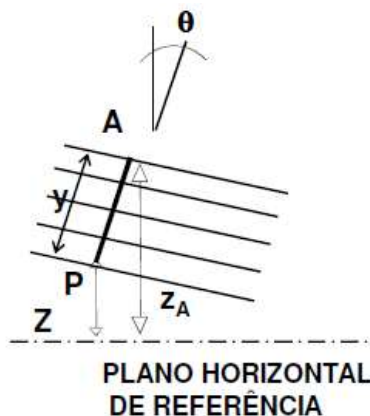


Figura 82 – Filetes sensivelmente paralelos num mesmo plano vertical (Pinho et al., 2011).

$$\lambda = \frac{1}{Qy} \left(\int_S y \cos \theta v \, dS - \int_S \frac{\Delta p'}{\gamma} v \, dS \right) \Rightarrow \lambda = \frac{y \cos \theta Q}{Qy} - \frac{\int_S \Delta p' v \, dS}{\gamma Q y} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda = \xi - \frac{\int_S \Delta p' v \, dS}{\gamma Q y} = \xi \left(1 - \frac{\int_S \Delta p' v \, dS}{\gamma Q y \cos \theta} \right) = \xi \left(1 - \frac{\int_S \Delta p' v \, dS}{\gamma Q (z_A - z)} \right)$$

Considerando β (**coeficiente de Jaeger-Manzanares**) e substituindo na equação anterior:

$$\beta = 1 - \frac{\int_S \Delta p' v \, dS}{\gamma Q (z_A - z)} \sim \lambda = \xi \beta$$

Donde:

$$\int_S \left(z_x + \frac{p_x}{\gamma} \right) v \, dS = (z + \lambda y) Q = (z + \xi \beta y) Q = (z + \beta y \cos \theta) Q$$

B. Coeficiente de energia cinética (Pinho et al., 2011)

$v^2/2g$ representa a energia cinética por unidade de peso.

$(v^2/2g) \cdot \gamma v \, dS$ representa a potência cinética da corrente (energia cinética que atravessa dS na unidade de tempo).

Integrando ao longo de toda a secção:

$$P = \frac{\gamma}{2g} \cdot \int_S v^3 \, dS$$

A parcela **2** está relacionada com esta potência. Se a velocidade fosse constante em todos os pontos da secção e igual à velocidade média do escoamento (U),

$$U = \frac{\int_S v \, dS}{S} \sim P_m = \frac{\gamma}{2g} U^3 S$$

Definido α (**coeficiente de energia cinética** ou **coeficiente de Coriolis**):

$$\alpha = \frac{P}{P_m} = \frac{\text{pot. cinética efetiva do escoamento}}{\text{pot. cinética de uma corrente fictícia com } v = U \text{ em todos os pontos}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{\frac{\gamma}{2g} \cdot \int_S v^3 \, dS}{\frac{\gamma}{2g} U^3 S} = \frac{\int_S v^3 \, dS}{U^3 S} \sim \frac{1}{2g} \frac{\partial}{\partial s} \int_S v^3 \, dS = \frac{1}{2g} \frac{\partial}{\partial s} (\alpha U^3 S)$$

C. Coeficiente de quantidade de movimento (Pinho et al., 2011)

$d\vec{M} = \rho v dS \vec{v}$ representa a quantidade de movimento ($m\vec{v}$) referida à massa de fluido que atravessa dS na unidade de tempo.

Integrando a toda a secção S , com \vec{n} versor da direcção resultante em que se escoo o líquido:

$$\vec{M} = \vec{n}\rho \int_S v^2 dS$$

A parcela **3** está relacionada com esta expressão. Se a velocidade fosse constante em todos os pontos da secção e igual à velocidade média do escoamento (U),

$$U = \frac{\int_S v dS}{S} \rightsquigarrow \vec{M} = \vec{n}\rho U^2 S$$

Definido α' (**coeficiente de quantidade de movimento** ou **coeficiente de Boussinesq**):

$$\alpha' = \frac{M}{M_m} = \frac{\text{quantidade de movimento efectiva}}{\text{quantidade de movimento fictícia}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{\int_S v^2 dS}{U^2 S} \rightsquigarrow \frac{1}{g} \frac{\partial}{\partial t} \int_S v^2 dS = \frac{1}{g} \frac{\partial}{\partial t} (\alpha' U^2 S)$$

4.2.3 Expressão global do teorema de Bernoulli

Utilizando a formulação dos coeficientes globais da equação de Bernoulli fazendo as devidas adaptações, temos (Pinho et al., 2011):

$$\frac{\partial}{\partial s} \left[Q \left(z + \frac{bp}{\gamma} \right) \right] + \frac{1}{2g} \frac{\partial}{\partial s} (\alpha U^3 S) = -\frac{1}{g} \frac{\partial}{\partial t} (\alpha' U^2 S) - \int_S jv dS$$

Considerando que J representa o trabalho efetuado pelas forças resistentes por unidade de peso e por unidade de percurso, em termos globais, isto é, a unidade de peso diz respeito à totalidade de fluido que atravessa a secção S na unidade de tempo:

$$J = \frac{\int_S jv dS}{Q} \rightsquigarrow \frac{\partial}{\partial s} \left[Q \left(z + \frac{bp}{\gamma} \right) \right] + \frac{1}{2g} \frac{\partial}{\partial s} (\alpha U^3 S) = -\frac{1}{g} \frac{\partial}{\partial t} (\alpha' U^2 S) - JQ$$

Considerando $\partial Q / \partial s$ desprezável, ou seja, $Q = U \cdot S = \text{cte.}$,

$$\frac{\partial}{\partial s} \left(z + \frac{bp}{\gamma} + \frac{\alpha U^2}{2g} \right) = -\frac{1}{g} \frac{\partial}{\partial t} (\alpha' U) - J$$

Expressão global generalizada do Teorema de Bernoulli (em coordenadas de Lagrange) aplicável à unidade de peso de fluido, pesado e incompressível que se escoar num tubo de corrente, em qualquer trecho em que não haja resistências singulares localizadas (Pinho et al., 2011).

Relativamente à equação local:

- Aparecem os coeficientes α , α' e b ;
- Aparece o parâmetro global J em vez do parâmetro local j ;
- Aparece a velocidade média U em vez da velocidade num ponto v .

4.2.4 Interpretação da expressão global do teorema de Bernoulli

Significado físico (Pinho et al., 2011)

Fazendo os ajustamentos adequados, o significado físico da expressão global do teorema de Bernoulli é em tudo análoga ao da equação local

$$\frac{\partial}{\partial s} \left(z + \frac{bp}{\gamma} + \frac{\alpha U^2}{2g} \right) = -\frac{1}{g} \frac{\partial}{\partial t} (\alpha' U) - J$$

Z é a cota topográfica de qualquer ponto da secção relativamente a um dado plano de referência. Representa a energia potencial de posição da unidade de peso de líquido escoado no tubo de corrente:

- **Escoamentos em pressão**, Z corresponde à intersecção do eixo do tubo de fluxo com a secção;
- **Escoamentos com superfície livre**, Z corresponde ao ponto situado a nível mais baixo na secção.

bp/γ é a altura piezométrica.

$h = z + bp/\gamma$ é a cota piezométrica. Representa a soma da energia potencial de posição com a energia potencial de pressão por unidade de peso de líquido escoado através da secção.

$\alpha U^2/2g$ é a altura cinética. Representa a energia cinética por unidade de peso de líquido escoado através da secção.

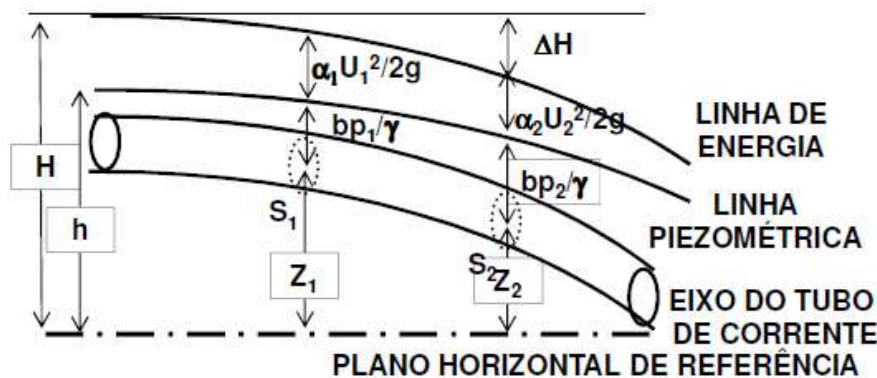
$-1/g \cdot \partial/\partial t(\alpha' U)$ representa o trabalho realizado pelas forças locais de inércia por unidade de peso e de percurso.

J representa o trabalho realizado pelas forças resistentes por unidade de percurso e peso do fluido escoado no interior do tubo de corrente.

O Teorema de Bernoulli (no seu aspeto global) representa uma equação de **balanço de energia** pois o **trabalho realizado pelas forças locais de inércia e de resistência é igual à variação da energia mecânica total**. Por unidade de peso:

$$-\frac{1}{g} \frac{\partial}{\partial t} (\alpha'U) - J = H \left(= z + \frac{bp}{\gamma} + \frac{\alpha U^2}{2g} \right)$$

Linha piezométrica e linha de energia (Pinho et al., 2011)



Perda de energia (Pinho et al., 2011)

De:

$$\Delta H = H_1 - H_2 = \int_{s_1}^{s_2} \left(-\frac{1}{g} \frac{\partial}{\partial t} (\alpha'U) - J \right) ds$$

Aplicando a equação de Bernoulli às secções 1 e 2, integrando:

$$z_1 + \frac{b_1 p_1}{\gamma} + \frac{\alpha_1 U_1^2}{2g} - \left(z_2 + \frac{b_2 p_2}{\gamma} + \frac{\alpha_2 U_2^2}{2g} \right) = \Delta H$$

Trocas de energia com o exterior (Pinho et al., 2011)

$$z_1 + \frac{b_1 p_1}{\gamma} + \frac{\alpha_1 U_1^2}{2g} - \left(z_2 + \frac{b_2 p_2}{\gamma} + \frac{\alpha_2 U_2^2}{2g} \right) = \Delta H \pm \Delta B$$

Em que:

+ΔB corresponde a cedência de energia (ex.: turbina);

–ΔB corresponde a fornecimento de energia (ex.: bomba).

Valores dos coeficientes globais da equação de Bernoulli (Pinho et al., 2011)

A. Coeficiente de distribuição de pressões b (Pinho et al., 2011)

$b = 1$:

- campo de pressões do tipo hidrostático;
- condutas em pressão (tubos de pequeno e médio diâmetro com pressões elevadas);
- escoamentos com superfície livre (curvatura dos filetes pouco acentuada).

$b > 1$:

- curvatura dos filetes com concavidade para cima.

$b < 1$:

- curvatura dos filetes com concavidade para baixo.

B. Coeficientes de energia cinética e de quantidade de movimento, α e α' (são função da forma da secção, rugosidade das paredes, velocidade do escoamento) (Pinho et al., 2011)

Regime laminar:

- $\alpha = 2 \wedge \alpha' = 4/3$ (fluidos de viscosidade newtoniana).

Regime turbulento:

- $\alpha = 1.15 \wedge \alpha' = 1.05$ (secções de forma simples e rugosidade pequena);
- $\alpha = 1.01$ a $1.02 \wedge \alpha' = 1.6$ (escoamento superfície livre, paredes muito rugosas e velocidade muito pequena).

Hidráulica aplicada:

- $\alpha = \alpha' = 1$.

4.2.5 Aplicação da equação global de Bernoulli ao regime permanente

Simplificação da equação global (Pinho et al., 2011)

Para um escoamento permanente:

$$-\frac{1}{g} \frac{\partial v}{\partial t} = 0$$

E a forma das equações escritas em coordenadas de **Lagrange** coincide com a forma que apresentam quando escritas em variáveis de **Euler**,

$$\frac{\partial}{\partial s} \left(z + \frac{bp}{\gamma} + \frac{\alpha U^2}{2g} \right) = -J$$

ou **em escoamentos com superfície livre**:

$$\frac{\partial}{\partial s} \left(z + \beta y \cos \theta + \frac{\alpha U^2}{2g} \right) = -J$$

Igualmente,

$$Z_1 + \frac{b_1 p_1}{\gamma} + \frac{\alpha_1 U_1^2}{2g} - \left(Z_2 + \frac{b_2 p_2}{\gamma} + \frac{\alpha_2 U_2^2}{2g} \right) = \Delta H \pm \Delta B$$

ou **em escoamentos com superfície livre**:

$$Z_1 + \beta_1 y_1 \cos \theta_1 + \frac{\alpha_1 U_1^2}{2g} - \left(Z_2 + \beta_2 y_2 \cos \theta_2 + \frac{\alpha_2 U_2^2}{2g} \right) = \Delta H \pm \Delta B$$

Estas expressões, sendo válidas em variáveis de Euler, são aplicáveis não só à massa líquida que atravessa as duas secções S_1 e S_2 , mas também às características do escoamento nas duas secções.

Em **regime uniforme**,

$$\frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{U^2}{2g} \right) = 0$$

As linhas de corrente coincidem com as trajetórias das partículas:

$$\frac{\partial}{\partial s} \left(z + \frac{p}{\gamma} \right) = -J$$

$$Z_1 + \frac{p_1}{\gamma} - \left(Z_2 + \frac{p_2}{\gamma} \right) = \Delta H$$

Para **escoamentos em superfície livre**,

$$\frac{\partial z}{\partial s} = -J \approx Z_1 - Z_2 = \Delta H$$

Movimento uniforme: o trabalho das forças resistentes por unidade de peso e de percurso é constante em qualquer secção do escoamento:

$$\Delta H = H_1 - H_2 = -J \int_{S_1}^{S_2} ds = J(s_2 - s_1)$$

Sendo **L** a distância entre as secções **1** e **2**,

$$\Delta H = JL$$

Com **J** a representar a perda de energia por unidade de comprimento.

Considerando perdas de energia localizadas e trocas de energia com o exterior do escoamento:

$$Z_1 + \frac{p_1}{\gamma} - \left(Z_2 + \frac{p_2}{\gamma} \right) = JL + \sum_{i=1}^n \Delta H_{L_i} \pm \Delta B, \text{ com } \Delta H_L = K \frac{U^2}{2g}$$

Sendo **K** o **coeficiente de perda de energia (carga) localizada**.

4.3 Aplicações do teorema de Bernoulli

4.3.1 Medição de velocidades com auxílio de um Tubo de Pitot

Do ponto de vista de balanço de energia, o funcionamento do Tubo de Pitot é uma das aplicações tradicionais do Teorema de Bernoulli ao longo de uma linha de corrente. A associação do Tubo de Pitot com o tubo piezométrico permite a determinação experimental da altura cinética e indiretamente da velocidade de escoamento na partícula que ocupa a posição da linha de corrente em que os dois tubos foram instalados (Vasconcelos, 2005).

É possível com a instalação de um tubo piezométrico numa secção de um tubo de fluxo com eixo retilíneo, em que as linhas de corrente são retilíneas e paralelas entre si, e a instalação de um Tubo de Pitot em diferentes posições da secção transversal determinar o diagrama de velocidades nessa secção, Figura 84 (Vasconcelos, 2005).

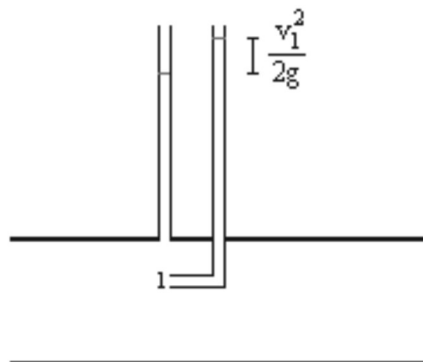


Figura 84 – Associação do Tubo Piezométrico com o Tubo de Pitot para determinação do diagrama de velocidades numa secção transversal de um tubo de fluxo (Vasconcelos, 2005).

À medida que a posição do Tubo de Pitot se aproxima do centro de gravidade da secção transversal do tubo de fluxo a diferença da cota topográfica da superfície livre

entre os dois tubos aumenta, porque a velocidade também aumenta (Vasconcelos, 2005).

A velocidade do escoamento é obtida através da equação:

$$h = \frac{\Delta p}{\rho g} = \frac{\frac{1}{2} \rho v_1^2}{\rho g} = \frac{v_1^2}{2g} \Rightarrow v_1 = \sqrt{2gh}$$

4.3.2 Difusor de turbina hidráulica

O **difusor** é uma parte fixa da turbina que conduz a água da saída do rotor até ao nível de jusante com a função de recuperar a altura entre a saída da roda e o nível do canal de fuga, restaurando parte da energia cinética que corresponde à velocidade residual da água na saída da roda (Soares Júnior, 2013).

Esses ductos expandidos reduzem a velocidade do escoamento e assim, aumentam a pressão estática. Ao passar pelo difusor a velocidade do escoamento diminui, o existindo uma conversão de uma dada quantidade de energia cinética em energia potencial de pressão (Coelho *et al.*, 2006).

É evidente a importância do uso de um difusor ao se considerar que a energia da água que deixa o rotor seria perdida sem o auxílio deste (Figura 85). Em alguns projetos, essa energia pode chegar a cerca de 50% da energia total disponível. Contudo, com a utilização do difusor vedado ao ar por completo, há a formação de um vácuo parcial por conta da alta velocidade da água. Com essa baixa pressão, a queda de pressão nas pás do rotor tende a aumentar, aumentando assim a **eficiência global da turbina** (Costa, 2003).

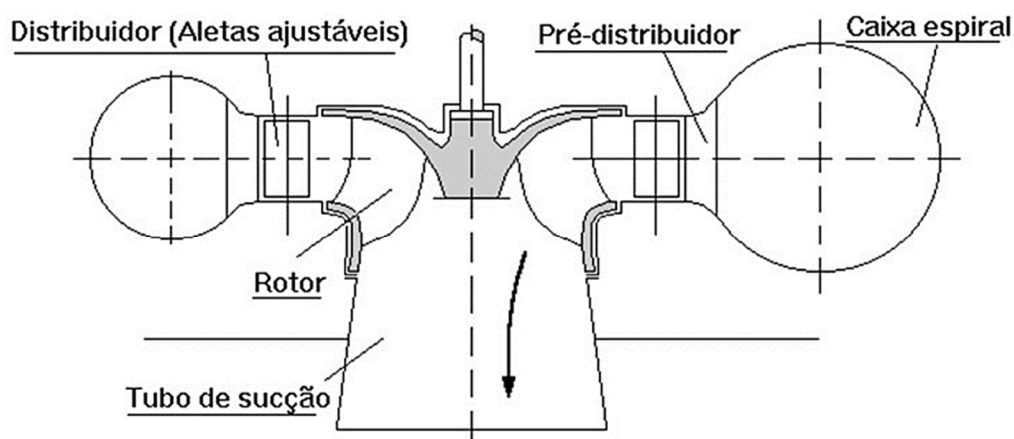


Figura 85 – Arranjo típico de uma turbina hidráulica (Tavares, 2014).

Para melhor entendimento de toda a formulação teórica da eficiência, foram montadas duas situações, uma com o difusor e outra sem, conforme mostra a Figura 86, assim como foi feito por Coelho (2006).

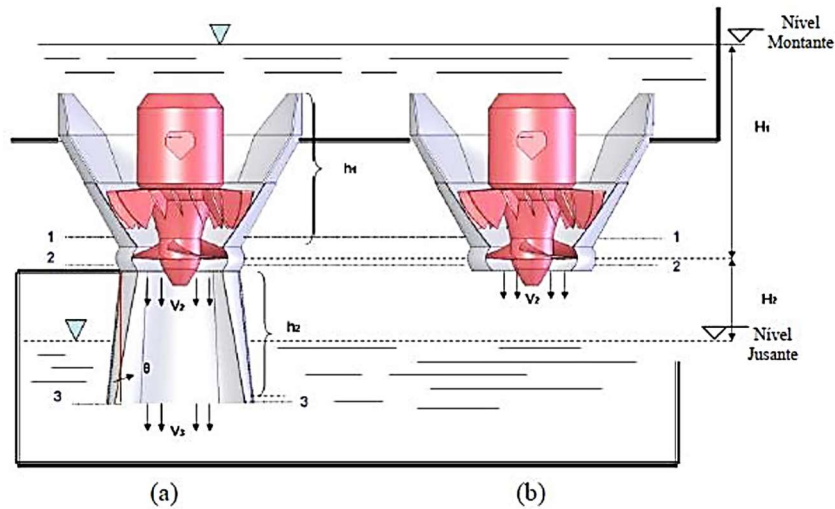


Figura 86 – Visualização do rotor: a) com difusor; b) sem difusor (Coelho, 2006).

Com referência ao nível de jusante, a energia específica antes do rotor, utilizando o teorema da conservação de energia, é dada por:

$$E_1 = \frac{p_{atm}}{\rho} + gH_1 + gH_2 - gh_1$$

Em que:

p_{atm} é a pressão atmosférica;

ρ é a massa específica da água;

g é a aceleração gravítica;

H_1 é a altura de queda referente a montante;

H_2 é a altura de queda referente a jusante;

h_1 é a perda de carga na passagem do escoamento, da tomada d'água ao início do difusor.

Fazendo esta mesma análise para a saída do rotor, tem-se que:

$$E_2 = \frac{p_2}{\rho} + gH_2 + \frac{v_2^2}{2}$$

Em que $v_2^2/2$ é a energia cinética específica na saída do rotor.

Assim sendo, a energia utilizada pelo rotor, obtida a partir da variação entre as energias E_1 e E_2 , é dada por:

$$\Delta E = E_1 - E_2 = \frac{p_{atm}}{\rho} - \frac{p_2}{\rho} + gH_1 - \frac{v_2^2}{2} - gh_1$$

Fazendo uma primeira análise sem o difusor, Figura 86 (b), nota-se que a pressão na saída do rotor (p_2) é igual à pressão atmosférica, mesma pressão na entrada do rotor.

Dessa forma, a diferença entre essas pressões é igual a zero. Então, a equação anterior pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\Delta E_I = gH_1 - \frac{v_2^2}{2} - gh_1$$

Analisando agora a turbina com o difusor, Figura 86 (a), tem-se que a pressão na saída do rotor é diferente da pressão atmosférica. Utilizando o teorema de conservação de energia entre os pontos 2 e 3 na figura, tem-se que:

$$\frac{p_2}{\rho} = \frac{p_{atm}}{\rho} - gH_2 - \frac{v_2^2}{2} + \left(gh_2 + \frac{v_3^2}{2} \right)$$

Onde h_2 é a perda de carga no difusor.

Assim, ΔE_{II} vem:

$$\Delta E_{II} = (gH_1 + gH_2) - g \left(\frac{v_3^2}{2g} + h_1 + h_2 \right)$$

4.3.3 Linhas de carga e piezométricas em instalações de máquinas hidráulicas

É interessante fazer o estudo de um circuito hidráulico através da análise da transferência de potência hidráulica em substituição da análise de equilíbrio de energia (Vasconcelos, 2005).

Considere o circuito hidráulico constituído por dois reservatórios de grandes dimensões com uma conduta que liga os dois reservatórios e que permite o transporte de um caudal (Q) do reservatório de montante (R_1) para o reservatório de jusante (R_2), Figura 87 (Vasconcelos, 2005).

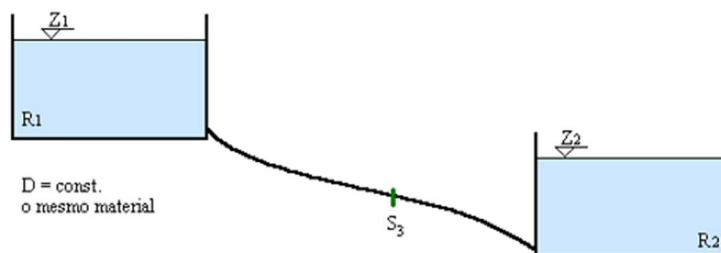


Figura 87 – Circuito hidráulico (Vasconcelos, 2005).

A potência hidráulica do líquido no reservatório de montante (grandes dimensões), é:

$$P_{esc1} = \gamma Q H_1$$

Em que a carga no reservatório é igual à cota topográfica da superfície livre no reservatório de grandes dimensões porque a velocidade do líquido é nula dentro do

reservatório, verificando-se a **Lei Hidrostática de Pressões**. Se a cota piezométrica é constante também é igual à cota piezométrica à superfície livre que, por ter uma pressão nula, iguala a cota topográfica (Vasconcelos, 2005).

Do mesmo modo, no reservatório de grandes dimensões de jusante a potência hidráulica do líquido é:

$$P_{esc2} = \gamma Q H_2$$

A potência do líquido numa secção da conduta (**S₃**) é:

$$P_{esc3} = \gamma Q H_3$$

Em que:

$$H_3 = Z_3 + \beta \frac{p_3}{\gamma} + \alpha \frac{U_3^2}{2g}$$

A potência do escoamento, necessária para o transporte do caudal **Q** entre os dois reservatórios, é:

$$P_{esc\Delta H} = \gamma Q \Delta H$$

Em que ΔH é a perda de carga ao longo do percurso, entre o reservatório de montante e o reservatório de jusante.

Podem ocorrer dois casos (Vasconcelos, 2005):

- **1º Caso** (Figura 88) – Se $\Delta H > H_1 - H_2 \rightarrow$ é necessário instalar uma bomba que transmite ao escoamento uma potência correspondente a uma carga, designada por altura total de elevação da bomba, igual a:

$$H_t = \Delta H - (H_1 - H_2) = H_s - H_e$$

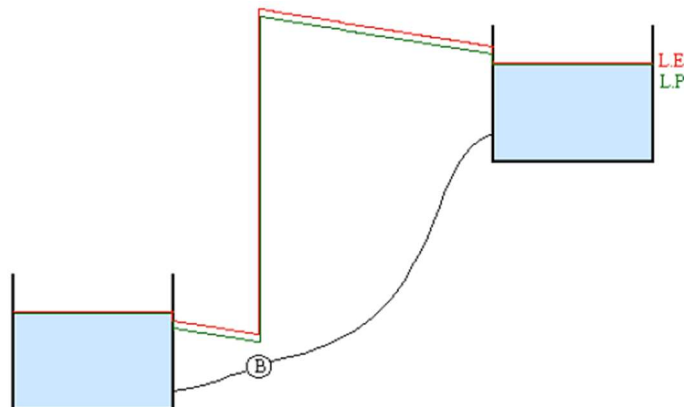


Figura 88 – Linha de energia e linha piezométrica no circuito hidráulico-conduta elevatória (Vasconcelos, 2005).

A potência transmitida pela bomba ao escoamento é:

$$P_{B-esc} = \gamma Q H_t$$

E a potência da bomba é superior, tendo em atenção as perdas na bomba:

$$P_B = \frac{\gamma Q H_t}{\eta_B}$$

A potência necessária no motor da bomba é:

$$P_m = \frac{\gamma Q H_t}{\eta_m \eta_B}$$

- **2º Caso** – Se $\Delta H < H_1 - H_2 \rightarrow$ pode ser instalada uma turbina (Figura 89) que recebe do escoamento uma potência correspondente a uma carga, designada por queda útil, igual a:

$$H_u = (H_1 - H_2) - \Delta H = H_e - H_s$$

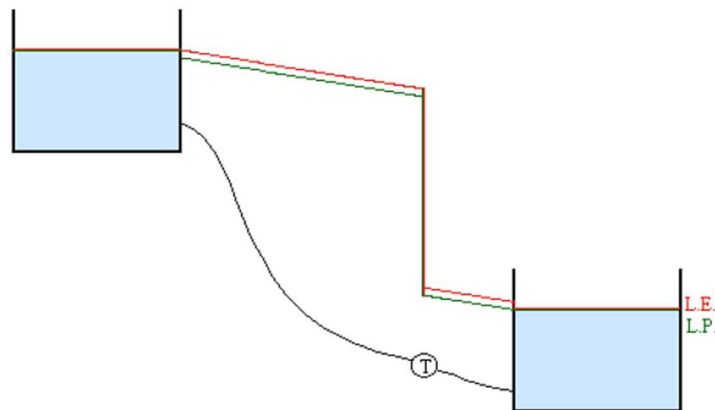


Figura 89 – Linha de energia e linha piezométrica no circuito hidráulico-conduta gravítica com turbina (Vasconcelos, 2005).

A potência recebida pela turbina a partir do escoamento é:

$$P_{esc-T} = \gamma Q H_u$$

A potência da turbina é inferior, tendo em atenção as perdas na transformação (na turbina):

$$P_T = \eta_T \gamma Q H_u$$

4.3.4 Ocorrência de cavitação

Cavitação é o nome que se dá ao fenómeno de vaporização de um líquido pela redução da pressão, durante o seu movimento (Figura 90) (Oliveira, 2007).



Figura 90 – Modelo de propulsor gerando cavitação num túnel de água experimental (<https://commons.wikimedia.org>).

Para todo o fluido no estado líquido pode ser estabelecida uma curva que relaciona a pressão com a temperatura em que ocorre a vaporização. Por exemplo: à pressão atmosférica, a temperatura de vaporização da água é cerca de 100°C. Contudo, a uma pressão menor, a temperatura de vaporização também se reduz (Oliveira, 2007).

Aplicação do Teorema de Bernoulli

É fato sabido e previsível, com a ajuda do Teorema de Bernoulli, que um fluido escoando, ao ser acelerado, tem uma redução da pressão, para que a sua energia mecânica se mantenha constante. Considere-se um fluido no estado líquido escoando a uma temperatura T_0 e a uma pressão P_0 (Oliveira, 2007).

Em certos pontos devido à aceleração do fluido, como num vertedor, turbina hidráulica, bomba hidráulica, bocal ou válvula, a pressão pode cair até um valor menor que a pressão mínima em que ocorre a vaporização do fluido (P_v) na temperatura T_0 . Então ocorrerá uma vaporização local do fluido, formando bolhas de vapor. A este fenómeno dá-se o nome de **cavitação** (formação de cavidades dentro da massa líquida) (Oliveira, 2007).

A cavitação é comum em bombas de água e de óleo, válvulas, turbinas hidráulicas, propulsores navais, pistões de automóveis e até em canais de betão com altas velocidades, como em vertedores de barragens (Oliveira, 2007).

Como tal, deve ser sempre evitada por causa de prejuízos financeiros, devido à erosão associada, seja nas pás de turbinas (Figura 91), de bombas, em pistões ou em canais (Oliveira, 2007).



Figura 91 – Danos causados por cavitação numa Turbina Francis (<https://commons.wikimedia.org>).

Estas bolhas de vapor que se formaram no escoamento devido à baixa pressão, serão carregadas e podem chegar a uma região em que a pressão cresça novamente a um valor superior à P_v . Então ocorrerá a "implosão" dessas bolhas. Se a região de colapso das bolhas for próxima a uma superfície sólida, as ondas de choque geradas pelas implosões sucessivas das bolhas podem provocar trincas microscópicas no material, que com o tempo irão crescer e provocar o descolamento de material da superfície, originando uma cavidade de erosão localizada. Este é um fenómeno físico molecular, que se dissemina e tende a aumentar com o tempo, causando a ruína dos rotores (Oliveira, 2007).

Na prática

Na **engenharia hidráulica** e na engenharia mecânica é grande a preocupação com a cavitação, assim como com a abrasão das areias e demais sedimentos transportados pela água no interior de bombas e turbinas, sobretudo devido aos prejuízos que podem causar nas estações elevatórias e nas turbinas e vertedores das centrais hidroelétricas (Netto, 1998).

Não se deve confundir o fenómeno químico da corrosão com os fenómenos físicos da cavitação e da abrasão, embora os efeitos nas pás de bombas e de turbinas sejam parecidos, assim como nas superfícies de betão dos canais dos vertedores (Netto, 1998).

Identificação

Nos espectros de vibração (Figura 92), identifica-se a cavitação pelo surgimento de sinais aleatórios (sinais sem definição exata), na região de baixa frequência (80 a 200 Hz) nos espectros de velocidade e, em alta frequência nos espectros de aceleração (Oliveira, 2007).

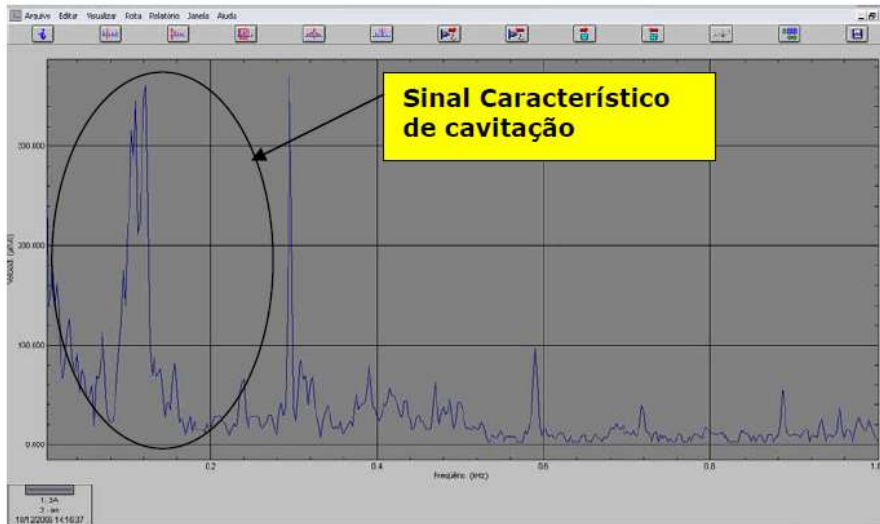


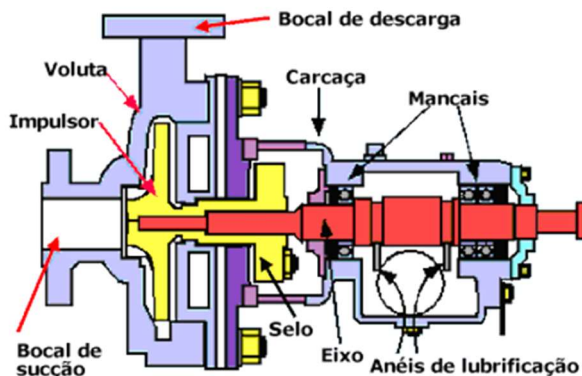
Figura 92 – Espectro de vibração coletado no mancal de uma bomba (Oliveira, 2007).

Pelo aspeto sensitivo, identifica-se a cavitação através de ruídos fortes na voluta da bomba, causando a impressão de que ela esteja bombeando corpos sólidos como pedra, por exemplo (Figura 93) (Oliveira, 2007).



Figura 93 – Rotor danificado pela cavitação, pertencente a uma bomba de água (Oliveira, 2007).

A título de esclarecimento, o **mancal** (Figura 94) é um dispositivo mecânico fixo, em geral em ferro fundido ou aço, e antigamente também de madeira, onde se apoia um eixo, girante, deslizante ou oscilante.



Bomba Centrífuga

Figura 94 – Esquema de bomba centrífuga (<http://www.ebah.com.br>) e Mancal (<https://commons.wikimedia.org>).

CAPÍTULO 5 - TEOREMA DA QUANTIDADE DE MOVIMENTO E SUAS APLICAÇÕES

5.1 Expressão do teorema da quantidade de movimento

Nos problemas de hidráulica, em que se pretende **determinar as forças que o fluido exerce sobre a fronteira sólida, não é suficiente a aplicação da Equação da Continuidade (Princípio da Conservação da Massa) e do Teorema de Bernoulli (Princípio da Conservação da Energia)** sendo necessária a dedução de uma **equação que considere o equilíbrio das forças que atuam sobre um dado volume de fluido (Teorema da Quantidade de Movimento ou Teorema de Euler)** (Vasconcelos, 2005).

O **Teorema da Quantidade de Movimento** permite determinar os esforços sobre a fronteira sólida em contacto com o fluido permitindo, no caso particular de escoamentos permanentes, a caracterização do escoamento com base, apenas, no conhecimento do que se passa na fronteira (Vasconcelos, 2005).

O **Teorema da Quantidade de Movimento** em conjunto com o Teorema de Bernoulli e a Equação da Continuidade permitem resolver qualquer problema no âmbito da hidráulica, com base na caracterização de um dado volume no domínio fluido (Vasconcelos, 2005).

5.1.1 Princípio da quantidade de movimento aplicado à mecânica dos fluidos

Atendendo a Vasconcelos (2005), a Equação de Euler, equação de equilíbrio dinâmico aplicada a líquidos perfeitos:

$$\vec{g} - \frac{1}{\rho} \overrightarrow{\text{grad}} p - (\vec{v} | \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v} = \vec{0}$$

E a Equação da Continuidade:

$$\text{div } \rho \vec{v} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

Constituem um sistema de duas equações que, na forma tensorial, se representa por:

$$\begin{cases} \rho g_i - \frac{\partial p}{\partial x_j} - \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} - \rho v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = 0 \\ \frac{\partial \rho v_j}{\partial x_j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \end{cases}$$

Com base na definição de derivada de um produto, a terceira e quarta parcelas da Equação de Euler podem ser substituídas pelas seguintes equações:

$$\begin{cases} 3^{\text{a}} \text{ parcela: } \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} = \frac{\partial \rho v_i}{\partial t} - v_i \frac{\partial \rho}{\partial t} \\ 4^{\text{a}} \text{ parcela: } \rho v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \frac{\partial \rho v_i v_j}{\partial x_j} - v_i \frac{\partial \rho v_j}{\partial x_j} \end{cases}$$

Obtém-se assim a Equação de Euler na forma:

$$\begin{aligned} \rho g_i - \frac{\partial p}{\partial x_j} &= \left(\frac{\partial \rho v_i}{\partial t} - v_i \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) + \left(\frac{\partial \rho v_i v_j}{\partial x_j} - v_i \frac{\partial \rho v_j}{\partial x_j} \right) \Rightarrow \\ \Rightarrow \rho g_i - \frac{\partial p}{\partial x_j} &= \frac{\partial \rho v_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho v_i v_j}{\partial x_j} - v_i \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho v_j}{\partial x_j} \right) \end{aligned}$$

O termo dentro de parênteses na equação anterior anula-se se verificada a Equação da Continuidade, obtendo-se a equação simplificada:

$$\rho g_i - \frac{\partial p}{\partial x_j} = \frac{\partial \rho v_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho v_i v_j}{\partial x_j}$$

A integração da equação anterior num dado volume de fluido, volume de controlo, e a aplicação do Teorema da Divergência de Gauss aos segundos termos dos dois membros, surgindo dois integrais na superfície fronteira do volume de controlo, superfície de controlo, permite obter a equação:

$$\int_V \rho g_i \, dV + \int_S -p n_j \, dS = \int_V \frac{\partial \rho v_i}{\partial t} \, dV + \int_S \rho v_i v_j n_j \, dS$$

A equação anterior representa a **Equação do Teorema da Quantidade de Movimento, na forma integral aplicada aos líquidos perfeitos**. Em **notação vetorial**, representa-se por:

$$\int_V \rho \vec{g} \, dV + \int_S -p \vec{n} \, dS = \int_V \frac{\partial \rho \vec{v}}{\partial t} \, dV + \int_S \rho \vec{v} (\vec{v} | \vec{n}) \, dS = 0$$

Interpretação do Teorema da Quantidade de Movimento (Vasconcelos, 2005)

- $\int_V \rho \vec{g} \, dV$, forças de massa que atuam sobre o fluido contido no interior da superfície de controlo, \vec{G} ;
- $\int_S -p \vec{n} \, dS$, impulsão exercida, ao longo da superfície de controlo, pelo fluido circundante ou por paredes sólidas (positivo quando dirigido para fora). Neste termo, de modo a generalizar a aplicação da equação deduzida a líquidos reais,

têm que ser incluídas as parcelas correspondentes às tensões tangenciais na superfície de controlo, $\vec{\Pi}$;

- $\int_V \partial \rho \vec{v} / \partial t \, dV$, força local de inércia (anula-se para escoamentos permanentes), \vec{I} ;
- $\int_S \rho \vec{v} (\vec{v} \cdot \vec{n}) \, dS$, quantidade de movimento através de toda a superfície de controlo, na unidade de tempo, ou seja, a quantidade de movimento que sai menos a quantidade de movimento que entra na superfície de controlo, por unidade de tempo. O integral afetado pelo sinal negativo, corresponderá à quantidade de movimento que entra menos a quantidade de movimento que sai pela superfície de controlo, $\vec{M}_e - \vec{M}_s$.

De **modo simplificado**, o **Teorema da Quantidade de Movimento**, pode ser escrito:

$$\vec{G} + \vec{\Pi} + \vec{I} + \vec{M}_e - \vec{M}_s = \vec{0}$$

5.1.2 Teorema da quantidade de movimento aplicado a um tubo de corrente

A equação da quantidade de movimento nada mais é que a segunda Lei de Newton da dinâmica modificada funcionalmente para o estudo da Mecânica dos Fluidos. Segundo essa lei, a aceleração de uma certa massa implica a existência de uma força resultante sobre ela que tem, em cada instante, a direção e o sentido da aceleração. Acelerar uma massa significa modificar a sua velocidade em módulo e/ou direção e, por essa observação, para que a velocidade de um fluido seja modificada em módulo ou direção, será necessário aplicar uma força provocada por algum agente externo, em geral, uma superfície sólida em contato com o escoamento (Brunetti, 2008).

Pelo princípio da ação e reação, se a superfície aplica uma força no fluido, este aplicará, sobre a superfície, uma outra de mesmo módulo e de sentido contrário. A observação desses fatos permitirá a construção da equação da quantidade de movimento, nos moldes desejados (Brunetti, 2008). Seja a segunda Lei de Newton da dinâmica:

$$\vec{F} = m\vec{a} = m \frac{d\vec{v}}{dt}$$

Note-se que esta equação deve ser mantida na forma vetorial, pois a velocidade pode variar em direção sem que seja alterado o seu módulo. Ainda, esta equação é estabelecida para um sistema que tem, por definição, massa constante; logo, pode-se escrever (Brunetti, 2008):

$$\vec{F} = \frac{d}{dt} (m\vec{v})$$

Como $m\vec{v}$ é, por definição, a quantidade de movimento do sistema, então pode-se dizer que a força resultante, que age no sistema em estudo, é igual à variação com o tempo da quantidade de movimento do sistema (Brunetti, 2008).

Esse é o teorema estabelecido na Mecânica e que deverá ser aproveitado para a determinação das forças dinâmicas em estudo. Neste subcapítulo a equação da quantidade de movimento será estabelecida para um tubo de corrente e para a hipótese de regime permanente (Braga, 2014).

Como já demonstrado no subcapítulo 2.1.4, a aceleração ($\vec{a} = d\vec{v}/dt$) deve ser compreendida como uma variação local com o tempo ($\partial\vec{v}/\partial t$, variação da velocidade no tempo), mais uma variação de transporte de um ponto a outro do fluido (variação da velocidade no espaço). Quando o regime é permanente, as propriedades não variam em cada ponto com o tempo, mas podem variar no espaço. A variação da quantidade de movimento no caso da Figura 95 deve então ser entendida como uma variação entre as secções (1) e (2) (Brunetti, 2008).

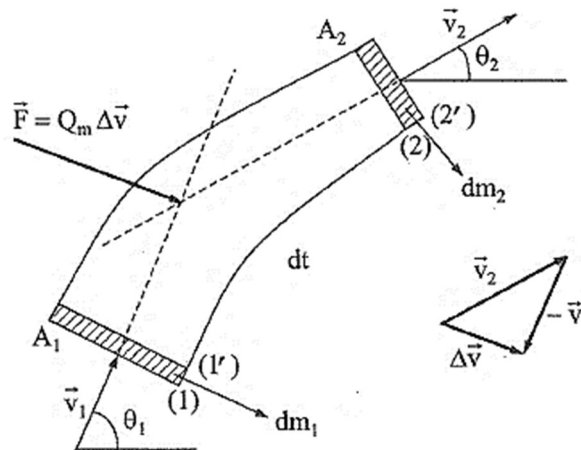


Figura 95 – Tubo de corrente (Brunetti, 2008).

Admitindo propriedades uniformes na secção, no intervalo de tempo dt , a massa de fluido que atravessa a secção (1) com velocidade \vec{v}_1 será dm_1 , provocando um aumento da quantidade de movimento do fluido entre as secções (1) e (2) de $dm_1\vec{v}_1$ (Brunetti, 2008).

No mesmo intervalo de tempo, através da secção (2) existe a saída de uma quantidade de movimento $dm_2\vec{v}_2$. Logo a variação da quantidade de movimento entre (1) e (2) será $dm_2\vec{v}_2 - dm_1\vec{v}_1$. Pelo teorema da quantidade de movimento, a força resultante que age no fluido entre as secções (1) e (2) será (Brunetti, 2008):

$$\vec{F} = \frac{dm_2\vec{v}_2}{dt} - \frac{dm_1\vec{v}_1}{dt} = Q_{m2}\vec{v}_2 - Q_{m1}\vec{v}_1$$

Por outro lado, como o regime é permanente, então:

$$Q_{m1} = Q_{m2} = Q_m$$

E, portanto:

$$\vec{F} = Q_m(\vec{v}_2 - \vec{v}_1) = Q_m\Delta\vec{v}$$

A equação anterior mostra também que \vec{F} tem a direção de $\Delta\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$, e o ponto de aplicação pode ser encontrado na interseção das direções de \vec{v}_2 e \vec{v}_1 (Figura 95). Ainda permite determinar a força resultante que age no fluido entre (1) e (2), o que normalmente não é o objetivo principal (Brunetti, 2008).

Vamos analisar as forças componente da resultante \vec{F} (Figura 96).

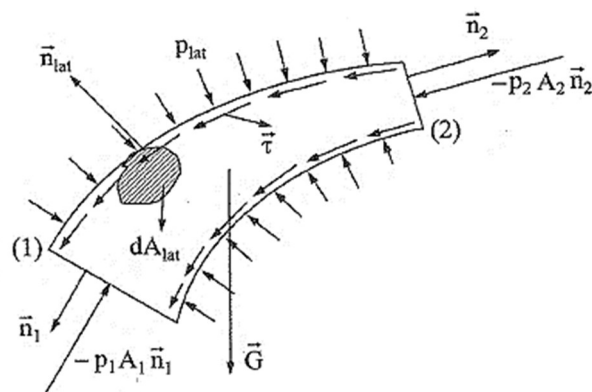


Figura 96 – Pressões, tensões e campo de gravidade (Brunetti, 2008).

O fluido entre (1) e (2) está sujeito a forças de contato normais (de pressão) e tangenciais (tensões de cisalhamento) e à força de campo causada pelo campo de gravidade, que é o peso (\vec{G}) (exclui-se a existência de outros campos) (Brunetti, 2008).

Nas secções (1) e (2), o fluido a montante e a jusante do tubo de corrente ((1) – (2)) aplica pressões nessas secções contra o fluido contido entre elas (Brunetti, 2008).

As forças devidas às pressões nas secções (1) e (2) são, respetivamente, p_1A_1 e p_2A_2 em módulo. Para a determinação dos vetores das forças nessas duas secções, adotam-se versores normais a elas, com sentido para fora do tubo de corrente, por convenção. Dessa forma, as forças que agem no fluido nas secções (1) e (2) serão, respetivamente, $-p_1A_1\vec{n}_1$ e $-p_2A_2\vec{n}_2$, onde os sinais negativos se devem à convenção adotada para as normais, como se observa na Figura 96 (Brunetti, 2008).

Na superfície lateral, o fluido está sujeito a pressões e também a tensões de cisalhamento devidas ao seu movimento em contato com o meio (Brunetti, 2008).

Essas pressões e tensões de cisalhamento podem variar de um ponto para outro da superfície lateral. A resultante das pressões pode ser obtida adotando-se em cada ponto uma normal dirigida para fora, conforme a convenção adotada (Brunetti, 2008). A resultante em cada elemento (dA_{lat}) no contorno de um ponto da superfície lateral será:

$$d\vec{F}'_s = -p_{lat}\vec{n}_{lat}dA_{lat} + \vec{\tau}dA_{lat}$$

Logo, a força resultante das pressões e tensões de cisalhamento na superfície lateral será:

$$\vec{F}'_s = \int -p_{lat}\vec{n}_{lat}dA_{lat} + \int \vec{\tau}dA_{lat}$$

Uma vez definida essa resultante, a Figura 96 pode ser reduzida à Figura 97 (Brunetti, 2008).

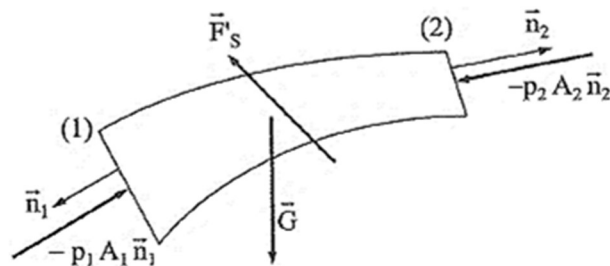


Figura 97 – Componentes da força resultante (Brunetti, 2008).

Pelo exposto, a força (\vec{F}) resultante que age no fluido entre (1) e (2) será a soma das componentes representadas na Figura 97 (Brunetti, 2008). Logo:

$$\vec{F} = \vec{F}'_s + (-p_1A_1\vec{n}_1) + (-p_2A_2\vec{n}_2) + \vec{G}$$

Mas $\vec{F} = Q_m(\vec{v}_2 - \vec{v}_1)$, então:

$$\vec{F}'_s - p_1A_1\vec{n}_1 - p_2A_2\vec{n}_2 + \vec{G} = Q_m(\vec{v}_2 - \vec{v}_1)$$

Em geral, o interesse por esta equação corresponde aos casos em que o fluido está em contato com uma superfície sólida, na superfície lateral entre (1) e (2). Nessa condição, a força \vec{F}'_s representaria a resultante das forças de contato da superfície sólida contra o fluido (Brunetti, 2008). Isolando esse termo na equação anterior, obtém-se:

$$\vec{F}'_s = p_1A_1\vec{n}_1 + p_2A_2\vec{n}_2 + Q_m(\vec{v}_2 - \vec{v}_1) - \vec{G}$$

Na prática, normalmente, interessa determinar a força que o fluido aplica na superfície sólida com a qual está em contato entre as secções (1) e (2). Como \vec{F}'_s representa a força resultante da superfície sólida no fluido, então, pelo princípio da ação e reação, a força \vec{F}_s que o fluido aplica na superfície sólida será (Brunetti, 2008):

$$\vec{F}_s = -\vec{F}'_s = -[p_1A_1\vec{n}_1 + p_2A_2\vec{n}_2 + Q_m(\vec{v}_2 - \vec{v}_1)] + \vec{G}$$

Para facilidade de cálculo, não será levado em consideração o peso do fluido (\vec{G}); entretanto, note-se que nem sempre esse termo pode ser considerado desprezável e

nas aplicações práticas deverá, às vezes, ser calculado. Pelo exposto, a equação anterior será daqui em diante usada na forma (Brunetti, 2008):

$$\vec{F}_s = -[p_1 A_1 \vec{n}_1 + p_2 A_2 \vec{n}_2 + Q_m(\vec{v}_2 - \vec{v}_1)]$$

5.2 Aplicações do teorema da quantidade de movimento

A equação que define \vec{F}_s não é aplicada na forma vetorial. Normalmente adotam-se eixos convenientes e, para a solução do problema, os vetores da equação são projetados na direção deles (Brunetti, 2008).

Todos os vetores da equação serão, então, projetados na direção desses eixos, determinando-se as componentes da força \vec{F}_s nessas direções (Brunetti, 2008).

Se o resultado final for a determinação da força \vec{F}_s , essas duas componentes poderão ser compostas vectorialmente para a sua obtenção (Brunetti, 2008).

5.2.1 Conduto com redução gradual de secção

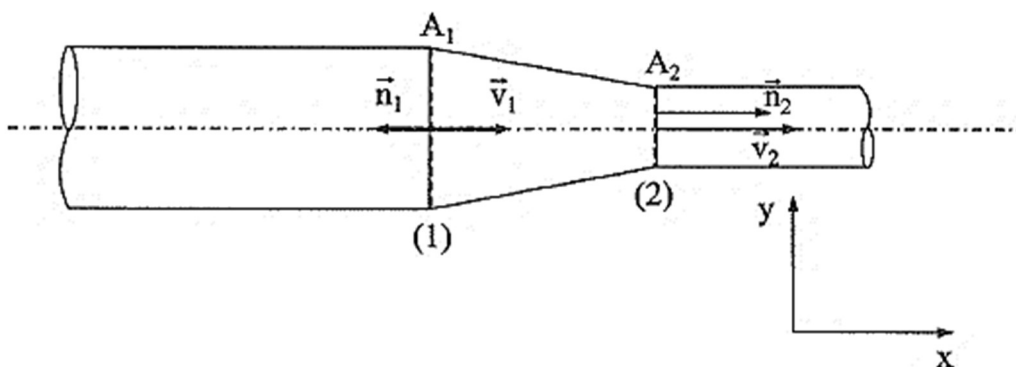


Figura 98 – Conduto com redução gradual de secção (Brunetti, 2008).

Considerando a conduta representada na figura anterior, suponha-se o fluido incompressível, as propriedades uniformes nas secções e o regime permanente. Será determinado o esforço horizontal do fluido sobre a conduta. Tal força, serviria por exemplo, para dimensionar algum sistema para a sua fixação. Para o trecho (1)–(2) pode-se escrever:

$$\vec{F}_s = -[p_1 A_1 \vec{n}_1 + p_2 A_2 \vec{n}_2 + Q_m(\vec{v}_2 - \vec{v}_1)]$$

Projetando na direção de x:

$$\begin{aligned} F_{sx} &= -[p_1 A_1 (-1) + p_2 A_2 (+1) + Q_m(v_2 - v_1)] \Rightarrow \\ &\Rightarrow F_{sx} = p_1 A_1 - p_2 A_2 + \rho Q(v_1 - v_2) \end{aligned}$$

Note-se que a vantagem desse método é relativa ao fato de que o estudo é realizado inteiramente nas secções de entrada e saída da conduta, sem a preocupação com a distribuição intermediária das forças. Como nenhum dos vetores da figura tem componentes na direção y , $F_{sy} = 0$ (deve-se ao fato de não considerar \vec{G}) (Brunetti, 2008).

5.2.2 Redução de secção e mudança de direção

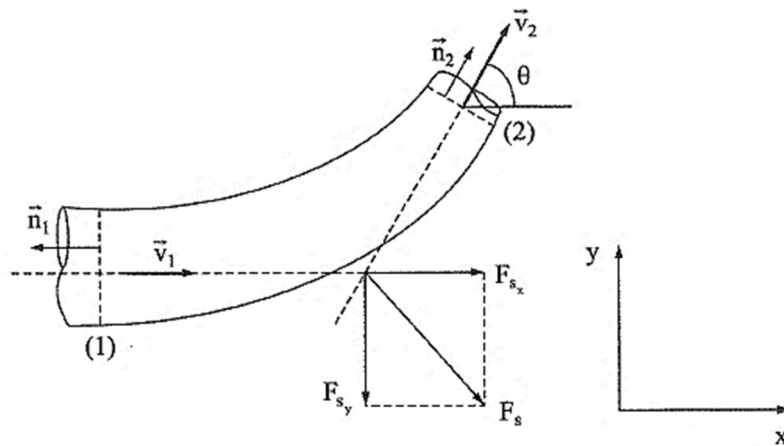


Figura 99 – Redução de secção e mudança de direção (Brunetti, 2008).

Admitindo as mesmas hipóteses anteriores:

$$\vec{F}_s = -[p_1 A_1 \vec{n}_1 + p_2 A_2 \vec{n}_2 + Q_m (\vec{v}_2 - \vec{v}_1)]$$

Projetando segundo x :

$$F_{sx} = -[p_1 A_1 (-1) + p_2 A_2 \cos \theta + Q_m (v_2 \cos \theta - v_1)] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F_{sx} = p_1 A_1 - p_2 A_2 \cos \theta + \rho Q (v_1 - v_2 \cos \theta)$$

Projetando segundo y :

$$F_{sy} = -[0 + p_2 A_2 \sin \theta + Q_m (v_2 \sin \theta - 0)] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F_{sy} = -p_2 A_2 \sin \theta - \rho Q v_2 \sin \theta$$

Note-se que compondo \vec{F}_{sx} e \vec{F}_{sy} pode ser obtida a força resultante do fluido sobre a conduta, isto é (Brunetti, 2008):

$$F_s = \sqrt{F_{sx}^2 + F_{sy}^2}$$

5.2.3 Ação de um jato sobre uma superfície curva fixa

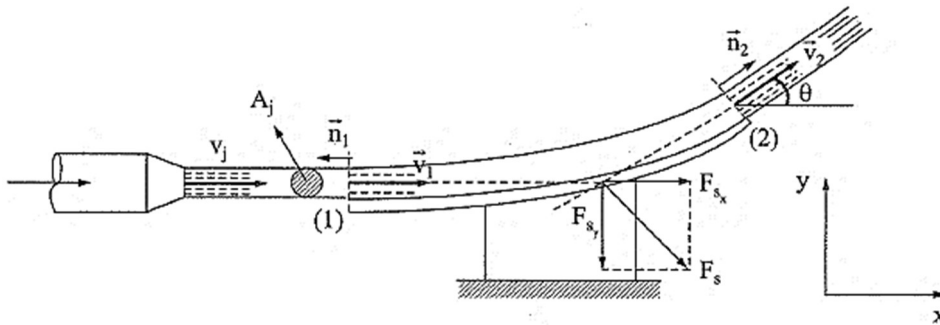


Figura 100 – Jato incidindo numa placa curva (Brunetti, 2008).

Este caso tem aplicação, por exemplo, em pás de turbinas. O fluido lançado contra o desviador sofre uma deflexão provocada por este (Brunetti, 2008).

Note-se que, pela dedução da equação que define \vec{F}_s é produzida no contato do fluido com o ar, já que entre (1) e (2) o fluido não está totalmente envolvido pela superfície sólida (Brunetti, 2008).

A pressão na escala efetiva é nula; no entanto, o efeito do atrito do ar existe. Logo, se \vec{F}_s deve ser a resultante da força que o fluido aplica no anteparo, deve-se desprezar o atrito com o ar (Brunetti, 2008). Então:

$$\vec{F}_s = -[p_1 A_1 \vec{n}_1 + p_2 A_2 \vec{n}_2 + Q_m(\vec{v}_2 - \vec{v}_1)]$$

Como em (1) e (2) o jato é livre à pressão atmosférica, $p_1 = p_2 = 0$, logo:

$$\vec{F}_s = Q_m(\vec{v}_1 - \vec{v}_2)$$

Projetando segundo x:

$$F_{s_x} = Q_m(v_1 - v_2 \cos \theta)$$

Projetando segundo y:

$$F_{s_y} = Q_m(0 - v_2 \sin \theta) = -Q_m v_2 \sin \theta$$

É normal, neste tipo de aplicação, desprezar o atrito do fluido na superfície sólida e a diferença de cotas entre (1) e (2), resultado em $v_1 = v_2 = v_j$ (velocidade do jato). Logo:

$$F_{s_x} = \rho A_j v_j^2 (1 - \cos \theta) \wedge F_{s_y} = -\rho A_j v_j^2 \sin \theta$$

A força \vec{F}_s é obtida pela composição de \vec{F}_{s_x} e \vec{F}_{s_y} , e seu ponto de aplicação estará no encontro das direções dos vetores da velocidade (Brunetti, 2008).

5.2.4 Ação de um jato sobre uma superfície plana

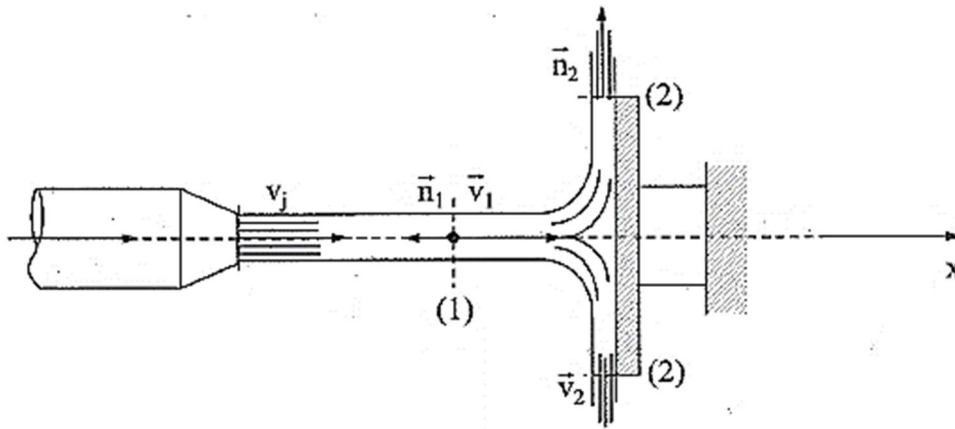


Figura 101 – Jato incidindo numa placa plana (Brunetti, 2008).

Considere que o jato, ao atingir o anteparo, seja espalhado uniformemente, em todas as direções (Brunetti, 2008). A velocidade v_2 não terá, portanto, componente segundo x . como a pressão é atmosférica, obtém-se:

$$F_{s_x} = \rho Q v_1$$

5.2.5 Forças em superfícies sólidas móveis

Em muitos problemas, o objetivo é determinar a ação de fluidos em superfícies sólidas em movimento. Neste subcapítulo serão considerados somente movimentos retilíneos e uniformes das superfícies, para não haver preocupações com forças de inércia devidas às acelerações (Brunetti, 2008).

Com essa hipótese, o problema será resolvido de forma bastante simples, pois bastará realizar o estudo em relação a um sistema de referência fixo na superfície sólida em movimento (Brunetti, 2008).

Desta forma, a superfície sólida será novamente observada em repouso e o fluido terá a sua velocidade alterada em relação àquela vista do sistema de referência inercial (Brunetti, 2008).

Nesse caso, a variação da velocidade deverá ser estudada a partir do sistema de referência fixo à superfície sólida. Vejamos como se alteram as expressões antes de estabelecidas, quando a superfície sólida está em movimento (Brunetti, 2008).

Para o estudo, será adotado um caso particular para maior facilidade de compreensão. Seja na Figura 102 o desviador de jato em movimento com velocidade (\vec{v}_s) constante (Brunetti, 2008).

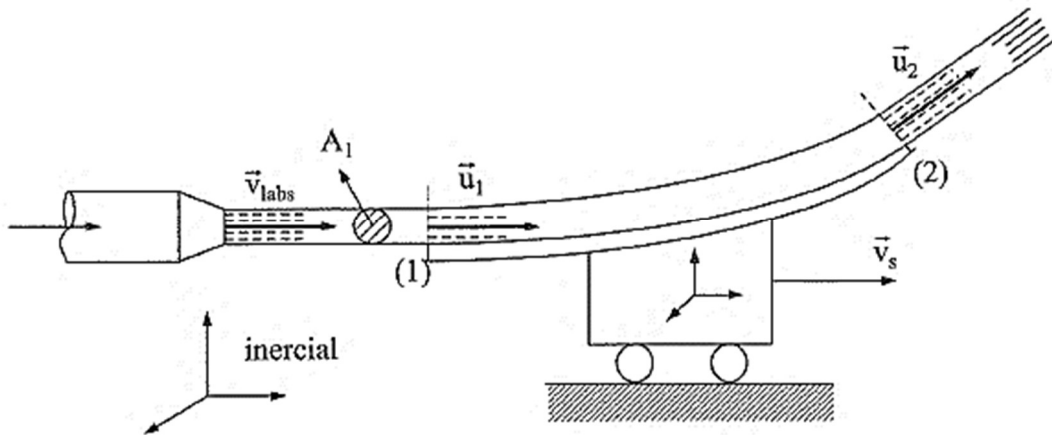


Figura 102 – Jato incidindo numa placa curva em movimento (Brunetti, 2008).

Sabe-se da Mecânica que $\vec{v}_{abs} = \vec{u} + \vec{v}_s$, onde:

\vec{v}_{abs} é a velocidade absoluta, em relação ao sistema inercial;

\vec{v}_s é a velocidade de arrastamento ou velocidade da origem do sistema de referência fixo na superfície sólida, neste caso, o desviador de jato;

\vec{u} é a velocidade relativa ou velocidade em relação ao sistema de referência móvel, neste caso, é a velocidade do jato em relação ao desviador.

A força do desviador contra o jato de fluido lançado pelo bocal será função da velocidade relativa (\vec{u}). A visualização desta afirmação é simples, já que, se o desviador estiver com uma velocidade maior que o jato de fluido, por exemplo, a força será nula; se o desviador tiver velocidade nula, a força será maior do que se ele se afastasse com uma certa velocidade do jato. No caso em que a superfície sólida esteja parada, já foi visto que vale o resultado do subcapítulo 5.2.3 (Brunetti, 2008).

Nesta aplicação particular, o caudal do jato lançado pelo bocal é $Q_m = \rho A_1 v_1$, mas a superfície sólida, devido ao seu movimento, não é atingida por esse caudal (Brunetti, 2008). O que incidirá sobre a superfície sólida será um caudal aparente dado por:

$$Q_{map} = \rho A_1 (v_{abs_1} - v_s) = \rho A_1 u_1$$

Logo, a equação que define \vec{F}_s ficará, para o caso do movimento relativo:

$$\vec{F}_s = Q_{map} (\vec{u}_1 - \vec{u}_2)$$

Pode-se verificar que, com a hipótese de movimento retilíneo e uniforme da superfície sólida, todas as expressões continuam válidas, desde que seja utilizada a velocidade relativa $\vec{u} = \vec{v}_{abs} - \vec{v}_s$ e Q_{map} no lugar de Q_m (Brunetti, 2008). Assim, de uma forma geral,

$$\vec{F}_s = - \left[p_1 A_1 \vec{n}_1 + p_2 A_2 \vec{n}_2 + Q_{map} (\vec{u}_1 - \vec{u}_2) \right]$$

5.2.6 Teorema de Kutta-Joukowski

Baseado na literatura de Pontes & Mangiavacchi (2013), o **Teorema de Kutta-Joukowski** é um teorema fundamental da aerodinâmica. O nome provém do cientista alemão Martin Wilhelm Kutta e do cientista russo Nikolai Joukowski (ou Zhukovsky), pioneiros no desenvolvimento das suas ideias-chave no início dos anos 1920.

O teorema diz que a sustentação gerada por um cilindro é proporcional à velocidade do cilindro através do fluido, da densidade do fluido e da circulação. A circulação é definida como a integral de linha, em torno de um ciclo fechado envolvendo o cilindro ou aerofólio, da componente da velocidade tangente do fluido para o *loop*. A magnitude e direção da velocidade do fluido varia ao longo do caminho.

O fluxo de ar em resposta à presença do aerofólio pode ser tratado como a superposição de um fluxo de translação e um fluxo de rotação (Figura 103). É, porém, errado pensar que existe um vórtice cercado o cilindro ou a asa de um avião em voo. É o caminho do integral que circunda o cilindro, não um vórtice de ar. (Em descrições do teorema de Kutta-Joukowski o aerofólio é geralmente considerado como um cilindro circular ou algum aerofólio Joukowski).

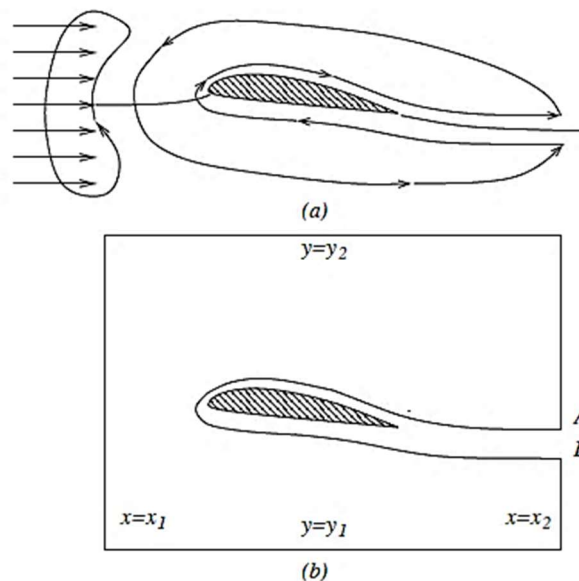


Figura 103 – (a): Evolução de uma massa de fluido ao encontrar o corpo; (b): Volume de controlo usado na determinação da força de sustentação atuando sobre o corpo (Pontes & Mangiavacchi, 2013).

O teorema refere-se ao fluxo de duas dimensões em torno de um cilindro (ou um cilindro de envergadura infinita) e determina a sustentação gerada por uma unidade de comprimento. Quando a **circulação Γ_∞** é conhecida, a **sustentação L** , por unidade de comprimento do cilindro (N/m, no SI) pode ser calculada de acordo com a seguinte equação (forma do teorema de Kutta-Joukowski):

$$L = \rho_\infty V_\infty \Gamma_\infty$$

Onde são ρ_∞ e V_∞ são, respetivamente, a densidade do fluido e a velocidade a montante do cilindro, e Γ_∞ é a circulação definida como integral de linha:

$$\Gamma_\infty = \oint_{C_\infty} V \cos \theta \, ds$$

Em torno de um caminho C_∞ (no plano complexo) longe e circundando o cilindro ou aerofólio. Esse caminho deve ser em uma região do escoamento potencial e não na camada limite do cilindro. O termo $V \cos \theta$ é a componente local da velocidade tangente e na direção da curva C_∞ que circunda o cilindro, e ds é o comprimento infinitesimal dessa curva.

CAPÍTULO 6 - ESCOAMENTOS POR ORIFÍCIOS E DESCARREGADORES

6.1 escoamentos por orifícios

O escoamento por orifícios é um assunto de grande importância na Hidráulica, em aplicações como (Silva, 2014):

- Controlo de caudal em geral (medidores de caudal, de efluentes industriais e de cursos de água);
- Tomadas de água em sistemas de abastecimento;
- Projetos de irrigação e drenagem;
- Bacias de retenção para controlo de cheias urbanas;
- Projetos hidroelétricos;
- Estações de tratamento de água e de esgotos;
- Amortecedores de choques em carros e aviões e nos mecanismos de recuo dos canhões;
- Sistema de alimentação de combustíveis de veículos automotores;
- Queimadores industriais e em fogões domésticos;
- Irrigação por aspersão.

Alguns conceitos úteis na compreensão da matéria (Silva, 2014):

- **Orifícios** - toda abertura, de perímetro fechado, de forma geométrica definida, praticada na parede, fundo de um reservatório ou conduta sob pressão, que contenha um líquido ou gás, através do qual se dá o escoamento;
- **Comporta** - é uma peça adaptada aos orifícios, com um dos lados sujeito a um escoamento livre e com abertura variável;
- **Adufa** - são orifícios com contração incompleta, abertos em reservatórios, barragens ou canais, cuja abertura ou fechamento podem ser graduados através de superfície móvel;
- **Bocal** - Peça adaptada à parede ou ao fundo do recipiente ou do tubo, destinadas a dirigir o jato. O escoamento através destes dispositivos tem o mesmo fundamento teórico do escoamento através dos orifícios. Tem um comprimento compreendido entre 1.5 a 5 vezes o diâmetro do orifício.

Assim a parte da Hidráulica que rege o estudo de escoamentos por orifícios e descarregadores é a Hidrometria (estudo dos métodos e instrumentos para medição de caudal e velocidade em canais e canalizações) (Mendonça, 2015).

6.1.1 Esquema geral de um orifício

Princípio do escoamento: **Energia potencial** ↔ **Energia cinética** (Silva, 2014).

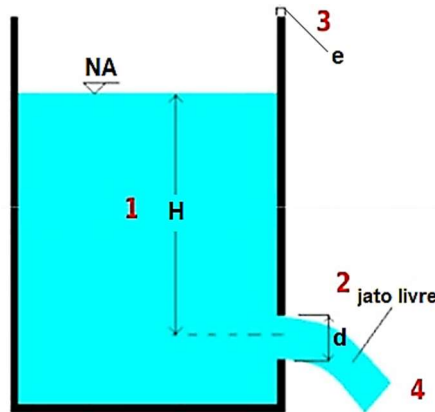


Figura 104 – Esquema geral de um orifício (adaptado de Silva, 2014).

Considerando a figura anterior:

1. H = carga sobre o orifício;
2. d = dimensão vertical, diâmetro ou altura da abertura que forma o orifício;
3. e = espessura da parede do orifício;
4. O jato que deixa o orifício se denomina **veia líquida**, tendo a forma de uma parábola.

6.1.2 Classificação

Baseado em Silva (2014):

- **Forma geométrica**
 - Simples: circular, triangular, retangular, quadrado, elíptico, etc.;
 - Composto: mais de uma forma geométrica;
- **Orientação**
 - Horizontal;
 - Vertical;
 - Inclinados;
- **Dimensões**
 - Pequenas dimensões: $d \leq H/3$;
 - Grandes dimensões: $d > H/3$;
- **Natureza da parede**
 - Parede delgada (fina): $e < 0.5d$. Contato do jato apenas segundo uma linha de contorno (perímetro) do orifício;
 - Parede espessa (grossa): $0.5d \leq e \leq 1.5d$. Contato do jato segundo uma superfície que forma a parede do orifício (aderência do jato);
 - Bocais: $1.5d < e \leq 5d$. Peça adaptada à parede para dirigir o jato;
- **Variabilidade da carga com o tempo**
 - Permanente: todas as partículas que atravessam o orifício estão sujeitas à mesma carga H e têm a mesma velocidade v ;

- Transição: H é considerado variável e as partículas que atravessam a abertura têm velocidade distintas;
- **Tipo de contração do jato efluente**
 - Total;
 - Parcial;
- **Pressão do jato efluente**
 - Livre;
 - Parcialmente submerso;
 - Totalmente submerso.

6.1.3 Orifícios de paredes delgadas

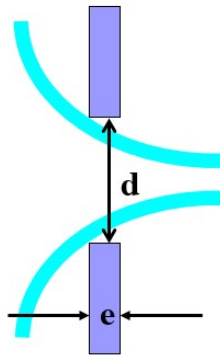


Figura 105 – Orifícios de paredes delgadas (Junior L. B., 2005).

Caudal escoado por orifícios de pequenas dimensões (dimensão vertical $< 1/3h$)

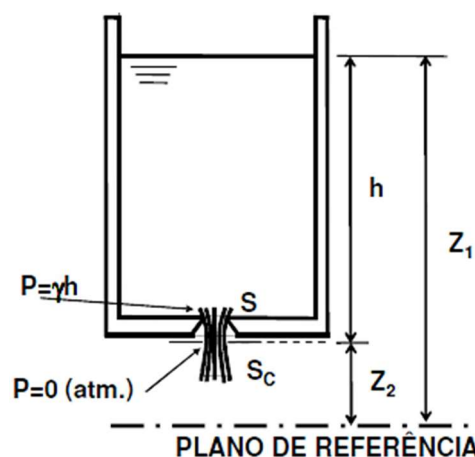


Figura 106 – Caudal escoado por orifícios de pequenas dimensões (Pinho et al., 2011).

Nesta situação temos:

- S_c , secção contraída;
- Em movimento permanente;

$$\left(Z + \frac{p}{\gamma} + \frac{\alpha U^2}{2g} \right)_{S_L} - \left(Z + \frac{p}{\gamma} + \frac{\alpha U^2}{2g} \right)_{S_C} = \Delta H \rightarrow Z_1 - Z_2 - \frac{\alpha U_c^2}{2g} = K \frac{\alpha U_c^2}{2g}$$

$$U_c = \frac{1}{\sqrt{\alpha + K}} \sqrt{2gh}$$

- **Coefficiente de velocidade** (Tabela 7);

$$C_v = \frac{1}{\sqrt{\alpha + K}} \quad (0.960 \text{ a } 0.990)$$

Tabela 7 – Valores de C_v para diferentes valores de carga e diâmetros do orifício (adaptado de Netto, 1998).

Carga, H [m]	Diâmetro do orifício, d [cm]				
	2.0	3.0	4.0	5.0	6.0
0.20	0.954	0.964	0.973	0.978	0.984
0.40	0.956	0.967	0.976	0.981	0.986
0.60	0.958	0.971	0.980	0.983	0.988
0.80	0.959	0.972	0.981	0.984	0.988
1.00	0.958	0.974	0.982	0.984	0.988
1.50	0.958	0.976	0.984	0.984	0.988
2.00	0.956	0.978	0.984	0.984	0.988
3.00	0.957	0.979	0.985	0.986	0.988
5.00	0.957	0.980	0.987	0.986	0.990
10.00	0.958	0.981	0.990	0.988	0.992

- Caudal escoado: $Q = S_c \cdot U_c$;
- **Coefficiente de contração** (Tabela 8);

$$C_c = \frac{S_c}{S} \quad (0.600 \text{ e } 0.640) \rightarrow Q = C_c \cdot S \cdot U_c = C_c \cdot S \cdot C_v \sqrt{2gh} = C_d \cdot S \cdot \sqrt{2gh}$$

Tabela 8 – Valores de C_c para diferentes valores de carga e diâmetros do orifício (adaptado de Netto, 1998).

Carga, H [m]	Diâmetro do orifício, d [cm]				
	2.0	3.0	4.0	5.0	6.0
0.20	0.685	0.656	0.625	0.621	0.617
0.40	0.681	0.646	0.625	0.619	0.616
0.60	0.676	0.644	0.623	0.618	0.615
0.80	0.673	0.641	0.622	0.617	0.615
1.00	0.670	0.639	0.621	0.617	0.615
1.50	0.666	0.637	0.620	0.617	0.615
2.00	0.665	0.636	0.620	0.617	0.615
3.00	0.663	0.634	0.620	0.616	0.615
5.00	0.663	0.634	0.619	0.616	0.614
10.00	0.662	0.633	0.617	0.615	0.614

- **Coefficiente de descarga** (Tabela 9);

$$C_d = C_c \cdot C_v \quad (\text{média prática} = 0.610)$$

Tabela 9 – Valores de C_d para diferentes valores de carga e diâmetros do orifício (adaptado de Netto, 1998).

Carga, H [m]	Diâmetro do orifício, d [cm]				
	2.0	3.0	4.0	5.0	6.0
0.20	0.653	0.632	0.609	0.607	0.607
0.40	0.651	0.625	0.610	0.607	0.607
0.60	0.648	0.625	0.610	0.607	0.608
0.80	0.645	0.623	0.610	0.607	0.608
1.00	0.642	0.622	0.610	0.607	0.608
1.50	0.638	0.622	0.610	0.607	0.608
2.00	0.636	0.622	0.610	0.607	0.608
3.00	0.634	0.621	0.611	0.607	0.608
5.00	0.634	0.621	0.611	0.607	0.608
10.00	0.634	0.621	0.611	0.607	0.609

- Escoamento teórico (sem ΔH).

$$U_c = \sqrt{2gh} \rightarrow \text{Fórmula de Torricelli}$$

A título de esclarecimento, a **Equação de Torricelli** é uma equação de cinemática que foi descoberta por Evangelista Torricelli, que permite calcular a velocidade final de um corpo em movimento retilíneo uniformemente variado, ou seja, com aceleração constante, sem a necessidade de se conhecer o intervalo de tempo em que este permaneceu em movimento (Ramalho, Nicolau, & Toledo, 2015). Esta equação pode ser deduzida a partir das seguintes equações:

$$\text{Movimento de um corpo sob aceleração} = \begin{cases} s = s_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}, \text{ relativo ao espaço} \\ v_f = v_0 + at, \text{ relativo à velocidade} \end{cases}$$

Isolando t na segunda equação:

$$t = \frac{(v_f - v_0)}{a}$$

E substituindo-o na primeira, temos que:

$$s - s_0 = v_0 \frac{(v_f - v_0)}{a} + \frac{a}{2} \left(\frac{(v_f - v_0)}{a} \right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta s = \left(\frac{v_f v_0 - v_0^2}{a} \right) + \frac{a}{2} \left(\frac{(v_f^2 - 2v_f v_0 + v_0^2)}{a^2} \right) \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \Delta s &= \frac{v_f v_o - v_o^2}{a} + \frac{v_f^2 - 2v_f v_o + v_o^2}{2a} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{2a\Delta s}{2a} &= \frac{2v_f v_o - 2v_o^2}{2a} + \frac{v_f^2 - 2v_f v_o + v_o^2 \times 2a}{2a} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{\times 2a}{2a} 2a\Delta s &= 2v_f v_o - 2v_o^2 + v_f^2 - 2v_f v_o + v_o^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow 2a\Delta s &= -v_o^2 + v_f^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow \boxed{v_f^2} &= v_o^2 + 2a\Delta s \end{aligned}$$

Onde v_f^2 e v_o^2 representam as velocidades final e inicial do corpo, respetivamente, Δs representa a distância percorrida ("s" vem do latim *Spatium*, mas frequentemente usa-se "d") e a representa a aceleração.

Caudal escoado por orifícios de grandes dimensões (dimensão vertical > 1/3h)

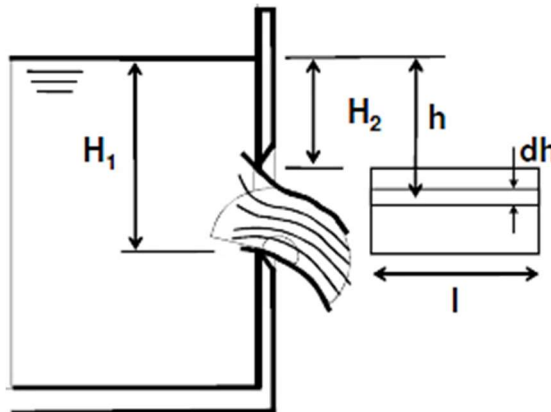


Figura 107 – Caudal escoado por orifícios de grandes dimensões. Orifício retangular (Pinho et al., 2011).

Em que:

- l é a largura do orifício;
- dh é a espessura do trecho elementar;
- h é a altura de água sobre o trecho elementar.

- Caudal elementar;

$$dQ = C_d \cdot dS \cdot \sqrt{2gh} \rightarrow dQ = C_d \cdot l \cdot \sqrt{2gh} \cdot dh$$

- Caudal total;

$$Q = \int_{H_2}^{H_1} C_d \cdot l \cdot \sqrt{2gh} \cdot dh \rightarrow Q = \frac{2}{3} C_d l \sqrt{2g} (H_1^{3/2} - H_2^{3/2})$$

Sendo a área do orifício dada por:

$$S = l(H_1 - H_2) \Rightarrow l = S/(H_1 - H_2)$$

Logo:

$$Q = \frac{2}{3} C_d \frac{S}{(H_1 - H_2)} \sqrt{2g} (H_1^{3/2} - H_2^{3/2}) \Rightarrow Q = \frac{2}{3} C_d S \sqrt{2g} \left(\frac{H_1^{3/2} - H_2^{3/2}}{H_1 - H_2} \right) \Rightarrow Q = C'_d S \sqrt{2gh}$$

- **Coeficiente de descarga corrigido, C'_d .**

$$C'_d = x C_d$$

Os valores de x encontram-se tabelados em função de d/h , onde d é a altura do orifício (DRHGSA, 2007):

Tabela 10 – Valores de correção, x (adaptado de DRHGSA, 2007).

Orifícios retangulares		Orifícios circulares	
d/h	x	r/h	x
0.5	0.943	10	0.960
0.5	0.955	0.999	0.962
0.5	0.963	0.99	0.963
0.6	0.966	0.95	0.966
0.7	0.976	0.90	0.970
0.8	0.982	0.85	0.974
0.9	0.986	0.80	0.977
1.0	0.989	0.70	0.983
1.2	0.993	0.60	0.988
1.4	0.995	0.50	0.992
1.6	0.996	0.40	0.995
2	0.997	0.30	0.997
3	0.999	0.20	0.999
10	1	0.10	0.9997

Nota: não se conhecendo o valor exato de C_d , pode fazer $C'_d = 0.60$ para orifícios retangulares ou circulares com $d \geq 0.30$ m (DRHGSA, 2007).

Consideração da velocidade de chegada U_0 (Pinho et al., 2011)

- Canais, Orifícios de grandes dimensões: à carga estática sobre o orifício adiciona-se a energia cinética, $U^2/2g$;
- Orifício de grandes dimensões retangular;

$$Q = \frac{2}{3} C_d l \sqrt{2g} \left[\left(H_1 + \frac{U_0^2}{2g} \right)^{3/2} - \left(H_2 + \frac{U_0^2}{2g} \right)^{3/2} \right]$$

- Orifício de pequenas dimensões.

$$Q = C_d S \sqrt{2g \left(h + \frac{U_0^2}{2g} \right)}$$

Orifícios totalmente submersos

O orifício está afogado quando a veia escoa em massa fluída, quando descarrega debaixo de água (Figura 108) (DRHGSA, 2007).

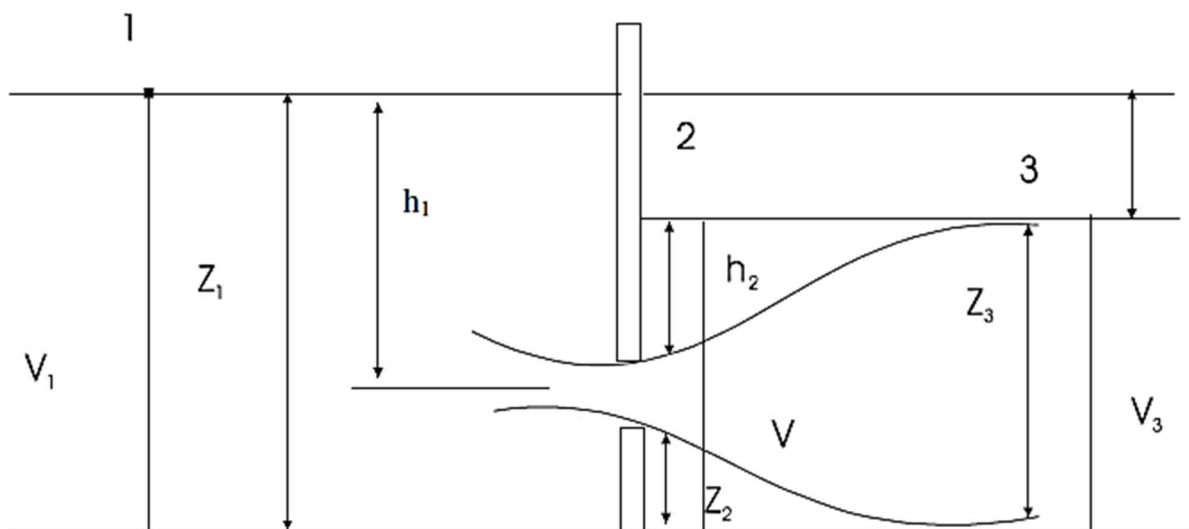


Figura 108 – Orifício totalmente submerso (DRHGSA, 2007).

- **1.º caso:** a velocidade da água no reservatório é desprezível ($V_1 = V_3 = 0$) (DRHGSA, 2007);

Bernoulli entre 1 e 2:

$$z_1 + 0 + 0 = z_2 + h_2 + \frac{V^2}{2g} \Rightarrow \frac{V^2}{2g} = z_1 - (z_2 + h_2) \Rightarrow \frac{V^2}{2g} = h$$

$$\therefore V^2 = 2gh \Rightarrow V = \sqrt{2gh}$$

O caudal é dado por:

$$Q = C_{d,s} S \sqrt{2gh}$$

Os coeficientes para os orifícios afogados ($C_{d,s}$) são um pouco menores que os correspondentes à descarga livre, mas o erro cometido com o uso dos mesmos é pequeno. Os coeficientes de descarga para orifícios afogados, são:

Tabela 11 – Valor de $C_{d,s}$ para orifícios afogados (Smith, 1886).

Carga [m]	Dimensões do orifício [m]				
	Circular (d) 0.015	Quadrado (a) 0.015	Circular (d) 0.03	Quadrado (a) 0.03	Retangular (a × b) 0.015x0.03
0.15	0.615	0.619	0.603	0.608	0.623
0.30	0.610	0.614	0.602	0.606	0.622
0.45	0.607	0.612	0.600	0.605	0.621
0.60	0.605	0.610	0.599	0.604	0.620
0.75	0.603	0.608	0.598	0.604	0.619
0.90	0.602	0.607	0.598	0.604	0.618
1.20	0.601	0.606	0.598	0.604	-

- **2.º caso:** as velocidades nos reservatórios de montante e jusante não são desprezíveis (DRHGSA, 2007).

Bernoulli entre 1 e 2:

$$z_1 + 0 + \frac{V_1^2}{2g} = z_3 + 0 + \frac{V_3^2}{2g} + h_p$$

Mas,

$$h_p = \frac{(V - V_3)^2}{2g} \rightarrow \text{Perda devida à expansão do jato}$$

Então:

$$z_1 + \frac{V_1^2}{2g} = z_3 + \frac{V_3^2}{2g} + \frac{(V - V_3)^2}{2g} \Rightarrow z_1 - z_3 + \frac{V_1^2}{2g} - \frac{V_3^2}{2g} = \frac{(V - V_3)^2}{2g} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h + \frac{V_1^2}{2g} - \frac{V_3^2}{2g} = \frac{(V - V_3)^2}{2g} \times 2g \Rightarrow (V - V_3)^2 = 2gh + V_1^2 - V_3^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V - V_3 = \sqrt{2gh + V_1^2 - V_3^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V = V_3 + \sqrt{2gh + V_1^2 - V_3^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Q = C_{d,s}S \left(V_3 + \sqrt{2gh + V_1^2 - V_3^2} \right)$$

Orifícios parcialmente submersos

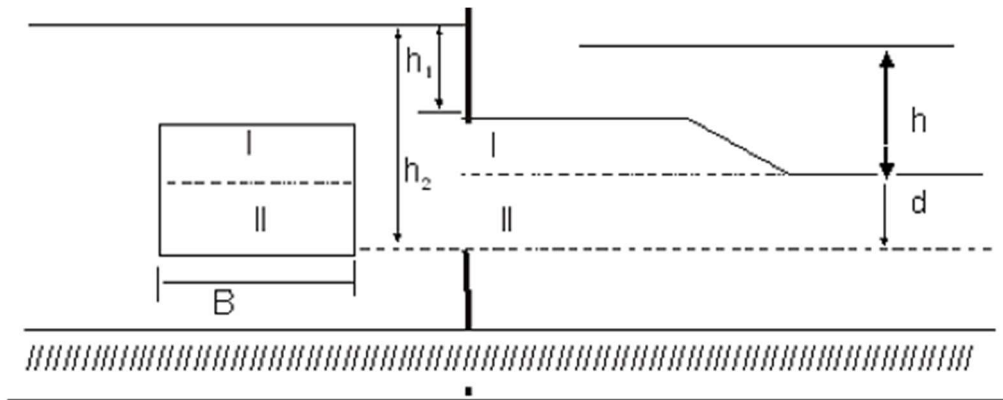


Figura 109 – Orifícios parcialmente submersos (DRHGSA, 2007).

A descarga do orifício parcialmente afogado pode ser considerada como a soma das descargas de um orifício de grandes dimensões (I) e de um orifício afogado (II). Com $V_1 = 0$ (DRHGSA, 2007):

$$Q_I = \frac{2}{3} C_d B \sqrt{2g} (h_2^{3/2} - h_1^{3/2})$$

$$Q_{II} = C_{d,s} S \sqrt{2gh} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Q_{II} = C_{d,s} B (h_2 - h) \sqrt{2gh}$$

$$Q = Q_I + Q_{II} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Q = \frac{2}{3} C_d B \sqrt{2g} (h_2^{3/2} - h_1^{3/2}) + C_{d,s} B (h_2 - h) \sqrt{2gh} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Q = B \sqrt{2g} \left[\frac{2}{3} C_d (h_2^{3/2} - h_1^{3/2}) + C_{d,s} (h_2 - h) \sqrt{h} \right]$$

6.1.4 Orifícios de parede espessa. Tubos adicionais

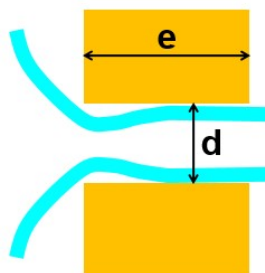


Figura 110 – Orifícios de parede espessa (Junior L. B., 2005).

Orifício de bordos arredondados

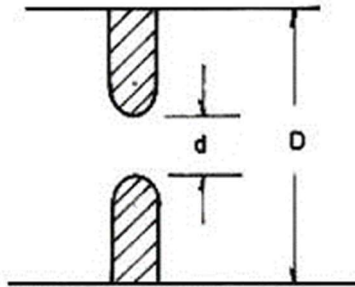
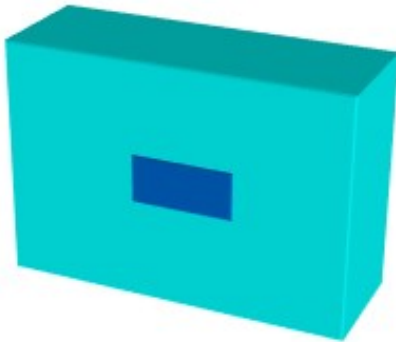


Figura 111 – Orifício de bordos arredondados
 (<https://pt.slideshare.net/IsaqueEliasCorreia/instrumentacaobasica2-pdf>).

$$Q = C_d S \sqrt{2gh}, \text{ em que } C_d = 0.98 \neq 1.0 \text{ por atrito } \wedge C_c = 1.0$$

Orifícios com contração incompleta



(a)



(b)

Figura 112 – (a) Contração completa (em todas as faces do orifício); (b) Contração incompleta (só na parte de cima do orifício) (Junior L. B., 2005).

Para orifícios retangulares, C_d assume o valor de C'_d , da seguinte forma (Junior L. B., 2005):

$$C'_d = C_d (1 + 0.15k), \text{ com } k = \frac{P_{sc}}{P}$$

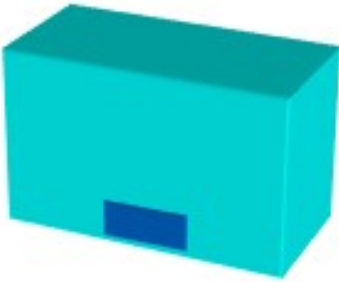
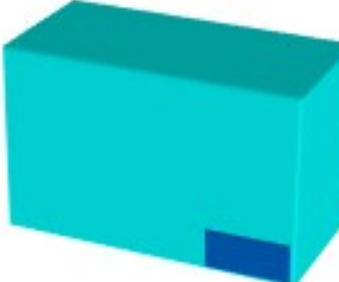
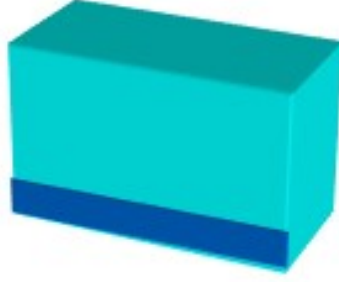
Em que:

k é uma relação entre perímetros;

P_{sc} , P representam, respetivamente, o perímetro da parte em que há supressão da contração e o perímetro total do orifício.

Para um orifício retangular $P = 2(a + b)$, com a e b representando, respetivamente, a altura e a largura. O coeficiente k toma as seguintes formas:

Tabela 12 – Relação entre perímetros, k , para diferentes posições de um orifício retangular (Junior L. B., 2005).

Junto ao fundo	Junto ao fundo e a 1 parede lateral	Junto ao fundo e às 2 paredes laterais
		
$k = \frac{b}{2(a + b)}$	$k = \frac{a + b}{2(a + b)}$	$k = \frac{2a + b}{2(a + b)}$

Para orifícios circulares, temos (Junior L. B., 2005):

$$C'_d = C_d(1 + 0.13k)$$

Assim:

- Para orifícios junto a uma parede lateral, $k = 0.25$;
- Para orifícios junto ao fundo, $k = 0.25$;
- Para orifícios junto ao fundo e a uma parede lateral, $k = 0.50$;
- Para orifícios junto ao fundo e a duas paredes laterais, $k = 0.75$.

Tubos adicionais

Estrutura destinada ao escoamento de água com pequena carga e comprimento entre $5d$ e $1000d$ (Silva, 2014):

- Tubo muito curto: $5d < L < 100d$;
- Tubo curto: $100d < L < 1000d$;
- Tubo longo: $L > 1000d$;
- Utiliza-se a lei dos escoamentos em orifícios com C_d adaptado;
- Fórmulas para tubulações longas se aplicam para $L > 100d$.

Ao nível de tubos adicionais de secção circular, podemos dividi-los em (Pinho et al., 2011):

- Cilíndricos;
- Cónicos;
- Interiores;
- Exteriores.

Por forma a determinar aproximadamente o caudal $Q = C_d S \sqrt{2gh}$ (Silva, 2014):

- Orifícios de parede delgada: $L/d < 0.5 \rightarrow C_d = 0.61$;
- Para bocais: $1.5 < L/d < 5 \rightarrow C_d = 0.82$;
- Nesse caso ver questão da entrada;
- Para tubos muito curtos, segundo Eytelwein e para tubos de ferro fundido, tem-se:

Tabela 13 – Valor de C_d segundo Eytelwein e para tubos muito curtos de ferro fundido (Silva, 2014).

L/d	C_d
10	0.77
20	0.73
30	0.70
40	0.66
60	0.60

Tubos adicionais interiores - Tubo adicional curto (Pinho et al., 2011)

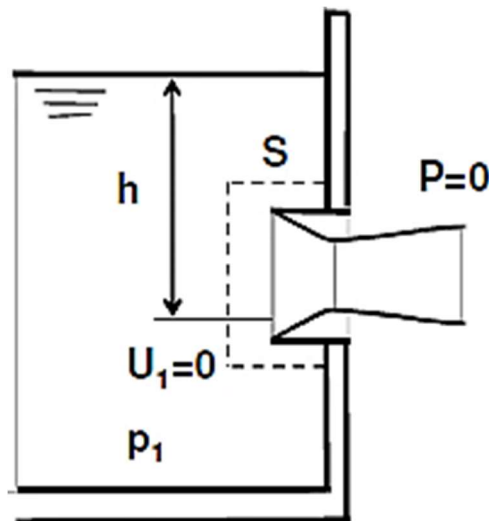


Figura 113 – Tubo adicional curto (Pinho et al., 2011).

Teorema Quantidade de Movimento:

$$\rho Q U = p_1 S \rightarrow Q = U S_c$$

Teorema de Bernoulli:

$$\left(0 + \frac{p_1}{\gamma} + 0\right) - \left(0 + 0 + \frac{U^2}{2g}\right) = 0 \Rightarrow p_1 = \rho \frac{U^2}{2}$$

$$S_c = \frac{S}{2} \Rightarrow Q = \frac{S}{2} \sqrt{2gh} \Rightarrow C_d = \frac{1}{2}$$

Tubos adicionais interiores - Tubo adicional com veia líquida aderente (Pinho et al., 2011)

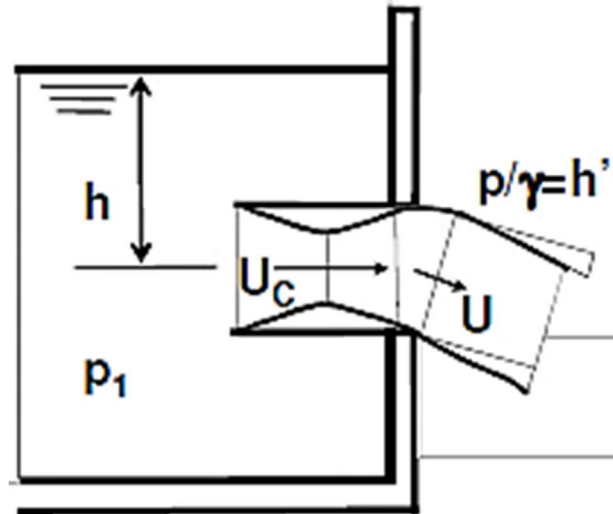


Figura 114 – Tubo adicional com veia líquida aderente (Pinho et al., 2011).

Teorema Quantidade de Movimento:

$$\rho QU = p_1 S, \text{ com } p_1 = \gamma h \wedge Q = US \rightarrow U = \sqrt{gh}$$

$$Q = S\sqrt{gh} = \frac{\sqrt{2}}{2} S\sqrt{2gh} \Rightarrow C_d = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Teo. Bernoulli ($S_L \rightarrow S_c$):

$$\begin{cases} h = h' + \frac{U_c^2}{2g} \\ h' = h \end{cases}$$

$$p_{\text{abs}} = p_a - \gamma h > 0 \Rightarrow h < \frac{p_a}{\gamma}$$

Teo. Bernoulli ($S_L \rightarrow \text{jusante}$):

$$\begin{cases} h = 0 + \frac{U^2}{2g} + \Delta H \\ \Delta H = \frac{(U_c - U)^2}{2g} \end{cases}$$

$$U = \frac{U_c}{2}$$

Tubos adicionais exteriores - Tubo adicional cilíndrico (Pinho et al., 2011)

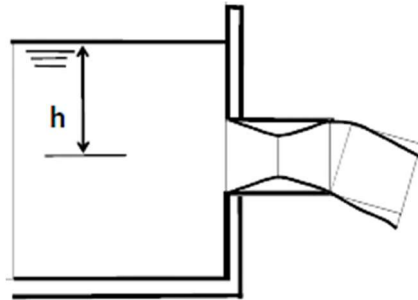


Figura 115 – Tubo adicional cilíndrico (Pinho et al., 2011).

$$L \geq 1.5\phi$$

$$Q = C_d S \sqrt{2gh}, \text{ com } C_d = 0.82 \text{ (Bocal cilíndrico externo)}$$

Teo. Bernoulli ($S_L \rightarrow S_c$):

$$\begin{cases} h = h' + \frac{U_c^2}{2g} \\ h' = h \left[1 - \left(\frac{0.82}{C_c} \right)^2 \right] \end{cases} \xrightarrow{C_c < 0.62} h' > -0.75h$$

Tubos adicionais exteriores - Tubo adicional cónico

- **Convergente**

$$Q = C_d S \sqrt{2gh}, \text{ com } C_d = 0.95$$

Tabela 14 – C_d para bocal cónico convergente (Silva, 2014).

θ (°, graus)	0	11.5	22.5	45	90
C_d aresta viva	0.97	0.94	0.92	0.85	-
C_d aresta arredondada	0.97	0.95	0.92	0.88	0.75

- **Divergente**

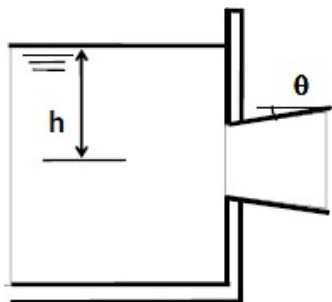


Figura 116 – Tubo adicional cónico divergente (Pinho et al., 2011).

C_d para bocal cónico divergente (Silva, 2014):

- Aresta viva: $C_d = 1.40$;
- Aresta arredondada: $C_d = 2.00$;
- Ângulo máximo para o qual a veia líquida enche o tubo é 16° ;
- Caudal máximo: $L = 9d \wedge \theta = 10^\circ$;
- Para $\theta > 7^\circ$, o jato destaca-se e o efeito do tubo desaparece.

6.1.5 Tempos de esvaziamento de reservatórios

Secção variável (Pinho et al., 2011)

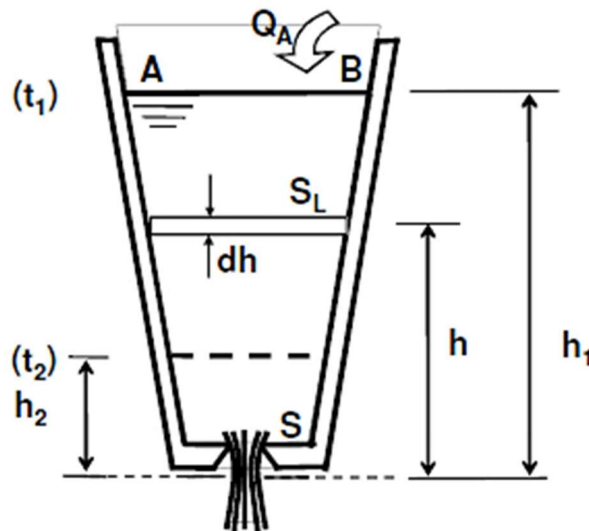


Figura 117 – Esvaziamento de reservatório de secção variável (Pinho et al., 2011).

- Carga (h):

$$Q = C_d S \sqrt{gh}$$

- Equação da continuidade:

$$(Q - Q_A) dt = -S_L dh \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (C_d S \sqrt{2gh} - Q_A) dt = -S_L$$

$$t = - \int_{h_1}^{h_2} \frac{S_L}{(C_d S \sqrt{2gh} - Q_A)} dh$$

$$\Rightarrow t = t_2 - t_1 = - \int_{h_2}^{h_1} \frac{S_L}{(C_d S \sqrt{2gh} - Q_A)} dh$$

Secção constante (Pinho et al., 2011)

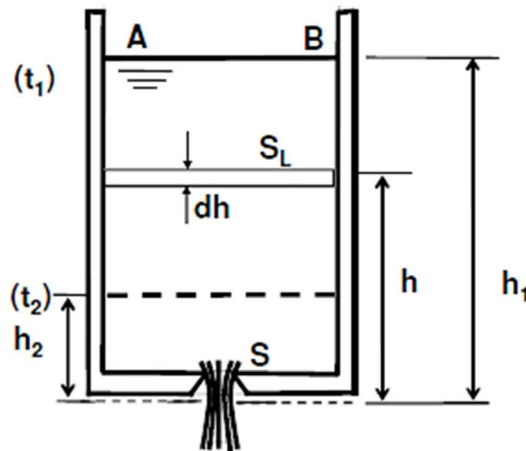


Figura 118 – Esvaziamento de reservatório de secção constante (Pinho et al., 2011).

- Considerando S_L constante e Q_A nulo:

$$t = \frac{S_L}{S\sqrt{2g}} \int_{h_2}^{h_1} \frac{1}{C_d\sqrt{h}} dh$$

- Considerando ainda $C_d = \text{cte.}$:

$$t = \frac{S_L}{SC_d\sqrt{2g}} \int_{h_2}^{h_1} \frac{1}{\sqrt{h}} dh \rightarrow t = \frac{2S_L(\sqrt{h_1} - \sqrt{h_2})}{SC_d\sqrt{2g}}$$

- Considerando esvaziamento total:

$$h_2 = 0 \rightarrow t = \frac{2S_L\sqrt{h_1}}{SC_d\sqrt{2g}} \Rightarrow t = \frac{2V_1}{Q_1}, \text{ com } Q_1 = C_dS\sqrt{2gh_1}$$

6.1.6 Configuração dos jatos líquidos

Fenómeno que ocorre com a seção transversal dos jatos que passam por estágios sucessivos, alterando a sua forma original, a partir da seção contraída (Silva, 2014).

Um **jato circular** tende a manter a sua forma circular em toda a veia líquida que forma o jato (Silva, 2014).

Um **jato de um orifício de forma elíptica** na seção contraída tem a forma elíptica semelhante à do orifício. Entretanto, à medida em que o escoamento acontece, a seção vai se aproximando da forma circular, em seguida vai novamente se tornando elíptica, porém com o seu eixo maior em correspondência com o eixo menor da seção inicial (Silva, 2014).

Para **orifícios verticais de grandes dimensões**, devido à influência da tensão superficial, ocorre a inversão da veia líquida no caso dum orifício de secção quadrada (Pinho et al., 2011):

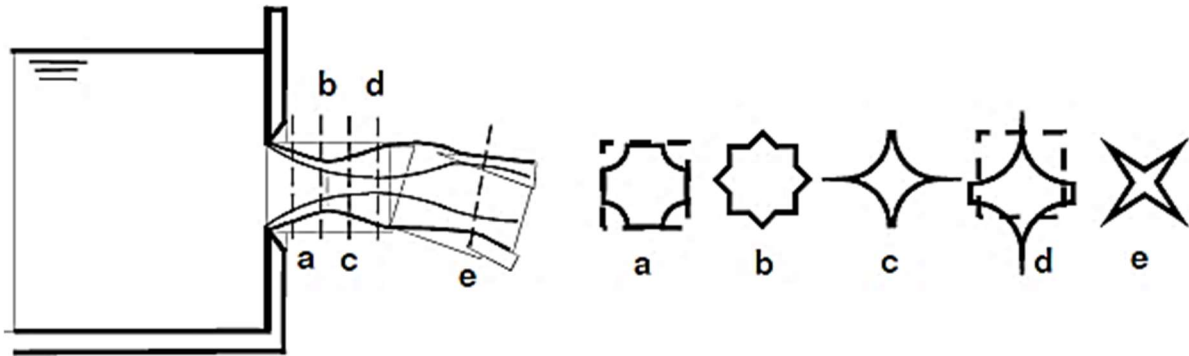


Figura 119 – Inversão da veia líquida (Pinho et al., 2011).

No que diz respeito à **configuração longitudinal da veia líquida** (Pinho et al., 2011):

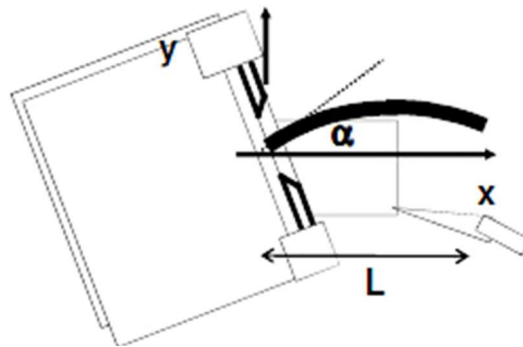


Figura 120 – Configuração longitudinal da veia líquida (Pinho et al., 2011).

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2x}{dt^2} \\ \frac{d^2y}{dt^2} \end{array} \right. \rightarrow \text{fórmulas simplificadas} = \left\{ \begin{array}{l} y = x \tan \alpha - \frac{gx^2}{2U^2 \cos^2 \alpha} \\ L = \frac{U^2 \sin(2\alpha)}{g} \end{array} \right.$$

6.2 Escoamentos por descarregadores

Os descarregadores podem ser definidos como paredes, diques ou aberturas sobre as quais um líquido esco, basicamente são estruturas formadas pela abertura de um orifício na parede de um reservatório, na qual a borda superior atinge a superfície livre do líquido, havendo assim escoamento através da estrutura formada (Netto, 1998).

O termo aplica-se também aos descarregadores de cheia em barragens. Hidraulicamente os descarregadores devem ser construídos com forma geométrica definida e o seu estudo é efetuado considerando-os como orifícios incompletos, ou seja, sem a borda superior (Netto, 1998).

Os descarregadores (Figura 121) são instrumentos hidráulicos que tem por finalidade a medição do caudal em cursos de água naturais e em canais artificiais, assim como no controlo do escoamento em galerias, canais e barragens (Netto, 1998).

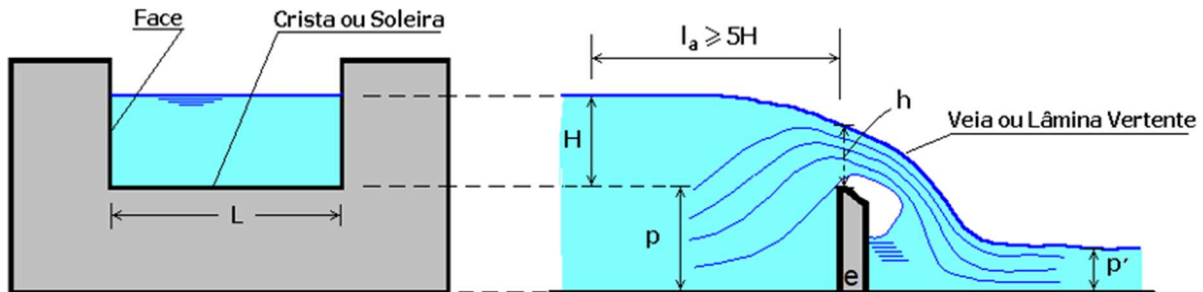


Figura 121 – Esquema de um descarregador retangular com lâmina vertente livre (Queiroz, 2017).

A borda horizontal denomina-se crista ou soleira e as bordas verticais constituem as faces do vertedor.

A carga do vertedor (H) é a altura atingida pela água, a contar da cota da soleira do vertedor. Devido a depressão (abaixamento) da lâmina vertente junto ao vertedor a carga (H) deve ser medida a montante, a uma distância aproximadamente igual ou superior a $5H$, sendo que a altura h corresponde à altura de água exatamente acima da soleira. A altura ou profundidade do descarregador é dada por p , a altura de água a jusante do descarregador é representada por p' , e é a espessura e L a largura do descarregador.

6.2.1 Classificação de descarregadores

Muitos fatores podem servir de base para a classificação dos descarregadores, como (Queiroz, 2017):

- **Forma**
 - Simples: (Retangular, triangular, trapezoidal, circular, exponencial);
 - Compostos: (Seções combinadas – duas ou mais formas geométricas);
- **Soleira ou crista**
 - Soleira delgada (chapa metálica ou madeira chanfrada);
 - Soleira espessa (alvenaria de pedras ou tijolos e betão);
- **Altura relativa da soleira ou crista**
 - Livres ou completos: ($p > p'$);
 - Afogados ou incompletos: ($p < p'$);
- **Largura relativa da soleira** (Figura 122)
 - Descarregadores sem contrações laterais ($L = B$);
 - Descarregadores com uma contração lateral ($L < B$);
 - Descarregadores com duas contrações laterais ($L < B$);

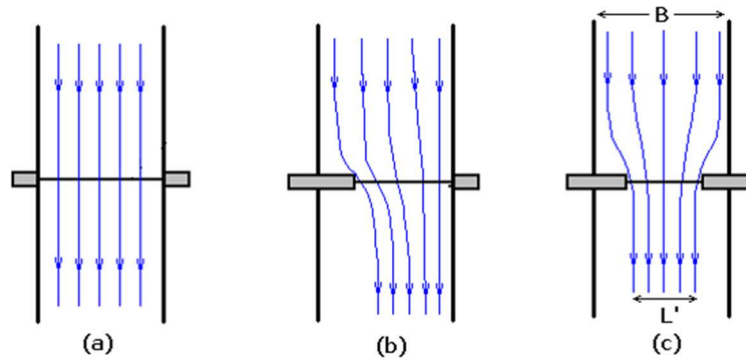


Figura 122 – Descarregador (a) sem contrações laterais, (b) com uma contração lateral, (c) com duas contrações laterais (adaptado de Queiroz, 2017).

- **Espessura da parede**
 - Parede ou soleira delgada: $e \leq 2H/3$ contato segundo uma linha entre a lâmina e a soleira;
 - Parede ou soleira espessa: $e > 2H/3$;
- **Forma da lâmina**
 - Lâmina Livre: com aeração na face inferior de forma que a pressão seja igual à pressão atmosférica;
 - Lâmina alterada: aderente ou contraída;
- **Perfil da soleira**
 - Aresta viva;
 - Aresta arredondada;
- **Posição do vertedor (em relação à corrente)**
 - Frontal;
 - Oblíquo;
 - Angular;
 - Lateral;
- **Perfil do fundo**
 - Nível;
 - Em degrau;
- **Normalizações**
 - Descarregador padrão;
 - Descarregador particular.

6.2.2 Influência da forma na veia líquida

Quando o ar não entra, naturalmente, no espaço abaixo da lâmina vertente, pode ocorrer uma pressão menor que a pressão atmosférica, produzindo uma depressão da veia líquida. Este fenómeno altera a determinação do caudal pelas fórmulas clássicas (Queiroz, 2017).

O fenómeno é comum nos descarregadores sem contração e pode ocorrer ocasionalmente nos descarregadores com contração lateral (Queiroz, 2017).

Nessas condições a lâmina deixa de ser livre, para adotar as formas de lâmina deprimida, lâmina aderente ou lâmina afogada (Queiroz, 2017).

Quando se utiliza um descarregador para medição de caudal, deve-se evitar a ocorrência do fenómeno supracitado (Queiroz, 2017).

As diferentes formas da veia líquida que pode ocorrer nos descarregadores (Queiroz, 2017):

- Lâmina livre (Figura 123)
 - A pressão sob a lâmina é igual à pressão atmosférica;
 - Situação ideal para uso do descarregador como medidor de caudal;

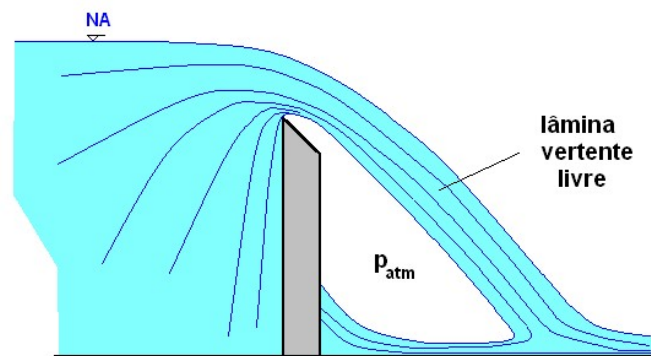


Figura 123 – Lâmina livre (Queiroz, 2017).

- Lâmina deprimida (Figura 124)
 - O ar é arrastado pela água, provocando o aparecimento de uma pressão negativa sob a lâmina, o que modifica a forma da mesma;

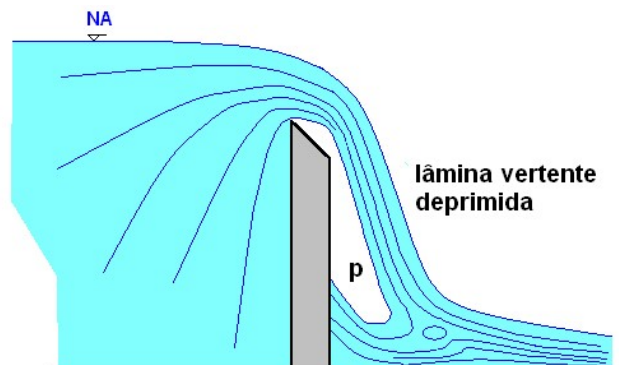


Figura 124 – Lâmina deprimida (Queiroz, 2017).

- Lâmina aderente (Figura 125)
 - O ar é totalmente arrastado pela água, provocando a aderência da lâmina na parede do descarregador. Ocorre muito em caudais pequenos;

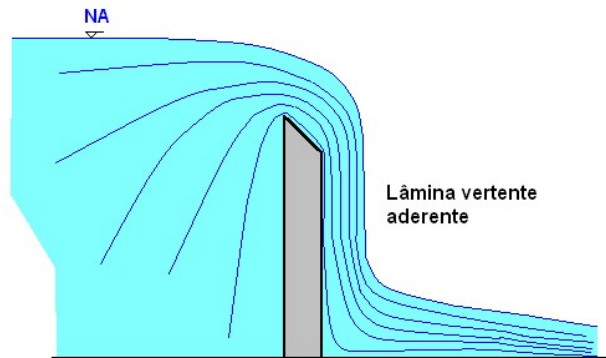


Figura 125 – Lâmina aderente (Queiroz, 2017).

- Lâmina afogada (Figura 126)
 - O nível da água a jusante é superior à altura da soleira;
 - $p > p'$.

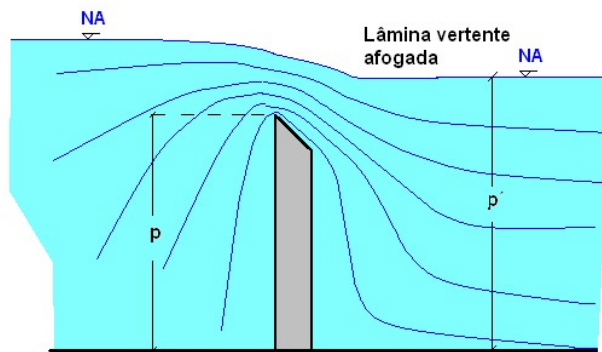


Figura 126 – Lâmina afogada (Queiroz, 2017).

6.2.3 Descarregador de soleira delgada

Descarregador de Bazin

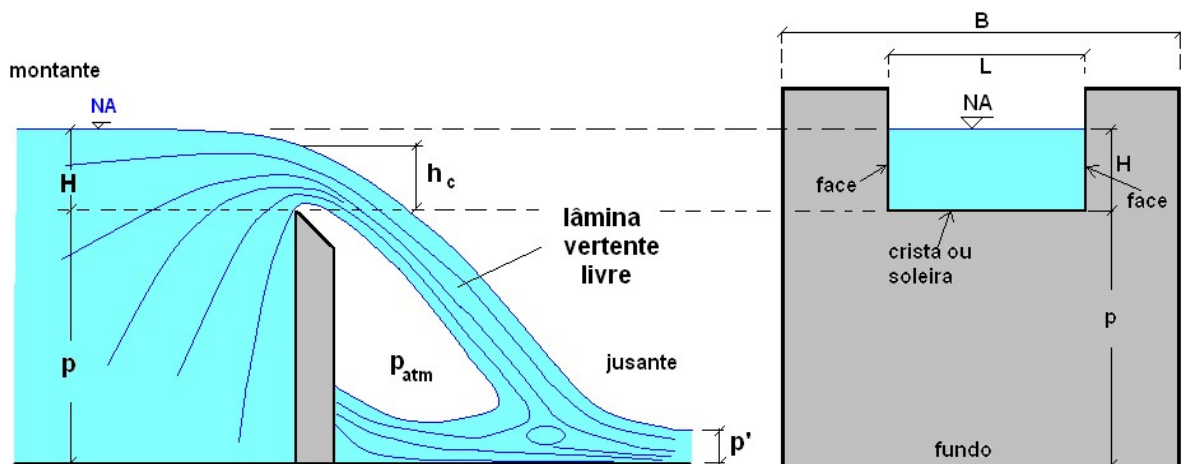


Figura 127 – Descarregador retangular de soleira delgada, sem contrações laterais e descarga livre ou de Bazin (Queiroz, 2017).

Os filetes inferiores se elevam para atravessar a crista do descarregador. A superfície livre da água e os filetes próximos são rebaixados, ocorrendo o estreitamento da veia líquida (Queiroz, 2017). No caso de um orifício de grandes dimensões:

$$Q = \frac{2}{3} C_d L \sqrt{2g} (h_1^{3/2} - h_2^{3/2})$$

Fazendo $h_1 = H$ e $h_2 = 0$, obtém-se a equação fundamental dos descarregadores ou fórmula de Du Buat:

$$Q = \frac{2}{3} C_d L \sqrt{2g} H^{3/2}$$

Fazendo $\mu = 2/3 C_d$, obtém-se a Lei de Vazão:

$$Q = \mu L \sqrt{2g} H^{3/2}$$

Em que, para um descarregador de Bazin (sem contração lateral):

$$\mu = \left(0.405 + \frac{0.003}{H} \right) \left[1 + 0.55 \left(\frac{H}{H+p} \right)^2 \right]$$

Para $0.08 \text{ m} < H < 0.70 \text{ m}$, $0.20 \text{ m} < p < 2.00 \text{ m}$ e $L > 4H$.

Quando existe contração lateral, o seu efeito se manifesta na diminuição da largura útil da soleira causando uma superestimava do caudal pelas fórmulas anteriores. Nesse caso, corrige-se a largura do descarregador (Queiroz, 2017).

A largura corrigida L' , também conhecida por correção de Francis, será dada por:

$$L' = L - C'nH$$

Em que:

L é a largura real do descarregador;

n é o numero de contrações;

C' é o fator de contração;

H é a carga.

Normalmente C' toma os valores de (Queiroz, 2017):

- 0.1 para soleira e faces de canto vivo;
- 0 para soleira e faces com bordas arredondadas.

Nota:

1. Se $L > 10H$, pode-se desprezar o efeito da contração lateral;
2. O efeito da contração no plano vertical é considerado no coeficiente de descarga.

Considerando a Velocidade de Aproximação

$V = Q/A \rightarrow$ no canal que chega ao vertedor. Carga cinética (Queiroz, 2017):

$$\alpha \frac{V^2}{2g}$$

Quando a velocidade de aproximação (V) não for desprezável, a equação completa que expressa o caudal será (Queiroz, 2017):

$$Q = \frac{2}{3} C_d L \sqrt{2g} \left[\left(H + \alpha \frac{V^2}{2g} \right)^{\frac{3}{2}} - \left(\alpha \frac{V^2}{2g} \right)^{\frac{3}{2}} \right]$$

A expressão anterior é conhecida como a Fórmula de Weissbach para escoamento através de vertedor retangular (Queiroz, 2017):

- α é o coeficiente de Coriolis e varia entre 1.0 e 1.66;
- a correção de velocidade de aproximação deve ser feita sempre que a área do canal for inferior a $6HL$.

Uma outra maneira de considerar a velocidade de aproximação é lembrar que a velocidade é:

$$V = \frac{Q}{B(H + p)}$$

E escrever:

$$Q = \frac{2}{3} C_d L \sqrt{2g} H^{\frac{3}{2}} \left(1 + \frac{3}{2} \alpha \frac{V^2}{2gH} \right)$$

Após algumas simplificações a equação acima pode ser escrita como:

$$Q = \frac{2}{3} C_d L \sqrt{2g} H^{\frac{3}{2}} \left[1 + C_1 \left(\frac{H}{H + p} \right)^2 \right]$$

A equação acima é aplicável para descarregador retangular sem contrações, considerando a correção da velocidade de aproximação (Queiroz, 2017).

Descarregador triangular

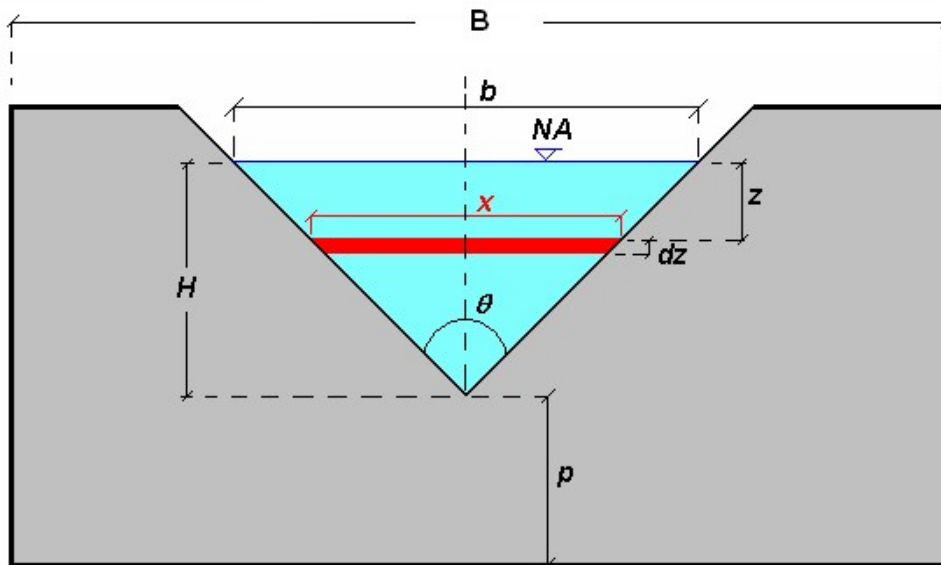


Figura 128 – Descarregador triangular (Queiroz, 2017).

Descarregador utilizado para medição de pequenos caudais ($Q < 30 \text{ l/s}$), apresentando maior precisão na medida da carga (H) e são construídos em chapa de aço (Queiroz, 2017).

Admitindo-se uma faixa horizontal de altura elementar dz e comprimento x , como um orifício pequeno, o caudal será (Queiroz, 2017):

$$dQ = C_d \cdot dA \cdot \sqrt{2gh} \Rightarrow dQ = C_d \sqrt{2gz} \cdot x \cdot dz$$

Atendendo à relação geométrica $b/x = H/(H - z) \rightarrow x = b(1 - z/H)$, para toda a área triangular:

$$Q = \int_0^H dQ = \int_0^H C_d \sqrt{2gz} \cdot b \cdot \left(1 - \frac{z}{H}\right) \cdot dz \Rightarrow Q = \frac{4}{15} C_d \sqrt{2g} b H^{\frac{3}{2}}$$

Atendendo à relação geométrica $b = 2H \tan(\theta/2)$, então:

$$Q = \frac{4}{15} C_d \sqrt{2g} 2H \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) H^{\frac{3}{2}} \Rightarrow Q = \frac{8}{15} C_d \sqrt{2g} \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) H^{\frac{5}{2}}$$

Na realidade C_d varia com θ e na prática usa-se um triângulo isósceles com a bissetriz na vertical (Queiroz, 2017).

Thomson propôs um descarregador com $\theta = 90^\circ$ e um C_d tal que:

$$Q = 1.4H^{5/2}, \text{ com } C_d = 0.593$$

Neste caso, $0.05 \text{ m} < H < 0.38 \text{ m}$, $p > 3H$ e $B > 6H$; Q [m^3/s] e H [m].

O USBR (1967) propôs um descarregador com $\theta = 90^\circ$ e um C_d tal que:

$$Q = 1.3424H^{2.48}$$

Neste caso deve-se observar as recomendações para p e para a largura b em função da largura do canal onde o vertedor será instalado (Queiroz, 2017).

O valor de θ não pode ser muito pequeno pois há a influência da tensão superficial, capilaridade e viscosidade. Em geral adota-se $\theta > 25^\circ$ (Queiroz, 2017).

Descarregador trapezoidal (Tipo)

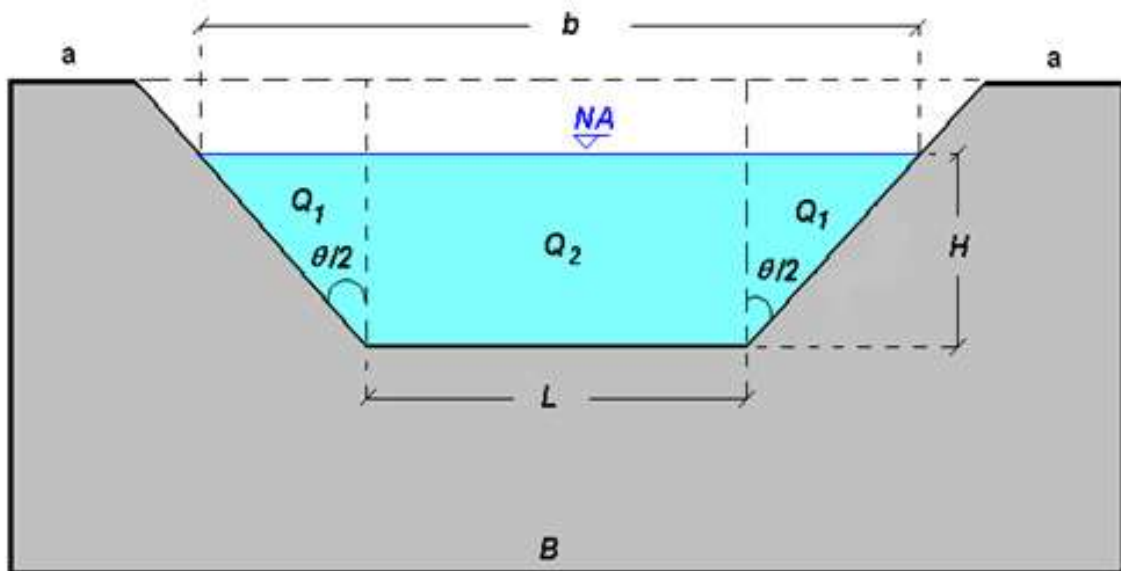


Figura 129 – Descarregador trapezoidal (Queiroz, 2017).

Tem a forma de um trapézio de largura menor L e altura H . É considerado como sendo formado por um vertedor retangular e um triangular, de ângulo θ . O trapézio é usado para compensar o decréscimo de caudal que se observa devido às contrações (Queiroz, 2017).

$$Q = Q_2 + 2Q_1 \Rightarrow Q = \frac{2}{3} C_d L \sqrt{2g} H^{\frac{3}{2}} + \frac{8}{15} C_d \sqrt{2g} \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) H^{\frac{5}{2}}$$

Para este tipo de descarregador pode-se considerar a influência da velocidade de aproximação somando-se a parcela $(\alpha \cdot V^2/2g)^{3/2}$ ao valor de H (Queiroz, 2017).

Tal correção deverá ser feita sempre que a área da seção transversal do canal for inferior a $6LH$ (Queiroz, 2017).

Descarregador trapezoidal (Cipolletti)

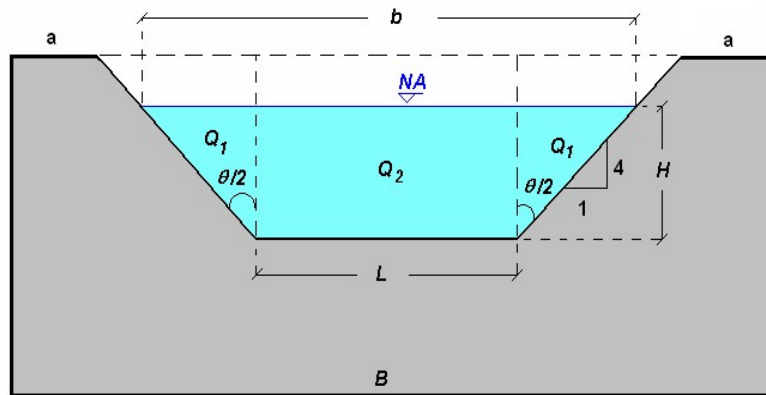


Figura 130 – Descarregador trapezoidal (Cipolletti) (Queiroz, 2017).

É um tipo especial de um descarregador trapezoidal, onde as faces são inclinadas de 1:4 (h:v), tal que $\tan(\theta/2) = 1/4$.

A declividade de 1:4 tem o objetivo de compensar a diminuição de largura devida à contração lateral, de forma que a equação a ser usada é a do descarregador retangular de parede delgada com duas contrações (Queiroz, 2017):

$$Q = \frac{2}{3} C_d (L - 0.1 \cdot 2 \cdot H) \sqrt{2g} H^{3/2} \Rightarrow Q = \frac{2}{3} C_d (L - 0.2 \cdot H) \sqrt{2g} H^{3/2}$$

Cipolletti propôs que $C_d = 0.63$ e que $0.08 \text{ m} < H < 0.60 \text{ m}$, $H < L/3$, $p > 3H$, $a > 2H$ e a largura do canal (B) $> 7H$, correspondendo à seguinte fórmula (Queiroz, 2017):

$$Q = 1.861 L H^{3/2}$$

Descarregador circular

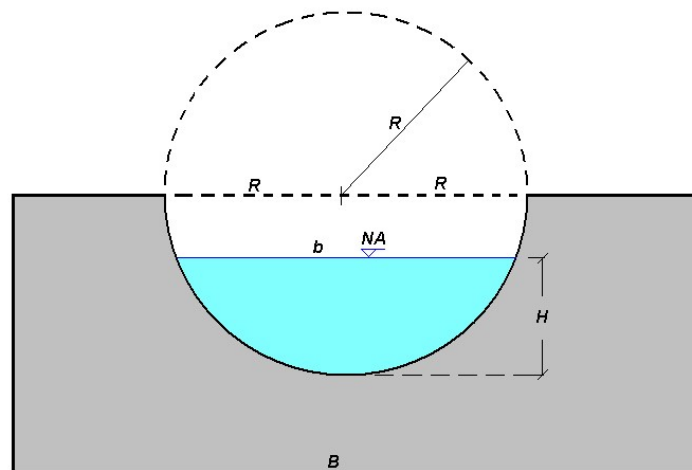


Figura 131 – Descarregador circular (Queiroz, 2017).

Descarregador usado para pequenos caudais, de fácil construção e instalação, não requer nivelamento da soleira e a lâmina vertente é sempre ventilada. É mais eficiente para pequenos valores de H mas, ainda assim, é pouco utilizado (Queiroz, 2017).

$$Q = 1.518D^{0.0693}H^{1.807}$$

Com Q [m³/s] e D, H [m].

Descarregador tubular vertical de descarga livre

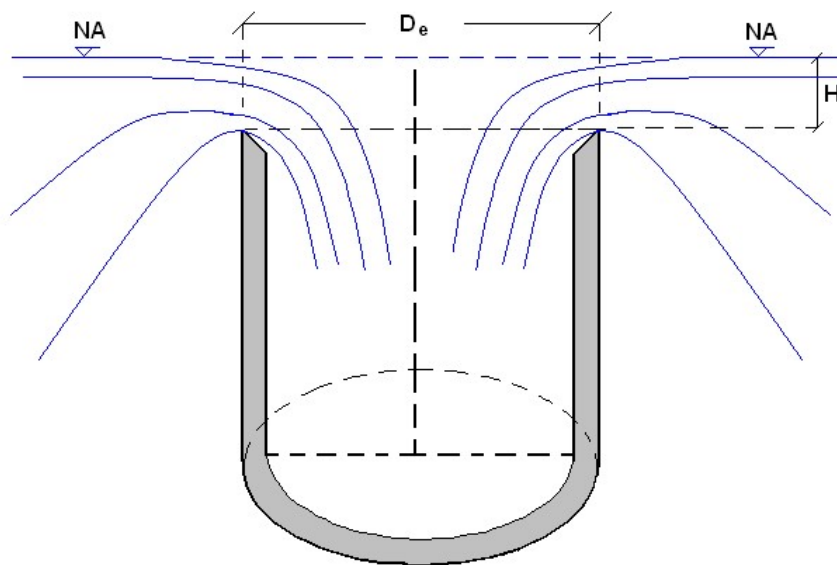


Figura 132 – Descarregador tubular vertical de descarga livre (Queiroz, 2017).

Formado por tubo de eixo vertical e soleira curva, o escoamento dá-se em lâmina livre, e é largamente usado em tomadas de água em barragens (Queiroz, 2017).

$$Q = KLH^n, \text{ com } K = \frac{2}{3}C_d\sqrt{2g}$$

Com $H < D_e/5$ e $L = \pi D_e$. Normalmente adota-se $n = 1.42$. O valor de K é retirado de tabelas semelhantes à Tabela 15 (Queiroz, 2017).

Tabela 15 – Valores de K em função de D_e (adaptado de Queiroz, 2017).

D_e [m]	K
0.175	1.435
0.250	1.440
0.350	1.455
0.500	1.465

Descarregador com inclinação

$$\mu_{\theta} = \mu \left(1 - 0.3902 \frac{\theta}{180^{\circ}} \right)$$

Onde θ é a inclinação do descarregador em relação à vertical. Adota-se o sinal (+) quando a inclinação é contra a corrente e o sinal (-) quando é a favor da corrente (Pinho et al., 2011).

6.2.4 Descarregadores de soleira espessa

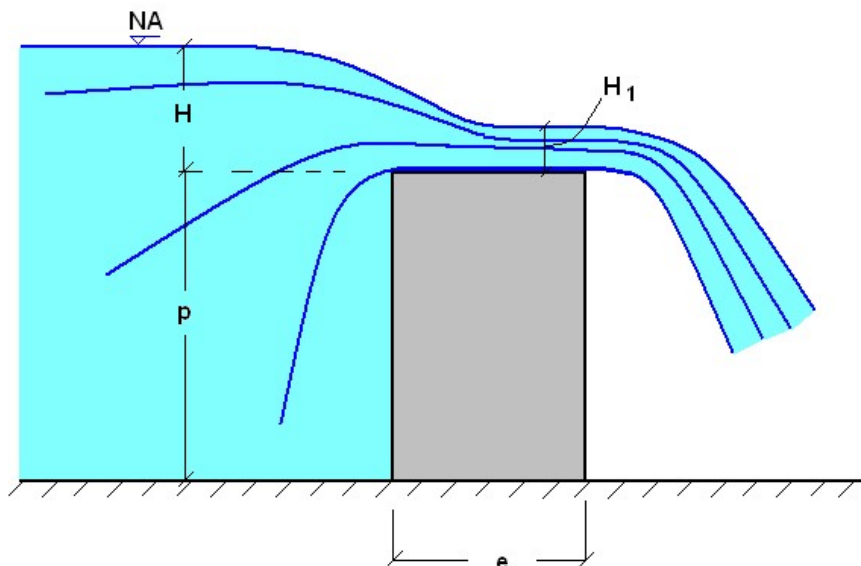


Figura 133 – Descarregador retangular de soleira espessa (Queiroz, 2017).

A soleira deve ter espessura suficiente para que ocorra paralelismo dos filetes de fluido, ou seja, $e > H/2$ (Queiroz, 2017).

Existem 4 casos envolvendo gamas de espessura (Queiroz, 2017):

- Caso $H/2 < e < 2H/3$, veia instável, podendo ou não aderir à crista;
- Caso $e < H/2$, utilizar equações para vertedor de parede delgada;
- Caso $e > 2H/3$, usar fórmula de Bazin corrigida para soleiras espessas;

$$Q = \mu' L \sqrt{2g} H^{3/2}, \text{ onde } \mu' = \mu(0.70 + 0.185 \cdot H/e)$$

- Caso $e > 3H$, a superfície da água sofre um rebaixamento no início da soleira e depois fica paralela à soleira.
 - Caudal teórico, caso o fluido fosse ideal:

$$Q = 0.385 L \sqrt{2g} H^{3/2} = 1.705 L H^{3/2}$$

- Em função de H_1 :

$$Q = 3.133LH_1^{3/2}$$

- Segundo Lesbros, o caudal real será:

$$Q = 0.35L\sqrt{2g}H^{3/2} = 1.55LH^{3/2}$$

6.2.5 Descarregadores de soleira normal

Descarregadores de soleira normal são tais cujo perfil da soleira equipara-se à face inferior da lâmina de fluido para o descarregador de Bazin.

Em muitas barragens o descarregador de cheia da barragem (*overflow spillway*) possui uma soleira com perfil curvo, calculada para um dado caudal denominado de caudal de projeto, correspondendo uma dada carga de projeto ou de definição de soleira (H) (Queiroz, 2017).

Vários tipos de perfis da soleira podem ser utilizados. Os mais importantes são (Queiroz, 2017):

- Perfil Creager (Figura 134)

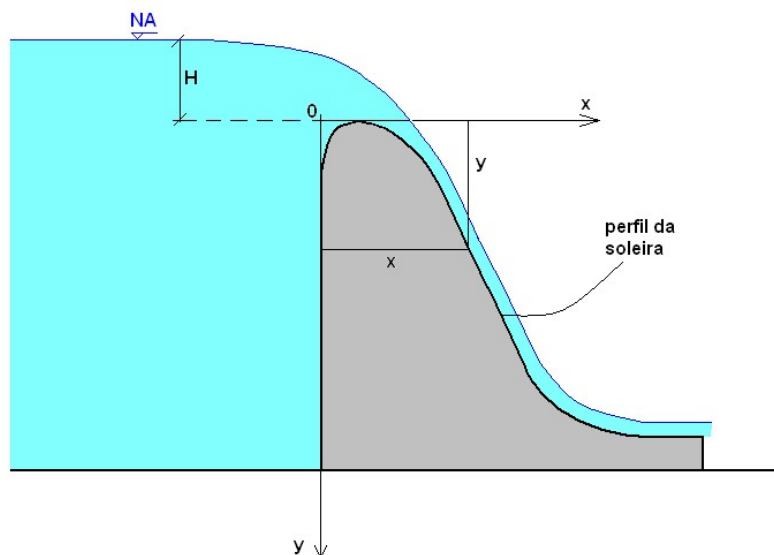


Figura 134 – Perfil Creager (Queiroz, 2017).

- Traçado a partir de uma tabela com as coordenadas (x,y) do perfil (soleira normal) relativas a $H = 1.0$ m. Para $H \neq 1.0$ m, as coordenadas do correspondente perfil são multiplicadas pelo valor de H ;
- Ou traçado a partir da equação:

$$\frac{y}{H} = 0.47 \left(\frac{x}{H} \right)^{1.8}$$

- Perfil Scimemi ou WES (EUA) (Figura 135)

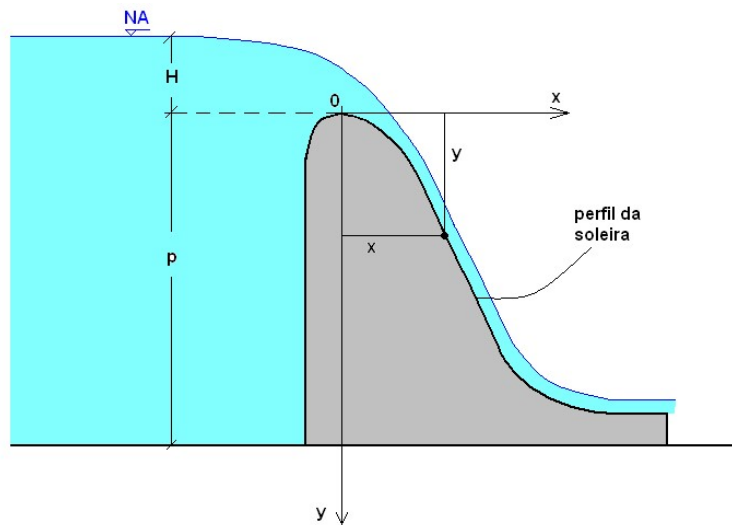


Figura 135 – Perfil WES (EUA) (Queiroz, 2017).

- O perfil do descarregador WES (*Waterways Experiment Station*) com paramento de montante vertical pode ser traçado a partir da equação:

$$\frac{y}{H} = 0.50 \left(\frac{x}{H} \right)^{1.85}$$

O caudal é calculado pela equação:

$$Q = \mu L \sqrt{2g} H^{3/2}, \text{ com } \mu \text{ calculado ou tabelado e em função da carga}$$

6.2.6 Cuidados no uso de descarregadores para medição de caudal

Segundo E. Trindade Neves, deve-se usar descarregadores retangulares, de preferência sem contração lateral e com (Queiroz, 2017):

- Crista delgada, horizontal e normal à direção dos filetes líquidos (cristas e montantes devem ser lisas e agudas);
- Distância da crista ao fundo e aos lados do canal deve ser superior a 2H e, no mínimo, 20 ou 30 cm;
- Paredes do descarregador devem ser lisas e verticais;
- Lâmina livre e tocando a crista segundo uma linha apenas;
- Evitar gotejamento da lâmina: $H > 5 \text{ cm}$;
- H inferior a 60 cm e medida a montante a, no mínimo, 5H da soleira (o ideal é entre 1.8 m e 5.0 m);
- Deve haver, a montante, um trecho retilíneo de canal capaz de regularizar o escoamento da água;
- O nível da água a jusante não deve estar próximo da crista.

Nas medições das grandezas envolvidas na determinação do caudal, podem ocorrer erros que levam a incerteza nessa medição. Para um descarregador retangular:

$$Q = \mu L \sqrt{2g} H^{3/2} = KLH^{3/2} \Rightarrow \frac{dQ}{dH} = \frac{3}{2} KLH^{1/2} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{dQ}{Q} = \frac{\frac{3}{2} KLH^{1/2} dH}{KLH^{3/2}} \Rightarrow \frac{dQ}{Q} = 1.5 \frac{dH}{H}$$

Em que:

dQ/Q representa o erro relativo na medição do caudal;

dH/H representa o erro relativo na medição da carga.

Ou seja, um erro de 1% na medição da carga causa um erro de 1.5% na medição do caudal, não considerando o erro na medição da largura da soleira.

CAPÍTULO 7 - ANÁLISE DIMENSIONAL

7.1 Introdução

Nem sempre os fenómenos físicos, estudados no âmbito da Hidráulica, podem ser representados por modelos matemáticos, sendo necessária a construção de modelos físicos em laboratório ou em campos experimentais (Vasconcelos, 2005).

Neste capítulo serão estudados os conceitos que nos permitem dimensionar o modelo reduzido a construir para estudo do comportamento de uma obra hidráulica em projeto (a que chamaremos protótipo). Aprenderemos, ainda, a relacionar as grandezas medidas no modelo com o valor das grandezas esperadas no protótipo (Vasconcelos, 2005).

Designa-se por **escala** de uma dada grandeza a relação entre o valor da grandeza no modelo e o valor da mesma grandeza no protótipo (Vasconcelos, 2005).

É necessário definir inicialmente a escala geométrica e em função dessas escalas de velocidades, de tempo, de caudal, de pressão, etc. De modo geral é possível esquematizar da seguinte forma (Vasconcelos, 2005):

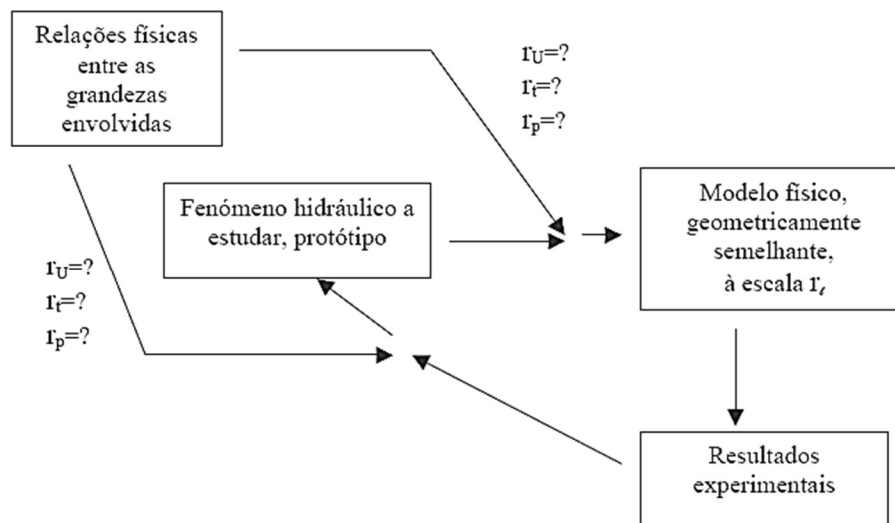


Figura 136 – Estudo de fenómenos físicos (adaptado de Vasconcelos, 2005).

A **análise dimensional** permite obter **relações físicas** envolvidas num fenómeno hidráulico, a partir exclusivamente das respetivas dimensões (Vasconcelos, 2005). É, assim, um meio para simplificação de um problema físico empregando a homogeneidade dimensional para reduzir o número das variáveis de análise. A análise dimensional é particularmente útil para (Ignácio & Nóbrega, 2004):

- Apresentar e interpretar dados experimentais;
- Resolver problemas difíceis de abordar com solução analítica;
- Estabelecer a importância relativa de um determinado fenómeno;
- Modelagem física.

7.2 Unidades e dimensões

Os problemas em fenómenos de transporte envolvem muitas variáveis com diferentes sentidos físicos. As equações derivadas analiticamente são corretas para qualquer sistema de unidades (cada termo da equação deve ter a mesma representação dimensional: homogeneidade) (Ignácio & Nóbrega, 2004).

Cada uma dessas variáveis é expressa por uma magnitude e uma unidade associada. As unidades são expressas utilizando apenas quatro grandezas básicas ou categorias fundamentais (Ignácio & Nóbrega, 2004):

Tabela 16 – Grandezas de base e unidades de base do SI (adaptado de Ignácio & Nóbrega, 2004).

Grandeza	Símbolo	Dimensão	Unidade SI
Massa	m	M	kg, quilograma
Comprimento	l, h, r, x	L	m, metro
Tempo	t	T	s, segundo
Temperatura	T	θ	K, kelvin

Além das grandezas de base, existem as grandezas derivadas:

Tabela 17 – Exemplos de grandezas derivadas e de suas unidades (adaptado de Ignácio & Nóbrega, 2004).

Âmbito	Grandeza	Símbolo	Dimensão	Unidade SI
Geometria	Área	A	L^2	m^2
	Volume	V	L^3	m^3
Cinemática	Velocidade	U	LT^{-1}	m/s
	Velocidade angular	ω	T^{-1}	s^{-1}
	Caudal	Q	L^3T^{-1}	m^3/s
	Fluxo de massa	m	MT^{-1}	kg/s
Dinâmica	Força	F	MLT^{-2}	kg. m/s ²
	Torque	T	ML^2T^{-2}	kg. m ² /s ²
	Energia	E	ML^2T^{-2}	kg. m ² /s ²
	Potência	P	ML^2L^{-3}	kg. m ² /s ²
	Pressão	p	$ML^{-1}T^{-2}$	kg/m. s ²
Propriedades dos Fluidos	Densidade	ρ	ML^{-3}	kg/m ³
	Viscosidade	μ	$ML^{-1}T^{-1}$	kg/m. s
	Viscosidade cinemática	ν	L^2T^{-1}	m ² /s
	Tensão superficial	σ	MT^{-2}	kg/s ²
	Condutividade térmica	k	$MLT^{-3}\theta^{-1}$	kg. m/s ³ . K
	Calor específico	C_p, C_v	$L^2T^{-2}\theta^{-1}$	m ² /s ² . K

Uma grandeza ou grupo de grandezas físicas tem uma dimensão que é representada por uma relação das grandezas primárias. Se esta relação é unitária, o grupo é denominado **adimensional**, isto é, sem dimensão (Ignácio & Nóbrega, 2004).

Como o número de grupos adimensionais é relativamente menor que o número de variáveis físicas, há uma grande redução de esforço experimental para estabelecer a relação entre algumas variáveis (Ignácio & Nóbrega, 2004).

A relação entre dois números adimensionais é dada por uma função entre eles com uma única curva relacionando-os (Ignácio & Nóbrega, 2004).

Pode-se afirmar que os grupos adimensionais produzem melhor aproximação do fenómeno do que as próprias variáveis (Ignácio & Nóbrega, 2004).

Restringindo as condições dos ensaios é possível obter dados de diferentes condições geométricas, mas que levam ao mesmo ponto na curva; isto é, ensaios de diferentes escalas apresentam os mesmos valores para os grupos adimensionais a eles respeitantes. Nestas condições os ensaios apresentam **semelhança dinâmica** (Ignácio & Nóbrega, 2004).

Problemas de engenharia (principalmente na área de térmica e fluidos) dificilmente são resolvidos aplicando-se exclusivamente análise teórica; utilizam-se com frequência estudos experimentais (Ignácio & Nóbrega, 2004).

Muito do trabalho experimental é feito como o próprio equipamento ou com réplicas exatas. Porém, a maior parte das aplicações em engenharia são realizadas utilizando-se modelos à escala (Ignácio & Nóbrega, 2004).

7.3 Teoremas da Análise Dimensional

São aplicados dois Teoremas que, na sua aplicação à Hidráulica, se descrevem do seguinte modo (Vasconcelos, 2005):

- **Teorema da Homogeneidade**

Toda a relação física tem de ser dimensionalmente homogénea. Uma função $f(x)$ diz-se homogénea de grau k se:

$$f(tx) = t^k f(x)$$

Ou seja, uma função homogénea é aquela que, ao sofrer transformação em suas variáveis, resulta numa outra função que é proporcional à função original.

O conceito de função homogénea é essencial no tratamento da Análise Dimensional. Além disso, é fundamental em física. De acordo com o teorema da homogeneidade, também conhecido como teorema de Vaschy-Buckingham, em toda a expressão, equação ou fórmula física, as dimensões de todos os seus termos devem ser idênticas (equação homogénea).

- **Teorema π de Vaschy-Buckingham**

O **teorema π de Vaschy-Buckingham (ou teorema de Vaschy-Buckingham)** é um teorema central na análise dimensional. Estabelece que, se numa equação física envolvendo um número n de variáveis físicas dimensionais, sendo que estas variáveis são representadas por r dimensões físicas fundamentais independentes, a equação do processo ou sistema físico pode ser reescrita como uma equação de $p = n - r$ variáveis adimensionais (parâmetros π), construídas a partir das variáveis originais.

Isso fornece um método para calcular conjuntos de parâmetros adimensionais a partir das variáveis dimensionais dadas, mesmo se a forma da equação do sistema ou processo físico é ainda desconhecida; encontrar parâmetros adimensionais em um problema pode simplificá-lo e até mesmo resolvê-lo.

Este teorema, hoje conhecido como "teorema π " ou "teorema dos $\pi\pi$ ", foi pela primeira vez enunciado por Aimé Vaschy, em 1892, no artigo "Sobre as leis da semelhança em física". Vinte e dois anos após o enunciado, foi publicado em 1914 o famoso artigo de Edgar Buckingham: "Sobre sistemas fisicamente semelhantes: ilustrações do uso de equações dimensionais".

Toda a relação dimensionalmente homogênea entre n grandezas físicas (Vasconcelos, 2005):

$$F(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n) = 0$$

pode ser substituída por uma relação entre $n - p$ (em Hidráulica $p = 3$) grandezas adimensionais:

$$\Phi(\pi_1, \pi_2, \pi_3, \dots, \pi_n)$$

sendo p o número de grandezas dimensionalmente independentes que intervêm no fenómeno.

Os parâmetros adimensionais são definidos cada um deles com essas 3 grandezas fundamentais (a_k, a_l, a_m) e cada uma das $n - 3$ grandezas restantes (Vasconcelos, 2005):

$$\begin{aligned}\pi_1 &= \frac{a_1}{a_k^{x_1} \times a_l^{y_1} \times a_m^{z_1}} \\ \pi_2 &= \frac{a_2}{a_k^{x_2} \times a_l^{y_2} \times a_m^{z_2}} \\ &\vdots \\ \pi_{n-3} &= \frac{a_{n-3}}{a_k^{x_{n-3}} \times a_l^{y_{n-3}} \times a_m^{z_{n-3}}}\end{aligned}$$

Em que os expoentes x_i , y_i e z_i são determinados pela condição de π_i ser adimensional, verificando o **Teorema da Homogeneidade**.

Determinação dos grupos π (6 passos):

- **1º Passo** – Listar todos os parâmetros envolvidos: se nem todos os parâmetros pertinentes forem incluídos, uma relação será obtida, mas não fornecerá a história completa;
- **2º Passo** – Selecionar um conjunto de dimensões fundamentais (primárias), por exemplo, M, L e T;
- **3º Passo** – Listar as dimensões de todos os parâmetros em termos das dimensões primárias;
- **4º Passo** – Selecionar da lista um número de parâmetros que se repetem, igual ao número de dimensões primárias, incluindo todas as dimensões primárias;
- **5º Passo** – Estabelecer equações dimensionais combinando os parâmetros selecionados no passo 4 com cada um dos outros parâmetros a fim de formar grupos adimensionais (haverá $n - m$ equações);
- **6º Passo** – Verificar, a fim de assegurar que cada grupo obtido é adimensional.

7.3.1 Aplicação do Teorema dos π a um problema de Mecânica dos Fluidos

Segundo Vasconcelos (2005),

1º Variáveis que condicionam o fenómeno

- Características geométricas - grandezas lineares identificadas por l ;
- Características cinemáticas - velocidade média do escoamento, U ;
- Características dinâmicas - variações de pressão, Δp ; aceleração gravítica, \vec{g} ;
- Propriedades do fluido - massa volúmica, ρ ; viscosidade cinemática, ν .

Grandezas relacionadas através de uma relação dimensionalmente homogénea:

$$F(l, U, \Delta p, \rho, g, \nu)$$

2º Selecionar entre as diferentes grandezas um sistema de unidades fundamentais, em hidráulica são tradicionalmente adotadas as variáveis (l, U, ρ)

3º Definir a equação função de grandezas adimensionais

$$\Phi(\pi_1, \pi_2, \pi_3) = 0$$

Com:

$$\pi_1 = \frac{\Delta p}{l^{x_1} \times U^{y_1} \times \rho^{z_1}}$$

$$\pi_2 = \frac{g}{l^{x_2} \times U^{y_2} \times \rho^{z_2}}$$

$$\pi_3 = \frac{v}{l^{x_3} \times U^{y_3} \times \rho^{z_3}}$$

Os valores x_i , y_i e z_i podem ser determinados tendo em conta que π_i são parâmetros adimensionais e que as equações anteriores verificam o Teorema da Homogeneidade. Será facilitado o trabalho se nos apoiarmos num sistema de unidades conhecido como por exemplo o sistema MLT, ou seja:

Tabela 18 – Sistema de unidades MLT (adaptado de Vasconcelos, 2005).

Grandeza	Equação às dimensões
l	$M^0L^1T^0$
U	$M^0L^1T^{-1}$
ρ	$M^1L^{-3}T^0$
Δp	$M^1L^{-1}T^{-2}$
g	$M^0L^1T^{-2}$
v	$M^0L^2T^{-1}$

$$M^0L^0T^0 = \frac{M^1L^{-1}T^{-2}}{(M^0L^1T^0)^{x_1} \times (M^0L^1T^{-1})^{y_1} \times (M^1L^{-3}T^0)^{z_1}}$$

$$M^0L^0T^0 = \frac{M^0L^1T^{-2}}{(M^0L^1T^0)^{x_2} \times (M^0L^1T^{-1})^{y_2} \times (M^1L^{-3}T^0)^{z_2}}$$

$$M^0L^0T^0 = \frac{M^0L^2T^{-1}}{(M^0L^1T^0)^{x_3} \times (M^0L^1T^{-1})^{y_3} \times (M^1L^{-3}T^0)^{z_3}}$$

E aplicando o Teorema da Homogeneidade, vem:

$$\text{Relativamente a } \pi_1: \begin{cases} 1 = 0x_1 + 0y_1 + 1z_1 \\ -1 = 1x_1 + 1y_1 - 3z_1 \\ -2 = 0x_1 - 1y_1 + 0z_1 \end{cases} = \begin{cases} z_1 = 1 \\ x_1 = 0 \\ y_1 = 2 \end{cases} \rightarrow \pi_1 = \frac{\Delta p}{l^0 \times U^2 \times \rho^1} = \frac{\Delta p}{\rho U^2}$$

$$\text{Relativamente a } \pi_2: \begin{cases} 0 = 0x_2 + 0y_2 + 1z_2 \\ 1 = 1x_2 + 1y_2 - 3z_2 \\ -2 = 0x_2 - 1y_2 + 0z_2 \end{cases} = \begin{cases} z_2 = 0 \\ x_2 = -1 \\ y_2 = 2 \end{cases} \rightarrow \pi_2 = \frac{g}{l^{-1} \times U^2 \times \rho^0} = \frac{gl}{U^2}$$

$$\text{Relativamente a } \pi_3: \begin{cases} 0 = 0x_3 + 0y_3 + 1z_3 \\ 2 = 1x_3 + 1y_3 - 3z_3 \\ -1 = 0x_3 - 1y_3 + 0z_3 \end{cases} = \begin{cases} z_3 = 0 \\ x_3 = 1 \\ y_3 = 1 \end{cases} \rightarrow \pi_3 = \frac{v}{l^1 \times U^1 \times \rho^0} = \frac{v}{lU}$$

O Teorema dos π permite transformar a função F, que exprime uma relação entre seis grandezas, numa expressão que relaciona três grandezas adimensionais:

$$\Phi\left(\frac{\Delta p}{\rho U^2}, \frac{gl}{U^2}, \frac{v}{lU}\right) = 0$$

Ou, de modo equivalente:

$$\Phi'\left(\frac{\rho U^2}{\Delta p}, \frac{U^2}{gl}, \frac{lU}{v}\right) = 0$$

Os parâmetros adimensionais assim determinados traduzem importantes propriedades do escoamento e por isso têm designações próprias:

- Número de Euler

$$Eu = \frac{\Delta p}{\rho U^2}$$

- Número de Froude

$$Fr = \frac{U^2}{gl} \xrightarrow{l=h} Fr = \frac{U^2}{gh}$$

- Número de Reynolds

$$Re = \frac{Ul}{v} \xrightarrow{l=D} Re = \frac{UD}{v}$$

A função Φ' pode ser representada do seguinte modo:

$$\Phi'(Eu, Fr, Re) = 0 \quad \text{ou} \quad Eu = \Phi''(Fr, Re)$$

A aplicação da Análise Dimensional permite obter uma expressão que representa o fenómeno hidráulico. A função Φ'' pode ser determinada experimentalmente.

7.3.2 Significado físico dos parâmetros adimensionais

Tendo em conta a forma de representação das forças envolvidas no problema anterior é possível relacionar cada um dos parâmetros com formas de força (Tabela 19) (Vasconcelos, 2005).

Tabela 19 – Representação das forças no sistema (adaptado de Vasconcelos, 2005).

Tipo de Força	Representação das forças no sistema (l, U, ρ)
Força de inércia	$F_I = -ma = -\rho l^3 U t^{-1} = -\rho U^2 l^2$
Força de pressão	$F_p = \Delta p l^2$
Forças gravíticas	$F_G = \gamma l^3$
Forças da viscosidade	$F_v = (\mu U l^{-1}) l^2 = \nu \rho U l$

Comparando as equações deduzidas para os três parâmetros adimensionais com a representação das diferentes forças, verificamos que:

- O número de Euler representa a relação entre as forças de pressão e as forças de inércia;

$$Eu = \frac{\Delta p}{\rho U^2} = \frac{\Delta p l^2}{\rho U^2 l^2} = \frac{F_p}{F_I}$$

- O número de Froude representa a relação entre as forças de inércia e as forças gravíticas;

$$Fr = \frac{U^2}{gl} = \frac{\rho U^2 l^2}{\rho g l^3} = \frac{\rho U^2 l^2}{\gamma l^3} = \frac{F_I}{F_G}$$

- O número de Reynolds representa a relação entre as forças de inércia e as forças de viscosidade.

$$Re = \frac{Ul}{\nu} = \frac{\rho Ul^2}{\rho \nu Ul} = \frac{\rho U^2 l^2}{\rho \nu Ul} = \frac{F_I}{F_\nu}$$

CAPÍTULO 8 - SEMELHANÇA

8.1 Semelhança mecânica e hidráulica

Ocorre **Semelhança Mecânica** entre modelo e protótipo geométrica e cinematicamente semelhantes, quando as grandezas dinâmicas preponderantes no fenómeno físico estabelecerem uma mesma escala dinâmica. Quando o fenómeno físico é um fenómeno hidráulico, a semelhança mecânica é denominada **semelhança hidráulica** (UEL, 2017).

Dizemos que dois sistemas são fisicamente semelhantes relativamente a um conjunto de grandezas se existir uma relação constante entre valores homólogos dessas grandezas nos dois sistemas (Vasconcelos, 2005).

A semelhança física pode ser caracterizada de modos diferentes (Vasconcelos, 2005):

- Semelhança geométrica em que apenas se verifica constante a relação entre as grandezas geométricas no modelo e no protótipo;
- Semelhança cinemática em que se verifica a constância da relação entre as grandezas geométricas e cinemáticas entre o modelo e o protótipo;
- Semelhança dinâmica em que se verifica a constância da relação entre as grandezas geométricas, cinemáticas e dinâmicas entre o modelo e o protótipo.

De um modo esquemático pode ser representado do seguinte modo:

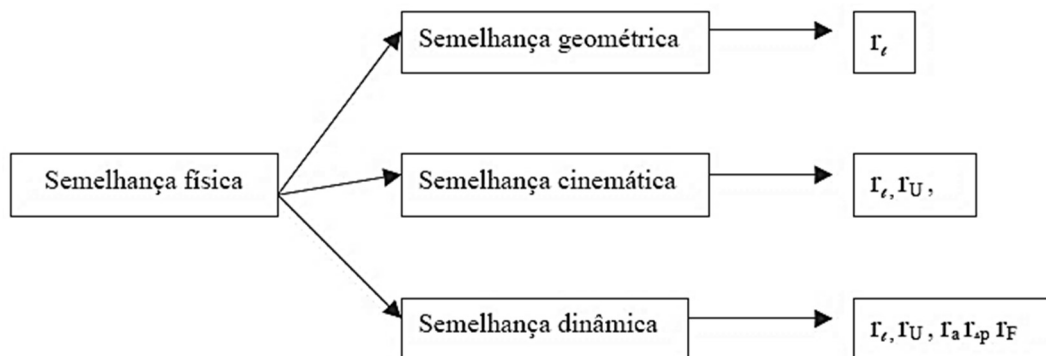


Figura 137 – Representação esquemática da semelhança física (adaptado de Vasconcelos, 2005).

Em Hidráulica a Teoria da Semelhança baseia-se na igualdade dos valores dos parâmetros adimensionais no modelo e no protótipo (Vasconcelos, 2005).

Não sendo, no entanto, compatível a igualdade entre todos os parâmetros para representar um dado fenómeno hidráulico, normalmente é estudado qual o parâmetro adimensional que melhor representa um dado fenómeno tendo em conta as forças intervenientes no fenómeno e depois de escolhido esse parâmetro é igualado no modelo e no protótipo. As semelhanças são designadas pelo nome do parâmetro a igualar (Vasconcelos, 2005).

8.1.1 Semelhança de Euler, Froude e Reynolds

Cada uma das semelhanças referidas será conseguida com base na escala geométrica e na igualdade do parâmetro adimensional correspondente que permite obter o valor das escalas das diferentes grandezas envolvidas (Vasconcelos, 2005). De modo esquemático:

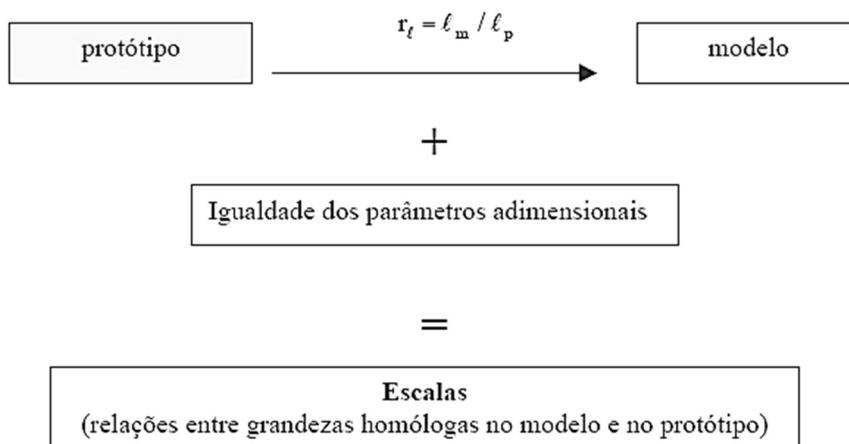


Figura 138 – Semelhanças (adaptado de Vasconcelos, 2005).

Serão de seguida apresentadas as escalas a verificar para os diferentes tipos de semelhança, conhecida a escala geométrica aplicada. As semelhanças de Froude e de Reynolds não podem ser verificadas simultaneamente se for aplicado o mesmo fluido no protótipo e no modelo e para a mesma aceleração gravítica (Vasconcelos, 2005).

No entanto, a **Semelhança de Euler** é compatível com a semelhança de Reynolds ou com a semelhança de Froude por permitir determinar a escala de pressões a partir da escala de velocidades. É usada em situações de escoamento no qual a queda de pressão é significativa, ou seja, a maioria das situações de escoamento (Vasconcelos, 2005).

Conhecida a escala geométrica, r_l

Verificada: $Eu_m = Eu_p$

Então:

$$\left(\frac{\Delta p}{\rho U^2}\right)_m = \left(\frac{\Delta p}{\rho U^2}\right)_p$$

$$\frac{\Delta p_m}{\rho_m U_m^2} = \frac{\Delta p_p}{\rho_p U_p^2}$$

$$\frac{\Delta p_m}{\Delta p_p} = \frac{\rho_m U_m^2}{\rho_p U_p^2}$$

$$r_{\Delta p} = r_\rho r_U^2$$

Para o mesmo líquido: $r_\rho = 1$

$$\text{Então: } r_{\Delta p} = r_U^2 \quad \text{ou} \quad r_U = r_{\Delta p}^{1/2}$$

A **Semelhança de Froude** é aplicada nas situações em que exista predominância das forças gravíticas relativamente às forças da viscosidade, ex.: regimes turbulentos completamente estabelecidos e escoamentos determinados pela ação do peso (escoamentos em superfície livre). Despreza-se o efeito da viscosidade (Re muito elevados) (Vasconcelos, 2005).

Conhecida a escala geométrica, r_l

$$\text{Verificada: } Fr_m = Fr_p$$

Então:

$$\left(\frac{U^2}{gl}\right)_m = \left(\frac{U^2}{gl}\right)_p$$

$$\frac{U_m^2}{g_m l_m} = \frac{U_p^2}{g_p l_p}$$

$$\frac{U_m^2}{U_p^2} = \frac{g_m l_m}{g_p l_p}$$

$$r_U^2 = r_g r_l$$

Para o mesmo local: $r_g = 1$

$$\text{Então: } r_U^2 = r_l \quad \text{ou} \quad r_U = r_l^{1/2}$$

A **Semelhança de Reynolds** é aplicada no escoamento de líquidos no interior de condutas, desde que não esteja presente uma superfície livre, que determinaria a intervenção das forças da gravidade. Escoamentos sob pressão e escoamentos interiores (Vasconcelos, 2005).

Conhecida a escala geométrica, r_l

$$\text{Verificada: } Re_m = Re_p$$

Então:

$$\left(\frac{Ul}{v}\right)_m = \left(\frac{Ul}{v}\right)_p$$

$$\frac{U_m l_m}{v_m} = \frac{U_p l_p}{v_p}$$

$$\frac{U_m l_m}{U_p l_p} = \frac{v_m}{v_p}$$

$$r_U r_l = r_v$$

Para o mesmo líquido: $r_v = 1$

Então: $r_U = r_l^{-1}$

8.1.2 Parâmetros adimensionais comuns

$$\frac{\Delta p}{\rho U^2} = f_1 \left(\frac{Ul}{v}, \frac{U^2}{gl}, \frac{U}{c}, \frac{l\omega}{U}, \frac{U^2 \rho l}{\sigma} \right)$$

Tabela 20 – Parâmetros adimensionais comuns (adaptado de NETeF, 2012).

Parâmetro	Definição	Significado físico	Importância
Número de Euler	$Eu = \frac{\Delta p}{\rho U^2}$	$\frac{\text{Força de pressão}}{\text{Força inercial}}$	Escoamento nos quais a queda de pressão é significativa, Cavitação
Número de Reynolds	$Re = \frac{Ul}{v}$	$\frac{\text{Força inercial}}{\text{Força viscosa}}$	Escoamento influenciados por efeitos viscosos
Número de Froude	$Fr = \frac{U^2}{gl}$	$\frac{\text{Força inercial}}{\text{Força gravítica}}$	Escoamento de superfície livre
Número de Mach	$M = \frac{U}{c}$	$\frac{\text{Força inercial}}{\text{Força de compressibilidade}}$	Escoamento compressível, importante para $U > 0.3c$
Número de Strouhal	$St = \frac{l\omega}{U}$	$\frac{\text{Força centrífuga}}{\text{Força inercial}}$	Escoamento n/permanente c/repetição
Número de Weber	$We = \frac{U^2 \rho l}{\sigma}$	$\frac{\text{Força inercial}}{\text{Força de tensão superficial}}$	Escoamento de superfície livre, a tensão superficial influencia o escoamento

8.1.3 Semelhanças a considerar nos estudos em modelo

Para realizar o estudo de comparação de semelhança entre o modelo e a realidade, é necessário que os conjuntos sejam fisicamente semelhantes (Villa, 2011):

- **Semelhança geométrica**
 - Semelhança de forma;

- A propriedade característica dos sistemas geometricamente semelhantes é que a razão entre qualquer comprimento no modelo e o seu comprimento correspondente é constante;
- Esta razão é conhecida como fator de escala;
- **Semelhança cinemática**
 - Quando dois fluxos de diferentes escalas geométricas tem o mesmo formato de linhas de corrente;
 - É a semelhança do movimento, o que implica necessariamente semelhança de comprimentos (semelhança geométrica) e semelhança de intervalos de tempo;
- **Semelhança Dinâmica**
 - É a semelhança das forças;
 - Origens das forças que determinam o comportamento dos fluidos:
 - Forças devido a diferenças de pressão;
 - Forças resultantes da ação da viscosidade;
 - Forças devido à tensão superficial;
 - Forças elásticas;
 - Forças de inércia;
 - Forças devido à atração gravitacional;
 - Dois sistemas são dinamicamente semelhantes quando os valores absolutos das forças, em pontos equivalentes dos dois sistemas, estão numa razão fixa.

8.1.4 Semelhança em turbomáquinas hidráulicas

Segundo Pinho *et al.* (2011):

- **Parâmetros** a considerar são: **H, H₀, Q, p, η, N e D**;
- **Forças predominantes**: de inércia e de turbulência face às forças de gravidade e de viscosidade;
- **Movimento cíclico de rotação** → Semelhança do tipo Strouhal;

$$St = \frac{l\omega}{U} = \frac{DN}{U}$$

- **Escala das rotações**;
- **Turbinas**:

$$\lambda_N = \lambda_p^{-1/2} \lambda_{H_0}^{5/4} \lambda_\eta^{1/2}$$

- **Bombas**:

$$\lambda_N = \lambda_p^{-1/2} \lambda_{H_0}^{5/4} \lambda_\eta^{-1/2}$$

- **Rotação específica de turbinas (η_s)** é a velocidade de rotação de uma turbina geometricamente semelhante que, funcionando com um rendimento igual ao da turbina dada, fornece uma potência unitária quando sobre ela atua uma queda útil unitária;

$$\eta_s = N \frac{p^{1/2}}{H_o^{5/4}} \text{ (rpm)}$$

- **Rotação específica de bombas (η_s)** é a velocidade de rotação de uma bomba, geometricamente semelhante à dada, que eleva um caudal unitário a uma altura de elevação unitária.

$$\eta_s = N \frac{Q^{1/2}}{H_o^{3/4}}$$

8.1.5 Generalidades sobre modelos

Conceitos (UEL, 2017):

- **Protótipo** é o projeto, mecanismo ou obra hidráulica executados em tamanho real;
- **Modelo** é esse projeto, mecanismo ou obra hidráulica em escala diferente, geralmente menor;
- **Escala** é uma relação entre grandezas homólogas, de mesma dimensão, entre modelo e protótipo. Portanto, é um número adimensional. Exemplo: Escala Geométrica: $r_l = l_m/l_p$.

Tipos de modelos (Pinho et al., 2011):

- **Estudo em modelo de obras hidráulicas** → Semelhança do tipo Froude
 - Descarregadores;
 - Bacias de dissipação;
- **Estudo em modelo geometricamente distorcido**
 - Estuários;
 - **Obras Marítimas** → Semelhança do tipo Froude;
 - λ_x : escala de distâncias horizontais;
 - λ_z : escala de distâncias verticais;
- **Estudo em modelo de fundo fixo**;
- **Estudo em modelo de fundo móvel**
 - Estudo do transporte sólido (erosões no leito do rio ou conforme estuário) → Geral/Modelo distorcido.

Problemas em Engenharia (principalmente na área de Térmica e Fluidos) dificilmente são resolvidos aplicando-se exclusivamente análise teórica e, por isso, utilizam-se com frequência estudos experimentais (Ignácio & Nóbrega, 2004).

Muito do trabalho experimental é feito com o próprio equipamento ou com réplicas exatas, porém, a maior parte das aplicações em Engenharia são realizadas utilizando-se modelos à escala (Ignácio & Nóbrega, 2004).

Sem planeamento e organização, os procedimentos experimentais podem (Ignácio & Nóbrega, 2004):

- Consumir muito tempo;
- Não ter objetividade;
- Ser muito onerosos.

A utilização de modelos em escala acarreta (Ignácio & Nóbrega, 2004):

- Vantagens económicas (tempo e dinheiro);
- Podem ser utilizados fluidos diferentes dos fluidos de trabalho;
- Os resultados podem ser extrapolados;
- Podem ser utilizados modelos reduzidos ou expandidos (dependendo da conveniência).

CAPÍTULO 9 - ESCOAMENTOS SOB PRESSÃO

9.1 Generalidades

Características gerais dos escoamentos (Pinho et al., 2011):

- Escoamentos permanentes e não-permanentes;
- Escoamentos rotacionais e irrotacionais;
- Escoamentos laminares e turbulentos;
- Escoamentos exteriores e interiores.

Os escoamentos interiores dividem-se ainda, relativamente às **condições de contorno** em (Pinho et al., 2011):

- **Escoamentos sob pressão**: verificam-se no interior das condutas, ocupando o fluido em movimento toda a secção das mesmas, sem contacto com o meio exterior, a não ser em possíveis pontos isolados;
- **Escoamentos com superfície livre**: existe sempre contacto da corrente líquida com o meio exterior gasoso, através da superfície livre.

Estudaremos os escoamentos interiores, em termos médios, já que são usualmente turbulentos (Pinho et al., 2011).

Classificação dos escoamentos interiores quanto à **variabilidade dos parâmetros no tempo** (Pinho et al., 2011):

- **Movimento não-permanente**: sempre que pelo menos uma variável seja dependente do tempo.

$$\frac{\partial}{\partial t} \neq 0$$

- **Movimento permanente**: sempre que todas as variáveis em jogo sejam independentes do tempo.

$$\frac{\partial}{\partial t} = 0$$

- **Movimento permanente variado**: se a velocidade varia ao longo da trajetória.

$$\frac{\partial}{\partial t} = 0, \frac{d\vec{v}}{ds} \neq 0$$

- **Movimento permanente uniforme**: se a velocidade é constante ao longo da trajetória.

$$\frac{\partial}{\partial t} = 0, \frac{d\vec{v}}{ds} = 0$$

Equação Geral das Fórmulas de Resistência

Fórmulas de Resistência são equações que permitem determinar as perdas de carga, ou de energia, função das características do escoamento, que se supõe uniforme (Pinho et al., 2011).

Dedução da expressão geral:

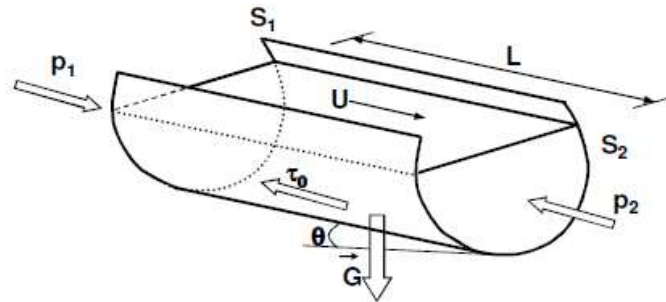


Figura 139 – Conduta circular (Pinho et al., 2011).

Em que:

τ_0 é a tensão tangencial junto da parede (forças de resistência), constante para condutas circulares;

χ é o perímetro molhado.

Aplicando o **Teorema da Quantidade de Movimento** ao trecho de conduta representado, segundo a direção do seu eixo:

$$p_1 \cdot S_1 - p_2 \cdot S_2 + G \sin \theta - \tau_0 \cdot \chi \cdot L = 0$$

Como $S_1 = S_2 = S$ e $G = \gamma \cdot S \cdot L \cdot \sin \theta = (Z_1 - Z_2)/L$, então:

$$Z_1 + \frac{p_1}{\gamma} - \left(Z_2 + \frac{p_2}{\gamma} \right) = \frac{\tau_0 \cdot \chi \cdot L}{\gamma S}$$

Teo. Bernoulli $\Rightarrow \Delta H$

Considerando o **raio hidráulico (R)**, como o quociente entre a secção molhada e o perímetro molhado:

$$R = \frac{S}{\chi} \Rightarrow \Delta H = \frac{\tau_0 L}{\gamma S}$$

Em **movimento uniforme**:

$$\Delta H = J \cdot L \Rightarrow J = \frac{\tau_0}{\gamma R} = \frac{U^{*2}}{gR}$$

Sendo U^* a **velocidade de atrito**, definida pela expressão:

$$U^* = \sqrt{\tau_o/\rho}$$

A qual é difícil de quantificar, assim como τ_o .

Recorrendo à análise dimensional para encontrar uma relação entre os parâmetros característicos do escoamento (Pinho et al., 2011):

- Parâmetros geométricos: R ($4R = D$, em condutas circulares);
- Parâmetros de rugosidade: K_1, K_2, \dots, K_n ;
- Parâmetros cinemáticos e dinâmicos: U ;
- Propriedades do Fluido: ρ, γ, ν ;
- Tensões tangenciais junto da parede: τ_o .

Pelo **Teorema de Vaschy-Buckingham**, usando ($4R, U, \rho$) como sistema de unidades fundamentais, a equação (Pinho et al., 2011):

$$F(4R, U, \rho, \gamma, \nu, \tau_o, K_1, K_2, \dots, K_n) = 0$$

Transforma-se em:

$$\varphi\left(\frac{U^2}{4gR}, \frac{4UR}{\nu}, \frac{\rho U^2}{\tau_o}, \frac{K_1}{4R}, \frac{K_2}{4R}, \dots, \frac{K_n}{4R}\right) = 0$$

Ou seja, isolando o parâmetro adimensional que relaciona as grandezas velocidade de atrito e tensões tangenciais:

$$\frac{\rho U^2}{\tau_o} = \varphi\left(\frac{U^2}{4gR}, \frac{4UR}{\nu}, \frac{K_1}{4R}, \frac{K_2}{4R}, \dots, \frac{K_n}{4R}\right)$$

$$J = \frac{U^2}{\gamma R} \varphi\left(\text{Fr}, \text{Re}, \frac{\rho U^2}{\tau_o}, \frac{K_1}{4R}, \frac{K_2}{4R}, \dots, \frac{K_n}{4R}\right)$$

$$J = \frac{U^2}{\gamma R} \cdot \frac{1}{8} \lambda \left(\text{Fr}, \text{Re}, \frac{\rho U^2}{\tau_o}, \frac{K_1}{4R}, \frac{K_2}{4R}, \dots, \frac{K_n}{4R}\right)$$

$$J = \frac{\lambda}{4R} \cdot \frac{U^2}{2g}$$

Em que λ é o coeficiente de perda de carga, ou coeficiente de resistência.

Expressão geral das perdas de carga contínuas (ou fórmula universal) em condutas circulares

No caso particular de escoamentos sob pressão em condutas circulares (Pinho et al., 2011):

$$\lambda = \lambda \left(Fr, Re, \frac{K_1}{4R}, \frac{K_2}{4R}, \dots, \frac{K_n}{4R} \right) \Rightarrow \lambda = \lambda \left(Re, \frac{K_1}{D}, \frac{K_2}{D}, \dots, \frac{K_n}{D} \right)$$

$$J = \frac{\lambda}{D} \cdot \frac{U^2}{2g}$$

9.1.1 Estabelecimento do escoamento

Diz-se que um escoamento está estabelecido, quando os perfis de velocidades médias que apresenta são simétricos em relação ao eixo da conduta, e crescem desde a parede até esse eixo, não se alterando a sua forma com a distância para jusante (Pinho et al., 2011).

Se considerarmos condutas de comprimento (**L**) elevado (**L > 100.D**, em que **D** é o diâmetro da conduta) e características geométricas (direção, rugosidade, forma e dimensão da secção transversal) constantes, poder-se-á considerar que (Pinho et al., 2011):

- a distribuição de pressões na secção transversal é do tipo hidrostático (**b = 1**);
- o **coeficiente de Coriolis** é constante ao longo da conduta;
- a perda de carga (**ΔH**) entre duas secções é proporcional à distância (**L**) entre elas, sendo constante a perda de carga unitária ao longo da conduta: **J = ΔH/L**.

9.1.2 Rugosidade das paredes dos tubos

As superfícies internas das condutas apresentam irregularidades (**rugosidade**), que influenciam as características do escoamento. Assim, torna-se necessário caracterizar a rugosidade, função das características do material (Pinho et al., 2011):

- altura (dimensão da rugosidade):
 - **k**: rugosidade absoluta (Figura 140);



Figura 140 – Rugosidade absoluta (Pinho et al., 2011).

- **k/D**: rugosidade relativa;
- forma:
 - rugosidade de ondulação (característica de materiais de estrutura vítrea);
 - rugosidade de aspereza (característica de materiais de estrutura cristalina);
- distribuição espacial das protuberâncias.

A **rugosidade artificial** refere-se a uma distribuição sobre uma superfície lisa de protuberâncias, como pequenos cubos, paralelepípedos, pirâmides, esferas (Pinho et al., 2011).

A **rugosidade artificial de Nikuradse** (Figura 141) é a resultante da colagem de grãos de areia de granulometria (ϵ) conhecida na parede interna de um tubo de vidro, sendo a rugosidade relativa (ϵ/D) assim obtida suficiente para caracterizar completamente a rugosidade (Pinho et al., 2011).

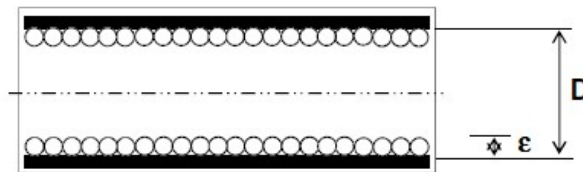


Figura 141 – Rugosidade artificial de Nikuradse (Pinho et al., 2011).

9.1.3 Regimes de escoamento. Experiências de Nikuradse

Utilizando tubos de vidro de diferentes diâmetros, combinados com diferentes granulometrias de areia, Nikuradse estudou várias rugosidades relativas (ϵ/D), de maneira a determinar a expressão para o coeficiente de resistência, $\lambda = \lambda(Re, \epsilon/D)$ (Pinho et al., 2011):

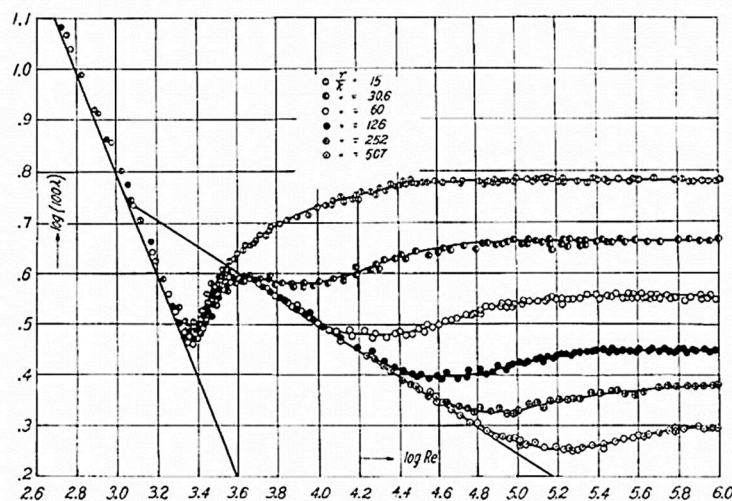


Figura 142 – Resultados experimentais de Nikuradse (Pinho et al., 2011).

A análise dos resultados das experiências de Nikuradse (Figura 142) permitem identificar diversos regimes de escoamento (Figura 143) função dos parâmetros número de Reynolds (**Re**) e rugosidade relativa (ϵ/D) (Pinho et al., 2011):

- I - Regime laminar;
- II - Regime de transição laminar/turbulento;
- III - Regime turbulento hidraulicamente liso;
- IV - Regime de transição liso/rugoso;

- V - Regime turbulento hidraulicamente rugoso.

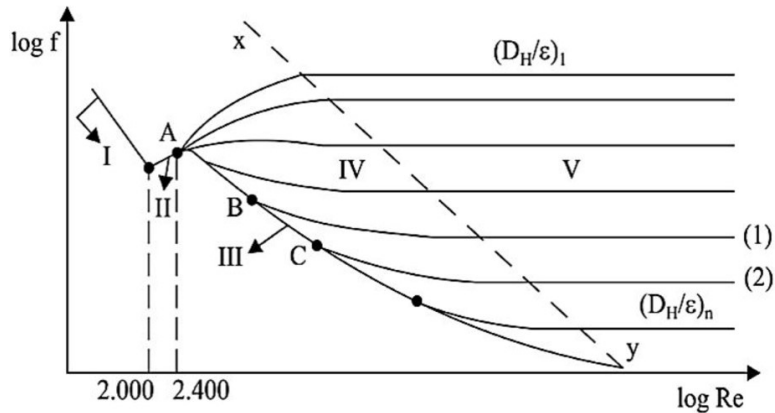


Figura 143 – Regimes de escoamento em condutas (<http://slideplayer.com.br/slide/7750390/#>).

Os regimes fundamentais em escoamentos sob pressão são (Pinho et al., 2011):

- Regime laminar, $\lambda = \lambda(Re)$;
- Regime turbulento hidraulicamente liso, $\lambda = \lambda(Re)$;
- Regime de transição do regime turbulento hidraulicamente liso para o regime turbulento hidraulicamente rugoso, $\lambda = \lambda(Re, \epsilon/D)$;
- Regime turbulento hidraulicamente rugoso, $\lambda = \lambda(\epsilon/D)$.

9.2 Perdas de carga uniformes nos escoamentos sob pressão

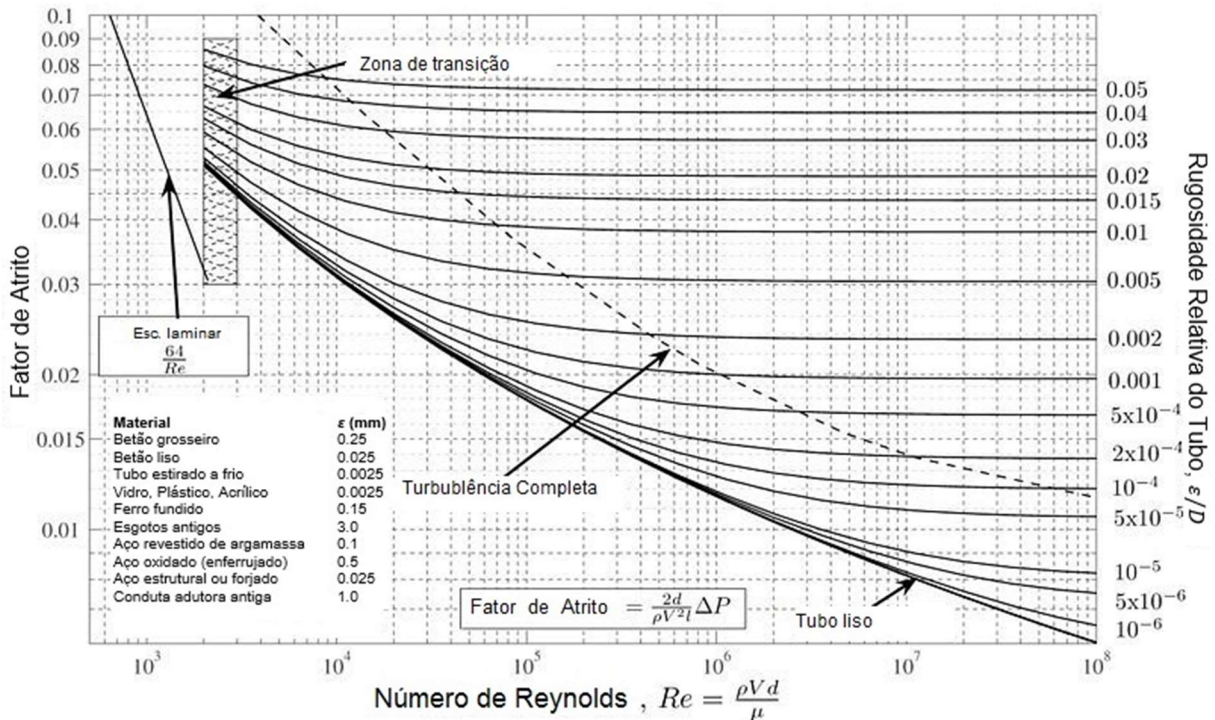


Figura 144 – Diagrama de Moody (tubos reais) (adaptado de <https://www.slideshare.net/thiaggoneres/diagrama-moody-70133925>).

9.2.1 Perdas de carga em regime laminar

Fórmula de Poiseuille (Pinho et al., 2011):

$$\lambda = \frac{64}{Re}$$

9.2.2 Perdas de carga em regime turbulento hidraulicamente liso

Fórmula de Prandtl-Von Kármán (Pinho et al., 2011):

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log \frac{2.51}{Re\sqrt{\lambda}}$$

9.2.3 Perdas de carga em regime turbulento rugoso

Fórmula de Nikuradse (Pinho et al., 2011):

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log \frac{\varepsilon/D}{3.7}$$

9.2.4 Perdas de carga em condutas comerciais

Fórmula de Colebrook-White (Pinho et al., 2011):

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log \left(\frac{k/D}{3.7} + \frac{2.51}{Re\sqrt{\lambda}} \right)$$

Sendo **k** a **rugosidade equivalente** de uma conduta - parâmetro que substituindo **ε** nas equações estabelecidas para a rugosidade tipo grão de areia de Nikuradse, conduz ao coeficiente de perda de carga determinado para essa conduta em regime turbulento hidraulicamente rugoso. **Nota:** os valores de **k** encontram-se tabelados, diferindo, no entanto, os seus valores de acordo com a fonte, devido à consideração de fatores como: a variabilidade do material consoante o fabricante, consideração ou não da influência das juntas, e contabilização ou não do envelhecimento das condutas. Aconselha-se, pois, a utilizar o valor mais desfavorável para cada utilização prevista (Pinho et al., 2011).

Utilização da Fórmula de Colebrook-White

Parâmetros envolvidos (Pinho et al., 2011):

- Diâmetro da conduta (**D**);

- Velocidade média do escoamento ($U(\text{Re})$);
- Rugosidade equivalente (k);
- Coeficiente de resistência ou de perda de carga (λ) relacionado com a perda de carga por unidade de comprimento (J), através da **Expressão Geral das Perdas de Carga**:

$$J = \frac{\lambda U^2}{D 2g}$$

Tipos de problemas envolvendo a fórmula de Colebrook-White (Pinho et al., 2011):

1. Determinação do diâmetro da conduta (D) (**problema de dimensionamento**), conhecidos os restantes parâmetros, ou determinação do coeficiente de resistência (λ) conhecidos os restantes parâmetros - **problema implícito** - resolução por um método iterativo, ou por um método gráfico;
2. Determinação da rugosidade equivalente (k), conhecidos λ , U e D ;

$$k = 3.7D \left(10^{-\frac{\lambda}{2}} - \frac{2.51}{\text{Re}\sqrt{\lambda}} \right)$$

3. Determinação da velocidade média do escoamento (U), conhecidos J , k e D ;

$$\begin{cases} J = \frac{\lambda U^2}{D 2g} \\ \frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log \left(\frac{k/D}{3.7} + \frac{2.51}{\text{Re}\sqrt{\lambda}} \right) \end{cases} \Rightarrow U = -2\sqrt{2gDJ} \log \left(\frac{k/D}{3.7} + \frac{2.51v}{D\sqrt{2gDJ}} \right)$$

4. Cálculo do coeficiente de resistência (λ):
 - a. Resolução através da fórmula de Colebrook-White (**Método iterativo**);

$$F(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} + 2 \log \left(\frac{k/D}{3.7} + \frac{2.51}{\text{Re}\sqrt{\lambda}} \right); F(\lambda) = 0$$

- b. Diagrama ou ábaco de Moody (**Método gráfico**): Entrada: $D, U, k/D \rightarrow$
Saída: λ ;
- c. Fórmula de Barr (Pré-dimensionamento);

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log \left(\frac{k/D}{3.7} + \frac{5.1286}{\text{Re}^{0.89}} \right)$$

- d. Fórmula de Darcy-Weisbach;

$$J = \frac{f U^2}{D 2g}$$

e. Fórmula de Hazen-Williams.

$$J = \frac{10.7}{C_{HW}^{1.852} D^{4.87}} Q^{1.852}$$

9.3 Perdas de carga localizadas nos escoamentos sob pressão

Perdas de carga localizadas (acidentais, singulares ou concentradas)

Fórmula geral (Pinho et al., 2011):

$$\Delta H_L = K \frac{U^2}{2g}$$

Em que:

K é o coeficiente de perda de carga;

$U^2/2g$ é a energia cinética.

Onde:

$$K = f(\text{Re}, \text{geometria do contorno})$$

As perdas de carga localizadas correspondem a regimes variados que se estabelecem em troços de curta extensão, devido a alterações bruscas das condições do escoamento. Nestes troços de curta extensão estas perdas de carga prevalecem relativamente à perda de carga contínua, **correspondendo a uma descontinuidade da linha de energia** (Pinho et al., 2011).

9.3.1 Perda de carga num alargamento brusco

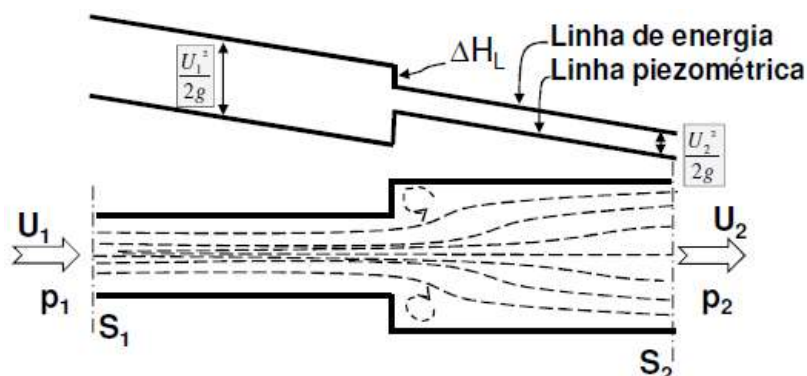


Figura 145 – Perda de carga num alargamento brusco (Pinho et al., 2011).

Atendendo à equação da quantidade de movimento,

$$\rho Q(U_1 - U_2) = p_2 S_2 - p_1 S_1 - p'(S_2 - S_1)$$

E à equação de Bernoulli,

$$\frac{p_1}{\gamma} + \frac{U_1^2}{2g} - \left(\frac{p_2}{\gamma} + \frac{U_2^2}{2g} \right) = \Delta H_L$$

Vem:

$$\Delta H_L = \left(\frac{U_1 - U_2}{2g} \right)^2 + \left(1 - \frac{S_1}{S_2} \right) \frac{p - p'}{\gamma} = \left(1 - \frac{S_2}{S_1} \right)^2 \frac{U_2^2}{2g} + \left(1 - \frac{S_1}{S_2} \right) \frac{p_1 - p'}{\gamma}$$

Como $p_1 - p' = 0$, então:

$$\Delta H_L = \left(1 - \frac{S_2}{S_1} \right)^2 \frac{U_2^2}{2g} \Rightarrow \boxed{\Delta H_L = \left(\frac{U_1 - U_2}{2g} \right)^2} \text{ F\u00f3rmula de Borda}$$

9.3.2 Perda de carga num alargamento gradual

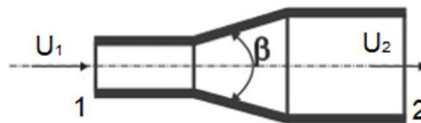


Figura 146 – Alargamento gradual (KSB, 2003).

$$\Delta H_L = \underbrace{\left(1 - \frac{S_2}{S_1} \right)^2}_{K} \frac{U_2^2}{2g}$$

Tabela 21 – Valor de K em função do \u00e2ngulo \u03b2 (KSB, 2003).

\u03b2	5\u00b0	10\u00b0	20\u00b0	40\u00b0	60\u00b0	70\u00b0	80\u00b0	120\u00b0
K	0.13	0.17	0.42	0.90	1.10	1.20	1.08	1.05

9.3.3 Perda de carga na passagem de uma conduta para um reservat\u00f3rio

Passagem em aresta viva

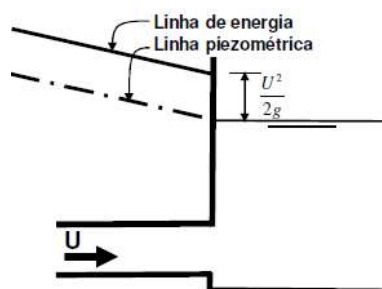


Figura 147 – Passagem em aresta viva de uma conduta para um reservat\u00f3rio (Pinho et al., 2011).

$$\Delta H_L = \frac{U^2}{2g}$$

Passagem com alargamento gradual

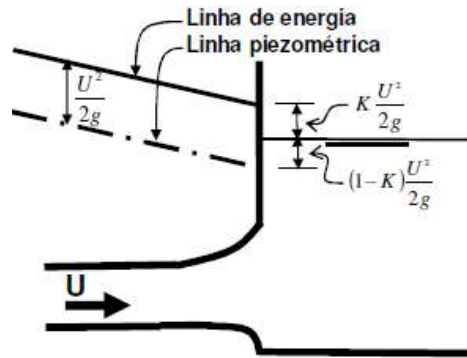


Figura 148 – Passagem com alargamento gradual de uma conduta para um reservatório (Pinho et al., 2011).

$$\Delta H_L \geq 0.5 \frac{U^2}{2g}$$

9.3.4 Perda de carga num estreitamento brusco

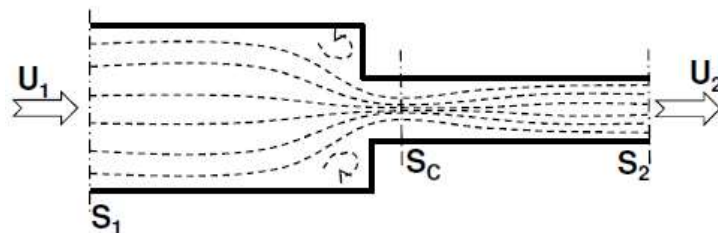


Figura 149 – Estreitamento brusco (Pinho et al., 2011).

Ao nível de escoamento temos:

- Escoamento acelerado entre S_1 e S_C ;
- Escoamento retardado entre S_C e S_2 .

$$\Delta H_L = \underbrace{\left[\left(1 - \frac{S_2}{C_C}\right)^2 + \frac{1}{9} \right]}_K \frac{U_2^2}{2g}$$

Tabela 22 – Valores de K e C_c em função das secções de entrada e saída, segundo Weisbach (Pinho et al., 2011).

S_2/S_1	1.00	0.80	0.60	0.40	0.20	0.10	0.01
$C_c = S_C/S_2$	1.00	0.77	0.70	0.65	0.62	0.61	0.60
K	0.00	0.13	0.22	0.33	0.42	0.45	0.49

9.3.5 Perda de carga na passagem de um reservatório para uma conduta

Passagem em aresta viva

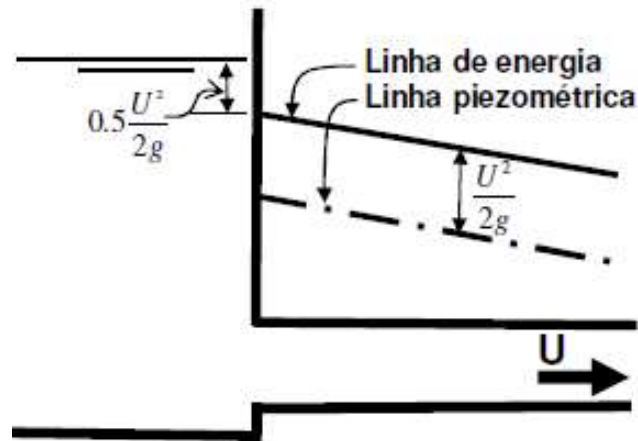


Figura 150 – Passagem em aresta viva de um reservatório para uma conduta (Pinho et al., 2011).

$$\Delta H_L = 0.5 \frac{U^2}{2g}$$

Passagem com estreitamento gradual

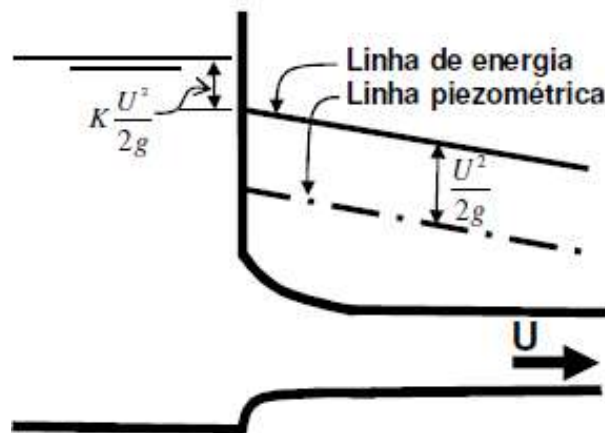


Figura 151 – Passagem com estreitamento gradual de um reservatório para uma conduta (Pinho et al., 2011).

$$\Delta H_L \geq 0.05 \frac{U^2}{2g}$$

9.3.6 Perdas de carga em mudanças de direção

Fórmula geral

$$\Delta H_L = K \frac{U^2}{2g}$$

Mudança gradual de direção

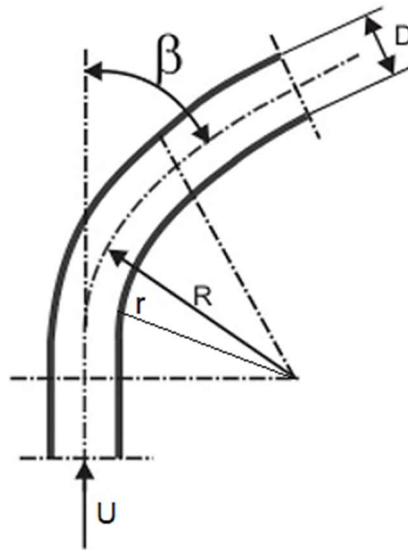


Figura 152 – Mudança gradual de direção em tubo de secção circular (curvas) (KSB, 2003).

K é calculado da seguinte forma:

$$K = \beta^\circ/90^\circ \left[0.131 + 1.847 \left(\frac{D}{2R} \right)^{3.5} \right]$$

Mudança brusca de direção

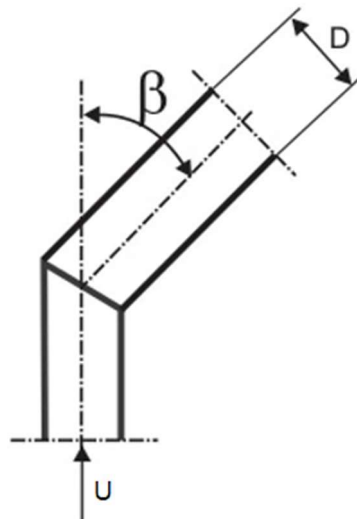


Figura 153 – Mudança brusca de direção em tubo de secção circular (joelho ou cotovelo) (KSB, 2003).

K é calculado da seguinte forma:

$$K = 0.9457 \sin^2 \frac{\beta}{2} + 2.05 \sin^4 \frac{\beta}{2}$$

No caso de o tubo ser de **secção retangular** em que a_0 e b_0 representam, respetivamente, a altura e largura da secção retangular, então os parâmetros R e D das expressões anteriores tomam a forma de:

$$R = r + \frac{b_0}{2} \quad \wedge \quad D = \frac{2a_0b_0}{a_0 + b_0}$$

9.3.7 Perdas de carga em derivações

Tabela 23 – Comprimentos equivalentes a perdas de carga em derivações, expressos em metros (adaptado de <http://hidrossanitariasutfprm.blogspot.pt/>).

Diâmetro, D		Tê 90° Passagem direta	Tê 90° Saída de lado	Tê 90° Saída bilateral
[mm]	[pol]			
13	½	0.3	1.0	1.0
19	¾	0.4	1.4	1.4
25	1	0.5	1.7	1.7
32	1 ¼	0.7	2.3	2.3
38	1 ½	0.9	2.8	2.8
50	2	1.1	3.5	3.5
63	2 ½	1.3	4.3	4.3
75	3	1.6	5.2	5.2
100	4	2.1	6.7	6.7
125	5	2.7	8.4	8.4
150	6	3.4	10.0	10.0
200	8	4.3	13.0	13.0
250	10	5.5	16.0	16.0
300	12	6.1	19.0	19.0
350	14	7.3	22.0	22.0

9.3.8 Perdas de carga em válvulas

Fórmula geral

$$\Delta H_L = K \frac{U^2}{2g}$$

Válvulas adufas, de gaveta, de cunha ou de corredeira

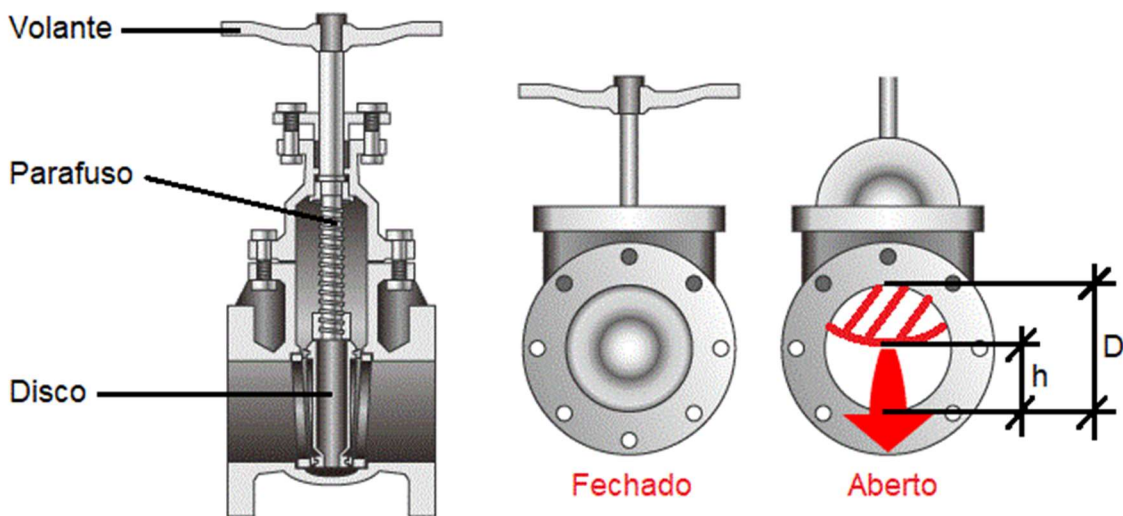


Figura 154 – Válvula de gaveta (adaptado de <http://www.globalspec.com>).

Tabela 24 – Valores de K em função da relação h/D e consoante a forma da secção (adaptado de Pinho et al., 2011).

h/D	0	0.1	0.125	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
K, \circ	∞	-	97.8	35.0	10.0	4.6	2.06	0.98	0.44	0.17	0.06	0
K, \square	∞	193	-	44.5	17.8	8.12	4.02	2.08	0.95	0.39	0.09	0

Válvulas de borboleta

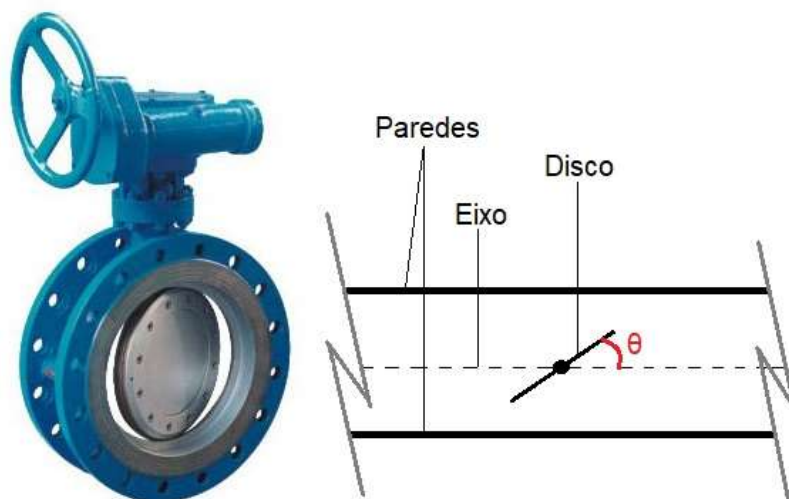


Figura 155 – Válvula de borboleta (adaptado de <http://www.sohanengg.com>).

Tabela 25 – Valores de K em função de θ e consoante a forma da secção (adaptado de Pinho et al., 2011).

θ [°]	5	10	15	20	25	30	40	50	60	70	80	90
K, \circ	0.24	0.52	0.90	1.54	2.51	3.91	10.8	32.6	118	256	751	∞
K, \square	0.28	0.45	0.77	1.34	2.16	3.54	9.30	24.9	77.4	158	368	∞

Válvulas esféricas

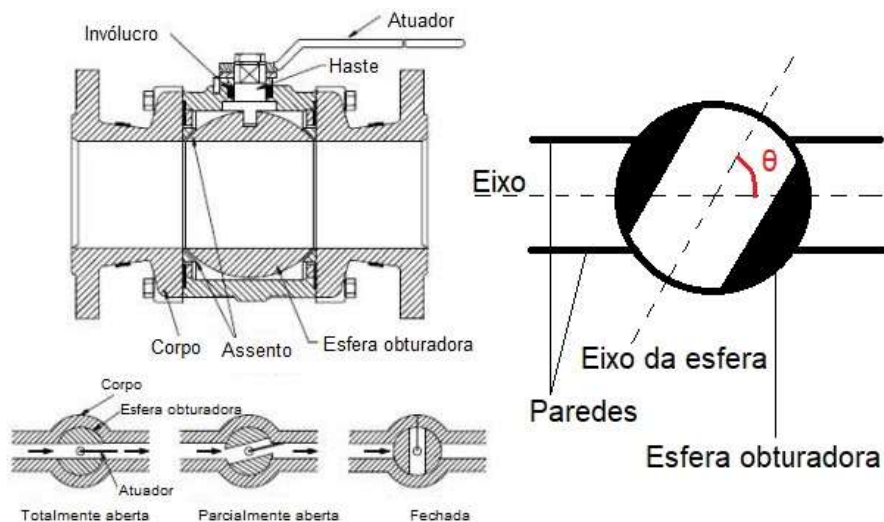


Figura 156 – Válvula esférica (adaptado de <http://www.histarmar.com.ar> e Pinho et al., 2011).

Tabela 26 – Valor de K em função de θ e consoante a forma da secção (adaptado de Pinho et al., 2011).

θ [°]	5	10	15	20	25	30	40	50	55	60	67	82
K, \circ	0.05	0.31	0.88	1.84	3.45	6.15	20.7	95.3	275	-	∞	-
K, \square	0.05	0.29	0.75	1.56	3.10	5.47	17.3	52.6	-	206	-	∞

Válvulas de retenção de batente

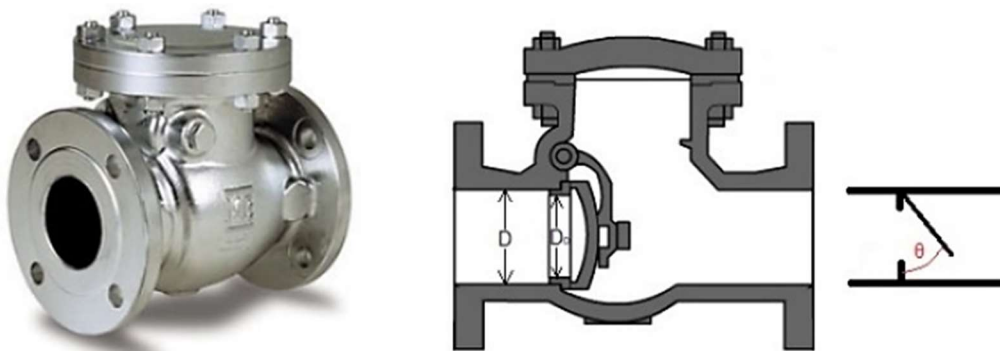


Figura 157 – Válvula de retenção de batente (adaptado de <http://www.solucoesindustriais.com.br> e <https://www.unival.com.br>).

Tabela 27 – Valores de K para funcionamento em plena abertura (adaptado de Pinho et al., 2011).

D [mm]	40	70	100	200	300	500	700
K	1.3	1.4	1.5	1.9	2.1	2.5	2.9

Tabela 28 – Valores de K em função do ângulo de abertura, para $D_0 = 0,73 D$ (adaptado de Pinho et al., 2011).

θ [°]	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70
K	90	62	42	30	20	14	9.5	6.6	4.6	3.2	2.3	1.7

9.3.9 Perdas de carga em grelhas

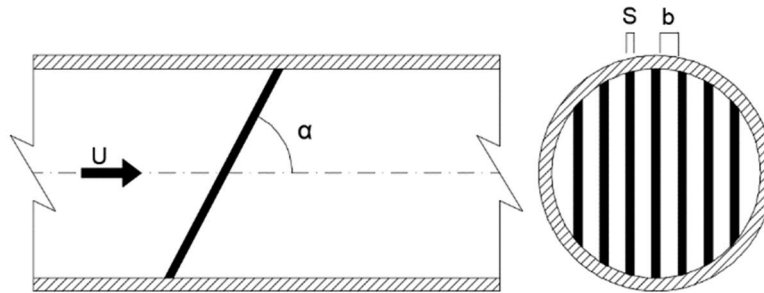


Figura 158 – Grelha (adaptado de Pinho et al., 2011).

$$\Delta H_L = \underbrace{\beta \left(\frac{S}{b}\right)^{\frac{4}{3}} \sin \alpha}_{K} \frac{U^2}{2g}$$

Tabela 29 – Valores de β em função da forma da secção das barras (adaptado de Pinho et al., 2011).

Formas da secção das barras							
Valor de β	2.42	1.83	1.67	1.03	0.92	0.76	1.79

9.3.10 Comprimento equivalente a uma perda de carga localizada

Perdas de carga contínua (Darcy-Weisbach)

$$\Delta H = \frac{\lambda U^2}{D} L$$

Para uma perda de carga localizada

$$\Delta H_L = K \frac{U^2}{2g} = \frac{\lambda U^2}{D} L_{eq}$$

Donde:

$$L_{eq} = \frac{K}{\lambda} D$$

E:

$$L' = L + \sum_{i=1}^n L_{eq,i}$$

9.4 Problemas do movimento uniforme em tubos

9.4.1 Generalidades

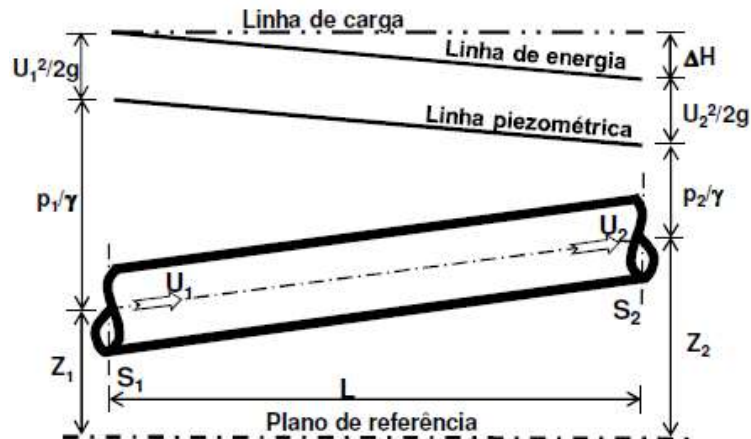


Figura 159 – Representação esquemática de um fluxo no interior de um tubo (Pinho et al., 2011).

Teorema de Bernoulli:

$$E = z + \frac{bp}{\gamma} + \frac{\alpha U^2}{2g} = \text{constante} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{U_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{U_2^2}{2g} = \Delta H \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta H = h_f + \sum \Delta H_L$$

Onde:

$$\sum \Delta H_L = \sum_{i=1}^n L_{eq,i}$$

Segundo a formulação de **Darcy-Weisbach**, h_f é definido da seguinte forma:

$$h_f = f \frac{L U^2}{D 2g} \quad \text{ou} \quad h_f = KQ^2, \quad \text{onde } f = f\left(\text{Re}, \frac{e}{D}\right)$$

Segundo **Hazen-Williams**, h_f toma a forma:

$$h_f = \frac{10.7L}{C_{HW}^{1.852} D^{4.87}} Q^{1.852} \quad \text{ou} \quad h_f = KQ^{1.852}, \quad \text{onde } C_{HW} = f(\text{material}, D)$$

9.4.2 Tipos de problemas

Quanto às **grandezas a determinar** temos (Pinho et al., 2011):

- **Caudal (Q);**
- **Diâmetro da conduta (D);**
- **Velocidade (U);**
- **Perda de carga contínua (J).**

As **equações disponíveis** para resolução de problemas envolvendo estes parâmetros são (Pinho et al., 2011):

- **Continuidade, $Q = AU$;**
- **Resistência, $DJ = \varphi(U)$.**

Assim podemos definir **3 tipos de problemas** (Pinho et al., 2011):

- **Tipo I**, onde são **dados D e Q**, por forma a **determinar J**;
- **Tipo II**, onde são **dados D e J**, por forma a **determinar Q**;
- **Tipo III**, onde são **dados Q e J**, por forma a **determinar D**.

9.4.3 Determinação das alturas piezométricas, dados os diâmetros e os caudais

Nesta situação temos (Pinho et al., 2011):

- **Problema do Tipo I**
 - Dados: Q, D;
- Equações a utilizar:
 - Continuidade $\rightarrow U$;
 - Resistência $\rightarrow J$;
- Objetivo:
 - Linha piezométrica;
 - Alturas piezométricas;
 - Pressões nas várias secções da conduta.

9.4.4 Determinação dos caudais, dados os diâmetros e as perdas de carga

- **Problema do Tipo II** (Pinho et al., 2011)
 - Dados: D, J;
- Equações a utilizar:
 - Escoamento turbulento rugoso
 - Resistência $\rightarrow Q = \pi\sqrt{g/8\lambda}\sqrt{\Delta H/L'} D^5$
 - Escoamento hidraulicamente liso (processo iterativo):
 - 1º passo: Resistência $\rightarrow Q = \pi\sqrt{g/8\lambda}\sqrt{\Delta H/L'} D^5$. Considera-se L_{eq} válido para regime turbulento e λ arbitrário;

- 2º passo: Resistência $\rightarrow Q = \pi\sqrt{g/8\lambda}\sqrt{J}D^5$. Com o valor de Q obtido calculam-se as perdas de carga localizadas e o respetivo coeficiente λ , onde $J = (\Delta H - \sum_{i=1}^n \Delta H_{L_i})/L$;
- Objetivo:
 - Caudal na conduta.

9.4.5 Determinação dos diâmetros, dados os caudais e as perdas de carga

- **Problema do Tipo III** (Pinho et al., 2011)
 - Dados: Q, J;
- Equações a utilizar (processo iterativo):
 - 1º passo: Resistência $\rightarrow D = [(8\lambda Q^2 L')/(g\pi^2 J)]^{1/5}$. Considera-se L_{eq} válido para regime turbulento e λ arbitrário;
 - 2º passo: Resistência $\rightarrow D = [(8\lambda Q^2)/(g\pi^2 J)]^{1/5}$. Com o valor de D obtido calculam-se as perdas de carga localizadas e um novo valor de λ , onde $J = (\Delta H - \sum_{i=1}^n \Delta H_{L_i})/L$;
- Objetivo:
 - Diâmetro da conduta.

Nota: na prática, este problema de dimensionamento hidráulico de um tubo é condicionado por gamas de diâmetros existentes no mercado, sendo normalmente adotado o menor diâmetro que satisfaz as condições piezométricas e de velocidade que são requeridas (Pinho et al., 2011).

9.4.6 Posição das condutas em relação à linha piezométrica

1º Caso: Conduta abaixo da linha piezométrica efetiva em toda a sua extensão

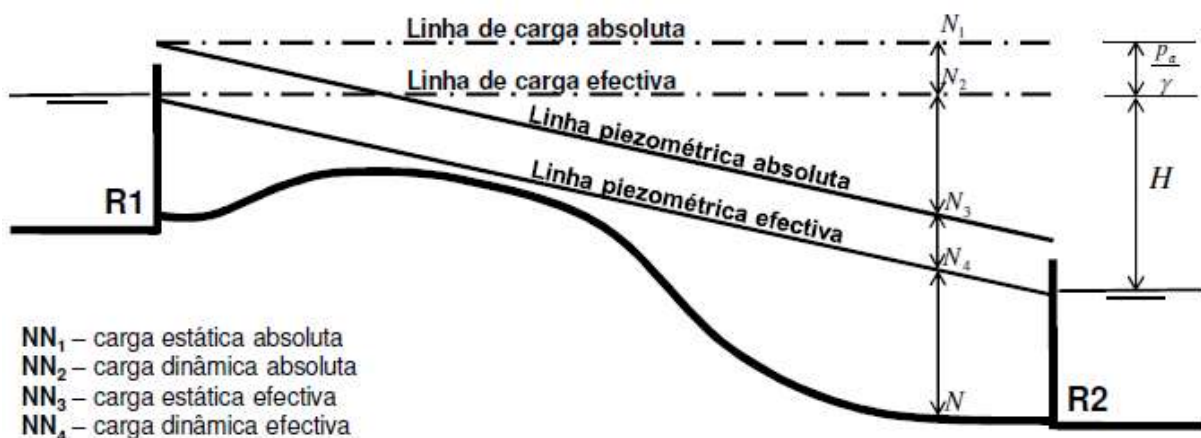


Figura 160 – Conduta abaixo da linha piezométrica efetiva em toda a sua extensão (Pinho et al., 2011).

Nesta situação verifica-se (Pinho et al., 2011):

- Pressão efetiva sempre positiva em todos os pontos da conduta;
- Posição ótima para o escoamento.

2º Caso: Conduta acima da linha piezométrica efetiva (em CD), mantendo-se abaixo da linha piezométrica absoluta

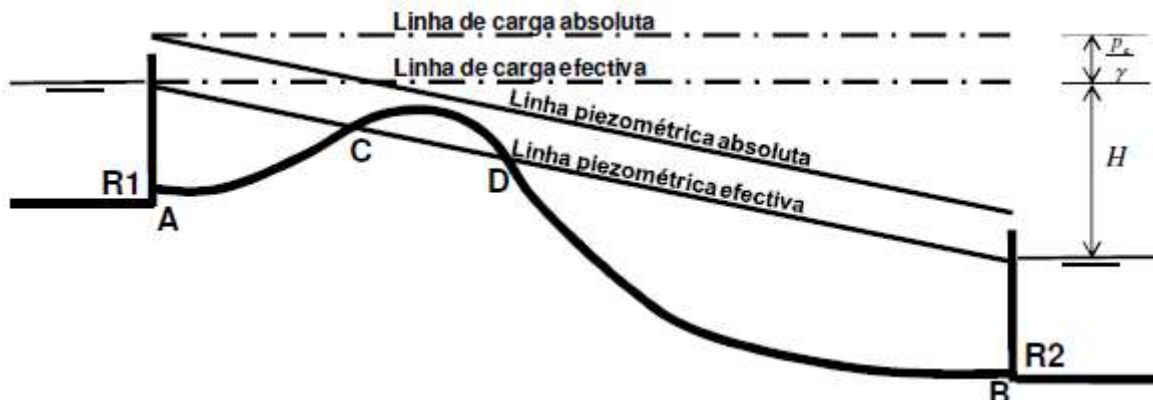


Figura 161 – Conduta acima da linha piezométrica efetiva (em CD), mantendo-se abaixo da linha piezométrica absoluta (Pinho et al., 2011).

Nesta situação verifica-se (Pinho et al., 2011):

- No trecho **CD** a formação de bolsas de ar, reduzindo o caudal escoado;
- No trecho **DB** o funcionamento intermitente ou parcialmente cheio;
- Desaconselhado o uso de ventosas no trecho **CD**;
- Utilização de diâmetros diferentes em **AC** e **DB**;
- Se a depressão for suficientemente grande, pode atingir-se a **tensão de vapor do líquido**, podendo ocorrer **cavitação**.

3º Caso: Conduta coincidindo com a linha piezométrica efetiva em toda a sua extensão

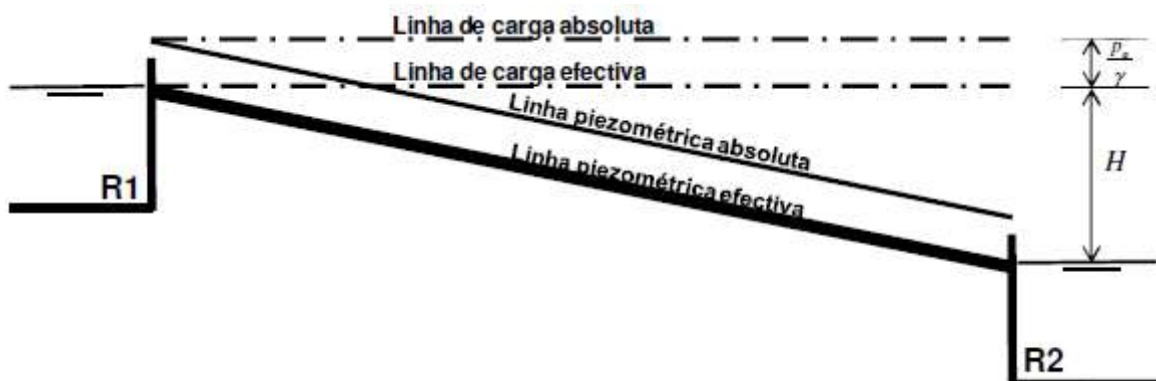


Figura 162 – Conduta coincidindo com a linha piezométrica efetiva em toda a sua extensão (Pinho et al., 2011).

Nesta situação verifica-se (Pinho et al., 2011):

- Todos os pontos estão à pressão atmosférica. A conduta funciona como canal.

4º Caso: A conduta corta a linha de carga efetiva (em CD), mantendo-se abaixo da linha piezométrica absoluta

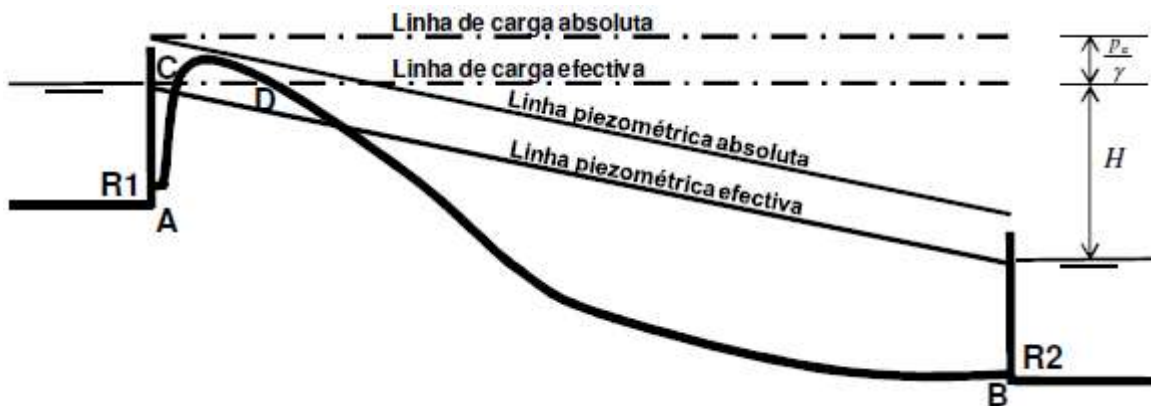


Figura 163 – A conduta corta a linha de carga efetiva (em CD), mantendo-se abaixo da linha piezométrica absoluta (Pinho et al., 2011).

Nesta situação verifica-se (Pinho et al., 2011):

- Trata-se de um **sifão** funcionando em situações precárias;
- O escoamento só pode ser estabelecido, **obrigatoriamente**, após aspiração (escorvamento) do sifão.

5º Caso: Conduta corta a linha piezométrica absoluta (em CD) mas não atinge a linha de carga efetiva

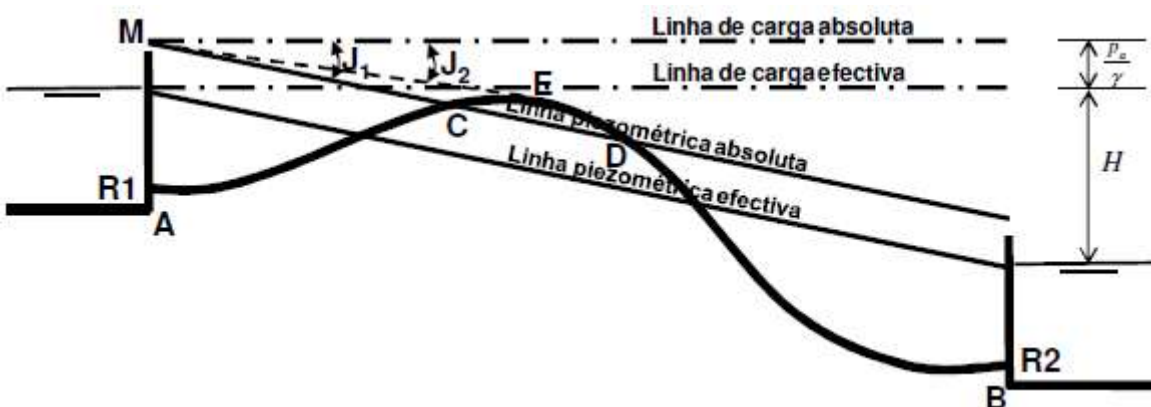


Figura 164 – A conduta corta a linha piezométrica absoluta (em CD) mas não atinge a linha de carga efetiva (Pinho et al., 2011).

Nesta situação verifica-se (Pinho et al., 2011):

- A pressão absoluta entre **CD** seria negativa (o que não tem realidade física);
- A linha piezométrica absoluta sofreria um deslocamento para **ME**, diminuindo a sua inclinação de **J₁** para **J₂**. A partir de **D**, tem a mesma inclinação **J₁**;

- Entre **E** e **D** a linha piezométrica absoluta coincide com a conduta, sendo a pressão absoluta teoricamente nula, verificando-se, na prática, o escoamento com a secção parcialmente cheia e ocorrendo intermitências devidas à libertação do vapor do líquido e de ar dissolvido.

6º Caso: A conduta corta a linha piezométrica absoluta e passa acima da linha de carga efetiva

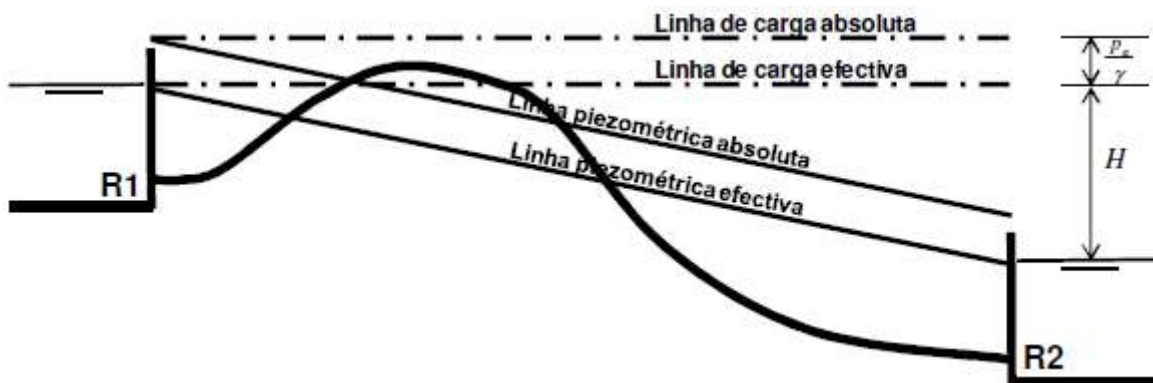


Figura 165 – A conduta corta a linha piezométrica absoluta e passa acima da linha de carga efetiva (Pinho et al., 2011).

Nesta situação verifica-se (Pinho et al., 2011):

- Como a conduta passa acima da superfície livre do reservatório **R1**, é necessário provocar o escoamento por sifonagem;
- As características de funcionamento do escoamento são idênticas às do **5º Caso**. No entanto, verifica-se, para uma maior extensão de conduta, que a secção se encontra parcialmente cheia e com irregularidades mais acentuadas;
- Deve notar-se a impossibilidade de estabelecimento de um regime de escoamento se a conduta tiver algum trecho a cota superior à linha de carga absoluta, a menos de introdução de energia exterior (elevação mecânica).

Dispositivos para evitar a ocorrência de depressões em condutas

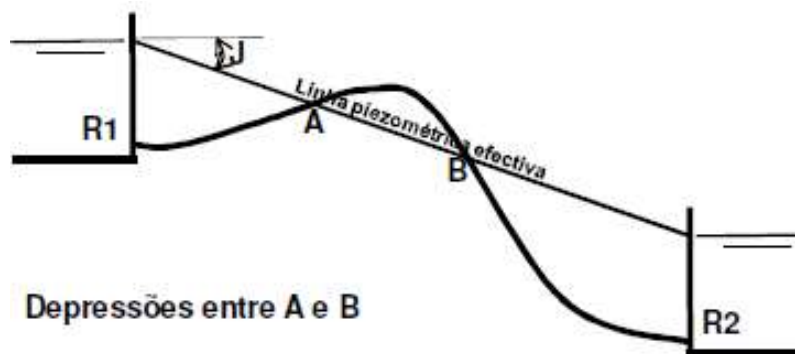


Figura 166 – Condições de máximo transporte (Pinho et al., 2011).

Por forma a evitar as depressões entre A e B da figura anterior, podem ser adotados um de dois métodos (Pinho et al., 2011):

- Reservatório de nível constante (**R**);

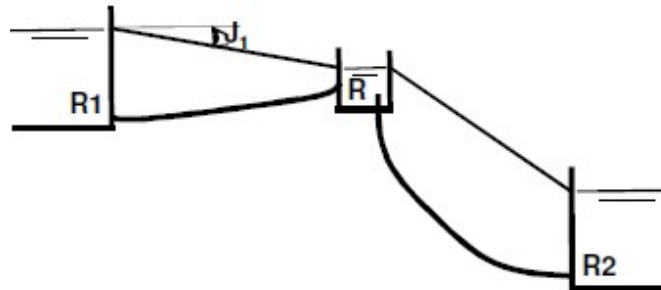


Figura 167 – Reservatório de nível constante.

- Válvula parcialmente aberta (**V**).

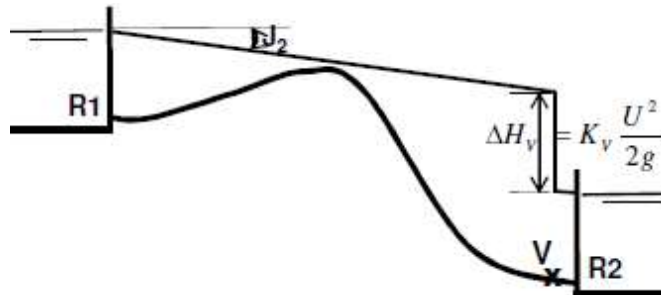


Figura 168 – Válvula parcialmente aberta.

9.4.7 Conduitas alimentadas pelas duas extremidades

1º Caso: Funcionamento do reservatório R1 ao reservatório R2

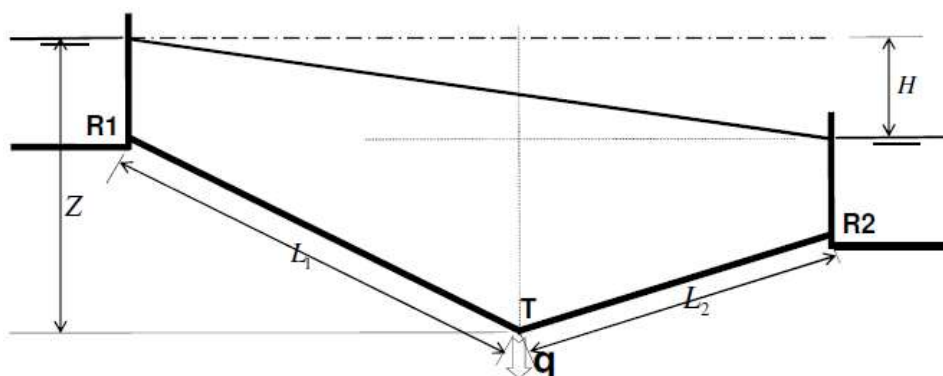


Figura 169 – Funcionamento do reservatório R1 ao reservatório R2 (Pinho et al., 2011).

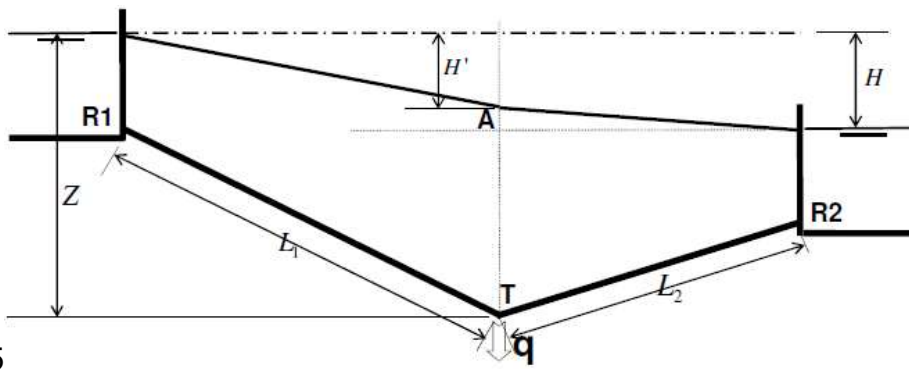
A perda de carga (h_f) é calculada pela fórmula:

$$h_f = K \frac{Q^2}{D^5} (L_1 + L_2), \text{ com } K = f \frac{8}{\pi^2 g}$$

E o caudal resultante (Q):

$$Q = \sqrt{\frac{HD^5}{K(L_1 + L_2)}}$$

2º Caso: Funcionamento com derivação T e caudal q , piezométrica em $T > R_2$



5
 Figura 170 – Funcionamento com derivação T e caudal q , piezométrica em $T > R_2$ (Pinho et al., 2011).

Nesta situação **R1** alimenta simultaneamente **T** e **R2**. Q_{R1} é calculado da seguinte forma:

$$Q_{R1} = q_T + q_{R2} = \sqrt{\frac{H'D^5}{KL_1}} + \sqrt{\frac{(H - H')D^5}{KL_2}}$$

3º Caso: Funcionamento com derivação T e caudal q , piezométrica em $T = R_2$

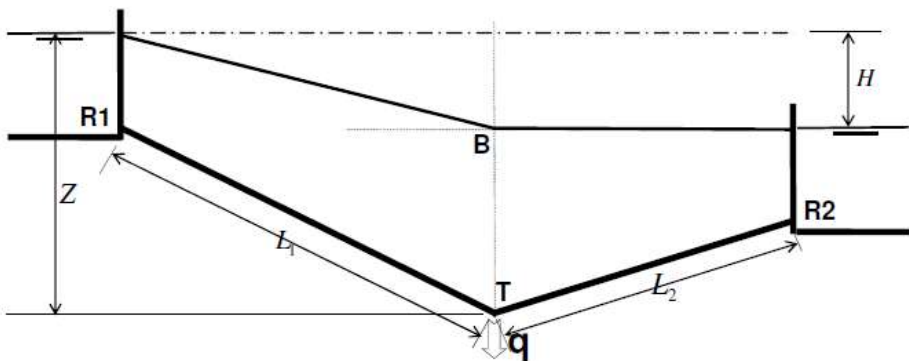


Figura 171 – Funcionamento com derivação T e caudal q , piezométrica em $T = R_2$ (Pinho et al., 2011).

Nesta situação **R1** alimenta **T**. Q_{R1} é calculado da seguinte forma:

$$Q_{R1} = q_T = \sqrt{\frac{HD^5}{KL_1}}$$

4º Caso: Funcionamento com derivação T e caudal q, piezométrica em T < R2

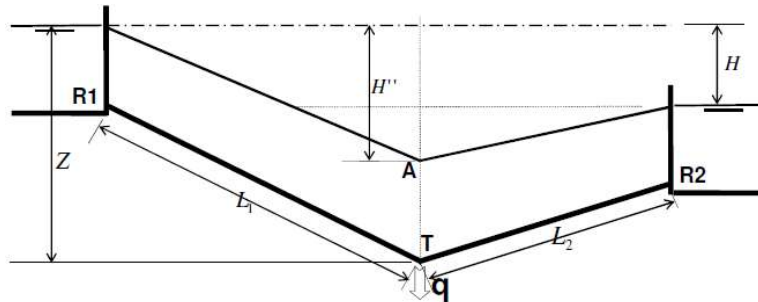


Figura 172 – Funcionamento com derivação T e caudal q, piezométrica em T < R2 (Pinho et al., 2011).

Nesta situação **R1** e **R2** alimentam simultaneamente **T**. Q_T é calculado da seguinte forma:

$$Q_T = q_{R1} + q_{R2} = \sqrt{\frac{H''D^5}{KL_1}} + \sqrt{\frac{(H'' - H)D^5}{KL_2}}$$

5º Caso: Funcionamento com derivação T e caudal q, piezométrica em T = T (pressão efetiva = 0, Caudal máximo em T)

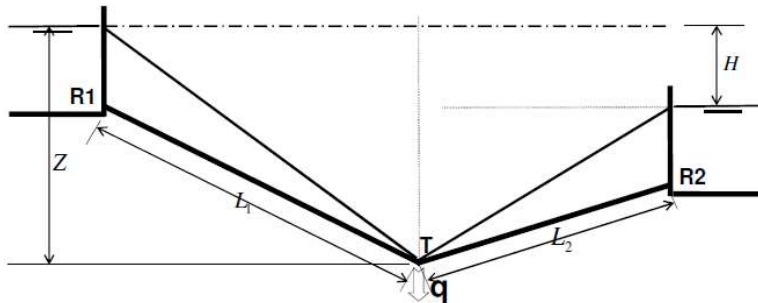


Figura 173 – Funcionamento com derivação T e caudal q, piezométrica em T = T (Pinho et al., 2011).

Nesta situação **R1** e **R2** alimentam simultaneamente **T**. Q_T é calculado da seguinte forma:

$$Q_T = q_{R1} + q_{R2} = \sqrt{\frac{ZD^5}{KL_1}} + \sqrt{\frac{(Z - H)D^5}{KL_2}}$$

9.4.8 Dimensionamento de condutas gravíticas

O tipo de problema apresentado nesta situação é dado o **caudal (Q)** determinar o **diâmetro económico (D_{econ})**, podendo ser resolvido através de soluções que se focam nas cotas piezométricas e/ou nas velocidades de escoamento (Pinho et al., 2011):

Solução A

Determinar o menor **D**, para o qual (Pinho et al., 2011):

- **V_{max}** admissível não seja ultrapassada;
- São satisfeitas exigências de cotas piezométricas.

Tabela 30 – Velocidades e caudais máximos recomendados para fibrocimento (Pinho et al., 2011).

D [mm]	50	60	80	100	125	150	175	200	>200
V _{max} [m/s]	0.60	0.70	0.75	0.75	0.80	0.80	0.90	0.90	1.00
Q _{max} [L/s]	1.2	2.0	3.8	5.9	9.8	14.1	21.6	28.3	-

Solução B

Fixa-se a inclinação mínima da piezométrica e calcula-se o **D** pela equação de resistência (Pinho et al., 2011):

- Darcy-Weisbach:

$$D = \sqrt[5]{\frac{8\lambda Q^2}{g\pi^2 J}}$$

- Hazen-Williams:

$$D = \sqrt[4.87]{\frac{10.7Q^{1.852}}{C_{HW}^{1.852} J}}$$

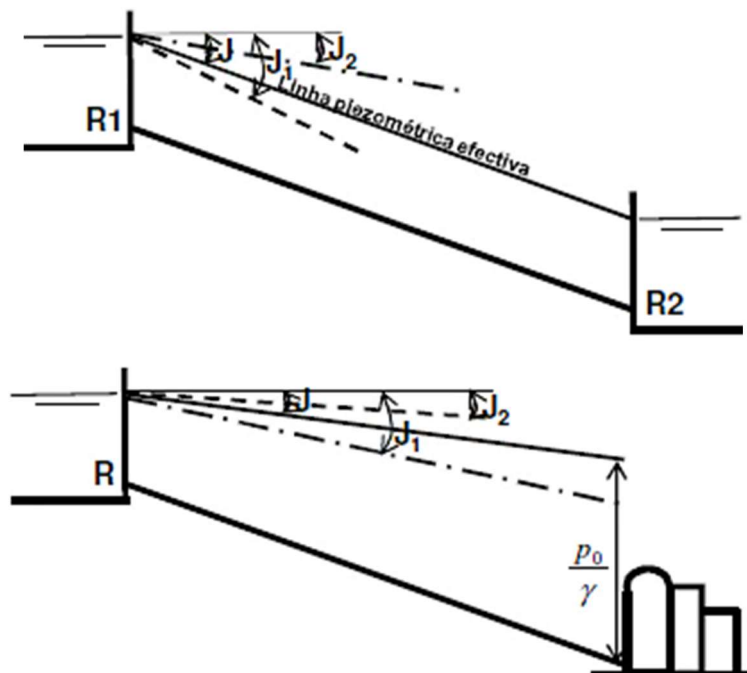


Figura 174 – Exemplos de aplicação (Pinho et al., 2011).

9.5 Dimensionamento de condutas elevatórias

9.5.1 Generalidades

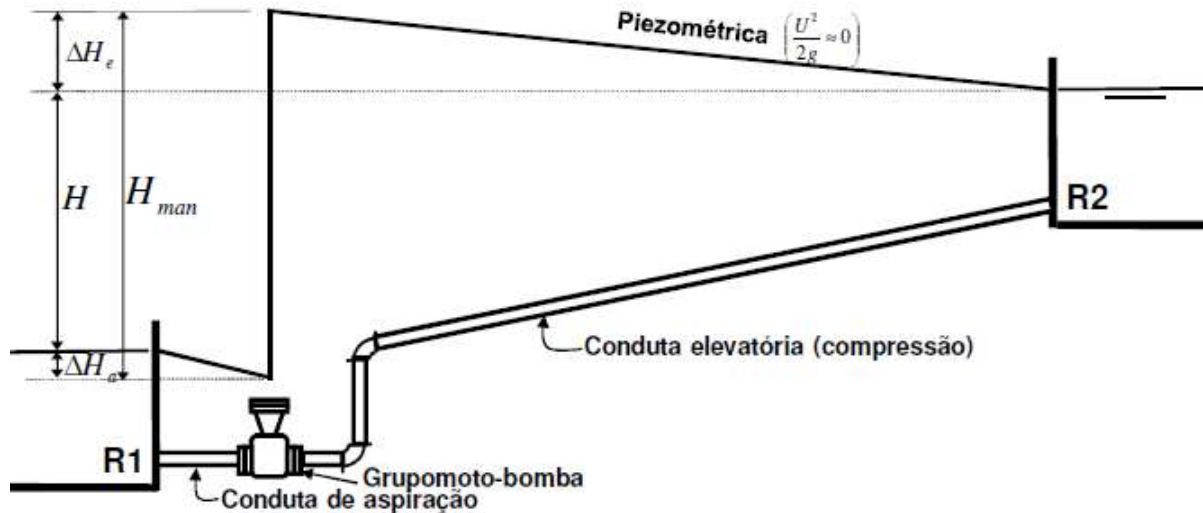


Figura 175 – Exemplo de conduta elevatória (Pinho et al., 2011).

Potência efetiva da bomba

$$P = \frac{\rho g Q H}{\eta} \text{ (W)}$$

Energia consumida na elevação

$$E = P t \text{ (W.h)}$$

9.5.2 Considerações económicas

Os **custos da conduta elevatória** incluem os **custos de investimento** (Figura 176) e os **custos de funcionamento** (Figura 177) (Pinho et al., 2011).

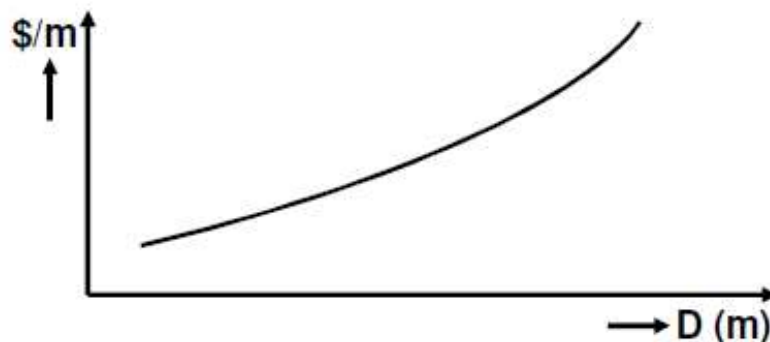


Figura 176 – Custo de investimento (custo inicial) (Pinho et al., 2011).

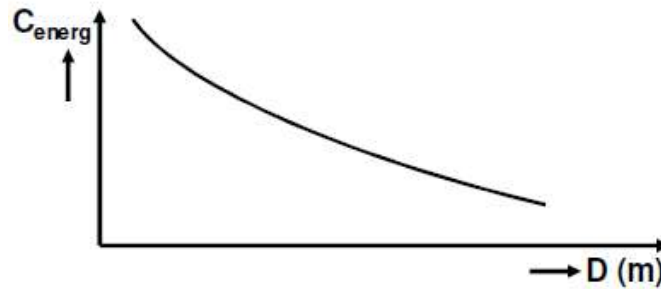


Figura 177 – Custo de funcionamento (custo anual, mais significativo: custo de energia) (Pinho et al., 2011).

Nota: discussão referida a 1 m de conduta (Pinho et al., 2011).

9.5.3 Estrutura de custos

Custo inicial (C₁)

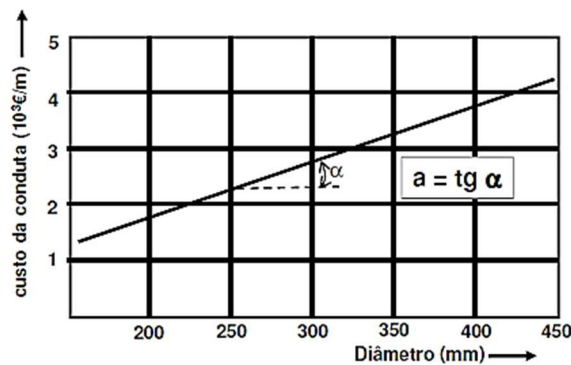


Figura 178 – Custo inicial (C₁) (Pinho et al., 2011).

$$C_1 = a \cdot D \text{ [€/m]}$$

Onde:

a é o fator de escala constante [€/m/m];

D é o diâmetro da conduta [m].

Custo anual de energia (C₂)

Potência:

$$P = \underbrace{\gamma Q H}_{P_1} + \underbrace{\gamma Q \Delta H}_{P_2}, \text{ com } \Delta H = \begin{cases} \Delta H_a + \Delta H_e, \text{ se } \sum \Delta H_L \neq 0 \\ h_f, \text{ se } \sum \Delta H_L = 0 \end{cases}$$

Em que:

P₂ é independente de D;

P₂ = f(D) → aumenta quando D diminui → A discussão centra-se em P₂.

Sendo assim, podemos identificar várias situações (Pinho et al., 2011):

- Para elevar $1 \text{ m}^3/\text{s}$ a uma altura de 1 metro, necessitamos de
 - $P_2 = 9800 \cdot h_f \text{ [W]}$;
- Para elevar $1 \text{ m}^3/\text{h}$ a uma altura de 1 metro, necessitamos de
 - $P_2 = 2.72 \cdot h_f \text{ [W]}$;
- Para elevar $1 \text{ m}^3/\text{h}$.ano a uma altura de 1 metro, necessitamos da **energia**
 - $E_2 = (8760 \text{ h/ano})(2.72 \cdot h_f \times 10^{-3}) \text{ [kW.h/ano]}$;
- Para elevar $1 \text{ m}^3/\text{h}$.ano a uma altura de 1 metro, temos um custo de **energia**
 - $C_2 = 23.8 \cdot h_f \cdot e \text{ [€/ano.m]}$;
- Se se elevar $Q \text{ m}^3/\text{h}$.ano com um rendimento de η
 - $C_2 = 23.8 \cdot Q \cdot h_f \cdot \frac{e}{\eta} \text{ [€/ano.m]}$.

Em que:

h_f é a perda de carga [m/m];

e é o custo de energia [€/kW.h];

η é a eficiência do grupo elevatório (motor-bomba).

Aplicando a equação de Darcy-Weisbach para determinar h_f e considerando (Pinho et al., 2011):

$$\left\{ \begin{array}{l} Q = 500 - 10000 \text{ m}^3/\text{h}, K = 1 \text{ mm}, T = 10^\circ\text{C} \\ (f = 0.018 - 0.025 \text{ (tomando } f_{\text{med}} = 0.021), g = 9.81 \text{ m/s}^2 = 1.27 \times 10^8 \text{ m/h}^2) \end{array} \right.$$

$$h_f = 0.021 \frac{8}{\pi^2 (1.27 \times 10^8)} \frac{Q^2}{D^5} = 1.34 \times 10^{-10} \frac{Q^2}{D^5}$$

E:

$$C_2 = 32 \times 10^{-10} \frac{e Q^3}{\eta D^5} \text{ (€/m.ano)}$$

9.5.4 Cálculo do diâmetro económico

Consumo constante de água

Considerando **custos de energia constantes** ao longo do horizonte de projeto (Pinho et al., 2011):

$$\text{Custos anuais} \rightarrow C_{\text{total}} = C_1 + C_2 = \beta a D + 32 \times 10^{-10} \frac{e Q^3}{\eta D^5} \text{ (€/m.ano)}$$

Sendo β a taxa de juro anual.

C_{total} será mínimo para:

$$\frac{\partial C_{total}}{\partial D} = 0, \text{ donde: } \frac{\partial C_{total}}{\partial D} = \beta a - 160 \times 10^{-1} \frac{e Q^3}{\eta D^6}$$

E:

$$D = 0.05 \cdot \sqrt{Q} \cdot \sqrt[6]{e/\eta a \beta} \text{ (m)}$$

Donde:

$$U_{opt} = 0.14 \cdot \sqrt[3]{\eta a \beta / e} \text{ (m/s)}$$

Crescimento linear do consumo de água

Considerando **crescimento do preço de energia, pelo valor atual**, temos (Pinho et al., 2011):

- Custo de energia no fim do ano **1**:

$$C2_1 = 32 \times 10^{-10} \frac{e}{\eta D^5} Q_1^3 (1 + \gamma)$$

Sendo γ a taxa crescimento do custo de energia.

- Custo de energia no fim do ano **n**:

$$C2_n = 32 \times 10^{-10} \frac{e}{\eta D^5} Q_n^3 (1 + \gamma), \text{ com } Q_n = (1 + \alpha) Q_0$$

Sendo a α taxa de crescimento anual do consumo.

Então, a fórmula geral será:

$$C2_n = 32 \times 10^{-10} \frac{e}{\eta D^5} Q_0^3 (1 + \gamma)^n (1 + \alpha)^3 \text{ (€/m. ano)}$$

Tendo em conta o diagrama de **fluxos monetários-tempo** (Pinho et al., 2011):

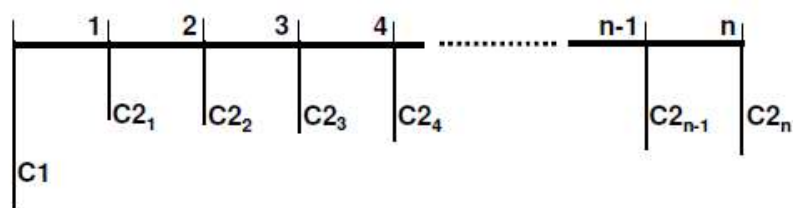


Figura 179 – Diagrama de fluxos monetários-tempo (Pinho et al., 2011).

$$VC_{total} = C1 + \frac{C2_1}{(1 + \beta)} + \frac{C2_2}{(1 + \beta)^2} + \frac{C2_3}{(1 + \beta)^3} + \dots + \frac{C2_n}{(1 + \beta)^n}$$

Ou:

$$VC_{total} = aD + 32 \times 10^{-10} \frac{eQ_0^3}{\eta D^5} \left[\frac{(1 + \gamma)(1 + \alpha)^3}{(1 + \beta)} + \frac{(1 + \gamma)(1 + 2\alpha)^3}{(1 + \beta)^2} + \dots + \frac{(1 + \gamma)(1 + n\alpha)^3}{(1 + \beta)^n} \right]$$

Obtemos assim (Pinho et al., 2011):

$$VC_{total} = aD + 32 \times 10^{-10} \frac{eQ_0^3}{\eta D^5} \delta \text{ (€/m. ano)}$$

$$\text{em que: } \delta = \left[\frac{(1 + \gamma)(1 + \alpha)^3}{(1 + \beta)} + \frac{(1 + \gamma)(1 + 2\alpha)^3}{(1 + \beta)^2} + \dots + \frac{(1 + \gamma)(1 + n\alpha)^3}{(1 + \beta)^n} \right]$$

onde: $\delta = f(\alpha, \beta, \gamma)$

VC_{total} será mínimo para (Pinho et al., 2011):

$$\frac{\partial VC_{total}}{\partial D} = 0, \text{ donde: } \frac{\partial VC_{total}}{\partial D} = \beta - 160 \times 10^{-10} \frac{e Q_0^3}{\eta D^6} \delta = 0$$

Donde:

$$U_{opt} = 0.14 \cdot \sqrt[3]{a\eta/e\delta} \text{ (m/s)}$$

Crescimento exponencial do consumo de água

Considerando premissas semelhantes ao caso de crescimento linear, temos (Pinho et al., 2011):

$$U_{opt} = 0.14 \cdot \sqrt[3]{a\eta/e\delta'} \text{ (m/s)}$$

Onde para:

$$Q_n = (1 + \alpha)^n Q_0$$

Obteve-se:

$$\delta' = \left[\frac{(1 + \gamma)(1 + \alpha)^3}{(1 + \beta)} + \frac{(1 + \gamma)(1 + \alpha)^6}{(1 + \beta)^2} + \dots + \frac{(1 + \gamma)(1 + \alpha)^{3n}}{(1 + \beta)^n} \right]$$

onde: $\delta = f(\alpha, \beta, \gamma)$

9.5.5 Influência do consumo durante o ano

Variação grande de consumo ao longo do ano

A relação entre energia (E) e caudal (Q) é dada por (Pinho et al., 2011):

$$E = f(Q)^3 \text{ (função cúbica)}$$

Para se elevar Q_{med} num dia necessitamos menos energia que E_{med} (Pinho et al., 2011):

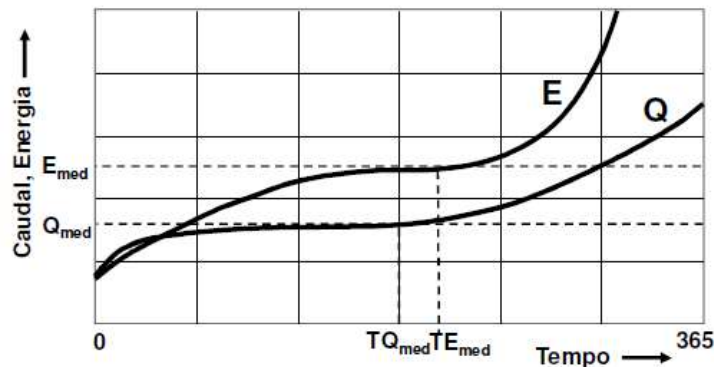


Figura 180 – Caudal/energia em função do tempo (Pinho et al., 2011).

O valor de E_{med} produzirá NÃO Q_{med} mas SIM Q_{ideal} :

$$Q_{ideal} = \sqrt[3]{\frac{1}{T} \int_0^T [Q(t)]^3 dt}$$

Para:

$$Q_{ideal} = (1.20, 1.26) Q_{med}$$

Tomando:

$$Q_{ideal} = 1.26 Q_{med}$$

$$\begin{cases} U_{opt} = 0.11 \cdot \sqrt[3]{a\eta/e\delta} \text{ [m/s], Para aumento de consumo linear} \\ U_{opt} = 0.11 \cdot \sqrt[3]{a\eta/e\delta'} \text{ [m/s], Para aumento de consumo exponencial} \end{cases}$$

9.5.6 Fórmulas de dimensionamento aproximado

Fórmula de Bresse

$$D = 1.5\sqrt{Q}, \text{ com } D \text{ [m]; } Q \text{ [m}^3\text{/s]}$$

Fórmula de Dacach

$$D = 0.9Q^{0.45}, \text{ com } D \text{ [m]}; Q \text{ [m}^3\text{/s]}$$

9.5.7 Dimensionamento das paredes das condutas

O dimensionamento das paredes das condutas está relacionado com a **pressão de serviço** a que as condutas estão submetidas (σ_s) (Pinho et al., 2011).

$$e = \frac{pD}{2\sigma_s}, \text{ com } p < \sigma_s$$

Onde:

e é a espessura da conduta [m];

p é a pressão a que está submetida a conduta [N/m^2];

D é o diâmetro da conduta [m];

σ_s é a tensão de serviço do material da conduta [N/m^2].

Nota: a pressão a considerar no dimensionamento deve ser a **estática** ou a **dinâmica**, de acordo com as circunstâncias do projeto (Pinho et al., 2011).

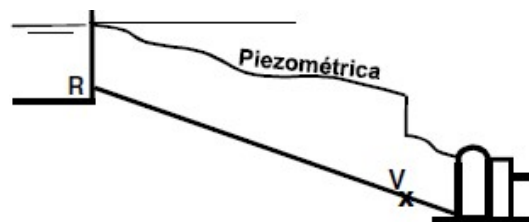


Figura 181 – Exemplo de aplicação (Pinho et al., 2011).

9.6 Problemas do movimento uniforme envolvendo grupos de condutas

9.6.1 Condutas em série

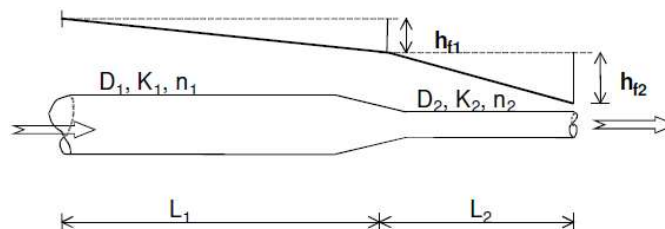


Figura 182 – Condutas em série (Pinho et al., 2011).

Com:

$$h_f = KQ^n$$

$$h_{fe} = \sum h_{fi} \quad \text{ou} \quad K_e Q_e^{n_e} = K_1 Q_1^{n_1} + K_2 Q_2^{n_2} + \dots = \sum K_i Q_i^{n_i}$$

para $n_i = n_j, \forall ij$

$$K_e = K_1 + K_2 + \dots + K_n = \sum K_i$$

9.6.2 Condutas em paralelo

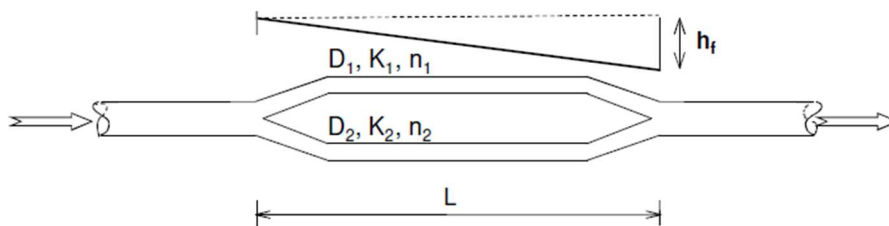


Figura 183 – Condutas em paralelo (Pinho et al., 2011).

$$h_{fe} = h_{f1} = h_{f2} = h_{f3} = \dots = h_{fn}$$

$$Q_e = Q_1 + Q_2 + \dots = \sum Q_i, \text{ como } Q = \left(\frac{h_f}{K}\right)^{1/n}$$

$$\left(\frac{h_f}{K_e}\right)^{1/n_e} = \left(\frac{h_f}{K_1}\right)^{1/n_1} + \left(\frac{h_f}{K_2}\right)^{1/n_2} + \dots = \sum \left(\frac{h_f}{K_i}\right)^{1/n_i}$$

para $n_i = n_j, \forall ij$

$$\left(\frac{1}{K_e}\right)^{1/n_e} = \left(\frac{1}{K_1}\right)^{1/n_1} + \left(\frac{1}{K_2}\right)^{1/n_2} + \dots = \sum \left(\frac{1}{K_i}\right)^{1/n_i}$$

9.6.3 Nó de condutas

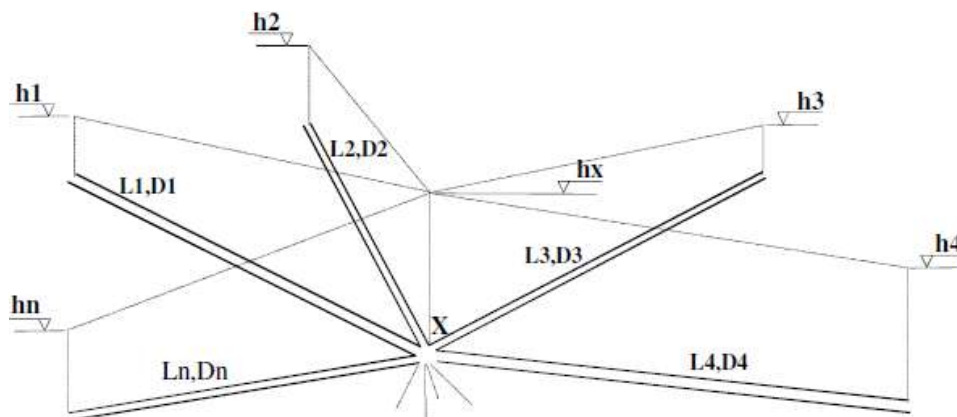


Figura 184 – Nó de condutas (Pinho et al., 2011).

Conhecidas as cotas piezométricas nas extremidades dos tubos, determinar os caudais escoados em cada um dos tubos (Pinho et al., 2011).

Usualmente a direção do escoamento não é óbvia, nem conhecida à partida, pelo que a solução deve incluir a determinação dessa direção (Pinho et al., 2011).

9.6.4 Rede de condutas. Sistemas de equações

Perdas de carga

Perdas localizadas devidas a singularidades no escoamento (Pinho et al., 2011):

- Curvas;
- Aparelhos de medida;
- Válvulas;
- Tubagens de diferente diâmetro;
- Etc.

Utilização de um **tubo equivalente** com igual **D** e comprimento equivalente **ΔL** , tal que **$h_f = \Delta L$** (Pinho et al., 2011).

Fórmula de Darcy-Weisbach:

$$h_f = f \frac{L U^2}{D 2g} \Rightarrow L = \frac{h_f D 2g}{f U^2} \therefore \Delta L = \frac{K_L D}{f}$$

$$K_e = \frac{a(L + \sum \Delta L)}{2gDA^2}$$

Fórmula de Hazen-Williams:

$$h_f = \frac{10.7L}{C_{HW}^{1.852} D^{4.87}} Q^{1.852} \therefore \Delta L = 0.00773 K_L Q^{0.148} C_{HW}^{1.852} D^{0.8703}$$

$$K_e = \frac{10.7(L + \sum \Delta L)}{C_{HW}^{1.852} D^{4.87}}$$

Equações em Q (Incógnitas: Caudais nos tubos)

A análise de caudais em redes de condutas baseia-se em duas leis (Pinho et al., 2011):

- **Lei da Continuidade:** Equações nos **Nós**

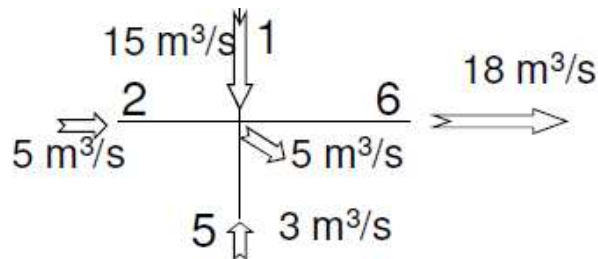


Figura 185 – Equações nos Nós (Pinho et al., 2011).

$$\sum Q_i = 0 \Rightarrow \left(\sum Q_i \right)_{\text{out}} - \left(\sum Q_i \right)_{\text{in}} = C \Rightarrow Q_6 - Q_1 - Q_2 - Q_5 = -5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 18 - 15 - 5 - 3 = -5$$

Num sistema com J nós: $(J - 1)$ Equações independentes lineares em Q .

- **Lei da Energia:** Equações nas **Malhas**

$$\sum h_{fi} = 0$$

$$\begin{cases} \sum_I h_{fi} = 0 \\ \sum_{II} h_{fi} = 0 \\ \vdots \\ \sum_L h_{fi} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sum_I K_i Q_i^{n_i} = 0 \\ \vdots \\ \sum_L K_i Q_i^{n_i} = 0 \end{cases} \quad \text{com } h_f = KQ^n$$

Num sistema com L malhas não sobreponíveis (naturais): L Equações independentes não-lineares em Q .

Concluindo, um sistema com J nós e L malhas naturais e N tubos, deverá satisfazer a equação (Pinho et al., 2011):

$$N = (J - 1) + L$$

Notas (Pinho et al., 2011):

- Se todas as entradas ou saídas exteriores **não forem** conhecidas, são necessárias J equações de nós independentes;
- O nº de equações independentes é igual ao nº de incógnitas (Q em N tubos);
- $J - 1$ equações de continuidade são **lineares**;
- L equações de energia (malhas) são **não lineares**.

Segue-se um exemplo de aplicação:

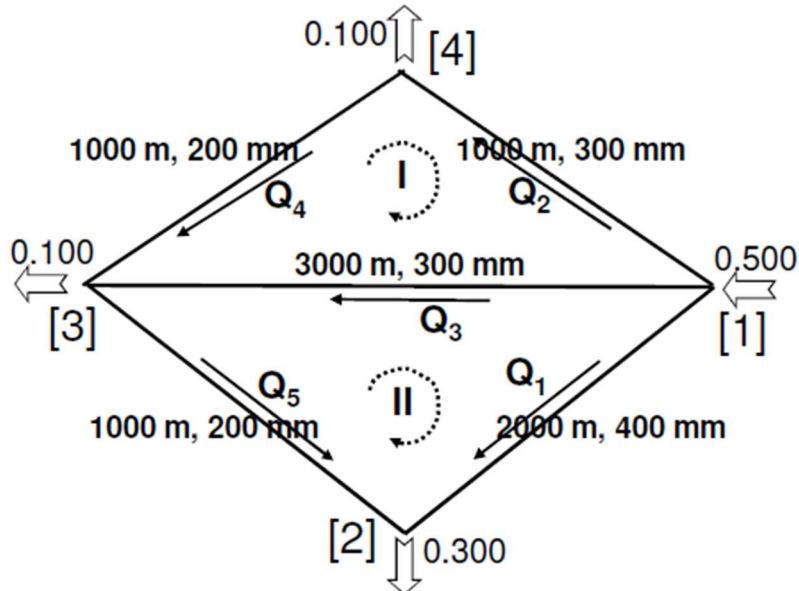


Figura 186 – Exemplo de aplicação de equações em Q (Pinho et al., 2011).

$$\left. \begin{array}{l} K_1 = 22 \\ K_2 = 53 \\ K_3 = 22 \\ K_4 = 53 \\ K_5 = 22 \end{array} \right\} \text{constantes obtidas pela fórmula de Hazen – William}$$

Ao nível da malha representada:

- Nº de tubos, **N = 5**;
- Nº de nós, **J = 4**;
- Nº de malhas, **L = 2**.

{ J – 1 = 3 equações de continuidade independentes (**lineares**)
 { L = 2 equações de energia (malhas naturais) (**não – lineares**)

$$\mathbf{J - 1 \text{ continuidade}} \left\{ \begin{array}{l} Q_1 + Q_2 + Q_3 = 0.500 \quad (1) \\ -Q_1 - Q_5 = -0.300 \quad (2) \\ -Q_3 - Q_4 + Q_5 = -0.100 \quad (3) \end{array} \right.$$

$$\mathbf{L \text{ energia}} \left\{ \begin{array}{l} -446Q_4^{1.852} - 53Q_2^{1.852} + 159Q_3^{1.852} = 0 \quad (4) \text{ (I)} \\ 22Q_1^{1.852} - 446Q_5^{1.852} - 159Q_3^{1.852} = 0 \quad (5) \text{ (II)} \end{array} \right.$$

$$Q_1 = 0.276; Q_2 = 0.132; Q_3 = 0.093; Q_4 = 0.032; Q_5 = 0.024$$

Sabendo $H_i \rightarrow H_j$

Equações em H (Incógnitas: Pressões/Cotas Piezométricas nos nós)

A análise de pressões em redes de condutas baseia-se na **Lei da Continuidade** nos **Nós** (Pinho et al., 2011).

Sendo:

$$Q_{ij} = \left(\frac{h_{fij}}{K_{ij}} \right)^{1/n_{ij}} = \left(\frac{H_i - H_j}{K_{ij}} \right)^{1/n_{ij}}$$

Então a equação de continuidade nos nós será:

$$\left[\sum \left(\frac{H_i - H_j}{K_{ij}} \right)^{1/n_{ij}} \right]_{\text{out}} - \left[\sum \left(\frac{H_i - H_j}{K_{ij}} \right)^{1/n_{ij}} \right]_{\text{in}} = C$$

Concluindo, o problema reduz-se à resolução de um sistema de $(J - 1)$ equações não lineares (Pinho et al., 2011).

Segue-se um exemplo de aplicação:

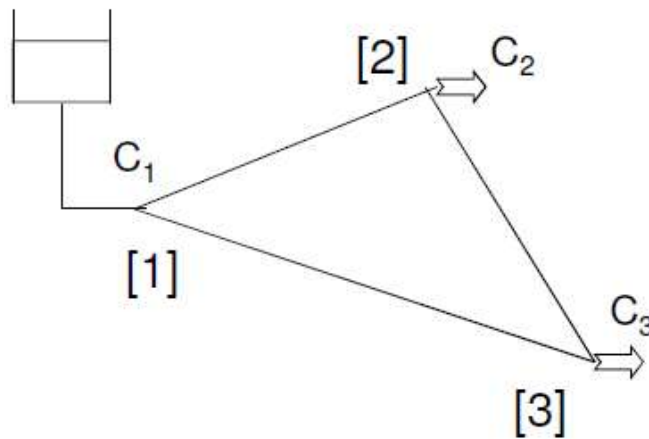


Figura 187 – Exemplo de aplicação de equações em H (Pinho et al., 2011).

H₁ é conhecido e **J - 1 = 2**.

$$\begin{cases} Q_{12} + Q_{13} = C_1 (= C_2 + C_3), \text{ ou} \\ -Q_{12} + Q_{23} = -C_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left(\frac{H_1 - H_2}{K_{12}} \right)^{1/n_{12}} + \left(\frac{H_1 - H_3}{K_{13}} \right)^{1/n_{13}} = C_2 + C_3 \\ - \left(\frac{H_1 - H_2}{K_{12}} \right)^{1/n_{12}} + \left(\frac{H_2 - H_3}{K_{23}} \right)^{1/n_{23}} = -C_2 \end{cases}$$

Equações em ΔQ (Incógnitas: Correções de caudais)

A análise de caudais é realizada resolvendo iterativamente sistemas de **L** equações naturais, estimando-se caudais na tubagem, satisfazendo a **Lei da Continuidade** nos vários **Nós** (Pinho et al., 2011).

Concluindo, o problema reduz-se à resolução de um sistema de **L** equações **não lineares** (energia) (Pinho et al., 2011).

Nota: $N = (J - 1) + L > J - 1 > L$

Para a resolução deste tipo de problema adota-se o seguinte método (Pinho et al., 2011):

1. Define-se um sistema de caudais Q_0 , que satisfazem a equação da Continuidade em $J - 1$ nós (também no nó J);
2. Resolvendo **L** equações de energia (malhas), os caudais estimados não satisfazem $\sum h_{fi} = 0$;
3. Ajustando o valor dos caudais estimados Q_{0i} com ΔQ_L em cada malha ter-se-á sucessivamente $\sum h_{fi} \rightarrow 0$.

$$\begin{cases} \sum_i^I K_i(Q_{0i} + \Delta \vec{Q}_1)^{n_i} = 0, \text{ (perdas de carga na malha I)} \\ \sum_i^{II} K_i(Q_{0i} + \Delta \vec{Q}_2)^{n_i} = 0, \text{ (perdas de carga na malha II)} \\ \sum_i^L K_i(Q_{0i} + \Delta \vec{Q}_L)^{n_i} = 0, \text{ (perdas de carga na malha L)} \end{cases}$$

Segue-se um exemplo de aplicação:

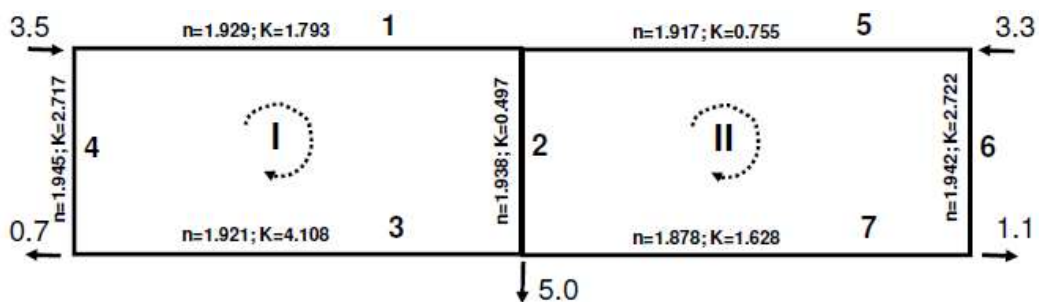


Figura 188 – Exemplo de aplicação de equações em ΔQ (Pinho et al., 2011).

$$Q_{01} = 1.75; Q_{02} = 3.55; Q_{03} = 1.05; Q_{04} = 1.75; Q_{05} = 1.80; Q_{06} = 1.75; Q_{07} = 1.80$$

L = 2 equações de energia (malhas naturais) (não-lineares):

$$\begin{cases} F_1 = 1.793(1.75 + \Delta Q_1)^{1.929} + 0.497(3.55 + \Delta Q_1 - \Delta Q_2)^{1.938} - 4.108(1.05 - \Delta Q_1)^{1.921} - 2.717(1.75 - \Delta Q_1)^{1.945} = 0 \\ F_2 = -0.755(1.80 + \Delta Q_2)^{1.917} + 2.722(1.5 + \Delta Q_2)^{1.942} + 1.628(0.4 + \Delta Q_2)^{1.878} - 0.497(3.55 - \Delta Q_2 + \Delta Q_1)^{1.938} = 0 \end{cases}$$

Obtendo:

$$\Delta Q_1 \wedge \Delta Q_2 \Rightarrow Q_i \Rightarrow h_i \Rightarrow H_i$$

Equações em ΔH (Incógnitas: Correções de pressões)

Processo semelhante ao das equações em ΔQ , fazendo-se estimativas de H nos nós, para as quais deverão ser verificadas as equações de continuidade. O erro de cada malha (ΔH) deverá ser então considerado na iteração seguinte (Pinho et al., 2011).

10.6.5 Rede de condutas. Malhas

Método da Teoria Linear

- Métodos computacionais, Sistemas complexos
- Equações em Q com $N = (J - 1) + L$ equações

Método de Newton-Raphson

- Métodos computacionais, Sistemas complexos
- Equações em H com $(J - 1)$ equações
- Equações em ΔQ com L equações
- Equações em ΔH com L equações

Método de Hardy-Cross

- Métodos computacionais
- Cálculos manuais, Sistemas simples
- Equações em ΔQ com L equações
- Equações em ΔH com L equações

Figura 189 – Métodos de resolução de problemas envolvendo malhas (adaptado de Pinho et al., 2011).

Método de Hardy-Cross

Dos métodos apresentados anteriormente, irá se focar neste em especial pelo fato de permitir o cálculo manual (Pinho et al., 2011).

Método iterativo de Newton-Raphson:

$$x^{m+1} = x^m - \frac{F(x^m)}{\frac{dF^m}{dx}}$$

Método de Cross (aplicando o método de Newton-Raphson à função ΔQ_e):

$$\left. \begin{aligned} \Delta Q_i^{m+1} &= \Delta Q_i^m - \frac{F_1^m}{\frac{dF_1^m}{d(\Delta Q_i)}} \\ F_1 &= \sum K_i Q_i^{n_i} \Rightarrow \frac{dF_1}{d(\Delta Q_i)} = \sum n_i K_i Q_i^{n_i-1} \end{aligned} \right\} \Delta Q = -\frac{\sum K_i Q_i^{n_i}}{\sum |n_i K_i Q_i^{n_i-1}|}$$

Fórmula de Darcy-Weisbach

$$\Delta Q = -\frac{\sum K_i Q_i^2}{2 \sum |K_i Q_i|} = -\frac{\sum (h_f)_i}{2 \sum |(h_f/Q)_i|}$$

Fórmula de Hazen-Williams

$$\Delta Q = -\frac{\sum (K_{HW})_i Q_i^{1.852}}{1.852 \sum |(K_{HW})_i Q_i^{0.852}|} = -\frac{\sum (h_f)_i}{1.852 \sum |(h_f/Q)_i|}$$

Segue-se um exemplo de aplicação:

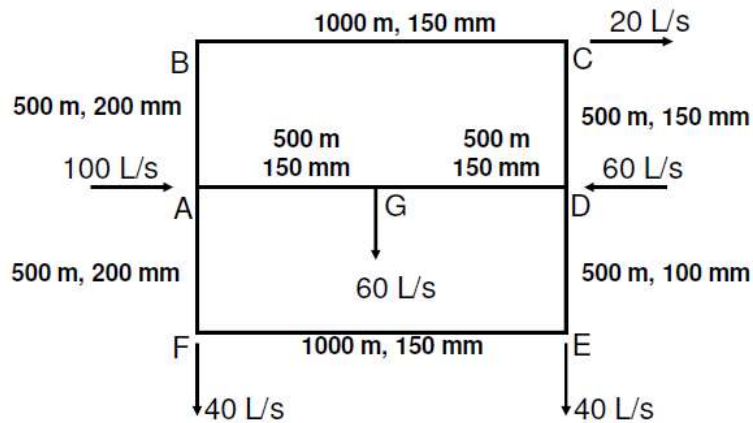


Figura 190 – Exemplo de aplicação do método de Hardy-Cross (Pinho et al., 2011).

1º passo: arbitram-se, para todas as condutas, caudais que satisfaçam as condições de continuidade nos nós.

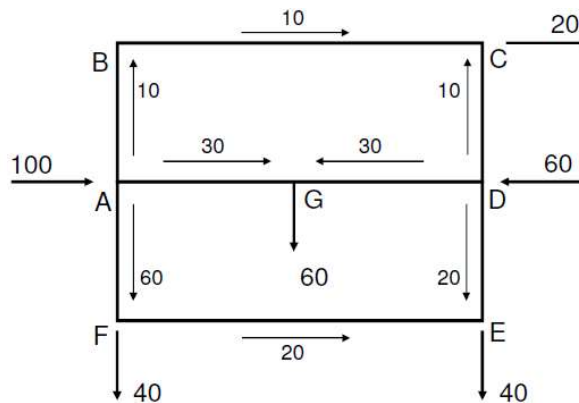


Figura 191 – Arbitrio de caudais (Pinho et al., 2011).

2º passo: calculam-se sucessivamente para as várias malhas, as correções de caudal ΔQ_i , corrigindo os caudais de tubos comuns a várias malhas **coerentemente**. Pode apresentar-se um esquema de cálculo como o seguinte, até que $\Delta Q_m \approx 0$ (Pinho et al., 2011):

Tabela 31 – Resumo dos cálculos efetuados (adaptado de Pinho et al., 2011).

Troço	L	D	K_{HW}	$K_{HWi} = \frac{10.7L}{C_{HWi}^{1.852} D_i^{4.87}}$			$h_{fi} = K_{HWi} Q_i^{1.852}$			$\Delta Q = -\frac{\sum (h_f)_i}{1.852 \sum (h_f/Q)_i }$	
				1ª iteração			2ª iteração			Final	
[-]	[m]	[mm]	[-]	Q [L/s]	h_f	$\frac{h_f}{Q}$	Q [L/s]	h_f	$\frac{h_f}{Q}$	Q [L/s]	h_f
A-B	500	200	1438	10	0.28	28	9.19	0.24	26	7	0.15
B-C	1000	150	11673	10	2.31	231	9.19	1.97	215	7	1.19
C-D	500	150	5837	-10	-1.15	115	-10.81	-1.33	123	-13	1.88
D-G	500	150	5837	30	8.83	294	32.02	9.96	311	31	9.38
G-A	500	150	5837	-30	-8.83	294	-27.98	-7.76	277	-29	8.29
				$\Sigma =$	1.44	963	$\Sigma =$	3.08	953		
				$\Delta Q =$	-8.1E-04		$\Delta Q =$	-1.75E-03			
A-G	500	150	5837	30	8.83	294	27.98	7.76	277	29	8.29
G-D	500	150	5837	-30	-8.83	294	-32.02	-9.96	311	-31	9.38
D-E	500	100	42046	20	30.01	1500	17.17	22.62	1317	16	19.85
E-F	1000	150	11673	-20	-8.33	417	-22.83	-10.64	466	-24	11.68
F-A	500	200	1438	-60	-7.85	131	-62.83	-8.55	136	-64	8.85
				$\Sigma =$	13.83	2636	$\Sigma =$	1.23	2508		
				$\Delta Q =$	-2.83E-03		$\Delta Q =$	-2.64E-04			

3º passo: determinação das pressões nos nós da rede.

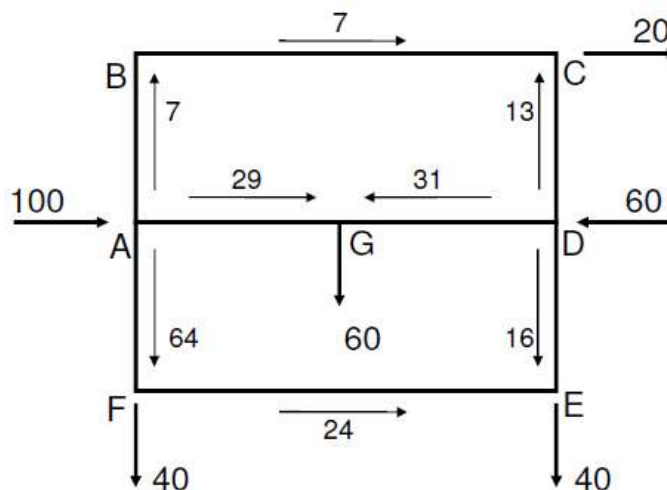


Figura 192 – Determinação das pressões nos nós da rede (Pinho et al., 2011).

Tabela 32 – Pressões nos nós da rede (Pinho et al., 2011).

Nó		A	B	C	D	E	F	G
Pressão*	[m]	58.85	58.70	57.51	59.39	39.54	50.00	51.78
	[kPa]	588.5	587.0	575.1	593.9	395.4	500.0	517.8

*1 kPa = 10⁻¹ m

9.6.6 Redes de condutas. Dispositivos de controlo de pressões e caudais em redes

Dispositivos que condicionam **Q** e **Cotas Piezométricas** (Pinho et al., 2011):

- Reservatórios;
- Válvulas de Retenção;
- Bombas Hidráulicas;
- Orifícios;
- Válvulas Redutoras de Pressão.

Reservatórios

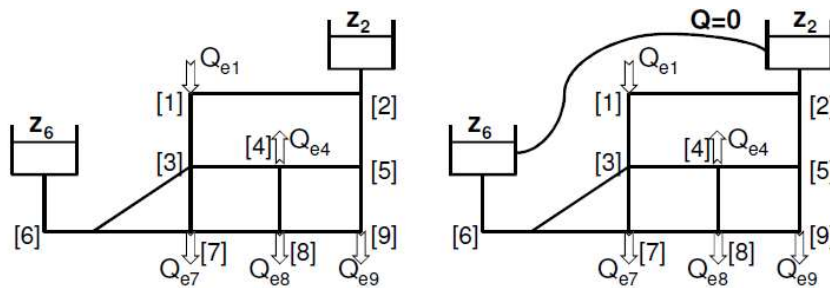


Figura 193 – Reservatório de controlo de pressões e caudais (Pinho et al., 2011).

Nesta situação temos (Pinho et al., 2011):

- Equações em **H** e **ΔH**
 - Cota Piezométrica (**Z**) definida nos nós;
- Equações em **Q** e **DQ**
 - 1 Reservatório: Cota Piezométrica definida num nó;
 - Mais do que 1 Reservatório: Criação de uma **malha fictícia**, a partir de **tubos fictícios** com **$Q_i = 0$** .

Válvulas de Retenção

As **válvulas de retenção** (Figura 194) são válvulas que permitem o escoamento num dado sentido e fecham automaticamente quando se inverte o sentido do escoamento (Pinho et al., 2011).

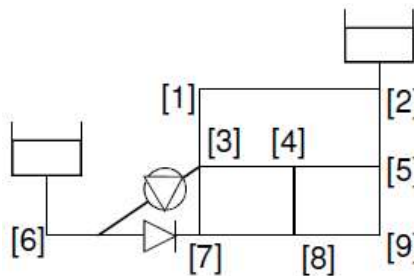


Figura 194 – Válvula de retenção (Pinho et al., 2011).

Tratamento Matemático (Pinho et al., 2011):

- Inicia-se o cálculo sem a consideração de válvulas;
- Em iterações sucessivas verifica-se se:
 - A pressão a jusante $>$ à de montante: o tubo é eliminado na iteração seguinte;
 - A pressão a jusante $<$ à de montante: o tubo é considerado na iteração seguinte como se não existisse a válvula de retenção;
- As condições de funcionamento têm de ser verificadas em todas as iterações, podendo modificar-se várias vezes no processo de convergência.

Bombas hidráulicas

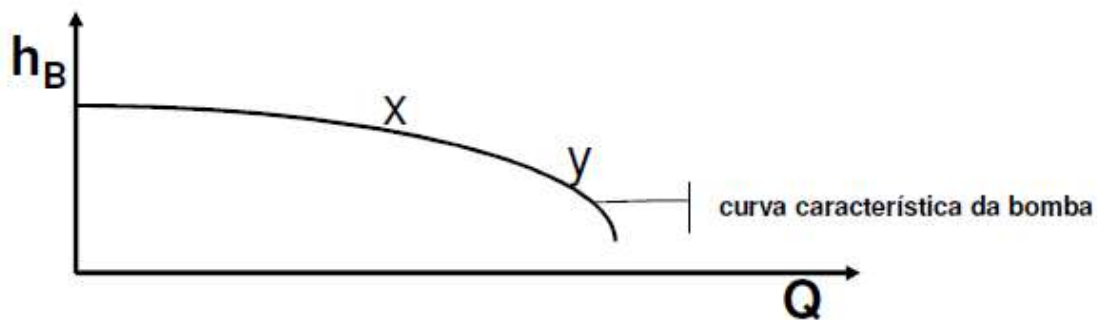


Figura 195 – Curva característica da bomba (Pinho et al., 2011).

Tratamento Matemático (Pinho et al., 2011):

- Curva característica da bomba (quadrática):
 - $h_B = A Q^2 + B Q + H_0$, com A, B, H_0 constantes tiradas da curva característica com $A < 0$;
- Tentando ajustar a equação exponencial:
 - $h_B = \chi Q^{-\delta}$, com $\delta \approx 0.5$;
- Como $\delta \neq 2$ (Fórmula de Resistência), efetuar a seguinte mudança de variáveis:
 - $G = Q + B/A$;
- Vem:
 - $h_B = A G^2 + h_0$, com $h_0 = H_0 - B^2/(4A)$.

Válvulas redutoras de pressão (VRP)

Sejam:

H_i a cota piezométrica no nó i ;

H_j a cota piezométrica no nó j ;

H_R a cota piezométrica correspondente à **regulação** da válvula;

H_C a cota piezométrica calculada na secção em que se situa a **VRP**.

Modos distintos de funcionamento da **VRP** (Pinho et al., 2011):

- $H_C > H_R \wedge H_i > H_j$, pressão a jusante da **VRP** $H_C = H_R$, situação normal;
- $H_C < H_R \wedge H_i > H_j$, **VRP** não funciona e atua como qualquer singularidade com perda de carga localizada;
- $H_i < H_j$, a **VRP** fecha funcionando como válvula de retenção e $Q_{ij} = 0$.

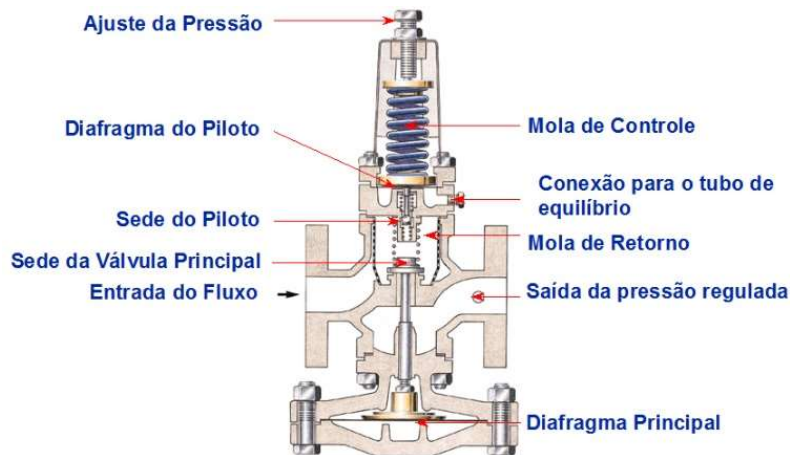


Figura 196 – Válvula redutora de pressão (<http://www.vaportec.com.br>).

Segue-se um exemplo de aplicação:

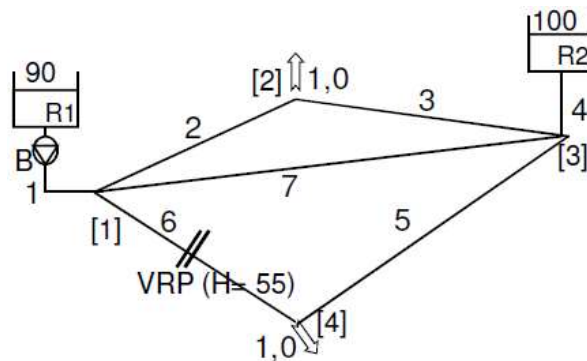


Figura 197 – Exemplo de rede de condutas com dispositivos reguladores (Pinho et al., 2011).

Resolução de equações em **Q** (Pinho et al., 2011):

- **J** Eq. Continuidade nos nós:
$$\begin{cases} -Q_1 + Q_2 + Q_6 + Q_7 = 0 \\ -Q_2 - Q_3 = -1 \\ Q_3 - Q_4 + Q_5 - Q_7 = 0 \\ -Q_5 - Q_6 = -1 \end{cases};$$
- Eq. Malha Real: $-K_2 Q_2^{n_2} + K_3 Q_3^{n_3} + K_7 Q_7^{n_7} = 0$;
- Eq. Malha Fictícia-Res.: $-K_4 Q_4^{n_4} + K_7 Q_7^{n_7} + K_1 Q_1^{n_1} + A_1 G_1^2 = 100 - 90 - h_{01}$;
- Eq. Transformação: $G_1 - Q_1 = (B/2A)_1$;
- Eq. Malha Fictícia-VRP: $-K_6 Q_6^{n_6} + K_5 Q_5^{n_5} + K_4 Q_4^{n_4} = 55 - 100$;
- **Nota:** $\sum K_i Q_i^{n_i} \pm \sum h_B = \Delta H$;
- **Nº total de equações:** **7 (+1** para a solução da equação linear da bomba).

9.7 Movimento variado em condutas

9.7.1 Perdas de carga em movimento variado

Considere-se um tubo com distribuição de percurso (Pinho et al., 2011):

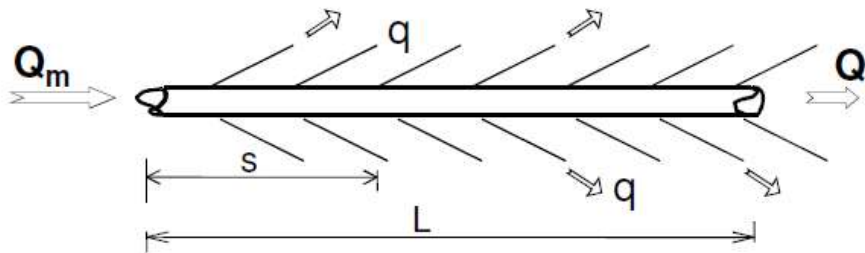


Figura 198 – Tubo com distribuição de percurso (Pinho et al., 2011).

$$q = \frac{Q_m - Q_j}{L} \quad \text{ou} \quad Q_m = Q_j + qL$$

$$Q(s) = Q_m - qs \quad \text{ou} \quad Q(s) = Q_j + q(L - s)$$

Em que:

q é o caudal unitário de percurso [L/s. m];

qL é o caudal de percurso [L/s].

Considerando apenas (Pinho et al., 2011):

- $\Delta h = h_f (\sum h_L = 0)$;
- $D = \text{cte.}$;
- Regime Turbulento Rugoso (f independente de Re).

Então:

$$H_m - H_j = \frac{8f}{\pi^2 g D^5} \int_0^L [Q_j + q(L - s)]^2 ds$$

Integrando:

$$H_m - H_j = \frac{8f}{\pi^2 g D^5} \left(Q_j^2 + Q_j q L + \frac{1}{3} q^2 L^2 \right)$$

Considerando um escoamento uniforme com a mesma perda de carga total entre **m** e **j**, ao qual corresponde um caudal equivalente (Q_e) será (Pinho et al., 2011):

$$H_m - H_j = \frac{8f Q_e^2}{\pi^2 g D^5}$$

$$Q_e = \sqrt{Q_j^2 + Q_j qL + \frac{1}{3} q^2 L^2}$$

Transformando, assim, um problema de Regime Variável num problema de Regime Uniforme (Pinho et al., 2011).

Conclusões sobre a perda de carga ($h_f = H_m - H_j$) (Pinho et al., 2011):

- A Linha Piezométrica é uma parábola;
- Nos tubos que têm apenas serviço de percurso ($Q_j = 0$), h_f é **1/3** da que existiria em movimento uniforme para $Q = qL$ ($= Q_m$ neste caso).

Como Q_e não é linear e considerando que (Pinho et al., 2011):

$$\left(Q_j + \frac{qL}{2}\right)^2 < Q_e^2 < \left(Q_j + \frac{qL}{\sqrt{3}}\right)^2$$

Bresse propôs:

$$Q_e = Q_j + 0.55qL$$

Para análise de uma rede ramificada, não se verificando continuidade nos nós, pode escrever-se (Pinho et al., 2011):

$$\left| \sum_K (Q_{ki})_j \right| + Q_{ei} = \left| \sum_I (Q_{li})_m \right|$$

9.7.2 Problemas do movimento variado em condutas

Considere-se o seguinte exemplo de aplicação:

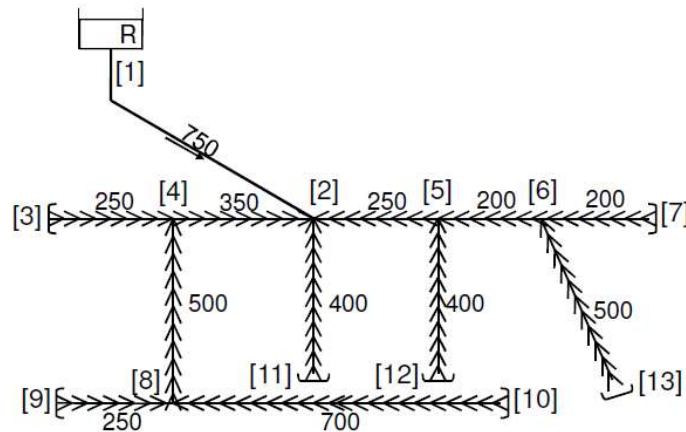


Figura 199 – Exemplo de um problema envolvendo movimento variado em condutas (Pinho et al., 2011).

$$Q_p = 8 \text{ L/s}$$

$$q = \frac{Q_p}{\sum L_{ij}} = \frac{8}{4000} = 0.002 \text{ L/s.m}$$

Tabela 33 – Cálculo de caudais (adaptado de Pinho et al., 2011).

Conduta	L [m]	Q [L/s]			
		Montante	Percurso	Jusante	Equivalente
1-2	750	8.00	0.00	8.00	8.00
2-4	350	4.10	0.70	3.40	3.79
4-3	250	0.50	0.50	0.00	0.28
4-8	500	2.90	1.00	1.90	2.45
8-9	250	0.50	0.50	0.00	0.28
8-10	700	1.40	1.40	0.00	0.77
2-11	400	0.80	0.80	0.00	0.44
2-5	250	3.10	0.50	2.60	2.88
5-12	400	0.80	0.80	0.00	0.44
5-6	200	1.80	0.40	1.40	1.62
6-7	200	0.40	0.40	0.00	0.22
6-13	500	1.00	1.00	0.00	0.55

CAPÍTULO 10 - ESCOAMENTO PERMANENTE EM CONDUTAS CONDICIONADO POR MÁQUINAS HIDRÁULICAS

10.1 Turbinas hidráulicas

Para entender o conceito de **turbina**, há que entender o conceito de **turbomáquinas**: máquinas nas quais se realiza transferência de energia entre o fluido em escoamento contínuo e uma roda ou rotor, pela ação dinâmica de um conjunto de pás que giram solidariamente com o rotor (Mata-Lima, 2010). **Nota**: os **hélices propulsores** (marítimos e de avião), que se destinam a criar uma força de propulsão, também são classificados como turbomáquinas (Mata-Lima, 2010).

Assim, **turbina**, turbomáquina motriz em que se extrai energia ao fluido e se fornece energia ao exterior por intermédio de um veio rotativo. Ex.: **Turbinas hidráulicas**, de vapor e de gás, eólicas (Mata-Lima, 2010).

As **turbinas hidráulicas instaladas na central hidroelétrica** permitem a conversão da energia do escoamento em energia mecânica de rotação, a qual irá ser convertida, no gerador, em energia elétrica (Cruz, 2006). A conversão energética nas turbinas é baseada nos princípios da conservação da energia e da quantidade de movimento (angular) (Cruz, 2006).

10.1.1 Características de funcionamento

Tipos de turbinas

Turbinas de Ação (de Impulsão) são turbinas tangenciais, **atuadas por água à pressão atmosférica**, como é o caso da **turbina Pelton** (Figura 200) (Braga, 2014):

- Turbina hidráulica de ação, que funciona, portanto, à pressão atmosférica. Esta é constituída por uma roda e um ou mais injetores, que efetuam a transformação de energia de pressão em energia cinética. Os jatos de água, ao chocarem com as pás da roda, geram o impulso que a faz mover;
- Podem existir desde um (apesar de o mínimo normal serem dois) a seis injetores;
- Os injetores possuem **uma agulha** que pode regular o jato de água, diminuindo o caudal quando necessário, e de **um defletor**, que pode desviar a direção do jato; estes, em geral, apontam para a extremidade da roda;
- É mais adequada para grandes quedas úteis;
- Opera com maiores velocidades de rotação do eixo do rotor;
- Funcionam com vasta gama de caudais, sem perder eficiência;
- Podem sofrer erosão no caso de a água não estar bem limpa, devido à força do impacto dos jatos de água, caso estes possuam areia, por exemplo;
- Maior facilidade de evitar altas pressões.

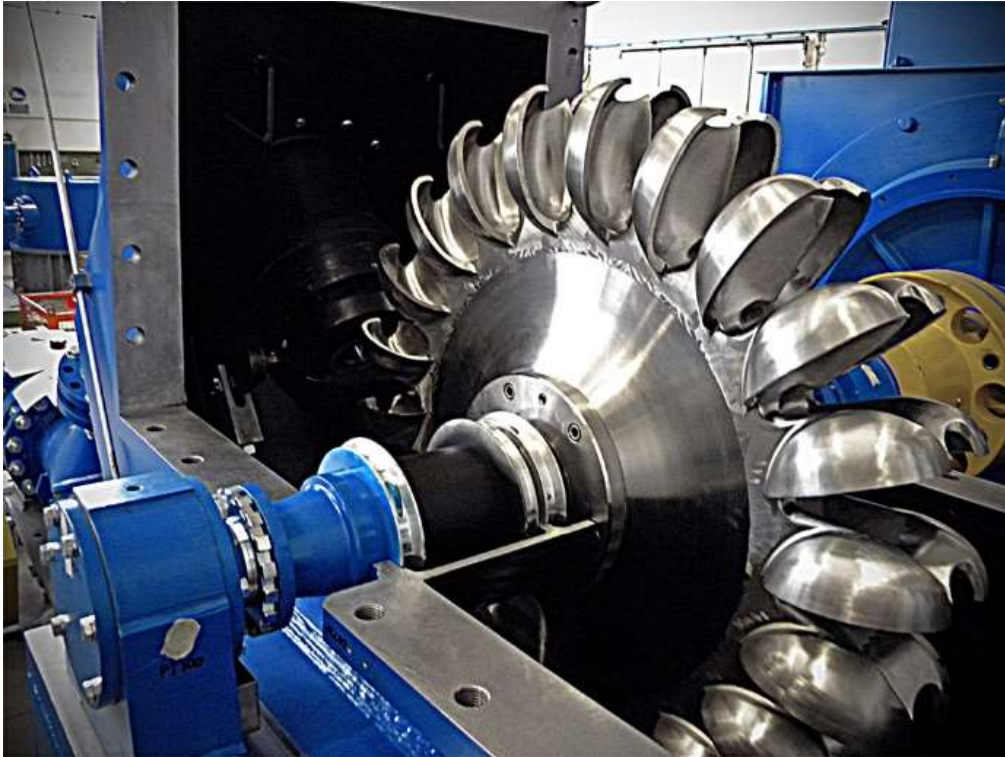


Figura 200 – Turbina Pelton (<https://www.zeco.it>).

Turbinas de Reação referem-se às turbinas radiais, axiais e mistas (ou diagonais), que funcionam em condições de **escoamento sob pressão** (Braga, 2014).

Turbomáquinas radiais - as linhas de corrente no interior da roda estão, maioritariamente, situadas em planos perpendiculares ao eixo de rotação, como é o caso da **turbina Francis** (Figura 201) (Braga, 2014):

- Turbina do tipo radial, que funciona com um fluxo de água de fora para dentro. A água sob pressão entra por um ducto em espiral de secção decrescente, sendo desviada por um conjunto de pás estáticas do distribuidor para um rotor central. A água atravessa a parede lateral do rotor, empurrando um conjunto de pás do rotor, saindo pela base com pressão e velocidade reduzidas;
- Foi concebida por Jean-Victor Poncelet em 1820 e aperfeiçoada pelo engenheiro norte americano James Francis em 1849;
- As pás estáticas podem ser ajustáveis;
- São as mais usadas pela sua flexibilidade e eficiência;
- Funcionam com quedas desde 10 até 650 m, a velocidade de 80 a 1000 rpm;
- Não necessitam de uma estrutura tão grande como as Pelton, com menor custo de escavação e betonagem;
- O difusor é normalmente de secção decrescente, para promover a recuperação de parte da energia cinética e de pressão;
- O caudal é tanto maior quanto maior for a abertura das diretrizes.



Figura 201 – Turbina Francis (<https://hydrotu.en.ec21.com>).

Turbomáquinas Axiais - as linhas de corrente estão situadas, aproximadamente, em superfícies cilíndricas de revolução, e a componente radial da velocidade é relativamente pequena, como é o caso da **turbina Kaplan** (Figura 202 e Figura 203) (Braga, 2014):

- Turbina do tipo axial, de acordo com o movimento do líquido em relação á respetiva roda. Esta assemelha-se a um propulsor de um navio (hélice), e possui um sistema de pás servo-controláveis, por um sistema hidráulico a óleo sob pressão ligado a um servomotor;
- Foram concebidas pelo engenheiro austríaco Victor Kaplan que, a partir de estudos teóricos e experimentais, criou um novo tipo de turbina a partir das turbinas hélice, com a possibilidade de variar o passo das pás do rotor e do distribuidor;
- Aplicadas em quedas baixas (até 50 m) e grandes volumes de água;
- O acionamento das pás, realizado por um sistema de bombeamento localizado fora da turbina, é conjugado ao das palhetas do distribuidor, de modo que, para uma determinada abertura do distribuidor, corresponde um determinado valor de inclinação das pás do rotor;
- Conseguem atingir altos rendimentos (até 94%).



Figura 202 – Turbina Kaplan (<https://www.zeco.it>).



Figura 203 – Turbina Kaplan (bolbo) (<https://www.zeco.it>).

Turbomáquinas Mistas - as linhas de corrente na roda estão aproximadamente em superfícies de revolução que se afastam consideravelmente das consideradas nos casos anteriores. Como exemplo tem-se **turbina Dériaz** (Figura 204) (Braga, 2014):

- Tem o nome de um engenheiro suíço que as inventou;
- Assemelham-se às turbinas Kaplan e Francis rápida, porém as pás do rotor são articuladas e, pela atuação de um mecanismo apropriado podem variar o ângulo de inclinação;
- Este tipo de turbina é muito utilizado em instalações onde a água do reservatório de montante precisa ser resposta quando a máquina não está produzindo potência. Sendo, quando for o caso, denominada de turbina-bomba.



Figura 204 – Turbina Dériaz (<http://www.directindustry.com/>).

10.1.2 Funcionamento de turbinas integradas numa instalação

Considere-se a Figura 205 onde está representado um circuito hidráulico, entre dois reservatórios, composto por uma conduta e uma **singularidade (T)** onde ocorre uma **variação brusca de carga hidráulica (ΔE)** (Cruz, 2006).

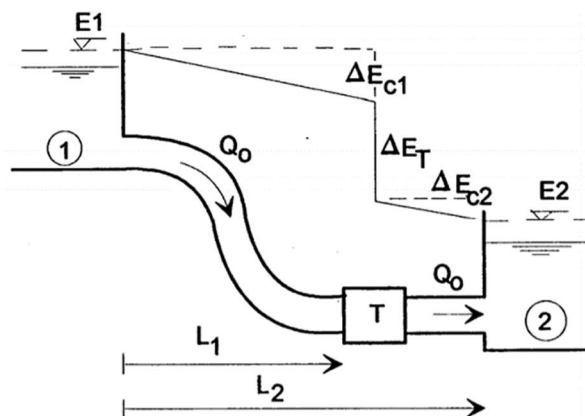


Figura 205 – A perda de carga ΔE_T numa singularidade que pode ser convertida em queda útil numa turbina (Cruz, 2006).

Conhecidas as cotas da linha de energia nas secções, a montante e a jusante, bem como as perdas da carga contínuas e localizadas ao longo da conduta, entre a secção 1 e a singularidade T, e entre esta e a secção 2, o princípio da conversão de energia (Teorema de Bernoulli) permite escrever a seguinte expressão (Cruz, 2006):

$$E_1 - \sum_{i=1}^N \Delta E_{c1} - \Delta E_{c2} - \Delta E_T = E_2$$

Em que:

E_1, E_2 representam as cargas hidráulicas nas secções 1 e 2;

ΔE_1 é a perda de carga localizada ao longo da conduta;

$\Delta E_{c1}, \Delta E_{c2}$ representam as perdas de carga contínuas ao longo da conduta;

ΔE_T é a perda de carga na singularidade T.

A **carga hidráulica** é definida por (Cruz, 2006):

$$E = \frac{P}{\gamma} + z + \frac{v^2}{2g}$$

Nesta situação, a **perda de carga (ΔE_T)** depende do **desnível de cotas ($E_1 - E_2$)**, entre os reservatórios a montante e a jusante, e das perdas de carga totais ao longo da conduta (Cruz, 2006):

$$\Delta E_T = E_1 - E_2 - \Delta E_{c1} - \Delta E_{c2} - \sum_{i=1}^N \Delta E_1$$

Conhecido o **caudal em regime permanente (Q_0)**, a **potência dissipada na singularidade (T)** é a seguinte (Cruz, 2006):

$$P_T = \gamma Q_0 \Delta E_T$$

sendo γ o peso volúmico do líquido. Esta potência é completamente transformada em calor para o exterior ou em variação de temperatura do líquido (Cruz, 2006).

Para aproveitar esta potência sob uma forma mecânica útil à conversão de energia para a produção de energia elétrica, há que conseguir que a potência do escoamento seja cedida a um órgão em rotação que constitua uma resistência. Assim, substituindo a singularidade dissipativa (**T**) por uma turbomáquina adequada (com uma roda num veio), o binário hidráulico atuante nesta permitirá a desejada transferência de potência com um mínimo de perdas na máquina. Estas **perdas** serão **caracterizadas pelo rendimento da turbina (η_T)** (Cruz, 2006).

Assim, a potência fornecida pela turbina será (Cruz, 2006):

$$P_T = \eta_T \gamma Q_0 H_U$$

sendo **H_U** a variação da carga hidráulica entre a secção de montante e uma secção de jusante da turbina (Figura 206) (Cruz, 2006).

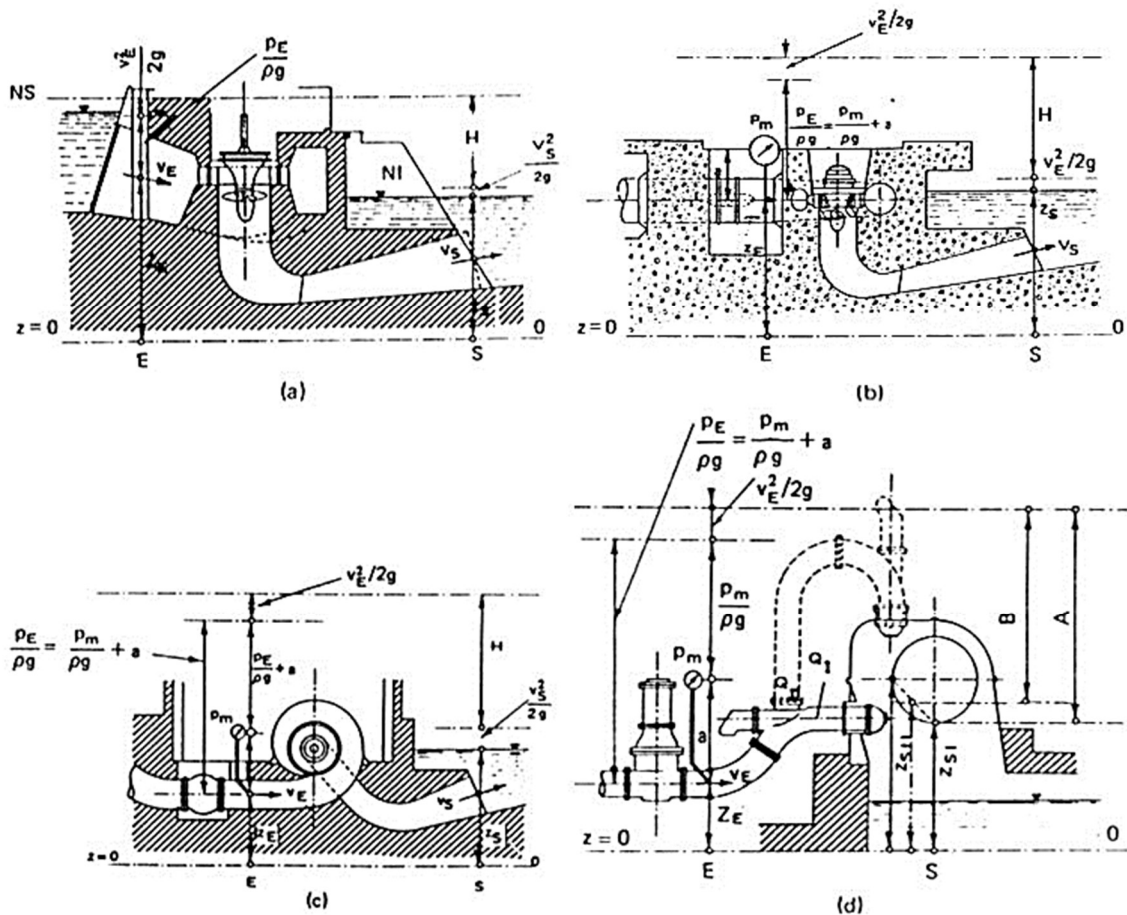


Figura 206 – Exemplos de definição da queda útil H nas turbinas Kaplan (a), Francis (b), idem de eixo horizontal (c) e Pelton (d) (Cruz, 2006).

Teorema e equações de Euler

O binário hidráulico atuante na roda da turbina pode ser calculado a partir do princípio de conservação da quantidade de movimento angular (**Teorema de Euler dos momentos**). Hipóteses básicas (Figura 207) (Cruz, 2006):

- O fluido comporta-se como incompressível;
- A distribuição de velocidades à entrada e à saída da roda é uniforme.

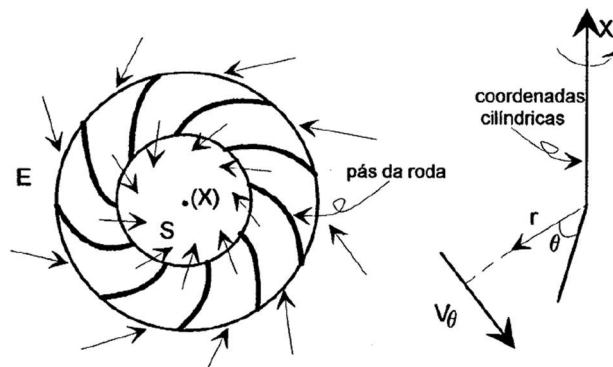


Figura 207 – Teorema de Euler aplicado a um volume de controlo contido na roda de uma turbina (Cruz, 2006).

Admitindo que o plano da roda está no plano YZ e que o eixo da rotação tem a direção do eixo dos XX, a aplicação do princípio da conservação da quantidade do movimento angular segundo X, em coordenadas cilíndricas, conduz a (Cruz, 2006):

$$T_{Xi} = \frac{\check{Z}}{\check{Z}t} \int_{Vc} \rho \omega_X dV - \rho Q V_{\theta E} r_E + \rho Q V_{\theta S} r_S$$

ou

$$-T = \int_{Vc} \frac{\check{Z} V_{\theta}}{\check{Z}t} r dV - \rho Q V_{\theta E} r_E + \rho Q V_{\theta S} r_S$$

Sendo:

T_{Xi} um binário atuante genérico com o eixo segundo X;

T o binário hidráulico atuante sobre a roda;

r_E, r_S os raios das circunferências à entrada e à saída da roda (os índices E e S indicam a entrada e a saída).

Em **regime permanente** obtém-se (Cruz, 2006):

$$T = \rho Q (V_{\theta E} r_E - V_{\theta S} r_S)$$

É usual utilizar as seguintes designações:

$$V_{\theta E} = V_1 \cos \alpha_1$$

$$V_{\theta S} = V_2 \cos \alpha_2$$

$$r_E = r_1$$

$$r_S = r_2$$

Obtendo-se então a seguinte equação geral para o binário atuante na roda:

$$T = \rho Q (V_1 r_1 \cos \alpha_1 - V_2 r_2 \cos \alpha_2)$$

Em que:

T é o binário hidráulico atuante na roda [Nm];

ρ é a massa volúmica do líquido [kg/m^3] - (para a água, = 1000 kg/m^3);

Q é o caudal na turbina [m^3/s];

V_1, V_2 é a velocidade (absoluta) do escoamento, respetivamente na entrada e na saída da roda [m/s];

r_1, r_2 é o raio da roda, com centro no eixo do grupo, respetivamente na entrada e na saída do escoamento [m];

α_1, α_2 é o ângulo entre as velocidades absolutas do escoamento com velocidade periférica da roda à entrada e à saída desta.

Atendendo a que a **carga hidráulica cedida pelo escoamento à roda**, ou **queda útil na roda** (H_{UR}), corresponde à energia por unidade de peso do líquido, a potência cedida pelo escoamento à roda da turbina obedece à seguinte expressão (Cruz, 2006):

$$T\omega = \rho g Q H_{UR}$$

Em que:

ω é a velocidade angular da roda [rad/s];

g é a aceleração gravítica (9.8 [m/s²]);

H_{UR} é a queda útil na roda [m].

E, atendendo ainda às seguintes relações, válidas para um corpo rígido em rotação em torno de um eixo (Cruz, 2006):

$$\begin{cases} \omega r_1 = c_1 \\ \omega r_2 = c_2 \end{cases}$$

Obtém-se a seguinte expressão (**1ª Forma da Equação de Euler**) para a queda útil na roda (Cruz, 2006):

$$H_{UR} = \frac{V_1 C_1 \cos \alpha_1 - V_2 C_2 \cos \alpha_2}{g}$$

O Teorema de Euler é aplicado a um volume de controlo que roda com a velocidade angular ω sendo válidas as seguintes relações vetoriais (Cruz, 2006):

$$\vec{V} = \vec{C} + \vec{W} \rightarrow \text{Expressão vetorial geral}$$

Em que:

\vec{V} é a velocidade absoluta do escoamento;

\vec{C} é a velocidade periférica da roda;

\vec{W} é a velocidade relativa do escoamento.

A expressão vetorial geral, quando aplicada à entrada e à saída da roda, pode ser caracterizada geometricamente por triângulos de velocidade (Figura 208) (Cruz, 2006).

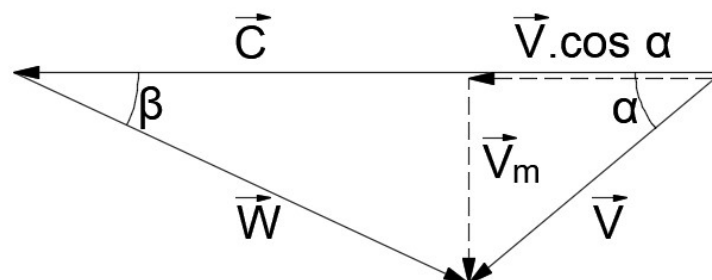


Figura 208 – Triângulo de velocidades (adaptado de Cruz, 2006).

Com base nestes triângulos podem escrever-se as seguintes identidades:

$$V \sin \alpha = W \sin \beta \equiv V_m$$

$$V \cos \alpha = C + V \cos \beta$$

Sendo β o ângulo da velocidade relativa \vec{W} com a velocidade \vec{C} .

São válidas também as seguintes identidades:

$$V_m^2 = V^2 - V^2 \cos^2 \alpha$$

$$V_m^2 = W^2 - (C - V \cos \alpha)^2$$

E, substituindo,

$$V^2 - V^2 \cos^2 \alpha = W^2 - C^2 - V^2 \cos^2 \alpha + 2CV \cos \alpha$$

Donde:

$$CV \cos \alpha = \frac{V^2 + C^2 - W^2}{2}$$

Aplicando a expressão anterior aos triângulos de entrada e saída:

$$C_1 V_1 \cos \alpha_1 = \frac{V_1^2 + C_1^2 - W_1^2}{2}$$

$$C_2 V_2 \cos \alpha_2 = \frac{V_2^2 + C_2^2 - W_2^2}{2}$$

E introduzindo na expressão da queda útil (H_{UR}) obtém-se a **2ª Forma da Equação de Euler** (Cruz, 2006):

$$H_{UR} = \frac{V_1^2 - V_2^2}{2g} + \frac{C_1^2 - C_2^2}{2g} + \frac{W_2^2 - W_1^2}{2g}$$

A queda útil na roda pode, assim, ser decomposta nos seguintes termos (Cruz, 2006):

$$\frac{V_1^2 - V_2^2}{2g} = \text{Componente de transferência cinética;}$$

$$\frac{C_1^2 - C_2^2}{2g} + \frac{W_2^2 - W_1^2}{2g} = \text{Componente de transferência estática ou componente de pressão;}$$

$$\frac{C_1^2 - C_2^2}{2g} = \text{Componente resultante do efeito centrífugo.}$$

A importância relativa de cada componente de H_{UR} depende do **tipo de turbina** (Cruz, 2006). **Exemplo:** nas turbinas de aço (Pelton) só existe a primeira componente (Cruz, 2006).

Rendimento hidráulico

Conhecida a variação da carga hidráulica entre a secção de entrada e a secção de saída da turbina, ou queda útil na turbina de H_U , o **rendimento hidráulico** (η_H) é definido do seguinte modo (Cruz, 2006):

$$\eta_H = \frac{H_{UR}}{H_U}$$

A queda útil (H_U) é obtida pelos cálculos hidráulicos de dimensionamento do circuito. A localização das secções de entrada (E) e de saída (S) da turbina para cálculo de H_U é definida por normas internacionais (ver exemplo na Figura 206 para turbinas Kaplan, Francis, de eixo vertical e de eixo horizontal, e Pelton) (Cruz, 2006).

O rendimento hidráulico caracteriza as perdas internas hidráulicas (resistência nas paredes sólidas, turbulência, choque nas pás) (Cruz, 2006).

No caso das turbinas Pelton de eixo vertical ou de eixo horizontal, com um injetor, a queda útil é calculada com base na cota do eixo do jato (Cruz, 2006):

$$H_{U1} = \frac{P_E}{\gamma} + \frac{V_E^2}{2g} + Z_E - Z_S$$

No caso das turbinas Pelton de eixo horizontal com dois injetores, a queda útil é calculada segundo uma expressão que pondera as diferenças de cotas dos pontos de contacto dos jatos com as pás da roda (ver Figura 206) (Cruz, 2006):

$$H_{U2} = \frac{Q_I}{Q_I + Q_{II}} (Z_E + a - Z_{SI}) + \frac{Q_{II}}{Q_I + Q_{II}} (Z_E + a - Z_{SII}) + \frac{P_m}{\gamma} + \frac{V_E^2}{2g}$$

Tendo em conta a 1ª forma de equação de Euler obtém-se a seguinte expressão para o rendimento hidráulico (Cruz, 2006):

$$\eta_H = \frac{V_1 C_1 \cos \alpha_1 - V_2 C_2 \cos \alpha_2}{gH_U}$$

O projetista da turbina tentará maximizar η_H . Os valores típicos de η_H são da ordem de 0.90 a 0.96 (Cruz, 2006).

Exemplo: para as turbinas Pelton (turbinas de aço) é possível deduzir uma expressão analítica para o rendimento hidráulico (Cruz, 2006):

- **Queda útil na roda**

- 2ª forma da Equação de Euler

$$(1): H_{UR} = \frac{V_1^2 - V_2^2}{2g}$$

Atendendo a que $C_1 = C_2 = C$ conclui-se que:

$$\frac{W_2^2 - W_1^2}{2g} = 0 \wedge W_2 = W_1 = W$$

- 1ª forma da Equação de Euler

$$H_{UR} = \frac{C}{g} (V_1 \cos \alpha_1 - V_2 \cos \alpha_2)$$

Atendendo a que $\alpha_1 = 0$ e $V_1 = C_1 + W_1$,

$$V_1^2 = C_1^2 + W_1^2 + 2C_1W_1$$

$$V_2^2 = C_2^2 + W_2^2 - 2C_2W_2 \cos \beta$$

E, sendo $C_1 = C_2 = C$ e $W_1 = W_2 = W$,

$$V_1^2 - V_2^2 = 2CW(1 + \cos \beta)$$

E substituindo em (1):

$$H_{UR} = \frac{CW}{g} (1 + \cos \beta)$$

- **Rendimento hidráulico**

$$\eta_H = \frac{H_{UR}}{H_U} = \frac{2CW(1 + \cos \beta)}{V_1^2}$$

Admitindo que:

$$V_1 = \sqrt{2gH_U} \wedge W = V_1 - C$$

Obtém-se:

$$\eta_H = 2 \left[\frac{C}{V_1} - \left(\frac{C}{V_1} \right)^2 \right] (1 + \cos \beta)$$

Sendo o rendimento hidráulico da turbina Pelton máximo para $C/V_1 = 0.5$ (velocidade periférica da roda = 0.5 da velocidade do jato):

$$\eta_H = 0,5(1 + \cos \beta)$$

Rendimento total

O rendimento total da turbina tem em conta as perdas hidráulicas e outras perdas de potência resultantes de (Cruz, 2006):

- **Perdas volumétricas** ou de caudal ($\eta_V = 0.98$ a 0.995);
- **Perdas por atrito mecânico** (nas chumaceiras), ($\eta_m \geq 0.98$);
- **Perdas por resistência do ar** (η_r).

O rendimento total da turbina será:

$$\eta_T = \eta_H \eta_V \eta_m \eta_r$$

O valor máximo de η_T , para as condições ótimas ou de melhor rendimento, (caudal, queda e velocidade de rotação fixadas) depende do tipo de turbina. O valor do rendimento pode variar para diferentes valores da queda útil, do caudal ou da potência e da velocidade de rotação (exemplos na Figura 209, Figura 210 e Figura 211) (Cruz, 2006).

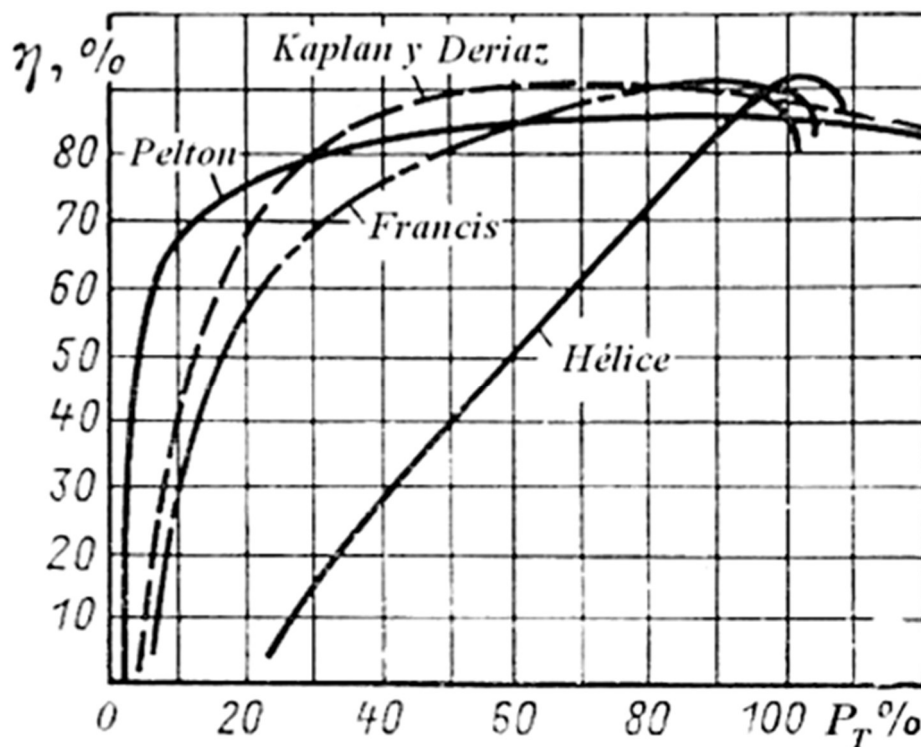


Figura 209 – Rendimento versus potência (https://pt.slideshare.net/buti_81/hidraulica-turbinas).

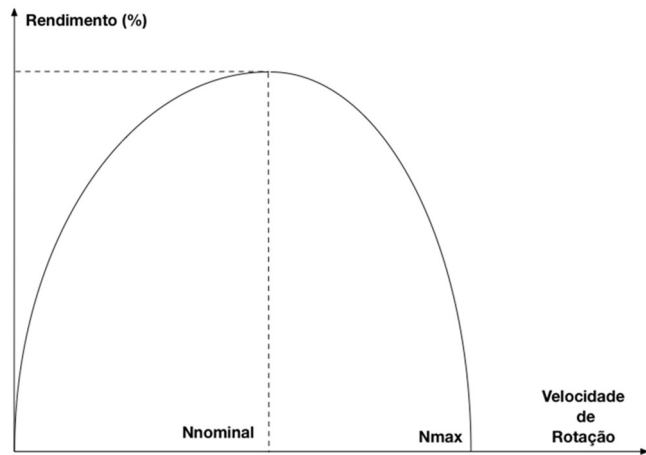


Figura 210 – Variação do rendimento com a velocidade de rotação (<http://www.antonioquilherme.web.br.com>).

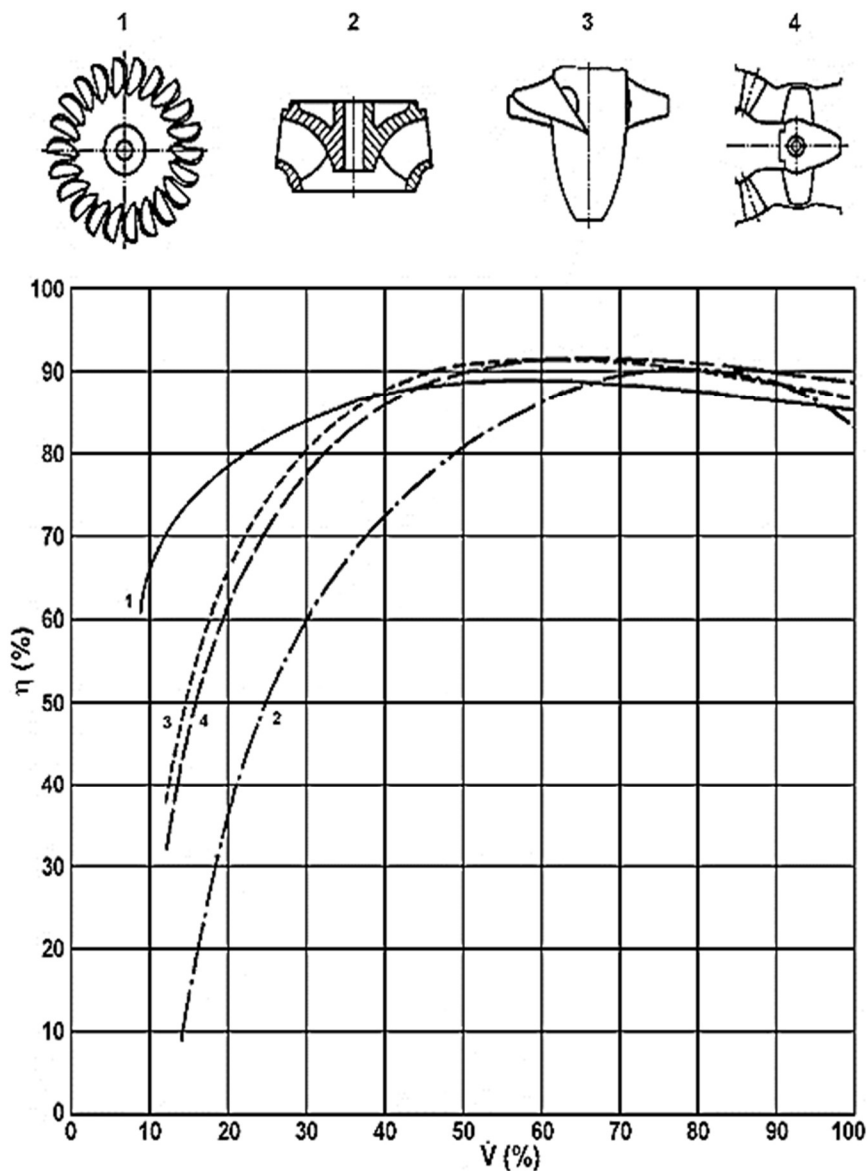


Figura 211 – Rendimento/caudal para turbinas: (1)Pelton, (2)Francis, (3)Kaplan, (4)Bolbo (Cruz, 2006).

Nos estudos de planeamento (análise económica e de otimização da exploração) dos aproveitamentos hidroelétricos, a variação do rendimento terá de ser considerada. O rendimento condiciona o funcionamento da turbina: abaixo de um valor limite a turbina não deve funcionar (Cruz, 2006).

O rendimento global da central engloba ainda os rendimentos da turbina, do gerador, do transformador e da ligação à rede (Cruz, 2006).

Grau de reação das turbinas

Designa-se por **grau de reação das turbinas**, a razão entre a componente estática de H_{UR} e o valor de H_{UR} (Cruz, 2006):

$$\varepsilon = \frac{\frac{C_1^2 - C_2^2}{2g} + \frac{W_2^2 - W_1^2}{2g}}{\frac{V_1^2 - V_2^2}{2g} + \frac{C_1^2 - C_2^2}{2g} + \frac{W_2^2 - W_1^2}{2g}}$$

Aplicando o Teorema de Bernoulli entre as secções de entrada e saída da roda obtém-se:

$$H_{UR} = \frac{V_1^2 - V_2^2}{2g} + Z_1 - Z_2 + \frac{P_1 - P_2}{\gamma}$$

Sendo $Z_1 - Z_2$ a diferença de cotas entre as duas secções. Admitindo que $Z_1 = Z_2$, o grau de reação pode ser calculado do seguinte modo:

$$\varepsilon = \frac{\frac{P_1 - P_2}{\gamma}}{H_{UR}}$$

e considerando que $P_2 < P_1$,

$$\varepsilon = \frac{\frac{P_1}{\gamma}}{H_{UR}}$$

Nas turbinas de ação, o escoamento à entrada e à saída da roda está sujeito à pressão atmosférica (em pressões relativas):

$$\frac{P_1}{\gamma} = \frac{P_2}{\gamma} = \frac{P_{atm}}{\gamma} = 0$$

Donde o grau de reação é nulo. É o que acontece nas turbinas Pelton e Cross-Flow.

Nas turbinas de reação o escoamento atravessa a roda em pressão e o grau de reação não é nulo. É o que acontece nas turbinas Francis, Kaplan e Hélice (Cruz, 2006).

Admitindo que a carga a jusante da roda é praticamente nula,

$$H_{UR} \cong \frac{V_1^2}{2g} + \frac{P_1}{\gamma}$$

Donde:

$$H_{UR} \cong \frac{V_1^2}{2g} + \epsilon H_{UR} \quad \text{ou} \quad V_1 \cong \sqrt{2g(1 - \epsilon)H_{UR}}$$

Nas turbinas de ação do tipo Pelton, atendendo à definição particular de H_{UR} ,

$$H_{UR} = \frac{V_1^2 - V_2^2}{2g}$$

E $\epsilon = 0$, donde:

$$V_1 \cong \sqrt{2gH_{UR}}$$

Nas turbinas de reação (ex.: turbinas Francis) o binário atuante na roda é o resultado da variação da direção do escoamento ao atravessar a roda e da ação da pressão. Para obrigar o escoamento a modificar a respetiva direção, a roda terá de exercer forças hidrodinâmicas ao longo das respetivas pás. Por reação, as pás ficam sujeitas a forças iguais nas de sentido oposto. O binário destas forças relativamente ao eixo da turbina corresponderá ao binário hidráulico atuante (Cruz, 2006).

Semelhança de turbinas

Número específico de rotações

De acordo com a teoria da semelhança dinâmica, para duas turbinas geometricamente semelhantes é válida a seguinte relação (Cruz, 2006):

$$(1): \frac{n}{n'} = \left(\frac{P}{P'}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{H'_U}{H_U}\right)^{\frac{5}{4}}$$

Em que:

n, n' representam velocidades de rotação;

P, P' é a potência da turbina;

H_U, H'_U é a queda útil.

O número específico de rotações de uma turbina define-se por (Cruz, 2006):

$$n_s = \frac{P^{1/2}}{H_U^{5/4}}$$

que corresponde a considerar em (1) os seguintes valores (Cruz, 2006):

$$n' = n_s; P' = 1; H'_U = 1$$

A queda útil (H_U) corresponde à queda útil dos melhores rendimentos e P à potência máxima sob esta queda. O valor de n_s vai depender das unidades adotadas (Cruz, 2006):

$$n_s[\text{m, CV}] = 1.17 \cdot n_s[\text{m, kW}] = 4.45 \cdot n_s[\text{ft, HP}]$$

Cada valor de n_s identifica uma família de rodas (turbinas) semelhantes e é um parâmetro fundamental na caracterização e dimensionamento das turbinas (Cruz, 2006).

No caso de uma turbina Pelton com N injetores, o número específico pode ser definido do seguinte modo (Cruz, 2006):

$$n_s = n \frac{(NP_i)^{1/2}}{H_U^{5/4}} = \sqrt{N} \cdot n_{si}$$

sendo P_i a potência da turbina por injetor e n_{si} o número específico referente a um injetor.

Nas turbinas com rodas múltiplas (M rodas) o número específico é definido do seguinte modo (Cruz, 2006):

$$n_s = \sqrt{M} \cdot n_{si}$$

sendo n_{si} o número específico referente a cada roda.

Velocidades específicas

As velocidades específicas são definidas pelas relações entre as velocidades reais (V , W e C), à entrada e à saída da roda e a velocidade dada pela expressão $\sqrt{2gH_u}$ (Cruz, 2006):

$$\text{Para } i = 1, 2: v_i = \frac{V_i}{\sqrt{2gH_u}}; c_i = \frac{C_i}{\sqrt{2gH_u}}; w_i = \frac{W_i}{\sqrt{2gH_u}}$$

O rendimento hidráulico da turbina pode, assim, ser expresso do seguinte modo:

$$\eta_H = 2(v_1 c_1 \cos \alpha_1 - v_2 c_2 \cos \alpha_2)$$

Para melhorar η_H no ponto de funcionamento ótimo, o ângulo α_2 deve ser igual ou próximo de 90° e (Cruz, 2006):

$$\eta_H = 2v_1 c_1 \cos \alpha_1$$

As **turbinas podem ser classificadas** em lentas ou rápidas consoante o valor de c_1 relativamente a $v_1 \cos \alpha_1$ (Cruz, 2006):

- **Turbinas lentas:** $c_1 < v_1 \cos \alpha_1$;
- **Turbinas normais:** $c_1 = v_1 \cos \alpha_1$;
- **Turbinas rápidas:** $c_1 > v_1 \cos \alpha_1$.

Nas turbinas de ação (turbinas Pelton), v_1 tem um valor muito próximo da unidade e, admitindo que $\alpha_1 = 0$ e que $\eta_H = 1$, o valor menor de c_1 será 0.5 (Cruz, 2006).

Outros parâmetros utilizados

A **velocidade relativa** [m, rpm] é a velocidade específica c para c' transformado em n [rpm] (Cruz, 2006):

$$k_U \text{ ou } k_u \text{ (quando se utilizam unidades inglesas)} = \frac{Dn}{60\sqrt{2gH_u}}$$

A **velocidade unitária** [m, rpm] é a velocidade em rpm de uma turbina que, tendo o diâmetro unitário, opera sob uma queda útil unitária (Cruz, 2006).

$$n_{11} = \frac{Dn}{\sqrt{H_u}}$$

O **caudal unitário** [m³/s, m] é o caudal de uma turbina com diâmetro unitário que opera sob uma queda unitária (Cruz, 2006).

$$q_{11} = \frac{Q}{D^2\sqrt{H_u}}$$

A **potência unitária** [kW, m] é a potência de uma turbina com o diâmetro unitário, operando sob uma queda unitária (Cruz, 2006).

$$\rho_{11} = \frac{P}{D^2H_u^{1.5}}$$

Velocidade de rotação

Em regime permanente, as turbinas adaptadas diretamente a um gerador **síncrono** rodam a uma **velocidade compatível com a frequência na rede e o número de pares de polos do gerador**. Assim, **o número de rotações por minuto (n)** de uma turbina que aciona o gerador/alternador está relacionado com o número de pares de polos deste (**P**) e com a frequência da rede elétrica (**f**) pela seguinte expressão (Cruz, 2006):

$$n = \frac{60f}{P}$$

Em Portugal, $f = 50$ Hz. O valor de **n** varia, em geral, entre cerca de 70 e 1500 rpm.

Nos aproveitamentos microhídricos convém diminuir as dimensões das estruturas de construção civil e os equipamentos de modo a conseguir baixar os custos. Convém, assim, ter velocidades de rotação razoavelmente altas, pelo menos da ordem de 500 rpm (Cruz, 2006).

Em algumas instalações são intercalados entre a turbina e o gerador, **variadores de velocidades** por forma a tornar a solução mais económica (geradores mais rápidos e mais pequenos) (Cruz, 2006).

Se a central estiver ligada a uma rede isolada, a frequência na rede elétrica terá de ser mantida pelas respetivas turbinas, o que implica uma **regulação da velocidade** eficaz, por forma a minimizar as variações de frequência durante os regimes transitórios (Cruz, 2006).

No caso da central de um pequeno aproveitamento hidroelétrico alimentar uma rede interligada que tenha uma potência instalada total muito superior (no mínimo 10 vezes) à dessa central é possível utilizar um gerador assíncrono, sendo então a velocidade de rotação da turbina superior à velocidade síncrona atrás indicada. As centrais munidas de geradores assíncronos não podem estar ligadas a redes isoladas (Cruz, 2006).

Para situações especiais é possível utilizar geradores síncronos de velocidade variável (Cruz, 2006):

- Geradores com possibilidade de alteração do número de pares de polos (máquinas de velocidade incremental) em que as velocidades possíveis são, por exemplo, duas;
- Geradores com velocidade ajustável de modo contínuo entre um valor mínimo e um valor máximo.

Estes geradores são mais caros, mas podem ser indicados para situações em que a queda varia periodicamente acima e abaixo do valor da queda de melhores rendimentos, sendo particularmente indicados para os grupos reversíveis (turbinas-

bombas). Como regra prática, o aumento de energia produzida será da ordem de $\pm 10\%$ da variação percentual da queda acima e abaixo da queda média ou de melhores rendimentos (Cruz, 2006).

Cavitação em turbinas

A **cavitação** é definida como a formação de "vazios" no seio da massa líquida em escoamento, ou em torno de um corpo em deslocamento num líquido, sempre que a pressão local tende a ser próxima da pressão de vaporização do líquido e que as partículas líquidas deixam de aderir às superfícies fronteiras (adaptado da definição do *US Department of Interior*). Esta última condição corresponde a uma insuficiência das forças resultantes da pressão para vencer a força da inércia das partículas em escoamento e para "força-las" a seguirem as superfícies das fronteiras. Estes "vazios" tendem a ser preenchidos por vapor e gases libertados. Os fatores interligados no aparecimento da cavitação são, assim, os seguintes: velocidades elevadas, baixas pressões e variações bruscas na fronteira (Cruz, 2006).

O arrastamento das bolhas de vapor seguido do respetivo colapso, junto a paredes sólidas, provoca um ataque à superfície destas com perda do material e aparecimento de superfícies erodidas. Nas turbomáquinas, o aparecimento causa ainda perda de rendimento, vibrações e ruído (Cruz, 2006).

Nas turbinas de reação, a pressão à saída da roda é baixa e a velocidade é elevada, havendo condições potenciais para a ocorrência de cavitação (Cruz, 2006). Considere-se a figura seguinte:

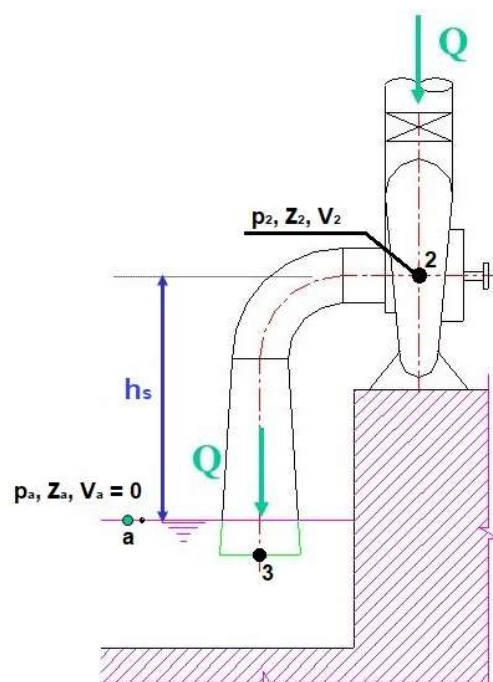


Figura 212 – Esquema de um difusor de uma turbina de reação e definição da altura de aspiração (adaptado de <http://slideplayer.com.br/slide/1473748/>).

De acordo com o Teorema de Bernoulli:

$$\frac{P_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} + Z_2 = \frac{P_3}{\gamma} + \frac{V_3^2}{2g} + Z_3 + \Delta H_{2-3}$$

Sendo ΔH_{2-3} a perda de carga total entre os pontos 2 e 3, respetivamente à saída da roda e à superfície livre a jusante (restituição) (Cruz, 2006).

Considerando que:

$$V_2 = C_V \sqrt{2gH_U} = K_2 \sqrt{H_U} \wedge V_3 = \frac{A_2 K_2}{A_3} = \frac{A_2 K_2 \sqrt{H_U}}{A_3} = K_3 \sqrt{H_U}$$

E que ΔH_{2-3} é a soma das perdas de carga localizadas e contínua,

$$\Delta H_{2-3} = \Delta H_L + \Delta H_C = \sum_L K_L \frac{V^2}{2g} + \frac{fLV^2}{2g} = K_{2-3} \frac{H_U}{2g}$$

Obtém-se:

$$\left[\frac{K_2^2}{2g} - \frac{K_3^2}{2g} - \frac{K_{2-3}^2}{2g} \right] H_U = \frac{P_3 - P_2}{\gamma} + Z_3 - Z_2$$

À superfície livre $P_3/\gamma = P_{atm}/\gamma = h_b$ (**altura barométrica local**, a qual depende da altitude do local, Tabela 34) e, quando ocorre cavitação, $P_2/\gamma = P_V/\gamma = h_v$ (**altura de vaporização da água**, a qual é função da temperatura, Tabela 35) (Cruz, 2006).

Tabela 34 – Altura barométrica em função da altitude do local (adaptado de Cruz, 2006).

Altitude [m]	h_b [m]
0	10.351
500	9.751
1000	9.180
1500	8.637
2000	8.120
3000	7.160
4000	6.295

Tabela 35 – Altura de vaporização da água em função da temperatura (adaptado de Cruz, 2006).

T [°C]	h_v [m]
5	0.089
10	0.125
15	0.174
20	0.239
25	0.324

Designando por h_s (**altura de aspiração**) a diferença de cotas ($Z_2 - Z_3$) na central obtém-se (Cruz, 2006):

$$\frac{K_2^2}{2g} - \frac{K_3^2}{2g} - \frac{K_{2-3}^2}{2g} = \frac{h_b - h_V - h_s}{H_U} = \sigma_C$$

Sendo σ_C designado por **coeficiente de cavitação na central**.

Designando por $h_{s,max}$ o valor máximo de altura de aspiração, a partir do qual ocorre cavitação na turbina para determinadas condições de funcionamento (caudal, queda e grau de abertura do distribuidor) (Cruz, 2006):

$$\frac{h_b - h_V - h_{s,max}}{H_U} = \sigma_T$$

Sendo σ_T designado por **coeficiente de cavitação na turbina** ou **coeficiente de Thoma** sendo igual ao valor de (Cruz, 2006):

$$\frac{K_2^2}{2g} - \frac{K_3^2}{2g} - \frac{K_{2-3}^2}{2g}$$

nas condições de cavitação limites consideradas.

Para evitar a cavitação na turbina deverá verificar-se a seguinte desigualdade (Cruz, 2006):

$$\sigma_C > \sigma_T$$

No caso limite,

$$\sigma_C = \sigma_T$$

E,

$$h_b - h_V - h_{s,max} = \sigma_T H_U$$

Donde:

$$h_{s,max} = h_b - h_V - \sigma_T H_U$$

Nota: ao utilizar a esta equação há que ter em conta o ponto de secção de referência da roda para obtenção de $h_{s,max}$ (Cruz, 2006).

Assim, para evitar a cavitação,

$$h_s \leq h_{s,max}$$

Cada família de turbinas geometricamente semelhantes, funcionando em condições de semelhança dinâmica têm o mesmo valor de σ_T . O coeficiente de Thoma é, assim, função de n_s : **quanto maior é n_s , maior é σ_T** (Tabela 36) (Cruz, 2006).

Tabela 36 – Coeficiente de Thoma em função de n_s (adaptado de <http://slideplayer.es/slide/4161770/>).

n_s	50	100	150	200	250	300	350	400	500	600	700	800
σ_T	0.04	0.05	0.08	0.13	0.22	0.31	0.45	0.6	0.7	0.9	1.5	2.1
Tipo de turbina	Francis lenta	Francis lenta	Francis normal	Francis normal	Francis rápida	Francis rápida	Francis extra	Francis extra	Hélice e Kaplan			

Os valores de σ_T são obtidos experimentalmente pelo fabricante e dependem das condições de funcionamento da turbina (Cruz, 2006).

Para a determinação de $h_{s,max}$ das turbinas há, assim, que definir o ponto de funcionamento da turbina para as condições limites de fixação de h_s . **Exemplo:** queda dos melhores rendimentos, a plena abertura e nível no rio correspondente ao caudal turbinado (Cruz, 2006).

10.1.3 Escolha de turbinas adequadas a uma dada instalação

Cabe ao projetista do aproveitamento a seleção dos tipos de turbina mais adequados ao caso em estudo. Esta seleção baseia-se na experiência de projeto e nas informações técnicas atualizadas. Para ajudar nesta seleção podem utilizar-se ábacos e figuras fornecidas pelos fabricantes de turbinas, manuais ou especialistas (Figura 213 e Figura 214) (Cruz, 2006).

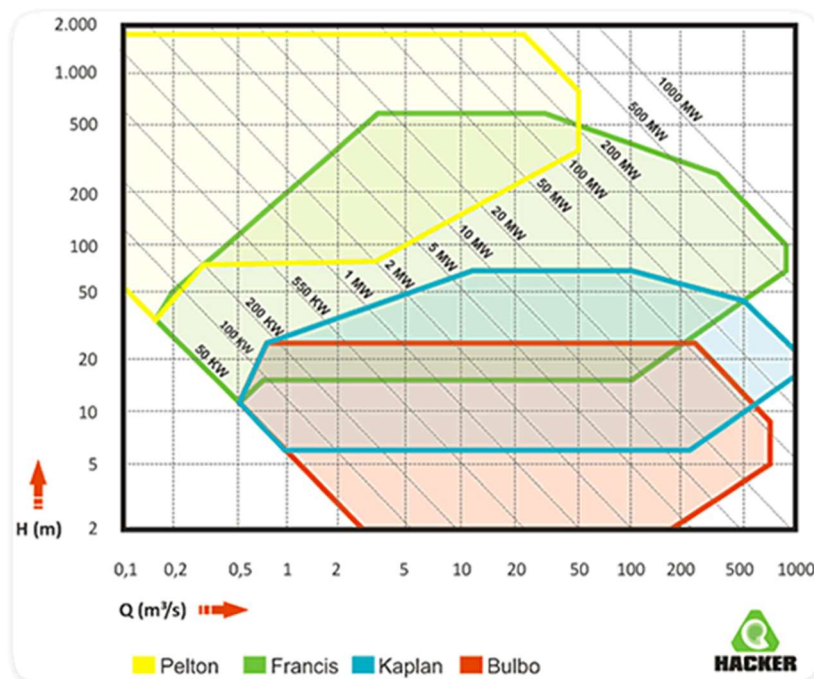


Figura 213 – Gráfico com o campo típico de aplicação dos três tipos de turbinas (www.hacker.ind.br).

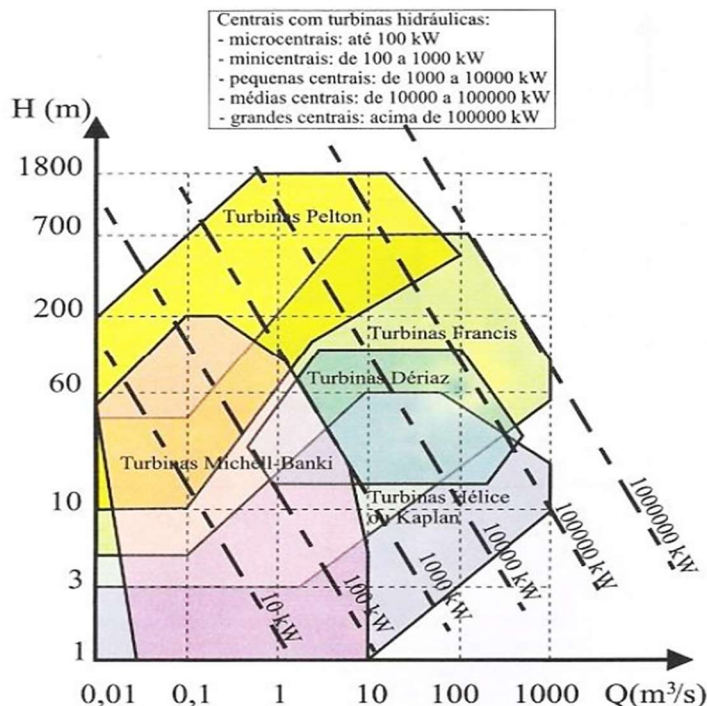


Figura 214 – Campo de aplicação de turbinas (Filho, 2015).

Regra geral, a seleção preliminar do tipo de turbina mais eficaz baseia-se na queda e no caudal turbinado (Tabela 37) (Cruz, 2006).

Tabela 37 – Seleção preliminar do tipo de turbina, função da queda e caudal turbinado (adaptado de Cruz, 2006).

Parâmetros	Tipo de Turbina
Quedas altas (e caudais baixos)	Turbinas Pelton
Quedas médias	Turbinas Francis
Quedas baixas (e caudais elevados)	Turbinas Kaplan

Cada tipo de turbina é adequado para determinadas condições de funcionamento. Considere-se, seguidamente, o caso da **turbina Pelton** como exemplo (Cruz, 2006).

O que aconteceria se colocássemos a turbina Pelton a funcionar com quedas muito baixas?

- A máquina mais compacta (com um injetor) terá um determinado valor de n_s^* e deverá obedecer a uma relação otimizada diâmetro da roda/diâmetro de jato, seja $D_R = 9D_j$;
- Para um determinado caudal (Q) e potência (P) são válidas as seguintes equações:

$$P = \eta\gamma QH_U$$

$$Q = S_j\sqrt{2gH_U}$$

$$S_j = \pi \frac{D_j^2}{4}$$

- Assim, para uma determinada potência, o diâmetro do jato vai aumentando à medida que a queda diminui; por sua vez o diâmetro da roda vai aumentando ($D_R = 9D_j$);
- mantendo-se $n_s = n_s^*$ e a potência, a diminuição de H_U acarreta a diminuição da velocidade de rotação (n) da roda.

Conclusão: se a turbina Pelton fosse utilizada em baixas quedas, teria diâmetros (dimensões) muito grandes e velocidades de rotação muito baixas, exigindo geradores com muitos pares de polos (grande e caro): a velocidade muito baixa dificultaria também a regulação do grupo. Assim, a aplicação de uma turbina Pelton a quedas muito baixas seria antieconómica e de difícil operação (Cruz, 2006).

10.2 Bombas hidráulicas

A **bomba** é uma turbomáquina movida em que se fornece energia ao fluido, à custa de energia recebida do exterior por intermédio de um veio em rotação. Ex: além de bombas incluem-se também os ventiladores e compressores (Mata-Lima, 2010).

10.2.1 Características de funcionamento

Tipos de Bombas

Descrição sumária

As bombas são constituídas essencialmente por (Pinho et al., 2011):

- Impulsor;
- Corpo da bomba:
 - Suporte das chumaceiras do impulsor;
 - Orientação do fluido dentro da máquina.

Além disso o corpo da bomba inclui trechos de **conduta de aspiração** (a montante) e de **conduta de compressão** (a jusante) (Pinho et al., 2011).

Bombas axiais

A energia disponível no veio (proveniente do motor) é transmitida ao fluido por intermédio de hélice de eixo vertical. O fluido é impelido para uma conduta ligeiramente divergente dotada de curva ligeira, permitindo a passagem do fluido para o exterior do veio que liga o motor ao impulsor (Figura 215) (Pinho et al., 2011).



Figura 215 – Bomba axial (Universidade Federal do ABC, 2013).

Bombas centrífugas

Máquinas de funcionamento radial ou misto. Existem tipos diferentes consoante (Pinho et al., 2011):

- Constituição do impulsor (Figura 216) - o impulsor é constituído por um núcleo solidário onde se fixam as pás;

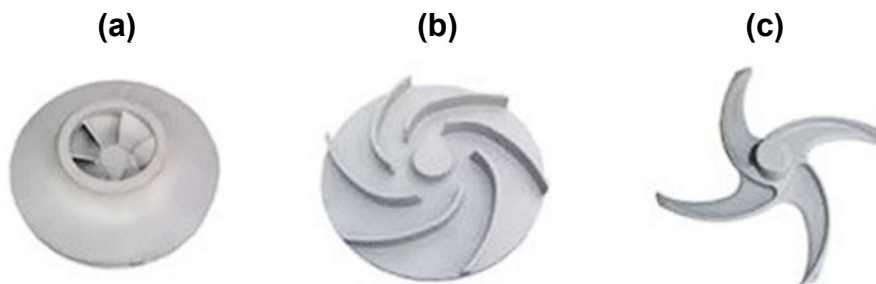


Figura 216 – Exemplo de impulsor fechado (a), semiaberto (b) e aberto (c) (<http://hidromachinesudeg.blogspot.pt/2016/02/componentes-de-bombas-y-turbinas.html>).

- Trajeto do fluido
 - Bombas de Escoamento Radial (Figura 217) - a entrada do fluido é axial e a saída radial à periferia do impulsor;



Figura 217 – Bomba de escoamento radial (Corte) (<http://www.tecpa.es>).

- Bombas de Escoamento Misto (Figura 218) - a entrada do fluido é axial e a saída toma uma direção intermédia entre axial e radial;



Figura 218 – Bomba de escoamento misto (<http://xylemappliedwater.pt>).

- Configuração do corpo da bomba
 - Bomba de Voluta (Figura 219) - em torno da roda móvel existe uma voluta que mantém constante a velocidade de saída;



Figura 219 – Bomba de voluta de sucção dupla (www.sulzer.com).

- Bomba de Difusor (Figura 220) - de secção constante concêntrica com o impulsor, dotada de pás fixas que orientam o escoamento e reduzem a velocidade do fluido;

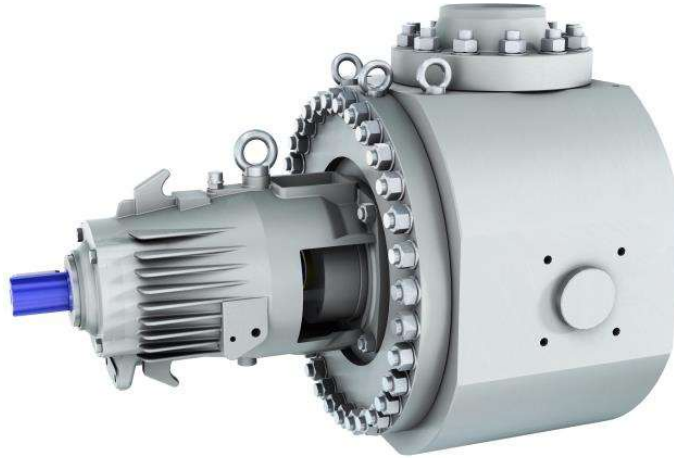


Figura 220 – Bombas de estágio simples de estilo difusor horizontal (www.sulzer.com).

- Números de células
 - Monocelulares (Figura 221);



Figura 221 – Bombas monocelulares (<http://www.bombaszeda.com>).

- Multicelulares ou bombas de andares (Figura 222).



Figura 222 – Bombas multicelulares (<http://www.efafllu.pt>).

Designações e fórmulas principais para sistemas de bombagem

Designações, unidades

Tabela 38 – Designações/Unidades básicas (adaptado de Pinho et al., 2011).

Designação	Notação	Unidade prática	Unidade coerente
Caudal	Q	m ³ /h	m ³ /s
Altura (carga) total	H	m	m
Valor NPSH	NPSH	m	m
Capacidade de aspiração	S	m ³ /h	m ³ /s
Potência de entrada	P	kW	Nm/s
Eficiência da bomba	η	-	-
Velocidade de rotação	n	rpm	rps
Pressão	P	bar	N/m ²
Massa específica	ρ	kg/dm ³	kg/m ³
Velocidade do escoamento	v	m/s	m/s
Aceleração gravítica	g	m/s ²	m/s ²
Subscritos:	d	zona de saída da bomba	
	s	zona de entrada da bomba	
	a	zona de saída do sistema	
	e	zona de entrada do sistema	

Caudal

Ao nível de denominações de caudais identificam-se (Pinho et al., 2011):

- Caudal nominal (Q_N): caudal para o qual a bomba é projetada;
- Caudal ótimo (Q_{opt}): caudal no ponto de eficiência ótima;
- Caudal mínimo (Q_{min}): caudal mínimo permitido;
- Caudal máximo (Q_{max}): caudal máximo permitido.

Altura de elevação total (carga total)

A **Altura total (H) de uma Bomba** é o trabalho mecânico transmitido pela bomba ao líquido bombado expresso por unidade de peso de líquido (Pinho et al., 2011).

Ao nível de denominações de alturas identificam-se (Pinho et al., 2011):

- Altura nominal (H_N): altura total de funcionamento;
- Altura ótima (H_{opt}): altura total no ponto de máxima eficiência;
- Ho Altura em vazio (H_o): altura total de funcionamento em vazio ($Q = 0$).

Energia Total = Energia de Posição + Energia de Pressão + Energia Cinética:

$$E = Z + \frac{p}{\rho g} + \frac{v^2}{2g}$$

Altura total do escoamento (H) é composta por (Pinho et al., 2011):

- $Z_d - Z_s$, diferença de **altitude** (peso) entre o ramo de jusante e o de montante (conduta de impulsão e conduta de aspiração);
- $p_d - p_s / \rho g$, diferença de **pressão** do líquido entre o ramo de jusante e o de montante;
- $v_d^2 - v_s^2 / 2g$, diferença de **energia cinética** do líquido entre o ramo de jusante e o de montante.

Assim, **H** vem:

$$H = (Z_d - Z_s) + \frac{p_d - p_s}{\rho g} + \frac{v_d^2 - v_s^2}{2g}$$

Segue-se um exemplo de aplicação (Pinho et al., 2011):

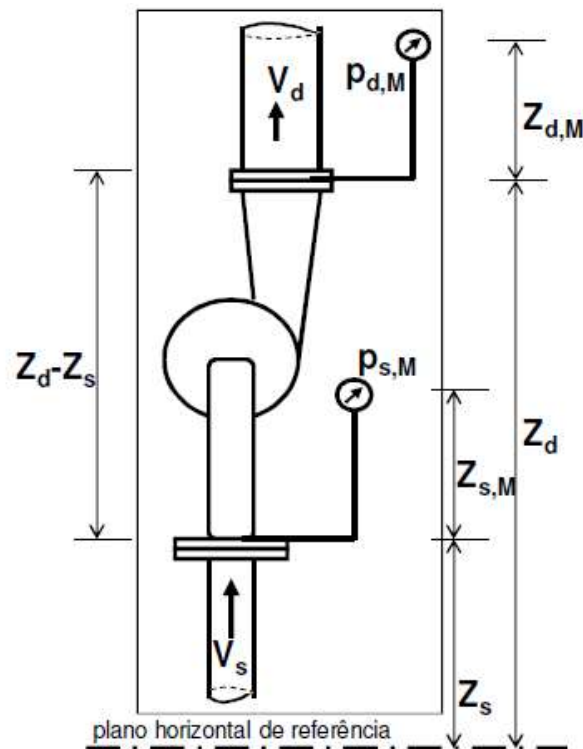


Figura 223 – Exemplo de aplicação (determinação de H) (Pinho et al., 2011).

Dados:

- DN_s 50 ($A_s = 0.00196 \text{ m}^2$);
- DN_d 65 ($A_d = 0.00332 \text{ m}^2$);
- Líquido: água fria, $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$;
- $Z_d - Z_s = 0.3 \text{ m}$; $Z_{d,M} = 1.0 \text{ m}$; $Z_{s,M} = 0.5 \text{ m}$;
- $Q_N = 50 \text{ m}^3/\text{h} = 0.0139 \text{ m}^3/\text{s}$.

Pressão no ramo de montante da bomba:

$$p_s = p_{s,M} \pm \rho g Z_{s,M}$$

Pressão no ramo de jusante da bomba:

$$p_d = p_{d,M} \pm \rho g Z_{d,M}$$

Em caso de circuitos de medição com ar $Z_{s,M}$ e $Z_{d,M}$ podem ser desprezáveis pois $\rho_{ar} \ll \rho_{líquido}$.

$$p_{d,M} = 4.9 \text{ bar} = 490000 \text{ N/m}^2$$

$$p_{s,M} = -0.25 \text{ bar} = -25000 \text{ N/m}^2$$

$$\begin{aligned} \frac{p_d - p_s}{\rho g} + (Z_d - Z_s) &= \frac{p_{d,M} - p_{s,M}}{\rho g} + (Z_{d,M} - Z_{s,M}) = \\ &= \frac{490000 \text{ N/m}^2 - (-25000 \text{ N/m}^2)}{1000 \text{ kg/m}^3 \cdot 9.81 \text{ m/s}^2} + (1 \text{ m} - 0.5 \text{ m}) = \\ &= 52.5 \text{ m} + (1 \text{ m} - 0.5 \text{ m}) = 53 \text{ m} \end{aligned}$$

$$v_d = \frac{Q_N}{A_d} = \frac{0.0139 \text{ m}^3/\text{s}}{0.00196 \text{ m}^2} = 7.1 \text{ m/s}$$

$$v_s = \frac{Q_N}{A_s} = \frac{0.0139 \text{ m}^3/\text{s}}{0.00332 \text{ m}^2} = 4.2 \text{ m/s}$$

$$\frac{v_d^2 - v_s^2}{2g} = \frac{(7.1 \text{ m/s})^2 - (4.2 \text{ m/s})^2}{2 \cdot 9.81 \text{ m/s}^2} = 1.7 \text{ m}$$

$$\therefore \text{Altura Total (H)} = 54.7 \text{ m}$$

Altura total H_A do Sistema

É a energia total introduzida pela bomba, necessária para manter o caudal (Q) no sistema (Pinho et al., 2011).

$$H_A = \underbrace{(Z_a - Z_e) + \frac{p_a - p_e}{\rho g}}_{\text{componente estática independente do caudal}} + \underbrace{\frac{v_a^2 - v_e^2}{2g}}_{\text{componente dinâmica dependente do caudal}} + H_V$$

Segue-se um exemplo de aplicação (Pinho et al., 2011):

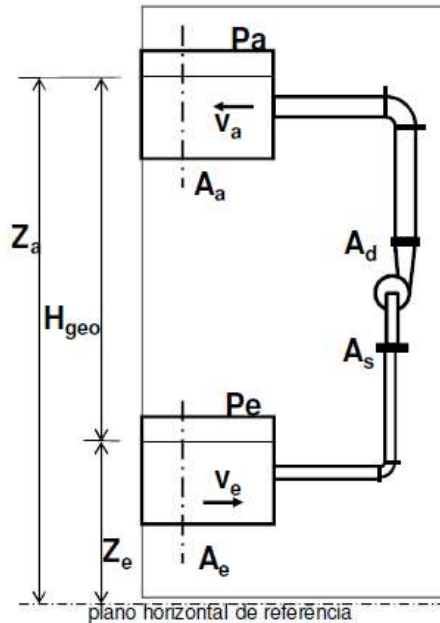


Figura 224 – Bombeamento ascendente entre reservatórios (Pinho et al., 2011).

Dados:

- Líquido: água fria; $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$;
- $H_{\text{geo}} = Z_a - Z_e = 43 \text{ m}$;
- $Q_N = 50 \text{ m}^3/\text{h} = 0.0139 \text{ m}^3/\text{s}$;
- $A_a = 0.14 \text{ m}^2$; $V_a = 0.1 \text{ m}^2/\text{s}$;
- $A_e = 0.35 \text{ m}^2$; $V_e = 0.04 \text{ m}^2/\text{s}$.

$$\frac{p_a - p_e}{\rho g} = 0 \wedge \frac{v_a^2 - v_e^2}{2g} = 0.00043 \text{ m} \approx 0$$

$H_{V_s} = 2.0 \text{ m}$: perdas de carga por atrito na tubagem de aspiração e perdas localizadas na saída do reservatório.

$H_{V_d} = 8.9 \text{ m}$: perdas de carga por atrito na tubagem de compressão e perdas localizadas na entrada do reservatório.

$$\therefore H_A = 43 + 0 + 0 + (2 + 8.9) = 53.9 \text{ m}$$

Cavitação, NPSH

Se a **pressão estática** do fluido descer à pressão de vapor associada à temperatura do fluido devido, por exemplo, a aumento da velocidade absoluta ou a alterações da altura piezométrica ($Z_a - Z_e$), formam-se **bolhas gasosas** localmente no interior da massa líquida. Estas bolhas gasosas são transportadas ao longo do escoamento e podem ser destruídas subitamente se a pressão estática aumentar de novo para valores superiores à tensão de vapor em qualquer outro ponto do escoamento (Pinho et al., 2011).

A esta produção e súbita destruição de cavidades preenchidas de vapor dá-se a designação de **cavitação** (Pinho et al., 2011).

Nas bombas a **cavitação** pode ocorrer devido a reduções locais de pressão na entrada do canal dos impulsores, em resultado do aumento da velocidade do escoamento nesse ponto (Pinho et al., 2011).

A **cavitação** tem os seguintes efeitos (Pinho et al., 2011):

- Erosão do material (bombas e tubagem);
- Redução de altura total;
- Redução de eficiência da bomba;
- Aumento de vibrações e ruídos;
- Modificação das características de funcionamento.

Para **evitar** ou **limitar a cavitação** nas bombas deve proporcionar-se uma **reserva de pressão estática** em relação à **tensão de vapor** do líquido nos impulsores. A **diferença** entre a pressão estática absoluta (medida em metros) e a tensão de vapor do líquido (em metros) é designada por **Net Positive Suction Head (NPSH)** e é medida em metros (Pinho et al., 2011).

NPSH requerido por uma bomba

O **NPSH requerido por uma bomba** ($NPSH_{req}$) é o valor mínimo para o qual, a altura total no plano de referência para o NPSH tem que exceder a tensão de vapor do líquido bombado, de modo a garantir uma correta operação da bomba sem cavitação, a uma **velocidade de rotação nominal** (n_N), a uma **altura nominal** (H_N) e a um **caudal nominal** (Q_N) de projeto (Pinho et al., 2011).

O **plano de referência para o valor NPSH** (Figura 225) é definido pelo plano horizontal que passa pelo centro do círculo que é determinado pelos pontos mais extremos da principal curvatura das lâminas do impulsor (Pinho et al., 2011).

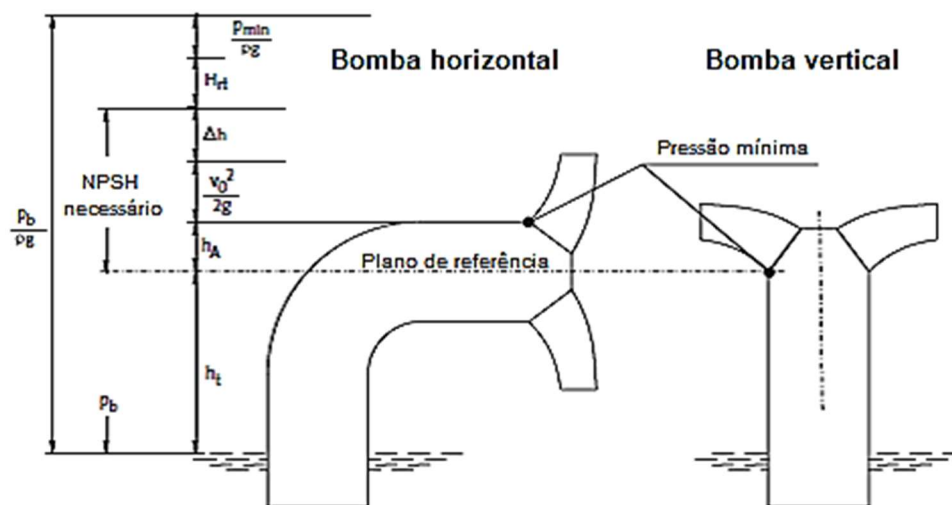


Figura 225 – Plano de referência para NPSH (adaptado de <http://www.nuevaingenieria.com/tag/cavitacion/>).

NPSH disponível numa instalação

O **NPSH disponível numa instalação** ($NPSH_{dis}$) é a diferença entre a **altura total** (altura estática de pressão + altura cinética) e a **altura de pressão de vapor** referida ao plano de referência para o valor NPSH (Pinho et al., 2011).

$$NPSH_{dis} = \frac{p_s + p_b}{\rho g} + \frac{v_s^2}{2g} - \frac{p_D}{\rho g} + Z'_s$$

Z'_s é a diferença de nível entre o centro do ramo de entrada da bomba e o plano de referência para o valor NPSH:

- > 0 , quando o plano de referência para o valor NPSH está abaixo do centro do ramo de entrada;
- < 0 , quando o plano de referência para o valor NPSH está acima do centro do ramo de entrada;
- $= 0$, quando os dois níveis se sobrepõem.

No caso da **bomba em elevação**,

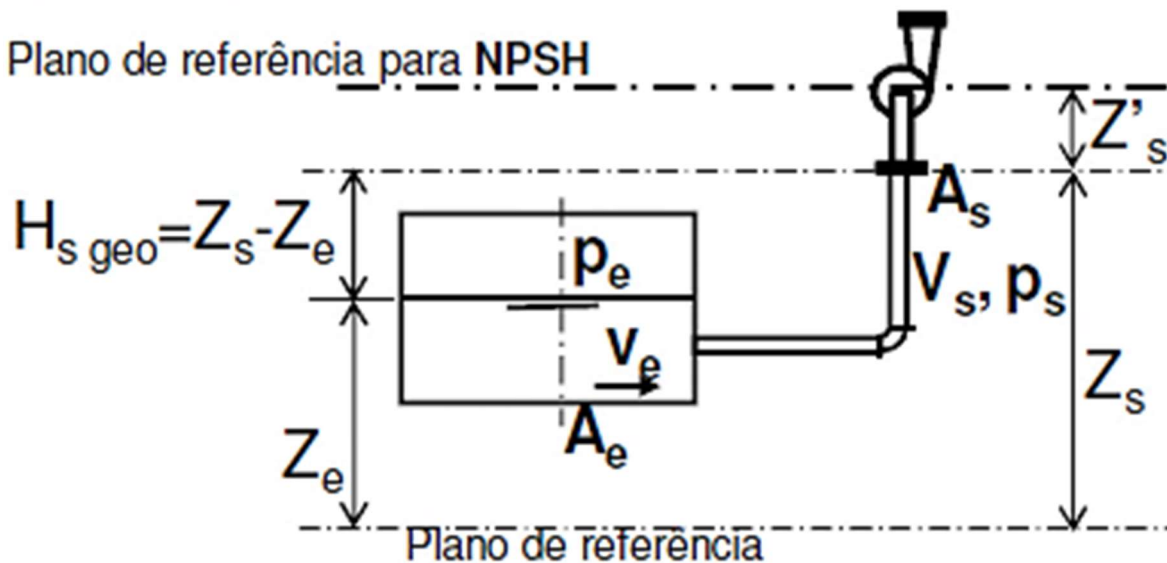


Figura 226 – Bomba em elevação (Pinho et al., 2011).

NPSH é determinado da seguinte forma:

$$H_{s\ geo} = Z_s - Z_e$$

Pelo Teorema de Bernoulli,

$$\frac{p_s + p_b}{\rho g} + \frac{v_s^2}{2g} = \frac{p_e + p_b}{\rho g} + \frac{v_e^2}{2g} - H_{s\ geo} - H_{V_s} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{NPSH} = \frac{p_e + p_b - p_D}{\rho g} + \frac{v_e^2}{2g} - H_{s \text{ geo}} - H_{V_s} + Z'_s$$

No caso de sup. livre $\Rightarrow p_e = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \text{NPSH} = \frac{p_b - p_D}{\rho g} + \frac{v_e^2}{2g} - H_{s \text{ geo}} - H_{V_s} + Z'_s$$

No caso da **bomba em carga**,

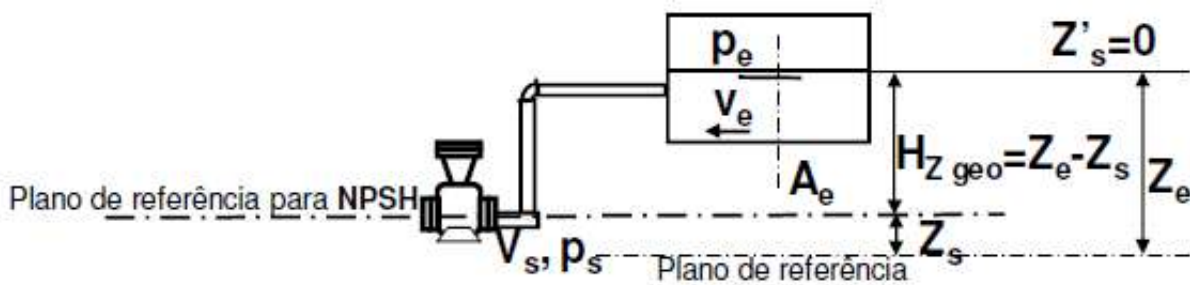


Figura 227 – Bomba em carga (Pinho et al., 2011).

$$H_{Z \text{ geo}} = -H_{s \text{ geo}} = Z_e - Z_s$$

$$\text{NPSH} = \frac{p_e + p_b - p_D}{\rho g} + \frac{v_e^2}{2g} - H_{Z \text{ geo}} - H_{V_s} + Z'_s$$

No caso de sup. livre $\Rightarrow p_e = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \text{NPSH} = \frac{p_b - p_D}{\rho g} + \frac{v_e^2}{2g} - H_{Z \text{ geo}} - H_{V_s} + Z'_s$$

Na prática $\frac{v^2}{2g} \cong 0$, pelo que é omitida frequentemente

Para **operação segura** da bomba, $\text{NPSH}_{\text{dis}} \geq \text{NPSH}_{\text{req}}$ e em **condições de segurança**, $\text{NPSH}_{\text{dis}} \geq \text{NPSH}_{\text{req}} + 0.5 \text{ m (aprox.)}$ (Pinho et al., 2011).

Potência, Eficiência

A **Potência da Bomba (P_Q)** é a energia útil transferida para o fluido (Pinho et al., 2011).

$$P_Q = \rho g Q H \text{ (W)}$$

A **Potência absorvida (P)** é a energia recebida pela bomba do motor (Pinho et al., 2011).

$P > P_Q$, devido a perdas da bomba

Outras definições de potência relevantes incluem (Pinho et al., 2011):

- Potência nominal (P_N): potência requerida para Q_N , H_N , n_N ;
- Potência ótima (P_{opt}): potência requerida no ponto de ótima eficiência;
- Potência em vazio (P_o): potência requerida para $Q = 0$.

Eficiência/rendimento da bomba (η) é a razão entre a potência hidráulica transmitida pela bomba e a potência absorvida no veio (Pinho et al., 2011).

$$\eta = P_Q/P$$

Velocidade específica (n_q)

Um determinado valor de Q e H pode ser obtido por bombas com impulsores de formas diferentes **dependendo da sua velocidade** específica. Esta variável (n_q) define um valor característico da forma do impulsor (Pinho et al., 2011).

A **velocidade específica** é definida como sendo a velocidade de rotação de um impulsor geometricamente semelhante em todos os seus componentes e que foi dimensionado de forma a que produzisse uma altura de elevação de **1 m a um caudal de 1 m³/s** (Pinho et al., 2011). Pelas Leis de Semelhança,

$$n_q = n \frac{(Q/Q_q)^{1/2}}{(H/H_q)^{3/4}} \text{ [rpm]}$$

$$Q[\text{m}^3/\text{s}]; H[\text{m}]$$

A **velocidade específica** refere-se a (Pinho et al., 2011):

- Dados de serviço no ponto de eficiência ótima de um impulsor;
- Dados de serviço de um único estágio, em bombas multicelulares;
- Dados de serviço de um lado do impulsor, no caso de impulsores de duas entradas.

Para $Q = 1 \text{ m}^3/\text{s} \wedge H = 1 \text{ m} \rightarrow$

$$\rightarrow n_q = n \frac{Q_{opt}^{1/2}}{H_{opt}^{3/4}} \text{ [rpm]}$$

$$Q_{opt}[\text{m}^3/\text{s}]; H_{opt}[\text{m}]$$

A **forma do impulsor** de uma bomba, isto é, a **velocidade específica**, tem uma importância muito grande no rendimento da bomba (Figura 228) (Pinho et al., 2011).

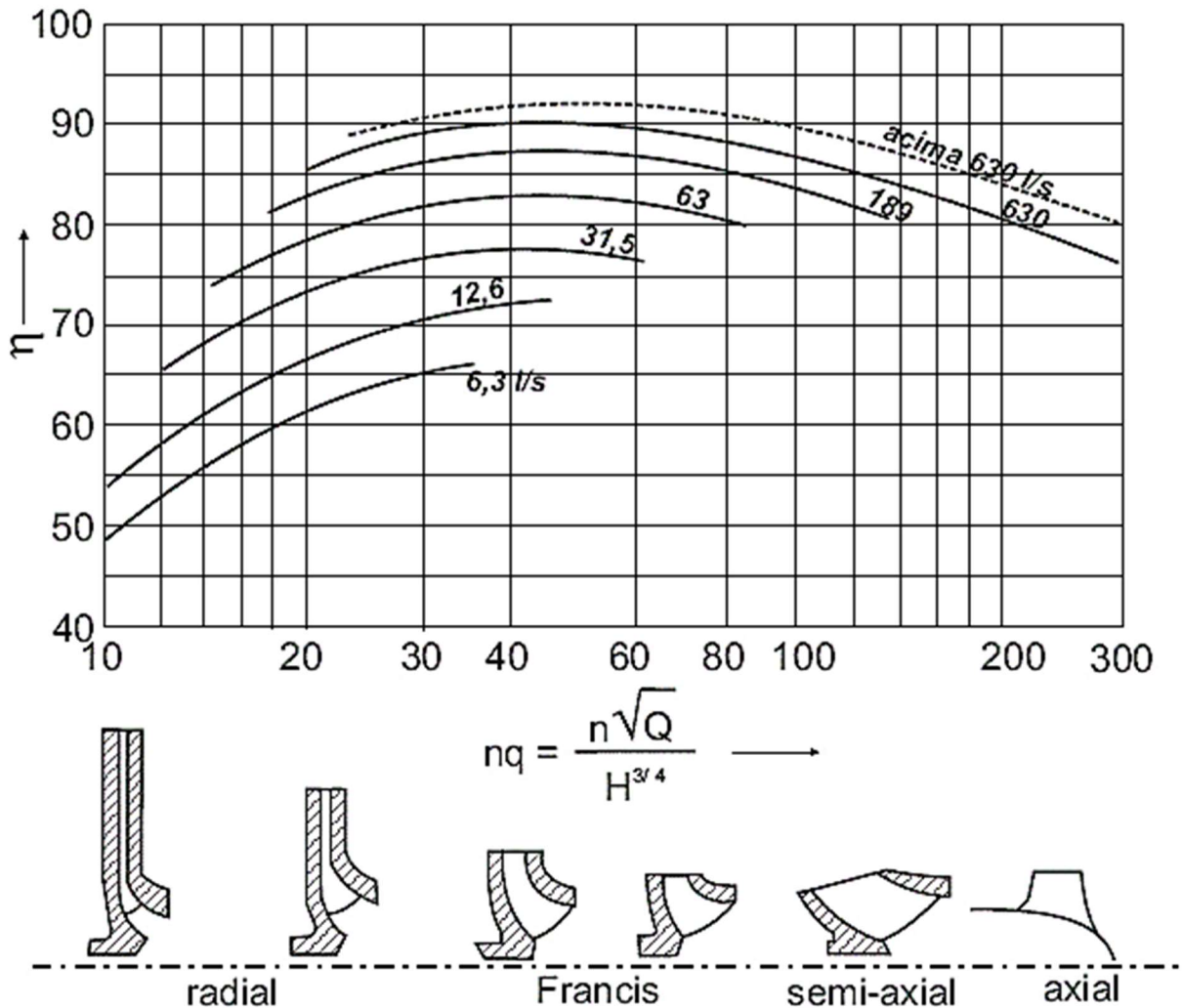


Figura 228 – Relação entre velocidade específica de alguns impulsores, eficiência e caudal (Escola da Vida, 2018).

10.2.2 Funcionamento de bombas integradas numa instalação

Curvas características

Curvas características de bombas

Para uma determinada bomba a uma dada velocidade de rotação, a altura (H), a potência absorvida (P), o rendimento (η) e o valor do NPSH são funções de Q. A relação entre estas grandezas é representada por **curvas características da bomba** (Figura 229 e Figura 230) (Pinho et al., 2011).

Portanto, a curva característica da bomba representa as condições hidráulicas operacionais da máquina trabalhando a uma determinada rotação (revoluções por unidade de tempo).

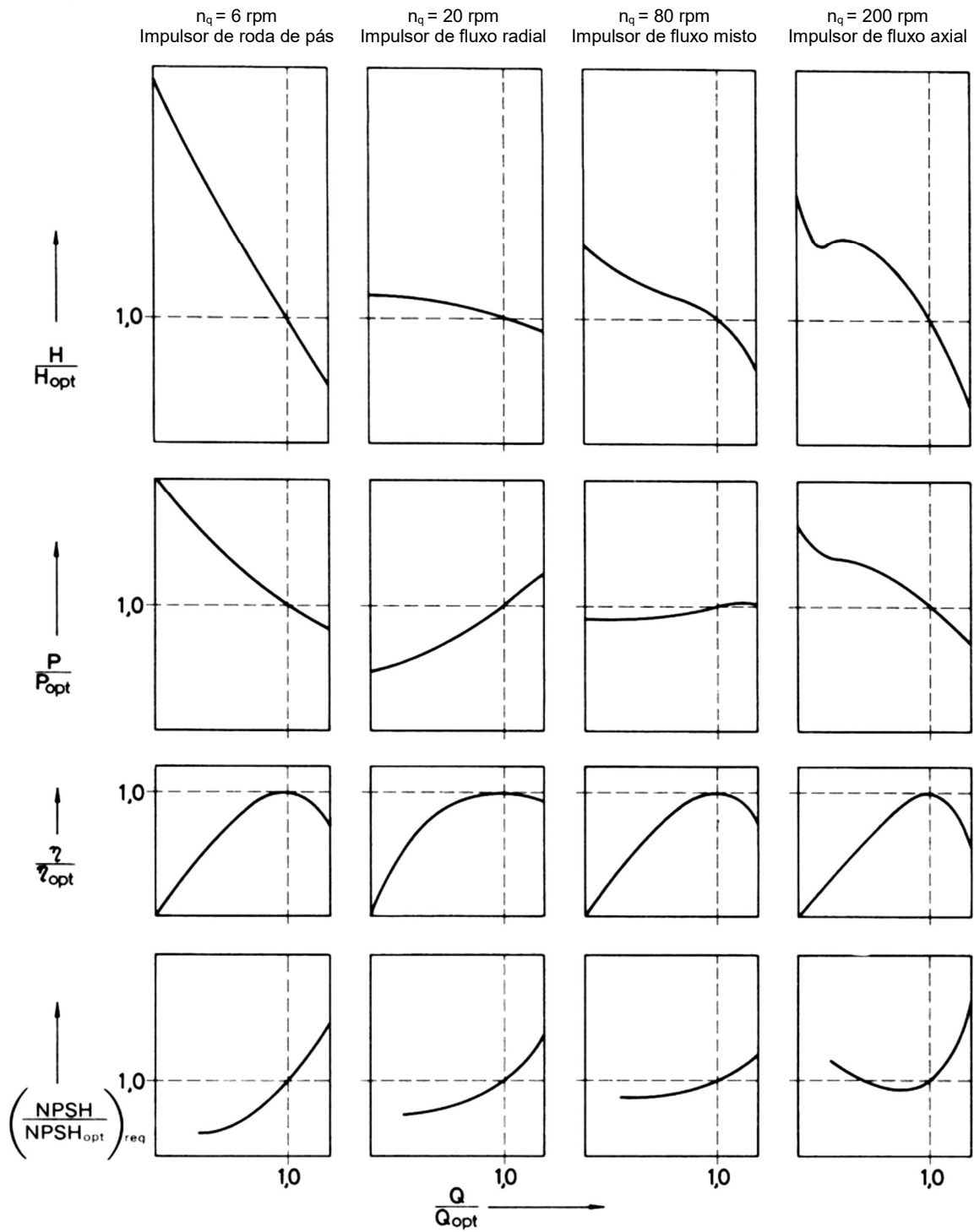


Figura 229 – Influência da velocidade específica na forma das curvas características de uma bomba (adaptado de Pinho et al., 2011).

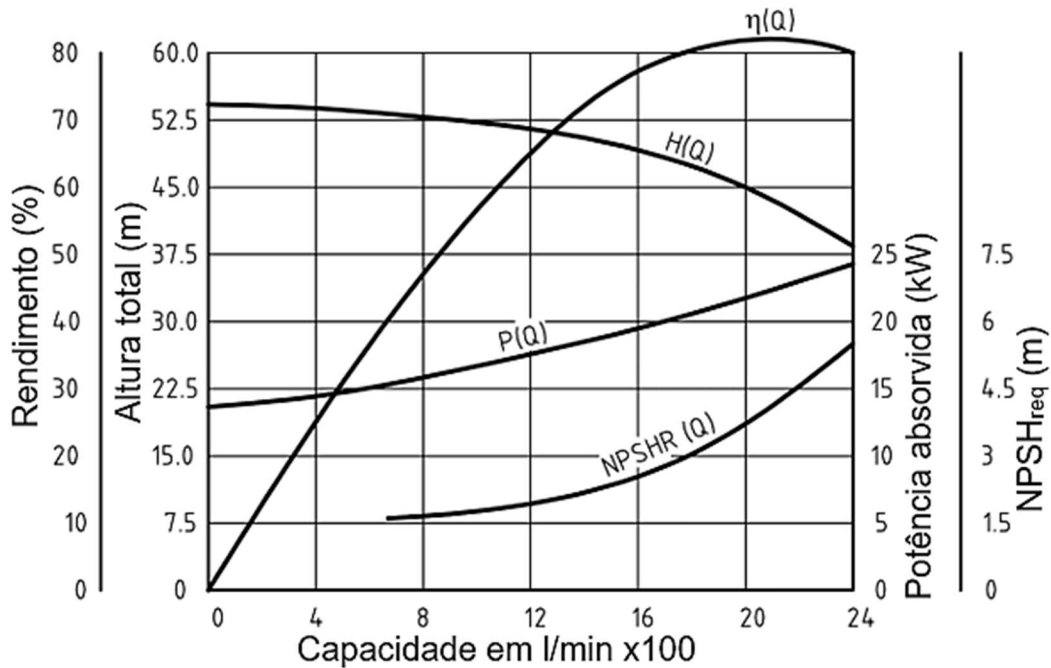


Figura 230 – Curvas características de uma bomba (adaptado de Area Mecânica, 2011).

Curvas características de instalações

Designa-se por **curva característica da instalação** (Figura 231) a representação gráfica do desnível da linha de carga à saída e à entrada da bomba com o caudal escoado nessa mesma instalação (Pinho et al., 2011).

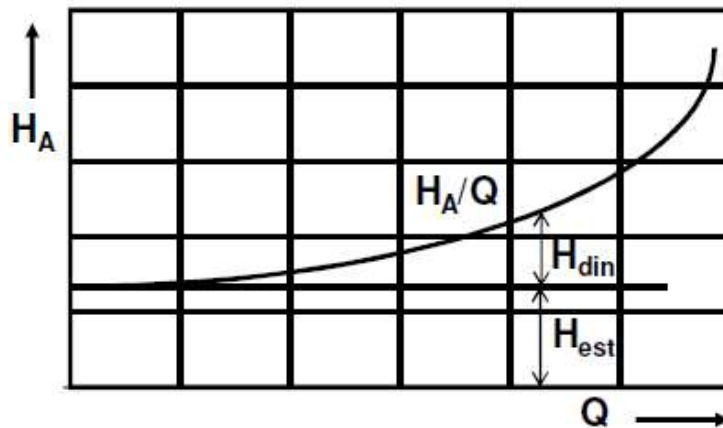


Figura 231 – Exemplo de curva caraterística de instalações (Pinho et al., 2011).

$$H = f(Q^2)$$

$$H_{est} = H_{geo} + \frac{p_a - p_e}{\rho g}$$

$$H_{din} = H_V + \frac{v_a^2 - v_e^2}{2g}$$

Segue-se um exemplo de aplicação (Pinho et al., 2011):

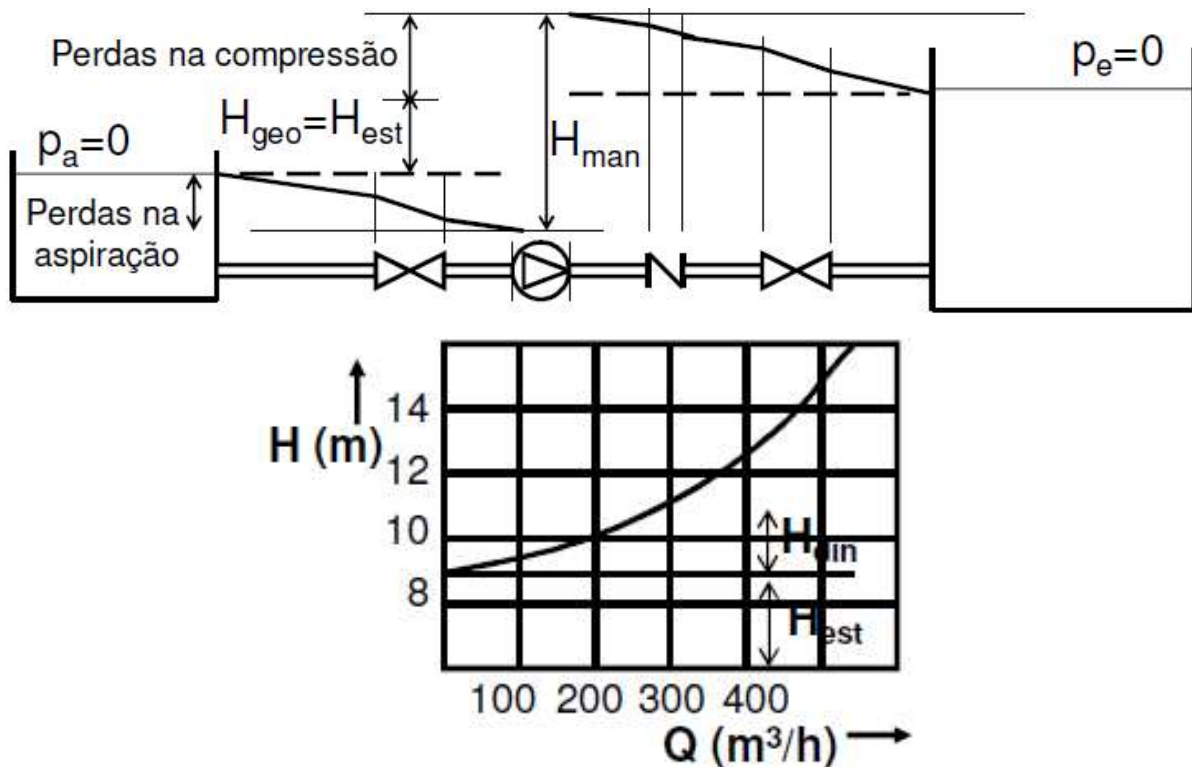


Figura 232 – Exemplo de aplicação do conceito de curva característica da instalação (Pinho et al., 2011).

Para: $Q = 350 \text{ m}^3/\text{h} \wedge H_{\text{est}} = 9.0 \text{ m}$

$$\begin{array}{r} \sum H_{L \text{ asp}} = 0.18 \text{ m} \\ \sum H_{L \text{ comp}} = 0.78 \text{ m} \\ \hline H_f = 1.94 \text{ m} \\ \hline H_{\text{din}} = 2.90 \text{ m} \end{array}$$

Ponto de funcionamento de uma bomba

Ponto representativo das características de operação dessa bomba, quando integrada numa dada instalação, isto é, o ponto onde a curva característica (H/Q) intersecta a curva característica da instalação (H_A/Q) (Pinho et al., 2011).

Este ponto determina o caudal (Q) que pode ser debitado pela bomba para a instalação. Adicionalmente determina ainda (Pinho et al., 2011):

- A potência absorvida (P);
- O rendimento (η);
- O valor NPSH requerido ($NPSH_{\text{req}}$).

Tendo necessariamente que se verificar $NPSH_{dis} \geq NPSH_{req}$ (Pinho et al., 2011).

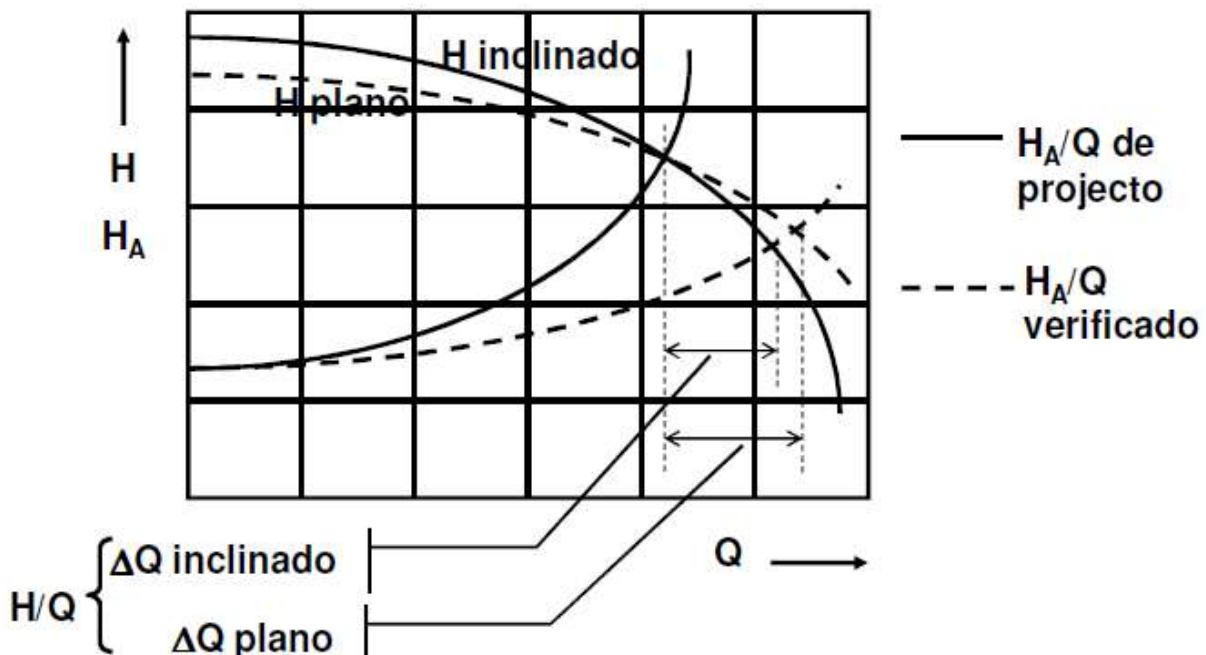


Figura 233 – Variação em caudal devido ao desvio provocado pela alteração das condições de funcionamento (Pinho et al., 2011).

Adaptação do funcionamento da bomba para satisfazer requisitos de operação

Possíveis medidas a implementar para adaptar o funcionamento da bomba aos requisitos operacionais (Pinho et al., 2011):

- **Mudança das características da instalação (curva H_A/Q)**
 - Regulação da admissão de caudal (válvula reguladora);
 - Utilização de “Bypass” (controlo de diversão de caudal);
- **Mudança das características da bomba (curva H/Q)**
 - Variação da velocidade de rotação do impulsor (controlo de velocidade);
 - Alteração do diâmetro do impulsor;
 - Variação do ângulo de incidência das palhetas orientadoras do fluxo de entrada a montante do impulsor (pré-rotação);
 - Redução do caudal que escoar pelo impulsor por meio do controlo da cavitação (autorregulação, controlo por cavitação);
 - Raspando os bordos de saída das palhetas dos impulsores.

Regulação da admissão de caudal

Quando as bombas são controladas por este sistema, as perdas de carga da instalação aumentam, sendo H_{din} maior em virtude da colocação da válvula controladora do caudal admitido (Figura 234) (Pinho et al., 2011).

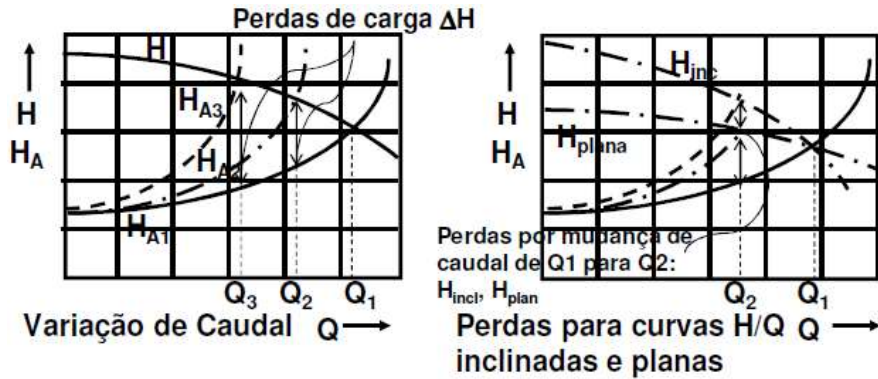


Figura 234 – Regulação da admissão de caudal (Pinho et al., 2011).

Em princípio a regulação deve ser aplicada a jusante da bomba. Se for aplicada a montante será reduzido o valor $NPSH_{disp}$ devendo prevenir-se a cavitação.

Utilização de “Bypass”

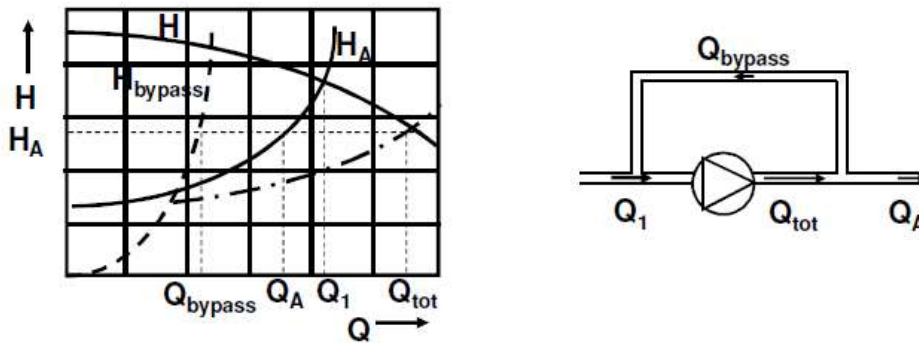


Figura 235 – Utilização de “Bypass” (Pinho et al., 2011).

$$Q_{tot} = Q_{bypass} + Q_A$$

$$Q: Q_1 \rightarrow Q_{tot}$$

Caudal efectivamente bombado (líquido): $Q_1 \rightarrow Q_A$

Varição da velocidade de rotação do impulsor

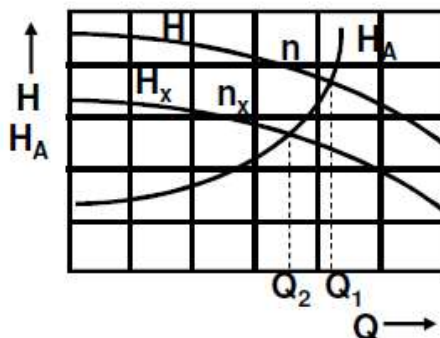


Figura 236 – Variação da velocidade de rotação do impulsor (Pinho et al., 2011).

Por Leis de Semelhança (Pinho et al., 2011):

$$\frac{Q_X}{Q} = \frac{n_X}{n}; \frac{H_X}{H} = \left(\frac{n_X}{n}\right)^2$$

Para pequenas alterações:

$$\left(\frac{\Delta n}{n} \leq 0,2\right) \rightarrow \eta \cong \text{constante}$$

Para grandes alterações:

$$\eta_X \cong 1 - (1 - \eta) \left(\frac{n}{n_X}\right)^{0,1}$$

$$\frac{P_X}{P} \cong \frac{\eta}{\eta_X} \left(\frac{n_X}{n}\right)^3$$

Alteração do diâmetro do impulsor (redução)

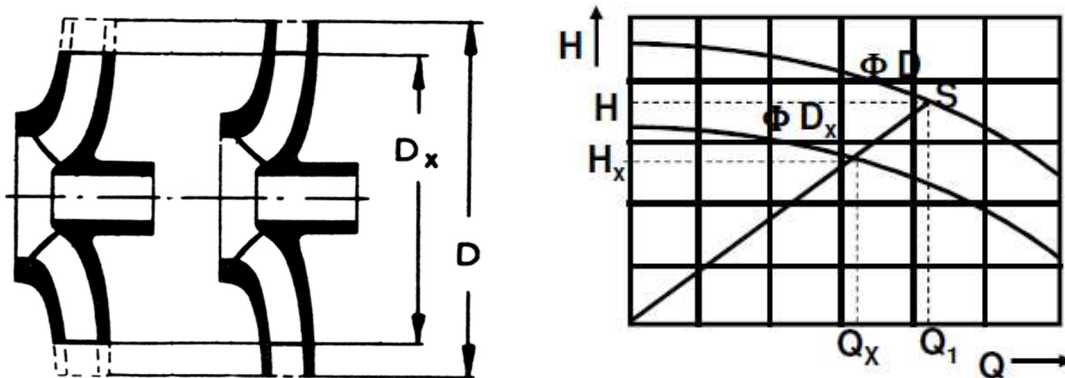


Figura 237 – Alteração do diâmetro do impulsor (redução) (Pinho et al., 2011).

$$\frac{Q_X}{Q} = \left(\frac{D_X}{D}\right)^2; \frac{H_X}{H} = \left(\frac{D_X}{D}\right)^2$$

Através de curvas características pode definir-se D_X (Pinho et al., 2011):

1. Traçar a reta pelo ponto ($Q = 0, H = 0$) e pelo ponto de funcionamento (S);
2. Utilizando os valores de Q e H deste ponto, o diâmetro (D_X) pode ser obtido a partir de:

$$D_X \cong D \sqrt{\frac{Q_X}{Q}} \quad \text{ou} \quad D_X \cong D \sqrt{\frac{H_X}{H}}$$

Estas relações são aplicáveis a pequenas reduções do diâmetro. Para grandes reduções recomenda-se efetuar variações em estágios (Pinho et al., 2011).

Para evitar a necessidade destas reduções em condições normais de funcionamento, os fabricantes apresentam já várias curvas H/Q , P/Q , η/Q para o diâmetro original e para uma série de valores D_x (Pinho et al., 2011).

Operação de bombas em redes de condutas

Conduta de compressão ramificada

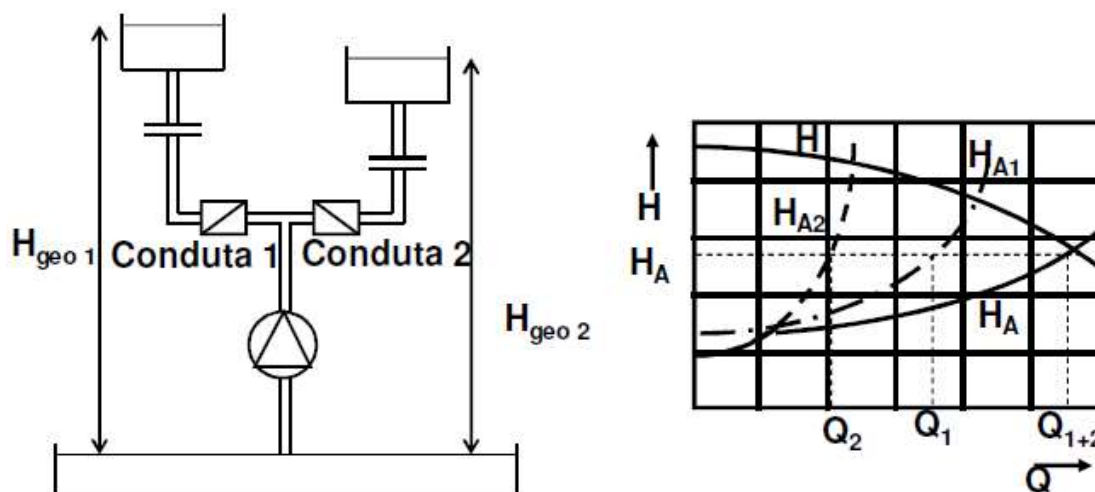


Figura 238 – Conduta de compressão ramificada (Pinho et al., 2011).

Se H_{est} forem diferentes, deve colocar-se uma válvula de retenção para evitar o esvaziamento de um reservatório após a paragem da bomba (Pinho et al., 2011).

Operação de bomba em paralelo numa conduta comum

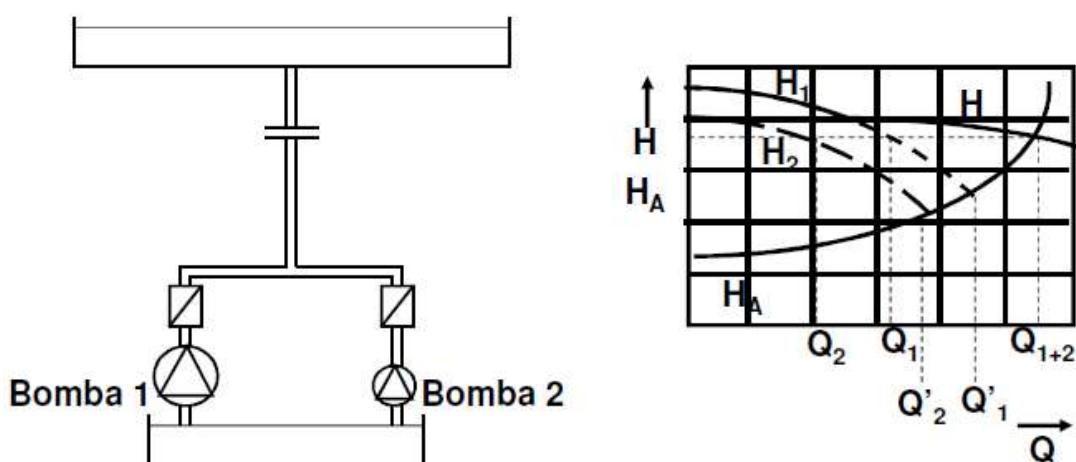


Figura 239 – Operação de bomba em paralelo numa conduta comum (Pinho et al., 2011).

A curva comum (H/Q) é obtida adicionando os caudais (Q_1 e Q_2) de cada bomba para a mesma altura de elevação. Nota: $Q'_1 > Q_1 \wedge Q'_2 > Q_2$ (Pinho et al., 2011).

Operação de bombas em série numa mesma conduta

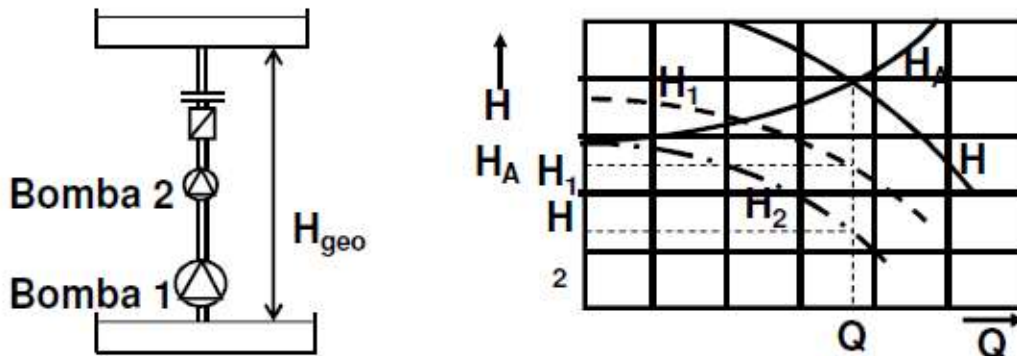


Figura 240 – Operação de bombas em série numa mesma conduta (Pinho et al., 2011).

A curva comum (H/Q) é obtida considerando a altura de elevação total como a soma das alturas de elevação (H_1 e H_2) de cada bomba para o mesmo caudal (Pinho et al., 2011).

É o princípio de conceção das bombas multicelulares (bombas de andares) que possuem vários impulsores dispostos em série, no mesmo veio, permitindo atingir maiores alturas de elevação (Pinho et al., 2011).

No caso de bombas diferentes deve-se implantar as bombas de maneira que as de NPSH menor se coloquem em primeiro lugar na série (Pinho et al., 2011).

10.2.3 Escolha de bombas adequadas a uma dada instalação

A seleção de bomba adequada para uma dada instalação deve considerar os seguintes aspetos (Mata-Lima, 2010):

- Os campos/domínios de aplicação de bombas centrífugas, axiais e mistas (Figura 241):
 - Bombas centrífugas - Instalações residenciais, alimentação de caldeiras, poço profundo, de processo, química, de recirculação, petroquímica, de esgotos, efluentes, polpa, combate a incêndio, condensado, etc.;
 - Bombas axiais - Circulação contínua de soluções corrosivas/abrasivas, polpas abrasivas de salmoura e lixo de processos, processos de cristalização e evaporação (salmoura, água do mar), fábricas de sal, fábricas de materiais químicos diversos, fábricas de regeneração e tratamento de água;
 - Bombas mistas - Constitui um caso intermediário ente as bombas radiais e axiais, tanto no que diz respeito à trajetória, como, inclusive, no domínio de aplicação;

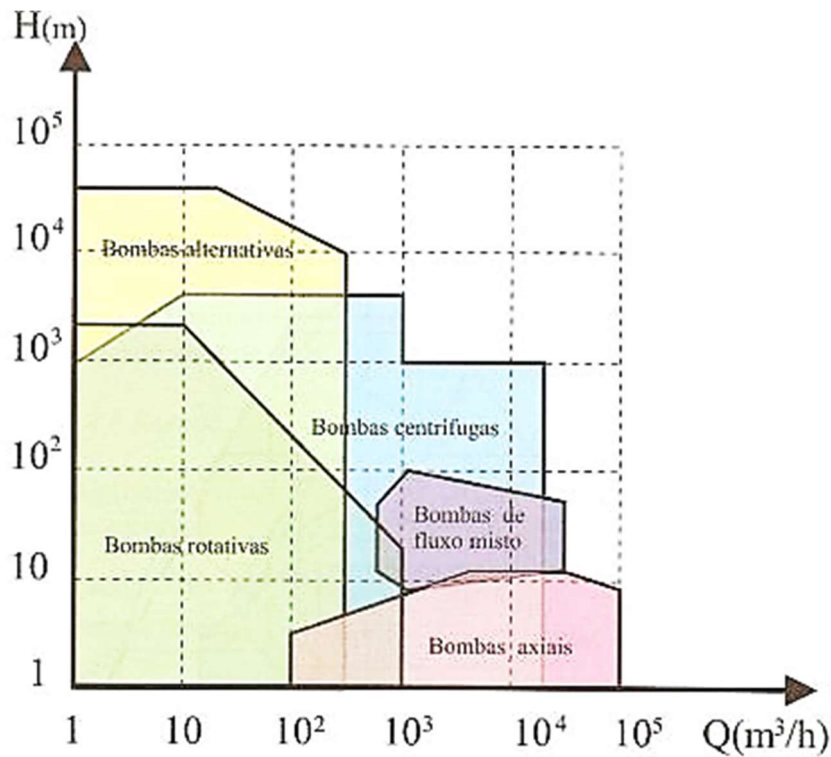


Figura 241 – Campo de aplicação de bombas (Henn, 2006).

- Número específico de rotações de bombas;
- Diagrama de funcionamento de bombas (diagrama de colina, Figura 242);

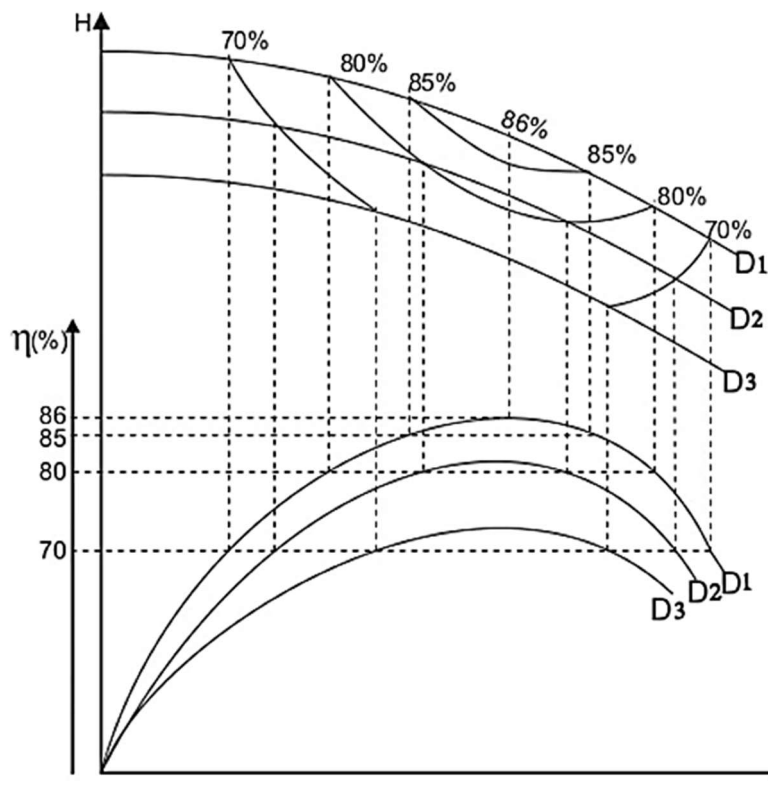


Figura 242 – Exemplo de diagrama de colina (<http://www.escoladavida.eng.br/mecfluquimica/aulasfei/ccb.htm>).

- Mosaicos de utilização de bombas (Figura 243). Após a definição do caudal, altura total de elevação e velocidade de rotação pode-se recorrer ao mosaico de utilização para fazer a pré-seleção de bombas;

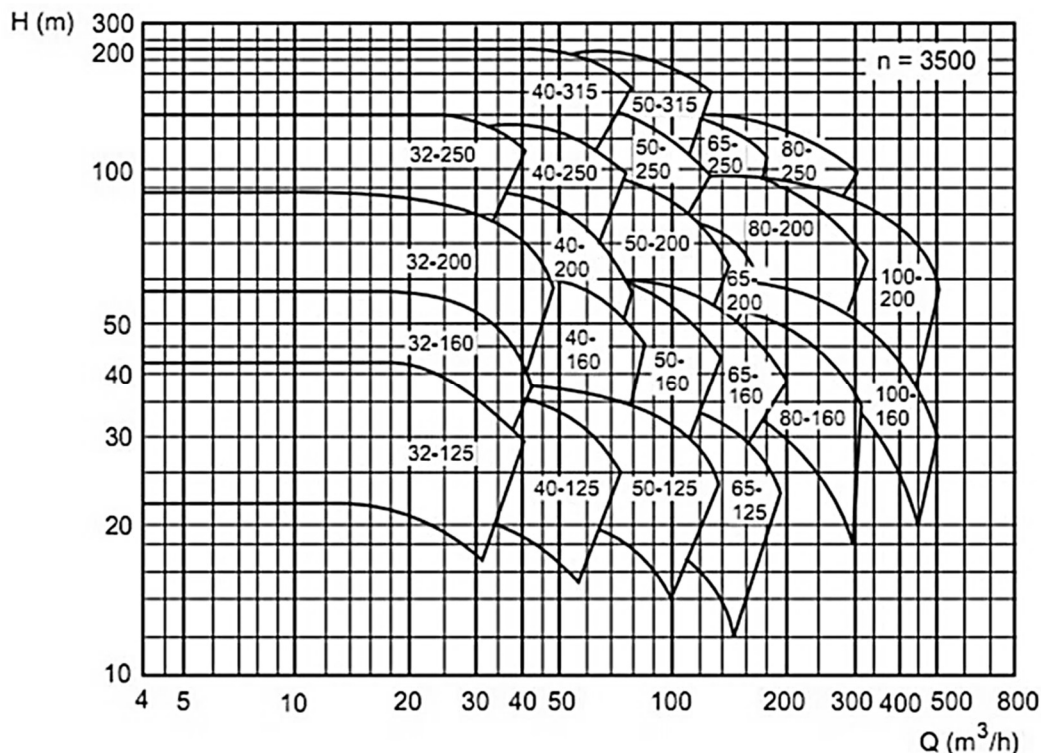


Figura 243 – Exemplo de mosaicos de utilização de bombas, para escolha prévia da bomba (adaptado do catálogo das bombas KSB).

- Refira-se que a decisão final referente à seleção da bomba e a determinação do diâmetro da roda faz-se com base no diagrama em colina da bomba pré-selecionada.

Os aspetos supracitados são, atualmente, fornecidos através dos catálogos das bombas. Em caso de dúvidas, deverá contactar o fabricante da bomba para obter mais informações (Mata-Lima, 2010).

CAPÍTULO 11 - ESCOAMENTOS COM SUPERFÍCIE LIVRE

11.1 Generalidades

Escoamentos com superfície livre caracterizam-se por a corrente líquida, parcialmente confinada por paredes sólidas, contactar com a atmosfera ou outro meio gasoso (Figura 244).



Figura 244 – Levada das 25 Fontes, Calheta. Canal (paredes sólidas); Água (superfície livre) (fonte: Autor).

Aplicação:

- Irrigação;
- Drenagem;
- Esgotos (Residuais e Pluviais);
- Abastecimento de Água;
- Aproveitamentos Hidroelétricos.

Âmbito de Estudo:

- Movimentos Permanentes (Uniformes, Variados);
- Leitos Fixos.

11.1.1 Classificação dos escoamentos

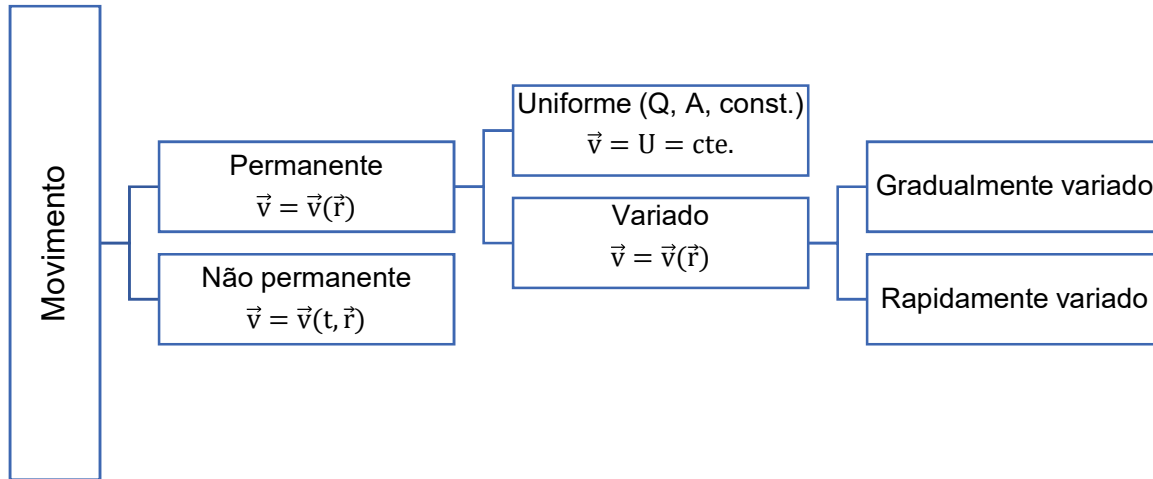


Figura 245 – Classificação dos escoamentos.

Movimento Uniforme:

- Secção (A) e caudal (Q) constantes;
- Superfície livre paralela ao talvegue (porque $A = \text{cte.}$);
- Verifica-se em canais prismáticos (ou cilíndricos);
- O canal é inclinado no sentido do escoamento (Talvegue // Piezométrica // Linha de Energia);
- Secção molhada: secção do escoamento limitada pela superfície livre e pela parte do canal situada a cota inferior à da Superfície Livre (S.L.).

Movimento Permanente Variado:

- A velocidade média (U) não é constante;
- Verificando-se caudal (Q) constante e área (A) variável ou caudal (Q) variável e área (A) variável;
- Com caudal (Q) constante e secção prismática este movimento tenderá para uniforme a uma distância suficientemente grande de qualquer singularidade.

Movimento Permanente Gradualmente Variado:

- Os filetes mantêm-se retilíneos;
- As velocidades são aproximadamente normais às secções retas;
- A distribuição de pressões é do tipo hidrostático;
- Curva de Regolfo - Perfil longitudinal da superfície livre do escoamento permanente gradualmente variado. O estudo do regolfo incide sobre:
 - Regolfo em canais prismáticos com caudal constante;
 - Regolfo em canais prismáticos com caudal variável no espaço;
 - Regolfo em canais não prismáticos com caudal constante;

- Regolfo em canais não prismáticos com caudal variável no espaço.

Movimento Permanente Rapidamente Variado:

- Os filetes apresentam curvatura apreciável;
- A distribuição de pressões não é do tipo hidrostático;
- Verifica-se normalmente em trechos pouco extensos de canal, associando-se frequentemente a zonas de regime gradualmente variado.

Movimento Não Permanente:

- Variação conjunta da secção (A) e caudal (Q);
- Podem ser rapidamente ou gradualmente variáveis.

11.1.2 Tipos de canais



Canais Naturais (Caldeirão Verde, Santana)

As propriedades hidráulicas são difíceis de definir dada a sua irregularidade;

- Recorre-se frequentemente a hipóteses empíricas;
- Deve recorrer-se a conhecimentos de hidrologia, geomorfologia, transporte de sedimentos;
- Exemplos: Torrentes, Rios e Ribeiros, Embocaduras de Estuários, Correntes Subterrâneas com Superfície Livre (Hidráulica Fluvial).



Canais Artificiais (Foz da ribeira de João Gomes e Santa Luzia, Funchal)

- A aplicação das teorias hidráulicas conduz a resultados que podem considerar-se satisfatórios com o que ocorre na prática;
- Exemplos: Navegação, Irrigação, Drenagem, Colectores.

Figura 246 – Tipos de canais (fonte: autor).

11.1.3 Geometria dos canais

A **Secção do Canal** é normal às linhas de corrente (secção reta em escoamentos lineares), enquanto que a **Secção Vertical do Canal** é a secção em plano vertical que contém o ponto situado a cota mais baixa na secção (Figura 247).

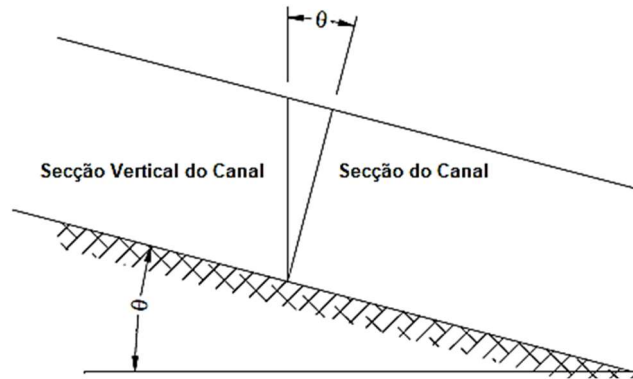


Figura 247 – Representação do tipo de secção do canal (adaptado de Costa & Lança, 2011).

Nota: quando θ é pequeno a secção vertical coincide com a secção do canal.

Canais Naturais (secções irregulares):

- Parabólica ou Trapezoidal;
- Leito Menor (caudais normais);
- Leito Maior (caudais de cheia).

Canais Artificiais (secções regulares):

- Trapezoidal (comum em canais abertos no terreno);
- Retangular (margens estáveis);
- Triangular (valetas);
- Circular (coletores);
- Outras (coletores de grandes dimensões).

Características Geométricas em Perfil Longitudinal

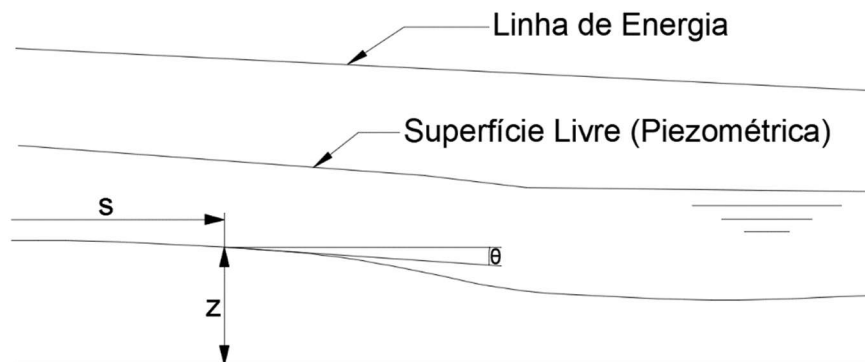


Figura 248 – Representação das características geométricas em perfil longitudinal.

Nota: i – Inclinação do Canal; $i = \tan \theta$; $\sin \theta = -\frac{\partial z}{\partial s}$.

Características Geométricas das Secções Planas

As propriedades da secção de um escoamento podem ser completamente definidas pela geometria da secção do canal e pela profundidade do escoamento (Figura 249 e Figura 250).

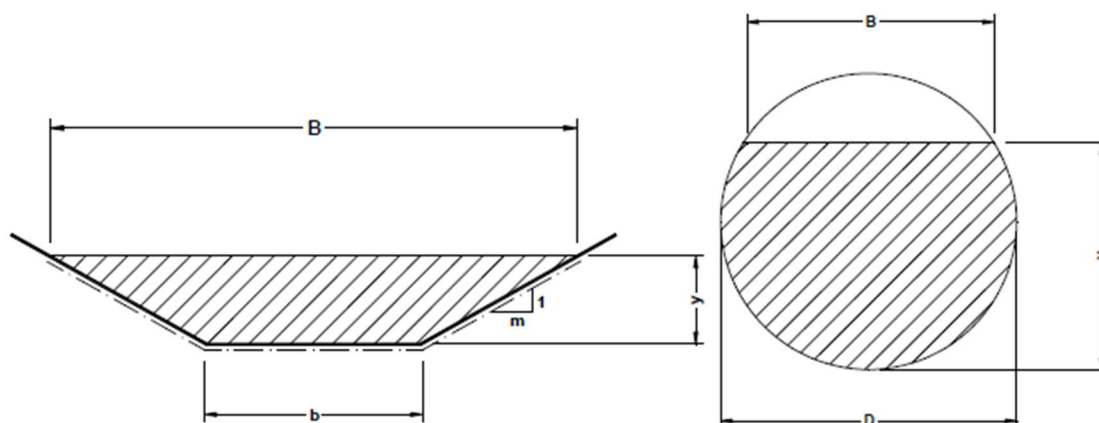


Figura 249 – Representação das características geométricas em secção plana (Costa & Lança, 2011).

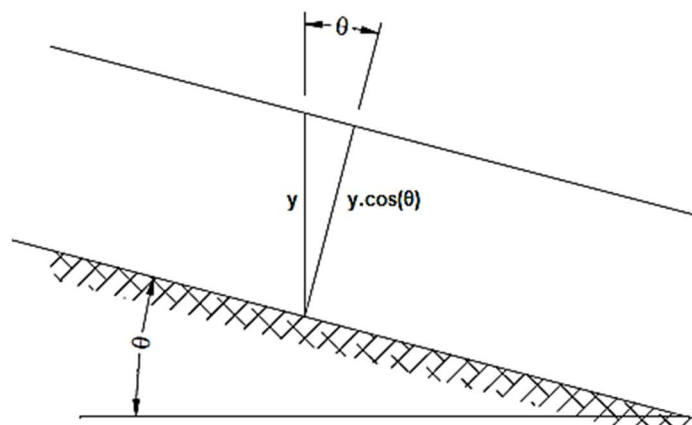


Figura 250 – Alturas de água e inclinação da secção (adaptado de Costa & Lança, 2011).

No que diz respeito às duas figuras anteriores define-se:

- **A largura superficial do escoamento** é indicada por **b**;
- **A área da secção transversal (S)**, é a área da secção normal aos filetes;
- **O perímetro molhado (X)** é o desenvolvimento da curva segundo a qual o líquido contacta com as paredes sólidas da secção;
- **O raio hidráulico (R)** é a razão entre a área da secção transversal (área molhada) e o perímetro molhado:

$$R = \frac{S}{X}$$

- **A profundidade ou altura da água na secção ($y \cos \theta$)** é a distância medida na secção do canal segundo a linha de maior declive entre a superfície livre e o talvegue;
- **A profundidade ou altura da água no canal (y)** é a distância vertical entre o ponto do talvegue na secção considerada e a superfície livre;
- **A profundidade média ou profundidade hidráulica (y_m)** é a razão entre a secção transversal e a largura superficial:

$$y_m = \frac{S}{b}$$

Relações entre as características geométricas das secções regulares

Canais de Secção Retangular:

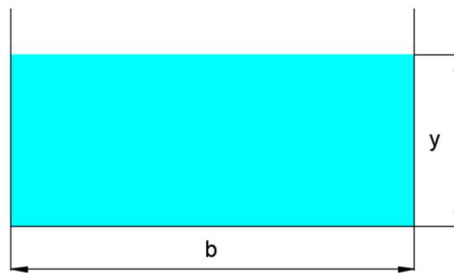


Figura 251 – Canal de secção retangular.

$$S = by$$

$$X = b + 2y$$

$$y_m = y$$

$$R = \frac{y}{1 + 2\frac{y}{b}}; \text{ Com } b \gg y, \frac{y}{b} \rightarrow 0 \rightarrow R \cong y$$

Canais de Secção Trapezoidal:

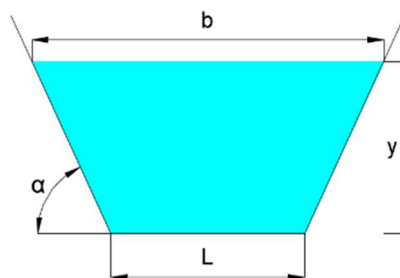


Figura 252 – Canal de secção trapezoidal.

$$b = L + \frac{2y}{\tan \alpha}$$

$$S = \left(L + \frac{y}{\tan \alpha} \right) y$$

$$X = L + \frac{2y}{\tan \alpha} \sqrt{\tan^2 \alpha + 1}$$

$$y_m = \frac{L \tan \alpha + y}{L \tan \alpha + 2y} y$$

$$R = \frac{L \tan \alpha + y}{L \tan \alpha + 2y \sqrt{\tan^2 \alpha + 1}} y$$

Canais de Secção Circular:

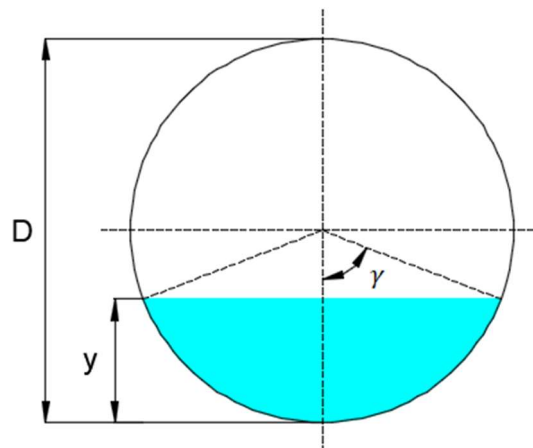


Figura 253 – Canal de secção circular.

$$b = D \sin \gamma \quad (y \text{ em radianos})$$

$$y = \frac{D}{2} (1 - \cos \gamma)$$

$$S = \frac{\pi D^2}{4} \frac{2\gamma}{2\pi} - b \frac{D}{4} = \frac{D}{4} (D\gamma - b \cos \gamma) = \frac{D^2}{4} (\gamma - \sin \gamma \cos \gamma) = \frac{D^2}{8} [2\gamma - \sin(2\gamma)]$$

$$X = Dy$$

$$y_m = D \frac{2\gamma - \sin(2\gamma)}{8 \sin(\gamma)}$$

$$R = D \frac{2\gamma - \sin(2\gamma)}{8\gamma} \quad \text{ou, para secção cheia, } R = \frac{D}{4}$$

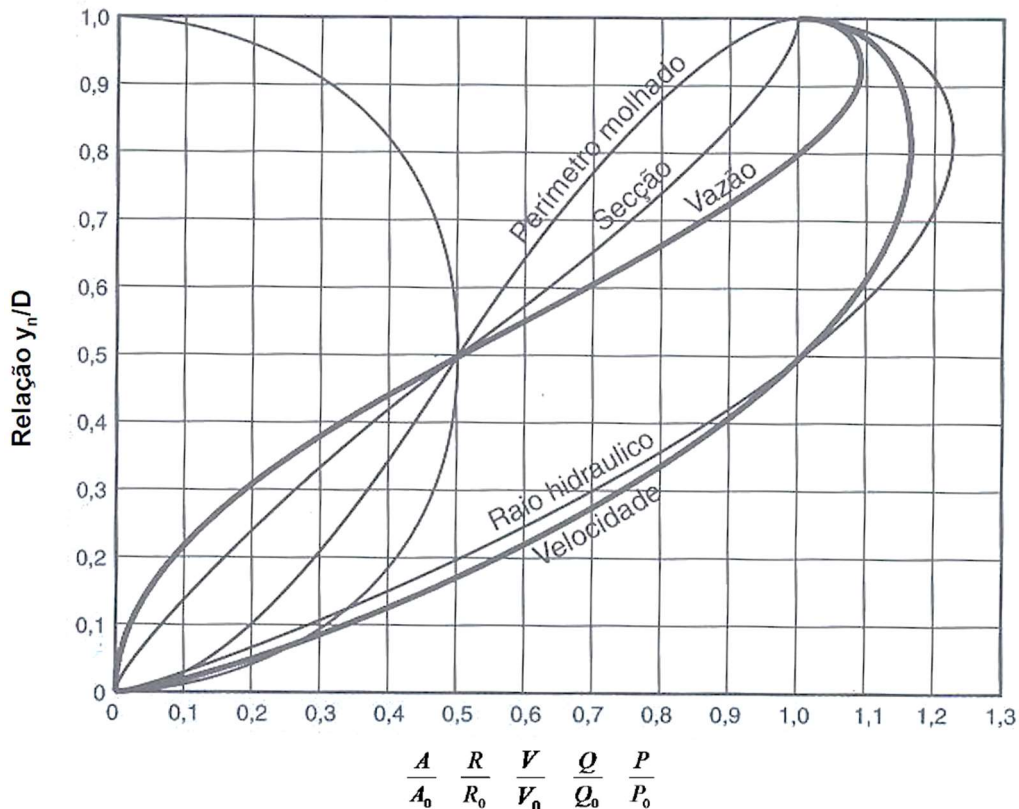


Figura 254 – Canal de secção circular (relações geométricas) (adaptado de Netto, 1998).

Nota: Elementos geométricos em coordenadas adimensionais referidas a D e aos valores correspondentes a secção cheia.

Relações entre as características geométricas das secções irregulares

Relações gráficas entre parâmetros característicos (P):

Medem-se ou calcula-se após medições efetuadas, os valores P_i correspondentes a diferentes valores de y_i . Exemplo:

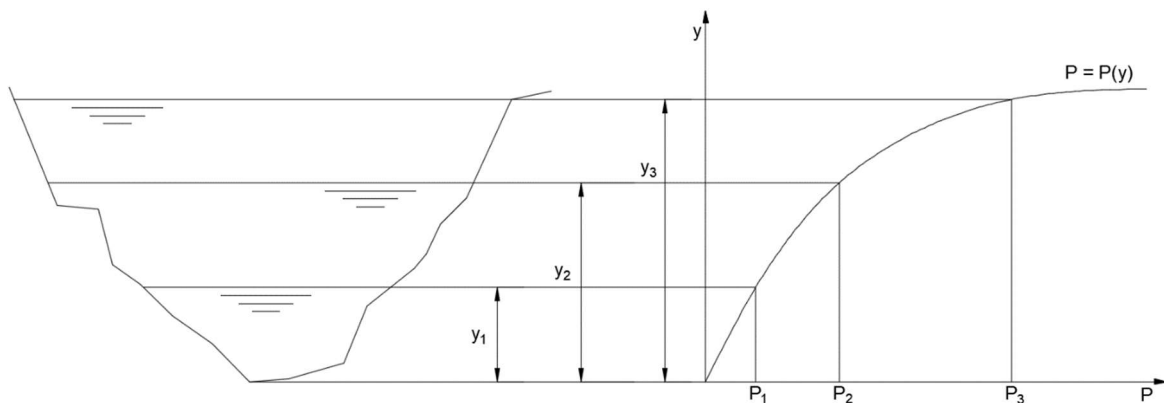


Figura 255 – Canal de secção irregular (relação gráfica).

Utilização de relações numéricas complexas em computador de leitos menores de canais naturais, através da forma monomial:

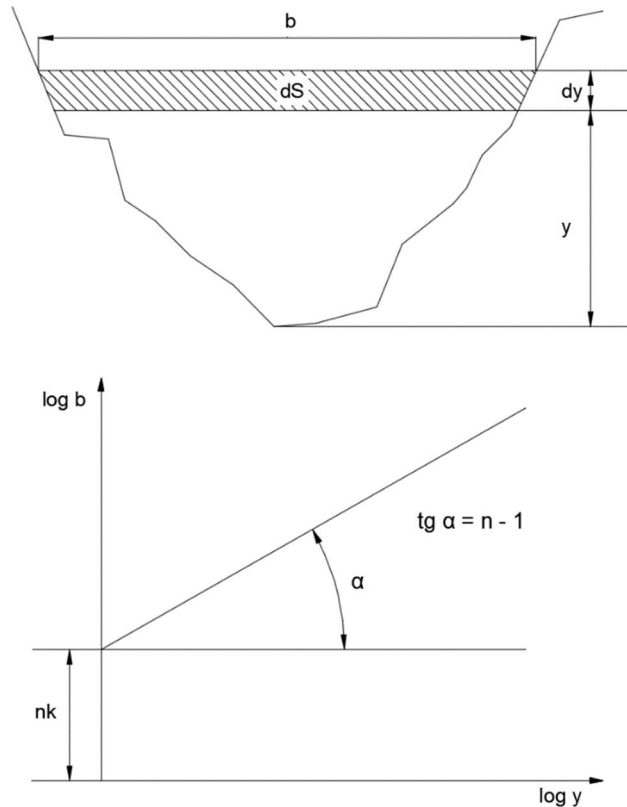


Figura 256 – Canal de secção irregular (relação através da forma monomial).

$$S = ky^n$$

Em que k, n são parâmetros dependentes da configuração da secção.

$$b = \frac{dS}{dy}$$

Relacionando a fórmula anterior com $S = ky^n$, obtêm-se:

$$b = Kny^{n-1}$$

$$\log b = \log nK + (n - 1) \log y$$

Para obter n e k basta ter valores correspondentes de b e y e obter em escala logarítmica uma reta com coeficiente angular de valor $n - 1$ e ordenada na origem em nk .

11.2 Aplicação do teorema de Bernoulli aos escoamentos com superfície livre

11.2.1 Expressão do teorema de Bernoulli

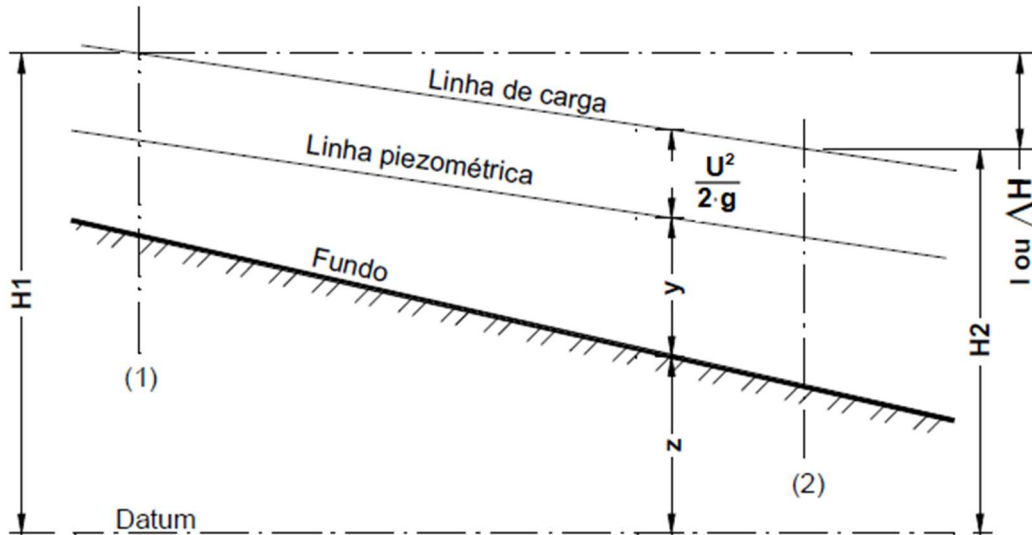


Figura 257 – Representação para dedução de simplificação do T. de Bernoulli (Costa & Lança, 2011).

$$\frac{\partial}{\partial s} \left(z + \lambda y + \frac{\alpha U^2}{2g} \right) = -\frac{1}{g} \frac{\partial}{\partial t} (\alpha U) + \frac{\partial H}{\partial s}$$

Em que:

- $\lambda = \beta \cos \theta$ é Coeficiente de distribuição de pressões;
- β é o coeficiente de Jaeger (Força Centrífuga);
- α é o coeficiente de energia cinética;
- α' é o coeficiente de quantidade de movimento.

Neste caso são aplicadas as seguintes simplificações:

- Distribuição do tipo hidrostático das pressões na secção transversal;

$$\beta = 1 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial s} \left(z + y \cos \theta + \frac{\alpha U^2}{2g} \right) = -\frac{1}{g} \frac{\partial}{\partial t} (\alpha U) + \frac{\partial H}{\partial s}$$

- Movimento permanente:
 - Distribuição de pressões do tipo hidrostático (escoamentos lineares);

$$z_1 + y_1 \cos \theta_1 + \frac{\alpha_1 U_1^2}{2g} - \left(z_2 + y_2 \cos \theta_2 + \frac{\alpha_2 U_2^2}{2g} \right) = \Delta H$$

- Distribuição de pressões não hidrostática.

$$z_1 + \beta_1 y_1 \cos \theta_1 + \frac{\alpha_1 U_1^2}{2g} - \left(z_2 + \beta_2 y_2 \cos \theta_2 + \frac{\alpha_2 U_2^2}{2g} \right) = \Delta H$$

11.2.2 Distribuição de pressões na secção transversal

Refere-se a pressão medida pela altura atingida pela coluna de água num tubo piezométrico instalado num ponto de uma dada secção perpendicularmente aos filetes.

Escoamentos Retilíneos

Diferente dos escoamentos sob pressão, em que a pressão é considerada constante na secção transversal da conduta, no caso de escoamentos com superfície livre há uma grande variação da pressão com a variação da profundidade. Considera-se que a distribuição de pressões na secção obedece à lei de Stevin (pressão hidrostática) e a componente da aceleração (Força centrífuga, $F_c = 0$) (Soares, 2011).

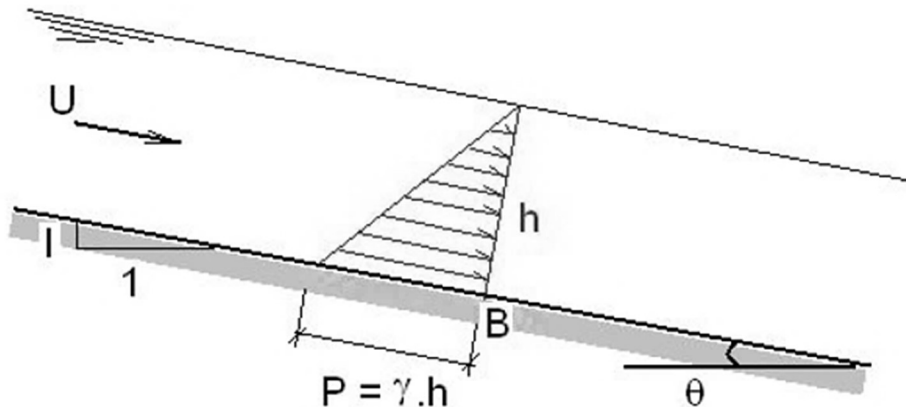


Figura 258 – Distribuição de pressões na secção transversal, escoamento retilíneo (Soares, 2011).

Para $I < 10\%$ considera-se pressão aproximadamente igual à hidrostática ($P = \gamma h$). Para $I > 10\%$ deve-se ter em consideração o ângulo da inclinação, ou seja, pressão pseudo-hidrostática ($P = \gamma h \cos^2 \theta$) (Soares, 2011).

Escoamentos Não Retilíneos

No caso em que a curvatura da linha de corrente no sentido vertical é significativa, como no caso de vertedores, caracterizando um escoamento curvilíneo, há alteração na distribuição hidrostática de pressões, devendo-se utilizar um fator de correção para determinar a pressão do escoamento (Soares, 2011).

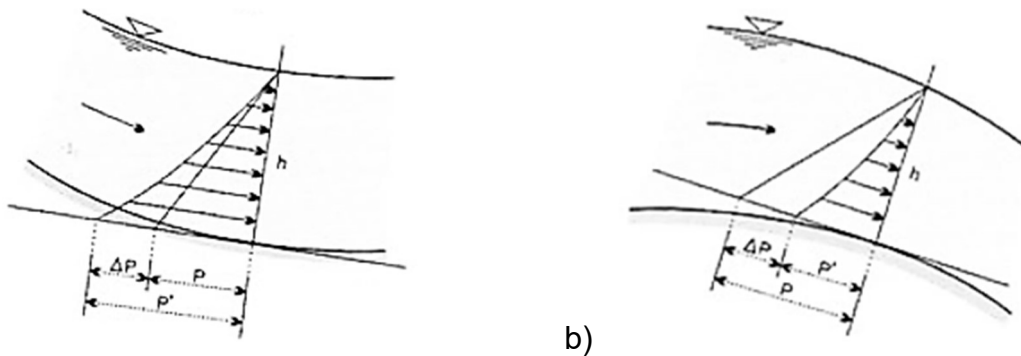


Figura 259 – Distribuição de pressões na secção transversal, escoamento côncavo (a) e convexo (b) (Soares, 2011).

No escoamento côncavo observa-se uma pressão adicional (ΔP), $P' = P + \Delta P$. Já no escoamento convexo observa-se uma subpressão (ΔP) ou redução da pressão e relação à pressão estática, $P' = P - \Delta P$. ΔP determina-se através da seguinte expressão (Soares, 2011):

$$\Delta P = \frac{\gamma h}{g} \cdot \frac{U^2}{r}$$

Em que:

- P' é a pressão resultante corrigida;
- P é a pressão hidrostática;
- γ é o peso específico da água;
- g é a aceleração gravítica;
- U é a velocidade média do escoamento;
- r é o raio de curvatura do fluido.

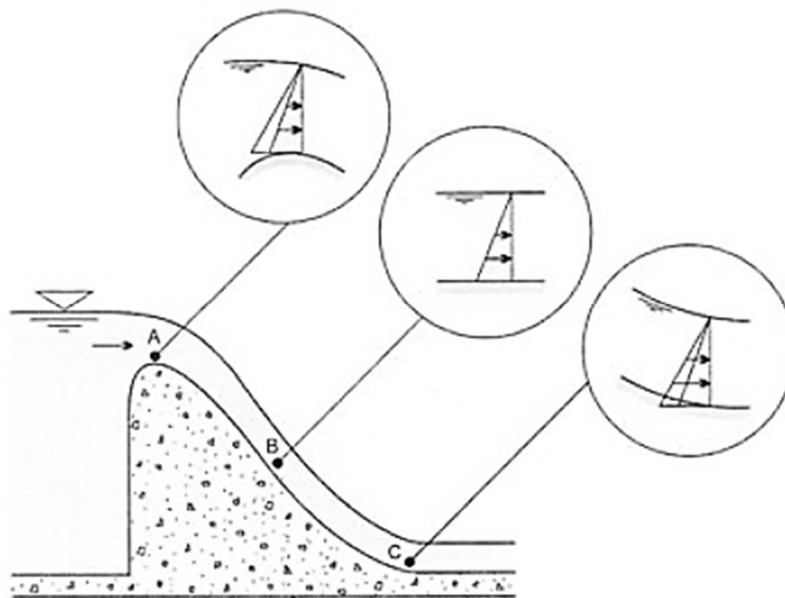


Figura 260 – Exemplo de escoamento não retilíneo, vertedor (Soares, 2011).

11.2.3 Distribuição de velocidades na secção transversal

As velocidades dos diferentes filetes líquidos numa secção transversal dum canal são afetadas por:

- **Influência das Paredes** (Ação Retardadora-Atrito);
- **Superfície Livre** (Tensão Superficial e Resistência do Ar).

As velocidades são maiores nos filetes mais afastados das paredes e fundo do canal. As curvas lugar geométrico dos pontos de igual velocidade são designadas por Isotáquicas (Figura 261).

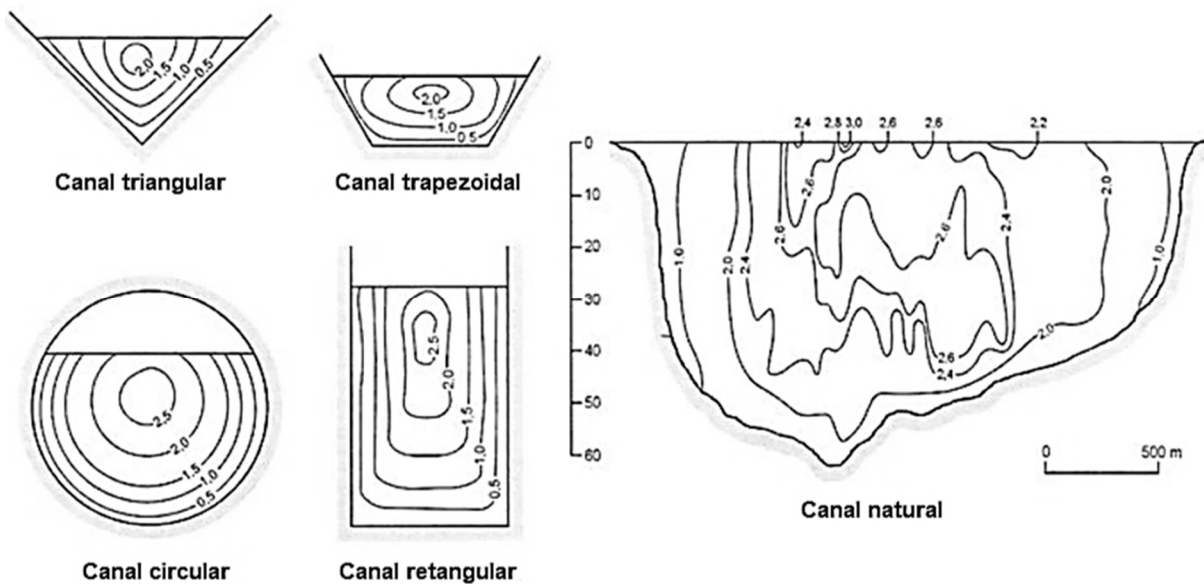


Figura 261 – Curvas Isotáquicas para diferentes secções (adaptado de Soares, 2011).

Distribuição de velocidades numa secção transversal

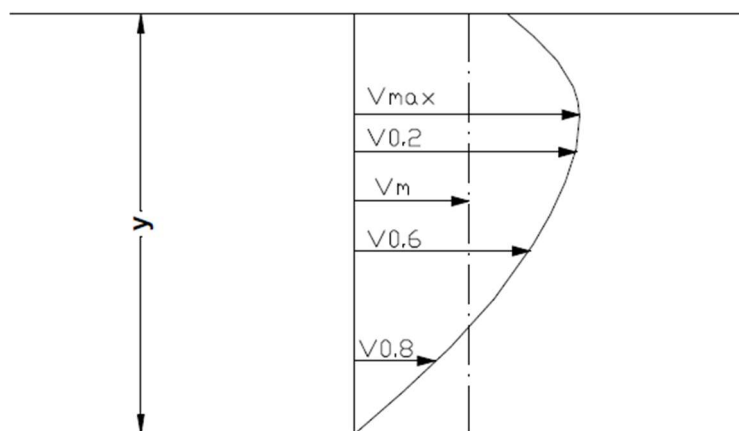


Figura 262 – Distribuição de velocidades (Costa & Lança, 2011).

A velocidade máxima (v_{\max}), numa vertical da secção transversal, aparece entre os valores $0.05y$ e $0.25y$ (Costa & Lança, 2011).

A velocidade média (v_m), que é utilizada para o cálculo do caudal, é a média das velocidades à profundidade $0.20y$ e $0.80y$, ou seja, é a velocidade à profundidade $0.6y$ ($v_{0.6}$). No entanto, existem hidráulicos que consideram como mais exata a média das profundidades (Costa & Lança, 2011):

$$v_m = (v_{0.2} + v_{0.8} + 2v_{0.6})/4$$

Distribuição de caudais numa secção transversal

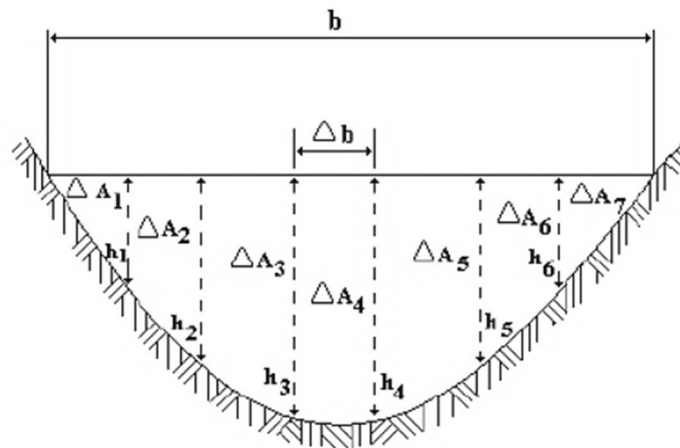


Figura 263 – Distribuição de caudais (http://www.escoladavida.eng.br/mecflubasica/aula2_unidade3.htm).

Determinando-se as velocidades médias, pode-se, através da equação,

$$Q = \sum v_i \cdot A_i$$

determinar o caudal em escoamentos com superfície livre, como por exemplo o caudal de rios. Para exemplificarmos esta aplicação, consideramos a secção transversal do rio representada pela Figura 263, onde o caudal é calculado pela equação:

$$Q = \sum_{i=1}^n v_i \cdot \Delta A_i$$

A equação aplicada à figura, resulta:

$$Q = \left(v_1 \cdot \frac{h_1 \cdot \Delta b}{2} \right) + \left(\frac{v_1 + v_2}{2} \cdot \frac{h_1 + h_2}{2} \cdot \Delta b \right) + \left(\frac{v_2 + v_3}{2} \cdot \frac{h_2 + h_3}{2} \cdot \Delta b \right) + \left(\frac{v_3 + v_4}{2} \cdot \frac{h_3 + h_4}{2} \cdot \Delta b \right) +$$

$$+ \left(\frac{v_4 + v_5}{2} \cdot \frac{h_4 + h_5}{2} \cdot \Delta b \right) + \left(\frac{v_5 + v_6}{2} \cdot \frac{h_5 + h_6}{2} \cdot \Delta b \right) + \left(v_6 \cdot \frac{h_6 \cdot \Delta b}{2} \right)$$

11.2.4 Perdas de energia. Fórmulas de resistência

Expressão geral das fórmulas de resistência:

$$h_f = \Delta H = f \frac{L}{4R} \frac{U^2}{2g}$$

$$f = f\left(\frac{4UR}{\nu}, \frac{U^2}{4gR}, \frac{k_1}{4R}, \frac{k_2}{4R}, \dots, \frac{k_n}{4R}\right)$$

Regime laminar:

$$f = \frac{C_1}{Re}, \text{ com } Re = \frac{4UR}{\nu}$$

Regime turbulento (mais comum). Fórmulas empíricas (Chézy, Manning-Strickler)

A - Fórmulas do tipo Chézy:

$$U = \sqrt{8g/f} \sqrt{R(\Delta H/L)}$$

$$\text{Com } C = \sqrt{8g/f} \rightarrow U = C\sqrt{R(\Delta H/L)}$$

$$\text{Com } J = \Delta H/L \rightarrow U = C\sqrt{RJ}$$

Regime uniforme:

$$U = C\sqrt{R \sin \theta}$$

Com θ pequeno:

$$U = C\sqrt{Ri}$$

Em que i é o declive do talvegue.

Fórmula de Bazin:

$$C = \frac{87\sqrt{R}}{C_B + \sqrt{R}}$$

Em que C_B é função da natureza das paredes do canal (Tabela 39).

Tabela 39 – Valores de C_B em função da natureza das paredes.

Natureza das Paredes	$C_B [m^{1/2}]$
Canais de betão liso	0.06
Canais de betão não alisado ou alvenaria muito regular	0.16
Canais de terra muito regular ou alvenaria regular	0.45
Canais de terra irregular ou alvenaria irregular	0.85
Canais de terra irregular com vegetação, cursos de água regulares em leitos rochosos	1.30
Canais de terra em más condições com vegetação no fundo e nas margens, ou cursos de água sobre calhaus	1.75

Fórmula de Kutter:

$$C = \frac{100\sqrt{R}}{C_K + \sqrt{R}}$$

Em que C_K é função da natureza das paredes do canal (Tabela 40);

Tabela 40 – Valores de C_K em função da natureza das paredes.

Natureza das Paredes	$C_K [m^{1/2}]$
Canais de betão liso com secção semicircular	0.12
Canais de betão liso com secção retangular	0.15
Canais de alvenaria regular muito regular	0.25
Canais de alvenaria ordinária	0.35
Canais de alvenaria irregular	0.55
Canais de terra regular sem vegetação	1.25-1.50
Canais de terra pouco cuidada com vegetação	1.75-2.00

Fórmula de Ganguillet-Kutter:

$$C = \frac{23 + \frac{0.00155}{J} + \frac{1}{n}}{1 + \left(23 + \frac{0.00155}{J}\right) \frac{n}{\sqrt{R}}}$$

Em que $n = 1/K$, sendo K o coeficiente da Fórmula de Manning-Strickler.

Fórmula de Thijsse:

Tabela 41 – Fórmulas de Thijsse para C , em função do regime de escoamento.

Regime	Fórmula
Liso	$C = 18 \log 3Re/C$
Rugoso	$C = 18 \log 12R/K$
Transição	$C = -18 \log(C/3Re + K/12R)$

Fórmula de Powell:

Tabela 42 – Fórmulas de Powell para C, em função do regime de escoamento.

Regime	Fórmula
Liso	$C = 23 \log \frac{3.3Re}{C}$
Rugoso	$C = 23 \log \frac{R}{K}$
Transição	$C = -23 \log \left(\frac{C}{3.3Re} + \frac{K}{R} \right)$

Tabela 43 – Valores de K em função do material.

Natureza	K [mm]
Canais de betão liso	0.06
Canais de betão não alisado	0.30
Canais de terra retilíneos e uniformes	13
Canais de terra dragados	33

Fórmula de Crump:

$$C = -\sqrt{32g} \log \left(\frac{0.0676K}{R} + \frac{0.222v}{R\sqrt{gR}} \right)$$

B - Fórmulas de Manning-Strickler:

$$U = KR^{2/3}J^{1/2}$$

Para canais com pequena inclinação: $U = KR^{2/3}i^{1/2}$

Em que K depende da natureza das paredes, independentemente das condições de escoamento (em pressão ou em canal).

Tabela 44 – Valores de K em função da natureza das paredes.

Natureza	K [m ^{1/3} s ⁻¹]
Canais de paredes revestidas a argamassa lisa	100-90
Canais de betão liso	80
Canais de alvenaria ordinária	70
Canais de terra irregular, betão rugoso ou alvenaria degradada	60
Canais de terra irregular, com pequena vegetação ou cursos de água regulares em leitos rochosos	50
Canais de terra degradados ou cursos de água sobre calhaus	40

C - Aplicação das fórmulas de resistência a secções compostas ou heterogéneas:

As fórmulas apresentadas apenas são validas para secções simples onde haja constância de tensões tangenciais ao longo do perímetro molhado.

Secção Composta:

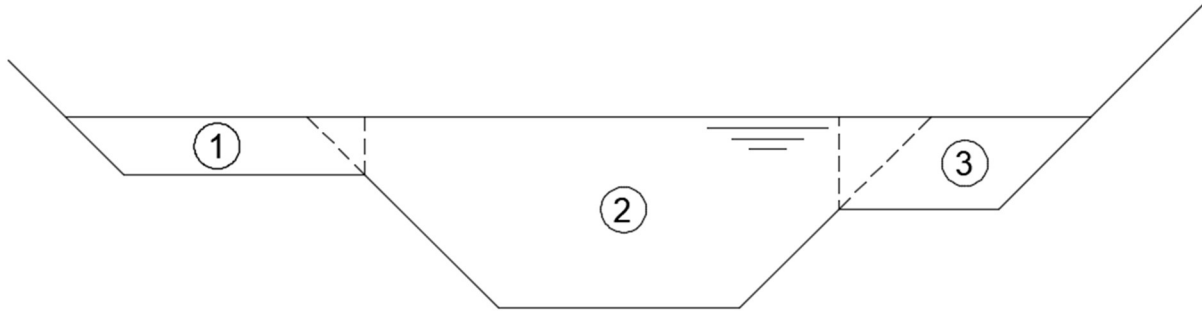


Figura 264 – Secção composta.

Aplicando a fórmula de Chézy:

$$Q = (C_1 S_1 \sqrt{R_1} + C_2 S_2 \sqrt{R_2} + \dots + C_n S_n \sqrt{R_n}) \sqrt{J}$$

Aplicando a fórmula de Manning-Strickler:

$$Q = (K_1 S_1 R_1^{2/3} + K_2 S_2 R_2^{2/3} + \dots + K_n S_n R_n^{2/3}) \sqrt{J}$$

Secção Heterogénea (Rugosidades diferentes ao longo do perímetro molhado):

$$\chi = \sum_1 \chi_1$$

Onde χ_1 representa os trechos de perímetro molhado com diferentes rugosidades.

Utilizando a fórmula de Chézy:

$$J = \frac{U^2}{C^2 R} \rightarrow J = \frac{U^2}{S} \frac{\chi}{C^2}$$

Se utilizarmos coeficientes de Bazin, para cada trecho χ_1 com coeficiente C_{B1} :

$$C_1 = \frac{87\sqrt{R}}{C_{B1} + \sqrt{R}}$$

Para toda a secção do canal:

$$J = \frac{U^2}{S} \sum_1 \frac{\chi_1}{C_1^2} \text{ ou } C = \sqrt{\chi / \sum_1 \frac{\chi_1}{C_1^2}}$$

Utilizando a fórmula de Manning-Strickler:

O valor de K será calculado pela fórmula de Einstein:

$$K = \left[\chi / \sum_1 \frac{\chi_1}{K_1^{2/3}} \right]^{2/3}$$

Sendo K_1 o coeficiente da fórmula de Manning-Strickler correspondente à rugosidade do trecho de comprimento χ_1 .

11.2.5 Energia específica

Energia Específica é a energia do escoamento, por unidade de peso de líquido, referida ao talvegue do canal.

Do Teorema de Bernoulli, temos:

$$E = \beta y \cos \theta + \frac{\alpha U^2}{2g}$$

A expressão de Bernoulli, virá:

$$\frac{\partial}{\partial s} (z + E) = -\frac{1}{g} \frac{\partial}{\partial t} (\alpha' U) - J$$

Sendo $J = -\frac{\partial H}{\partial s}$ a perda de energia por unidade de comprimento.

Para canais descendentes (inclinação positiva):

$$\frac{\partial z}{\partial s} = -\sin \theta$$

Donde:

$$\frac{\partial E}{\partial s} = -\frac{1}{g} \frac{\partial}{\partial t} (\alpha' U) + \sin \theta - J$$

é variação da energia específica ao longo do canal.

Para movimento permanente:

$$\frac{\partial E}{\partial s} = \sin \theta - J$$

Para canais de pequena inclinação:

$$\sin \theta \cong \tan \theta = i$$

onde i corresponde ao declive do canal.

A inclinação da linha de energia é também pequena, e:

$$J \cong I_e$$

Onde I_e corresponde ao declive da linha de energia.

Para pequenas inclinações e com pressões do tipo hidrostático:

$$E = y + \frac{\alpha U^2}{2g}$$

11.2.6 Superfícies de energia

Da definição de energia específica:

$$E = \beta y \cos \theta + \frac{\alpha U^2}{2g}$$

E sendo $Q = U \cdot S$, vem:

$$E = \beta y \cos \theta + \frac{\alpha Q^2}{2gS^2}$$

Podendo definir-se:

$$\varphi(Q, E, y, s) = 0$$

Como **hipersuperfície** num espaço a quatro dimensões (Q, E, y, s) sendo s uma função de y numa determinada secção. Fixada uma dada secção, fica fixo o parâmetro s , fazendo sentir-se a sua influência através de β e α .

No caso da curvatura dos filetes líquidos ser pouco acentuada, considera-se distribuição hidrostática de pressões:

$$E = \beta y \cos \theta + \frac{\alpha Q^2}{2gS^2} \text{ ou } F = (Q, E, y) = 0$$

Que representa um espaço a três dimensões (Q, E, y) representando uma **superfície de energia** (Figura 265).

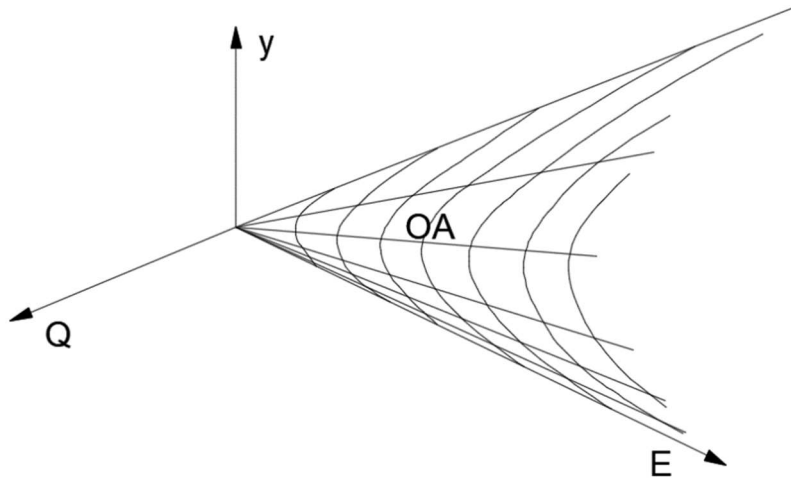


Figura 265 – Superfície de energia.

Em que **OA** representa um escoamento uniforme em que os parâmetros Q, E e y não viram, num determinado canal.

Para $Q = \text{cte.}$ e $E = \text{cte.}$, desenvolvem-se dois tipos de curvas de interesse:

Varição da energia específica com a altura da água ($Q = Q_0 \text{ cte.}$):

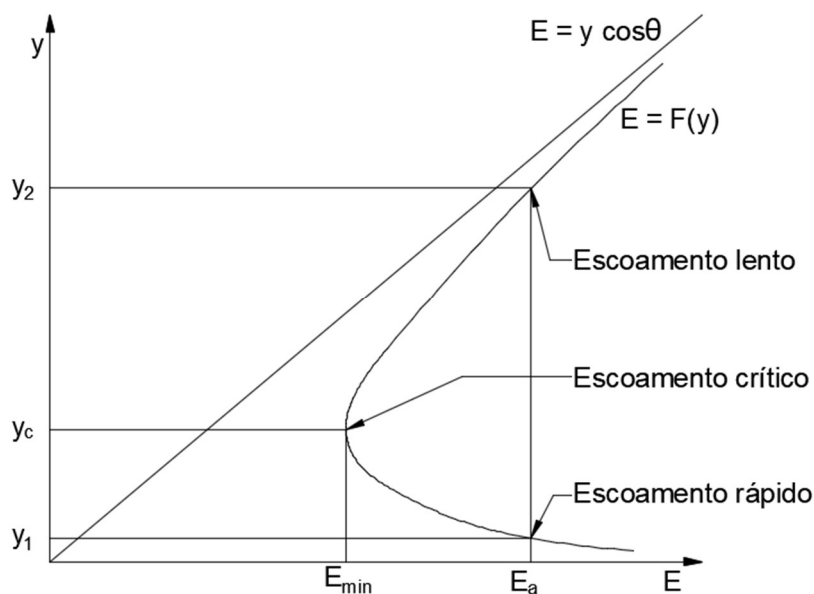


Figura 266 – Curva da variação de energia com a altura da água.

As assíntotas da curva são $y = 0$ e $E = y \cos \theta$.

Variação do caudal com a altura da água ($E = E_0$ cte.):

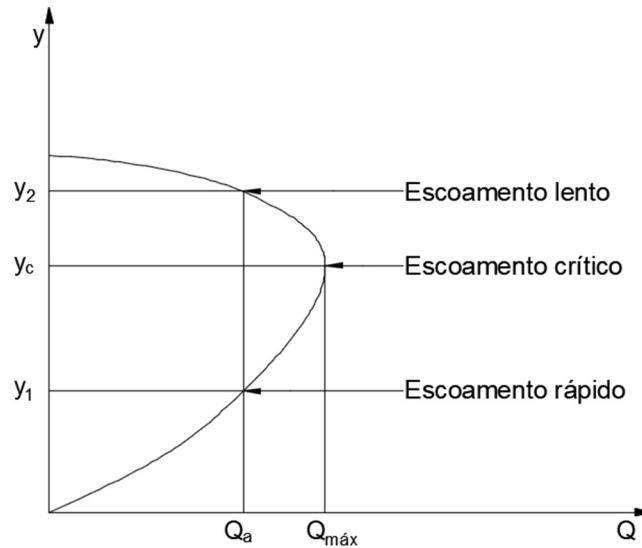


Figura 267 – Curva da variação do caudal com a altura da água.

$$Q = S\sqrt{2g(E_0 - y \cos \theta)}$$

11.2.7 Valores críticos

O **Regime Crítico** é definido a partir das leis de variação da altura de água: com E sendo $Q = \text{cte.}$; com Q sendo $E = \text{cte.}$.

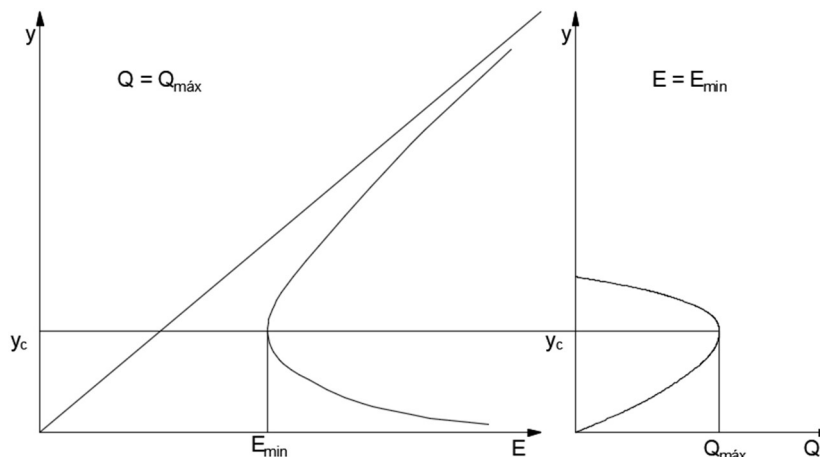


Figura 268 – Curva da variação do caudal e energia com a altura da água.

Valores críticos:

Em regime crítico:

$$\frac{Q}{\sqrt{g \cos \theta}} = S_c \sqrt{y_{mC} / \alpha_C}$$

De forma simplificada, para inclinações pequenas $\cos \theta = 1$; $\alpha = 1$:

$$\frac{Q}{\sqrt{g}} = S_C \sqrt{y_{mC}} \text{ ou } \sqrt{g y_{mC}} = \frac{Q}{S_C} = U_C$$

Determinação da altura crítica:

Determinando $Q/\sqrt{g \cos \theta}$ e $S\sqrt{y_m/\alpha}$

Para $\alpha = 1$ e secção regular:

Resolve-se a equação em **y** determinando a **altura crítica**.

Para canais de secção irregular:

Método gráfico: $S\sqrt{y_m/\alpha}$ em função de **y**: $\Psi(y) = S\sqrt{y_m/\alpha}$

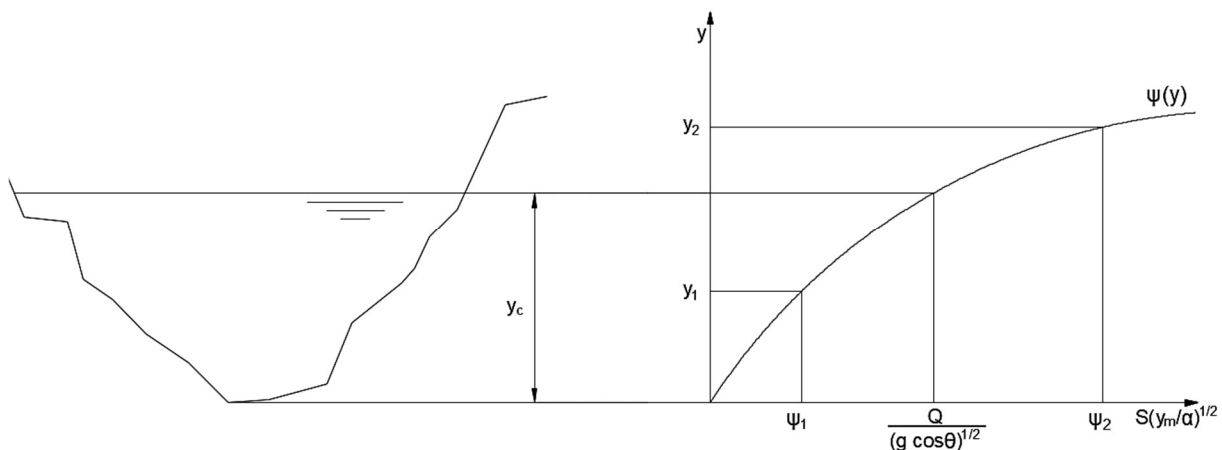


Figura 269 – Método gráfico para secção irregular.

Para canais de secção irregular, em que não seja possível estabelecer uma relação analítica entre os parâmetros:

Método numérico que consiste na determinação de uma lei de regressão adequada a pares de valores de **y** e capacidade de transporte $\Psi(y)$. Por exemplo:

Método de Newton – Determinação de zeros da função:

$$\Psi(y) = \bar{\Psi}(y) - \frac{Q}{\sqrt{g \cos \theta}}$$

11.3 Aplicação do teorema da quantidade de movimento aos escoamentos com superfície livre

11.3.1 Princípios e definições

Quantidade de Movimento:

- Meio discreto:

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^M m_i \vec{v}_i$$

- Meio contínuo:

$$\vec{P} = \int_V \rho \vec{v} dV$$

Teorema da Quantidade de Movimento:

Se a massa total do sistema,

$$m = \sum_{i=1}^M m_i = \text{cte.} \quad \frac{d\vec{P}}{dt} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i$$

A derivada em ordem ao tempo da quantidade de movimento de um sistema de partículas materiais é igual ao somatório de todas as forças exteriores aplicadas ao sistema.

Expressão geral do Teorema da Quantidade de Movimento:

$$\int_S \rho \vec{v} (\vec{v} \cdot \vec{n}) dS = - \int_V \frac{\partial}{\partial t} (\rho \vec{v}) dV + \int_V \rho \vec{G} dV + \int_S \vec{T} dS$$

Em que:

$\vec{M} = d\vec{P}/dt = \int_S \rho \vec{v} (\vec{v} \cdot \vec{n}) dS$, representa a **quantidade de movimento escoada através de toda a superfície de controlo (S)** na unidade de tempo, e $\vec{M} = \vec{M}_1 - \vec{M}_2$, traduz a diferença entre a quantidade de movimento que sai (M_1) e a quantidade de movimento que entra (M_2) no volume considerado, na unidade de tempo;

$\vec{I} = \int_V \frac{\partial}{\partial t} (\rho \vec{v}) dV$, representa o **integral da variação local da densidade de fluxo de massa**. É igual ao vetor principal do sistema de forças locais de inércia, quando o fluido é incompressível e anula-se para escoamento permanente;

$\int_V \rho \vec{G} dV$, representa o **vetor principal das forças de massa** que atuam sobre o fluido contido no interior da superfície de controlo;

$\int_S \vec{T} dS$, representa a **resultante das tensões exercidas ao longo da superfície de controlo**, pelo fluido circundante ou por paredes sólidas em contacto com o fluido.

11.3.2 Quantidade de movimento total. Força específica

Considerando escoamentos permanentes (ou não permanentes com variação lenta de grandezas com o tempo),

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t} (\rho \vec{v}) dV = 0$$

Assim:

$$\int_S \rho \vec{v} (\vec{v} \cdot \vec{n}) dS = \int_V \rho \vec{G} dV + \int_S \vec{T} dS$$

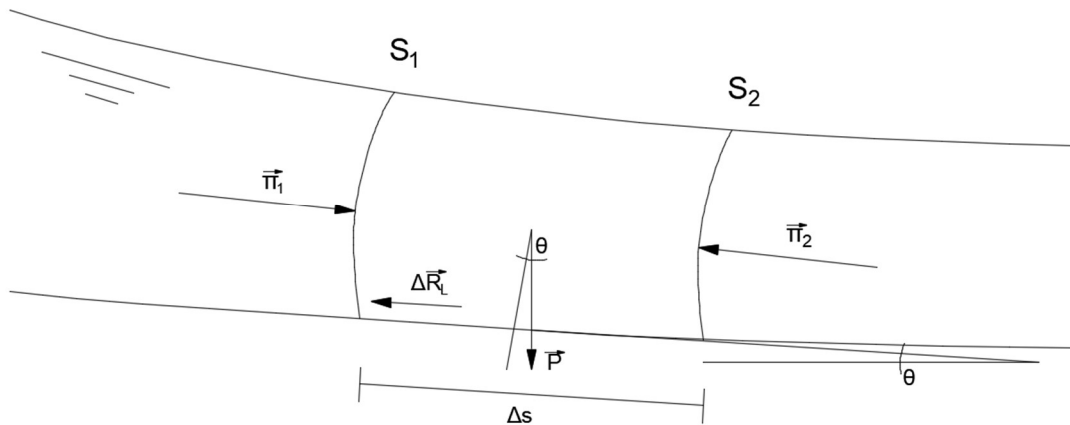


Figura 270 – T.Q.M. na direção do escoamento.

Aplicando o teorema da quantidade de movimento, com a expressão projetada na direção do escoamento (considerando **A** retilínea e **ΔS** pequeno):

$$\left[\int_S \rho \vec{v} (\vec{v} \cdot \vec{n}) dS \right]_S = -\alpha'_1 \rho Q_1 U_1 + \alpha'_2 \rho Q_2 U_2 = -\alpha'_1 \rho \frac{Q_1^2}{S_1} + \alpha'_2 \rho \frac{Q_2^2}{S_2}$$

$$\left[\int_V \rho \vec{G} dV \right]_S = P \sin \theta = yS \sin \theta \Delta S$$

Em que:

S é a média de S_1 e S_2 ;

x_1 e x_2 são a projeção das forças de pressão exercidas em S_1 e S_2 .

$$\left[\int_S \vec{T} dS \right]_S = \pi_1 - \pi_2 - \Delta R_L$$

Em que ΔR_L é a projeção da resultante das forças (normais e tangenciais) exercidas no leito do canal.

Então:

$$-\alpha'_1 \rho Q_1 U_1 + \alpha'_2 \rho Q_2 U_2 = \gamma S \sin \theta \Delta S + \pi_1 - \pi_2 - \Delta R_L$$

ou

$$\Delta M = M_2 - M_1 = \gamma S \sin \theta \Delta S - \Delta R_L$$

Onde:

$$M = \pi + \alpha' \rho \frac{Q^2}{S}$$

Designando **M** a **Quantidade de Movimento Total ou Impulsão Total**.

Para qualquer tipo de distribuição de pressões na secção do canal (ΔM , variação da quantidade de movimento total entre S_1 e S_2) é igual à resultante do peso com as forças resistentes exercidas no comprimento elementar (ΔS).

Dividindo **M** pelo peso específico do fluido (γ), obtém-se:

$$F = \frac{M}{\gamma} = \frac{\pi}{\gamma} + \frac{\alpha' Q^2}{g S}$$

Designando-se **F** como **Força Específica ou Impulsão Específica**.

Fazendo:

$$\frac{\Delta M}{\Delta S} = \gamma S \sin \theta - \frac{\Delta R_L}{\Delta S}$$

Ou com $\Delta S \rightarrow 0$:

$$\frac{dM}{dS} = \gamma S \sin \theta - \frac{dR_L}{dS}$$

Expressão que traduz a variação da impulsão total ao longo do escoamento.

$$\Delta R_L = \tau_0 \chi \Delta S$$

$$\frac{\Delta M}{\Delta S} = \gamma S \sin \theta - \tau_0 \chi$$

Onde,

$$\frac{dM}{dS} = \gamma S \left(\sin \theta - \frac{\tau_0}{\gamma R} \right)$$

Para movimento uniforme $\tau_0 = \gamma R J$ e atendendo a que $J = \sin \theta$,

$$\frac{dM}{dS} = 0 \text{ ou } M = \text{cte.}$$

Confirmando uma vez mais que, para movimento uniforme, os valores seccionais (como **M**) apresentam valores constantes.

Para distribuição de pressões do tipo hidrostático, a impulsão π na secção plana tem o valor:

$$\pi = \gamma S \eta \cos \theta$$

Em que η representa a profundidade, medida segundo a linha de maior declive da secção, a que se encontra o respetivo centro de gravidade, abaixo da superfície livre. Assim:

Quantidade de Movimento Total:

$$M = \gamma \left(S \eta \cos \theta + \frac{\alpha' Q^2}{g S} \right)$$

A expressão representa a linha de quantidade de movimento total.

Força Específica:

$$F = S \eta \cos \theta + \frac{\alpha' Q^2}{g S}$$

11.3.3 Superfícies de quantidade de movimento total

De forma idêntica ao já desenvolvido para superfícies de energia, e considerando apenas escoamentos com distribuição hidrostática de pressões, pode definir-se uma equação do tipo:

$$f(Q, M, y) = 0$$

Desde que se conheça a geometria do canal (η e **S** poderão relacionar-se com **y**). Considerando um espaço a três dimensões (**Q, M, y**) a equação representa uma superfície, que se domina **superfície de Quantidade de Movimento Total**.

Varição da Quantidade de Movimento Total com a altura da água ($Q = Q_0$ cte.):

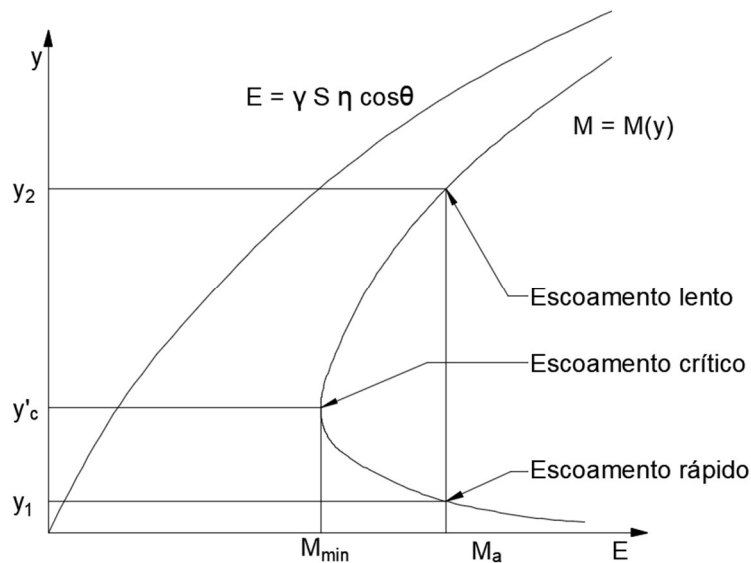


Figura 271 – Varição da Quantidade de Movimento Total com a altura da água ($Q = Q_0$ cte.).

$$M = y \left(S \eta \cos \theta + \frac{\alpha' Q_0^2}{g S} \right)$$

As assíntotas da curva são $y = 0$ e $M = \gamma S \eta \cos \theta$.

Varição do caudal com a altura da água ($M = M_0$ cte.):

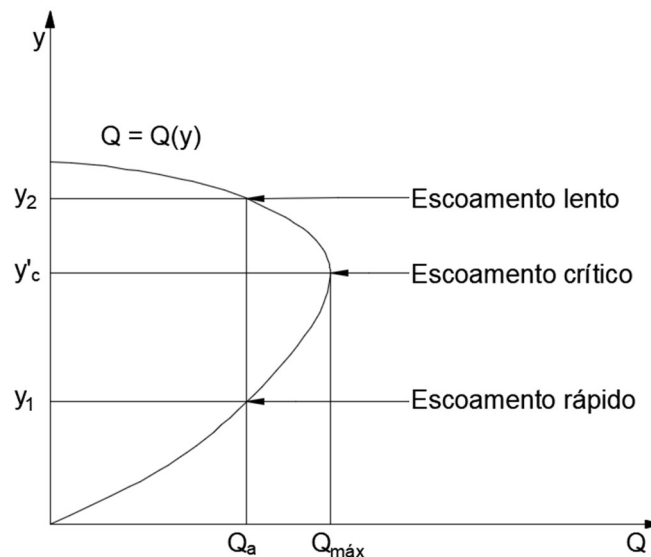


Figura 272 – Varição do caudal com a altura da água ($M = M_0$ cte.).

$$Q = \sqrt{\frac{M_0 S}{\alpha' \rho} - \frac{g S^2 \eta \cos \theta}{\alpha'}}$$

Da mesma forma como no caso da energia específica pode demonstrar-se que a altura crítica (y_c') obtida através da curva de impulsão total coincide com a obtida através da curva do caudal.

$$f(Q_{\max}, M, y) = 0$$

$$f(Q, M_{\min}, y) = 0$$

$$\frac{dM}{dy} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial M}} = 0 \wedge \frac{dQ}{dy} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial Q}} = 0$$

Condições de extremo, que se verificam simultaneamente para:

$$\frac{df}{dy} = 0$$

11.3.4 Relação entre a quantidade de movimento total e a energia específica

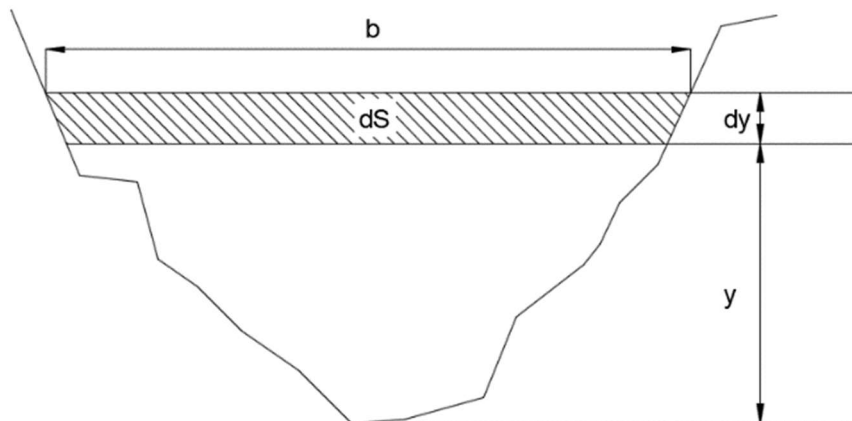


Figura 273 – Relação entre a Quantidade de Movimento Total e a Energia Específica.

Considerando:

- Energia Específica

$$E = y \cos \theta + \frac{\alpha Q^2}{2g S^2}$$

- Escoamentos lineares

$$\frac{\partial E}{\partial y} = \cos \theta - \frac{\alpha Q^2}{g S^3} \frac{dS}{dy}$$

- Quantidade de Movimento Total

$$M = \gamma \left(S\eta \cos \theta + \frac{\alpha' Q^2}{g S} \right)$$

- o Escoamentos lineares

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \gamma \left[\cos \theta \frac{\partial}{\partial y} (S\eta) - \frac{\alpha' Q^2}{g S^2} \frac{dS}{dy} \right]$$

Em que $b = dS/dy$. Sabendo que $S\eta$ representa o momento estático,

$$d(S\eta) = \left[S(\eta + dy) + b \frac{(dy)^2}{2} \right] - S\eta = Sdy + b \frac{(dy)^2}{2} \rightarrow d(S\eta) = Sdy \rightarrow \frac{d}{dy} (S\eta) = S$$

$$\frac{\partial E}{\partial y} = \cos \theta - \frac{\alpha b Q^2}{g S^3} \quad (1); \quad \frac{\partial M}{\partial y} = \gamma S \left[\cos \theta - \frac{\alpha' b Q^2}{g S^3} \right] \quad (2)$$

Donde:

$$\frac{\partial M}{\partial E} = \gamma S \frac{\cos \theta - \frac{\alpha b Q^2}{g S^3}}{\cos \theta - \frac{\alpha' b Q^2}{g S^3}}$$

Sendo, $\alpha \cong \alpha' \cong 1$, então $\partial M/\partial E = \gamma S$. Assim, **M** cresce quando **E** cresce; se **y(S)** for a equação crescente de **E** (Regimes lentos), **M** varia mais rapidamente com **E**.

Valores críticos:

As condições de extremo de **E** e **M** relativamente a **y** obtêm-se igualando a zero as expressões (1) e (2):

$$(1): \frac{\alpha_c b_c Q^2}{g S_c^3} = \cos \theta; \quad (2): \frac{\alpha'_c b_c Q^2}{g S_c^3} = \cos \theta$$

Em que:

c afeta grandezas críticas definidas com base em considerações de Energia Específica;

c' afeta grandezas com base em considerações de Quantidade de Movimento Total.

Quando:

- $y_c \neq y_{c'}$, normalmente apresentam valores próximos;
- $y_c = y_{c'}$, verifica-se quando $\alpha \cong \alpha' \cong 1$.

11.4 Regime uniforme em canais

11.4.1 Condições de estabelecimento do regime uniforme em canais

Variação da energia específica e ao longo do canal:

$$\frac{\partial E}{\partial S} = \sin \theta - J$$

No **escoamento uniforme** $E = \text{cte.}$, onde:

$$J = \sin \theta$$

Conclui-se, portanto:

- Linha de energia é paralela ao talvegue;
- Altura da água (y) é constante, onde a superfície livre é também paralela ao talvegue e à linha de energia;
- O escoamento uniforme só é possível para canais prismáticos de rugosidade uniforme;
- Embora de difícil ocorrência na realidade, em muitas utilizações práticas utiliza-se o seu desenvolvimento matemático para resolver problemas de pequena oscilação a este regime de equilíbrio.

11.4.2 Altura normal

Designa-se **altura normal** (ou profundidade normal ou uniforme) à altura da água com que, num canal prismático de **secção geométrica**, **inclinação** e **rugosidade uniforme** conhecidas, se escoam um determinado caudal (y_n). Outros elementos normais:

- Secção normal, S_n ;
- Perímetro molhado normal, χ_n ;
- Raio hidráulico normal, R_n ;
- Largura superficial normal, b_n ;
- Energia específica normal, E_n .

Determinação da altura normal:

Através de uma fórmula de resistência (Ex. Chézy):

$$Q = CS\sqrt{R \sin \theta}$$

Designando a grandeza seccional $CS\sqrt{R} \rightarrow$ capacidade de transporte temos:

$$\frac{Q}{\sqrt{\sin \theta}} = C_n S_n \sqrt{R_n} \rightarrow (\text{Chézy})$$

$$\frac{Q}{\sqrt{\sin \theta}} = K_n S_n R_n^{2/3} \rightarrow (\text{Manning - Strickler})$$

O cálculo da altura normal faz-se a partir da lei de variação da capacidade de transporte com a profundidade da água, procurando o valor normal que iguala $Q/\sqrt{\sin \theta}$.

Método gráfico:

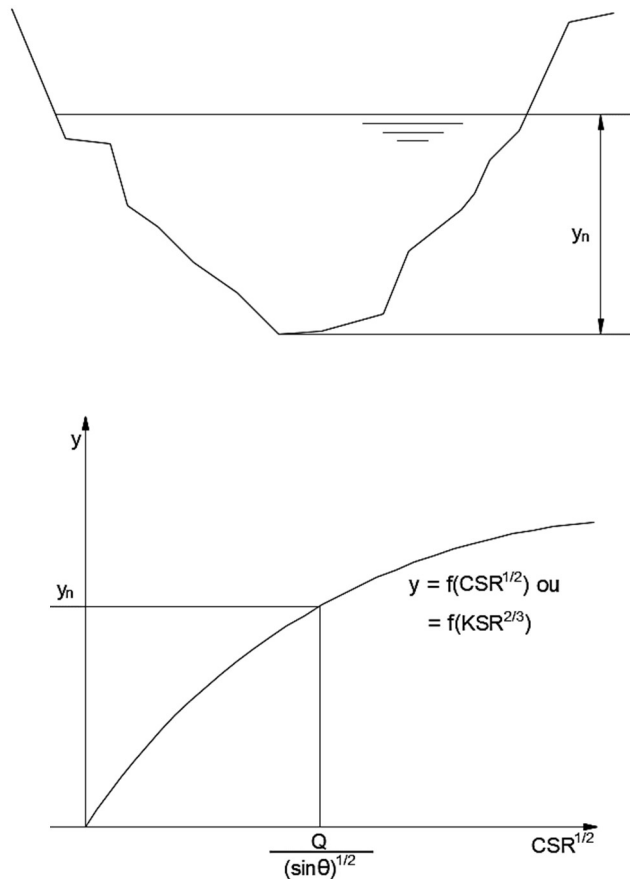


Figura 274 – Determinação da altura normal pelo método gráfico.

Método numérico (Método iterativo – Newton):

Determinação dos zeros da função:

$$\Phi(y) = \bar{\varphi}(y) - \frac{Q}{\sqrt{\sin \theta}} \rightarrow \text{Expressão geral}$$

$$\Phi(y) = \frac{87SR}{C_B + \sqrt{R}} - \frac{Q}{\sqrt{\sin \theta}} \rightarrow (\text{Chézy} - \text{Bazin})$$

$$\Phi(y) = KSR^{2/3} - \frac{Q}{\sqrt{\sin \theta}} \rightarrow (\text{Manning} - \text{Strickler})$$

Secção retangular (utilizando Chézy - Bazin):

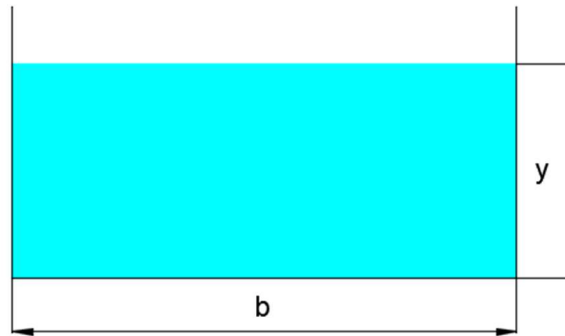


Figura 275 – Secção retangular.

$$\Phi(y) = \frac{\frac{87b^2y^2}{b + 2y}}{C_B + \sqrt{\frac{by}{b + 2y}}} - \frac{Q}{\sqrt{\sin \theta}}$$

Secção trapezoidal (Utilizando Chézy-Bazin):

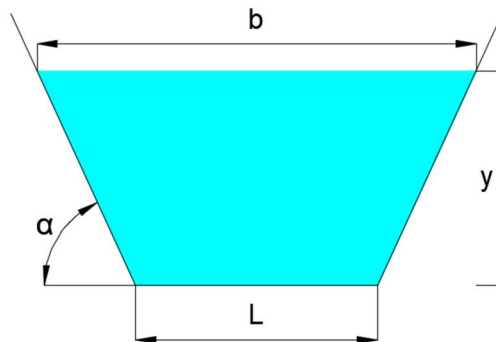


Figura 276 – Secção trapezoidal.

$$\Phi(y) = \frac{87 \left(L + \frac{y}{m}\right)^2 \frac{y^2}{\left(L + \frac{2y}{m} \sqrt{m^2 + 1}\right)}}{C_B + \sqrt{\frac{mL + y}{mL + 2y\sqrt{m^2 + 1}} y}} - \frac{Q}{\sqrt{\sin \theta}}, \text{ com } m = \tan \alpha$$

Secção circular (Utilizando Manning-Strickler):

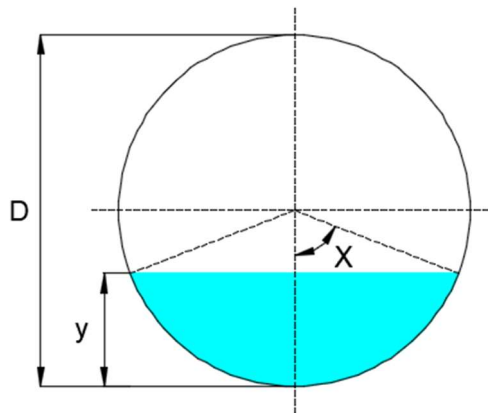


Figura 277 – Secção circular.

$$\Phi(y) = \frac{K}{32} \left\{ \frac{D^8 [2X - \sin(2X)]^5}{X^2} \right\}^{1/3} - \frac{Q}{\sqrt{\sin \theta}}$$

Para a secção circular podem ocorrer, para os mesmos valores de caudal, declive, geometria e rugosidade do canal, duas alturas de água diferentes.

11.4.3 Secção de máximo caudal

Secção retangular:

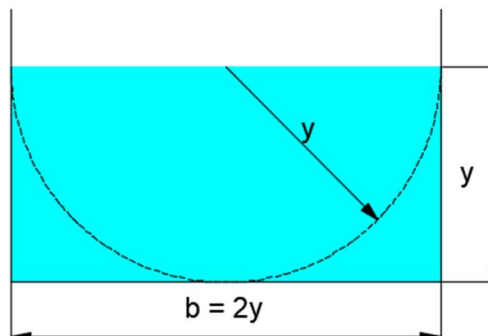


Figura 278 – Secção retangular.

$$\chi = \frac{S}{y} + 2y$$

Condição de χ_{\min} ,

$$\frac{d\chi}{dy} = -\frac{S}{y^2} + 2 = 0 \rightarrow b = 2y$$

Secção trapezoidal:

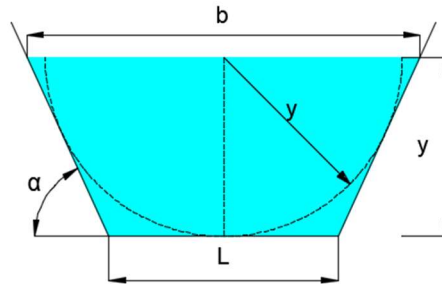


Figura 279 – Secção trapezoidal.

$$m = \tan \alpha$$

$$\chi = L + \frac{2y}{m} \sqrt{m^2 + 1} \wedge S = \left(L + \frac{y}{m}\right) y \Rightarrow \chi = \frac{S}{y} + \frac{2y}{m} \left(\sqrt{m^2 + 1} + \frac{1}{2}\right)$$

Condição de χ_{\min} ,

$$\frac{d\chi}{dy} = -\frac{S}{y^2} + \frac{2}{m} \left(\sqrt{m^2 + 1} - \frac{1}{2}\right) = 0 \Rightarrow L = \frac{2y}{m} \left(\sqrt{m^2 + 1} - 1\right)$$

Trata-se de uma secção que circunscreve um arco de circunferência de raio y centrado no ponto médio da superfície livre.

$$S = \frac{2y^2}{m} \left(\sqrt{m^2 + 1} - \frac{1}{2}\right)$$

$$\chi = \frac{2y}{m} \left(2\sqrt{m^2 + 1} - 1\right)$$

$$R = \frac{y}{2}, \text{ (independente de } m\text{)}$$

Pode verificar-se destas expressões a validade para a secção retangular.

Normalmente coloca-se o problema da determinação, para uma dada rugosidade, inclinação e área da secção transversal, da forma da secção a que corresponde a mínima resistência e conseqüentemente o máximo caudal. Não confundir com secção mais económica - f(escavação, tipo de revestimentos, etc.).

Pela expressão de Manning-Strickler:

$$Q = K_0 S_0 R^{\frac{2}{3}} (\sin \theta_0)^{\frac{1}{2}}$$

Com K_0 , S_0 , θ_0 dados do problema, o caudal será máximo quando o raio hidráulico ($R = S_0/\chi$) for máximo \rightarrow quando o perímetro molhado (χ) for mínimo.

Secção semicircular:

É a secção mais vantajosa para uma determinada área.

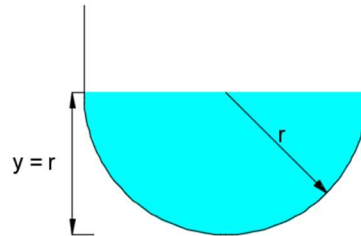


Figura 280 – Secção semicircular.

$$S = \frac{\pi r^2}{2}$$

$$\chi = \pi r$$

$$R = \frac{r}{2} = \frac{y}{2}$$

11.4.4 Problemas do movimento uniforme em canais

A precisão das fórmulas é menor do que aquelas utilizadas na cálculo e dimensionamento dos escoamentos sob pressão. Entre as razões que contribuem para isso, pode-se citar (Simões, 2011):

1. Grande número de problemas, com variados tipos e formas de canais, com secção molhada diferente, influenciando na perda de carga;
2. Dificuldade em assumir um valor correto para a rugosidade das paredes e do fundo do canal;
3. As fórmulas propostas foram deduzidas para canais de pequenas dimensões, sendo que o aumento de turbulência prejudica o desempenho do canal e conseqüentemente altera a qualidade do resultado.

Principais problemas ao nível de projeto (Netto, 1998):

1. O projeto de canais pode apresentar condições complexas que exigem a sensibilidade do projetista e o apoio com base em dados experimentais. O projeto de obras de grande importância deve ser executado em colaboração com um especialista;
2. Sabendo-se que os canais uniformes e o escoamento uniforme não existem na prática, as soluções são sempre aproximadas, não se justificando arredondamentos nos cálculos para além de 3 algarismos significativos;
3. Para os canais de grande declividade, recomenda-se a verificação das condições de escoamento crítico;

4. Em canais ou canaletas de pequena extensão não se justifica a aplicação de fórmulas práticas para a determinação da profundidade ou do caudal.

11.4.5 Regime uniforme crítico

O escoamento crítico num canal aberto ou canal coberto com uma superfície de água livre é caracterizado por várias condições (Fletcher & Grace, 1972):

- A energia específica é um mínimo para uma dada descarga;
- A descarga é um máximo para uma determinada energia específica;
- A força específica é um mínimo para uma dada descarga;
- A velocidade expressa em termos de pressão estática (em inglês, *velocity head*) é igual a metade da profundidade hidráulica num canal de pequena inclinação;
- O número Froude é igual a 1.0;
- A velocidade do escoamento num canal de pequena inclinação é igual à celeridade de pequenas ondas de gravidade em águas rasas.

Se o regime crítico de escoamento existe em todo o desenvolvimento, o escoamento no canal é um escoamento crítico, e a inclinação do canal está em declive crítico (i_c). Uma inclinação inferior a i_c causará um regime subcrítico e uma inclinação maior do que i_c causará um regime supercrítico. Um escoamento em ou perto do regime crítico pode não ser estável. Em projeto, se a profundidade for próxima à crítica ou crítica, a forma ou inclinação deve ser alterada para alcançar maior estabilidade hidráulica.

A velocidade crítica (U_c) pode ser calculada a partir da profundidade hidráulica crítica (y_c). Para um canal retangular, a profundidade do escoamento é igual à profundidade hidráulica ($y_n = y_c$) e a velocidade crítica do escoamento é:

$$U_c = \sqrt{gy_c}$$

11.5 Regime permanente gradualmente variado em canais

11.5.1 Equações teóricas do movimento gradualmente variado em canais

Escoamento em que a profundidade varia gradualmente ao longo do canal:

Equação da energia:

$$\frac{dE}{dS} = \sin \theta - J \wedge E = y \cos \theta + \frac{\alpha Q^2}{2gS^2} \text{ (Energia Específica)}$$
$$\frac{dE}{dS} = \cos \theta \frac{dy}{dS} - y \sin \theta \frac{d\theta}{dS} + \frac{Q^2}{2gS^2} \frac{d\alpha}{dS} + \frac{\alpha Q}{gS^2} \frac{dQ}{dS} - \frac{\alpha Q^2}{gS^3} \frac{dS}{dS}$$

Como:

$$\frac{dS}{dS} = \frac{\partial S}{\partial S} + b \frac{dy}{dS} \wedge Fr = \frac{\alpha b Q^2}{g S^3 \cos \theta}$$

Logo:

$$\frac{\alpha Q^2 dS}{g S^3 dS} = \frac{\alpha Q^2 \partial S}{g S^3 \partial S} + \frac{\alpha Q^2}{g S^3} b \frac{dy}{dS}$$

Sabendo que:

$$\frac{Fr}{\cos \theta} = \frac{\alpha b Q^2}{g S^3}$$

Vem:

$$\frac{dy}{dS} = \frac{\sin \theta - J}{(1 - Fr) \cos \theta} - \frac{\frac{\alpha Q}{g S^2} \frac{dQ}{dS}}{(1 - Fr) \cos \theta} + \frac{\frac{\alpha Q^2 \partial S}{g S^3 \partial S} - \frac{Q^2}{2g S^2} \frac{d\alpha}{dS} + y \sin \theta \frac{d\theta}{dS}}{(1 - Fr) \cos \theta}$$

Em canais prismáticos ($\theta = \text{cte.}$ e $\partial S / \partial S = 0$), com caudal constante ($Q = \text{cte.}$ e $\partial S / \partial S \approx 0$ $\partial \alpha / \partial s \approx 0$):

$$\frac{dy}{dS} = \frac{\sin \theta - J}{(1 - Fr) \cos \theta}$$

11.5.2 Regolfo em canais prismáticos com caudal constante

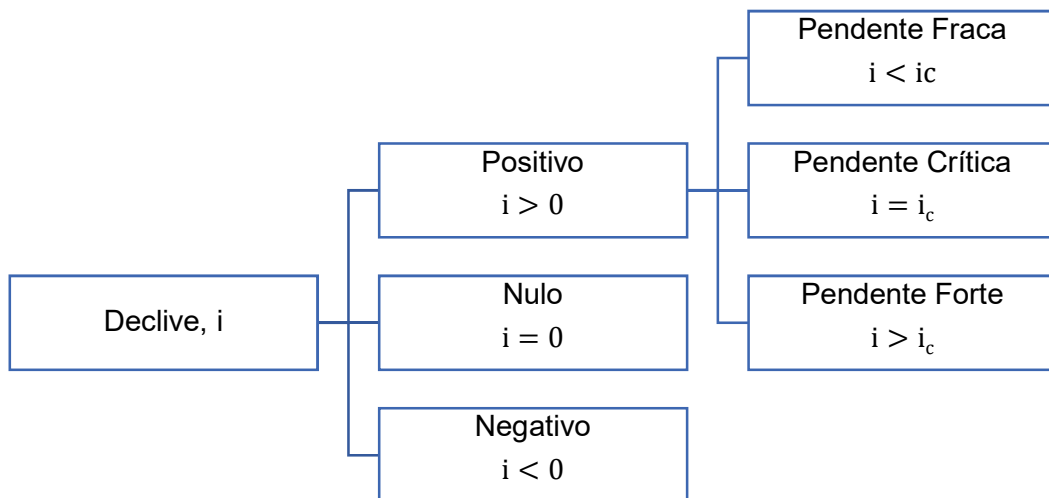


Figura 281 – Declive.

Valores de $\sin \theta - J$:

Para o regime uniforme em que no mesmo canal se escoaria o caudal Q :

$$Q = K S_n R_n^{2/3} (\sin \theta)^{1/2} \rightarrow \sin \theta = \frac{Q^2}{K^2 S_n^2 R_n^{4/3}}$$

Para o escoamento uniforme tangente (movimento fictício uniforme em que se escoaria o mesmo caudal num canal prismático com a mesma secção):

$$J = \frac{Q^2}{K^2 S^2 R^{4/3}}$$

Tabela 45 – Valores de $(\sin \theta - J)$.

$\sin \theta - J = \frac{Q^2}{K^2} \left(\frac{1}{S_n^2 R_n^{4/3}} - \frac{1}{S^2 R^{4/3}} \right)$	
y (Regime Variado)	$\sin \theta - J$
$y > y_n$	> 0
$y = y_n$	$= 0$
$y < y_n$	< 0

Valores de $(1 - Fr) \cos \theta$:

Tabela 46 – Valores de $[(1 - Fr) \cos \theta]$.

y (Regime Variado)	Fr	$(1 - Fr) \cos \theta$
$y > y_c$	< 1	> 0
$y = y_c$	$= 1$	$= 0$
$y < y_c$	> 1	< 0

Assim:

$y = y_n \Rightarrow dy/dS = 0 \Rightarrow y = \text{cte.}$, logo o declive da S.L. \approx Declive do talvegue;

$y = y_c \Rightarrow dy/dS = \infty \Rightarrow$ Distribuição de pressões não hidrostática; Equação não é válida.

Curvas de regolfo em canais de declive fraco, $i < i_c \wedge y_n > y_c$:

Um canal diz-se de declive fraco quando a sua inclinação é inferior à crítica. Nesta situação poderão então surgir as três configurações de curvas de regolfo que se vão apresentar na Tabela 47, cujas suas representações gráficas se apresentam na Figura 282.

Tabela 47 – Discretização de curvas de regolfo em canais de declive fraco.

y	$(1 - Fr) \cos \theta$	$\sin \theta - J$	dy/dS	Curva de Regolfo
$y > y_n$	> 0	> 0	> 0	I1, Curva de regolfo de elevação
$y_c < y < y_n$	> 0	< 0	< 0	I2, Curva de regolfo de abaixamento
$y < y_c$	< 0	< 0	> 0	I3

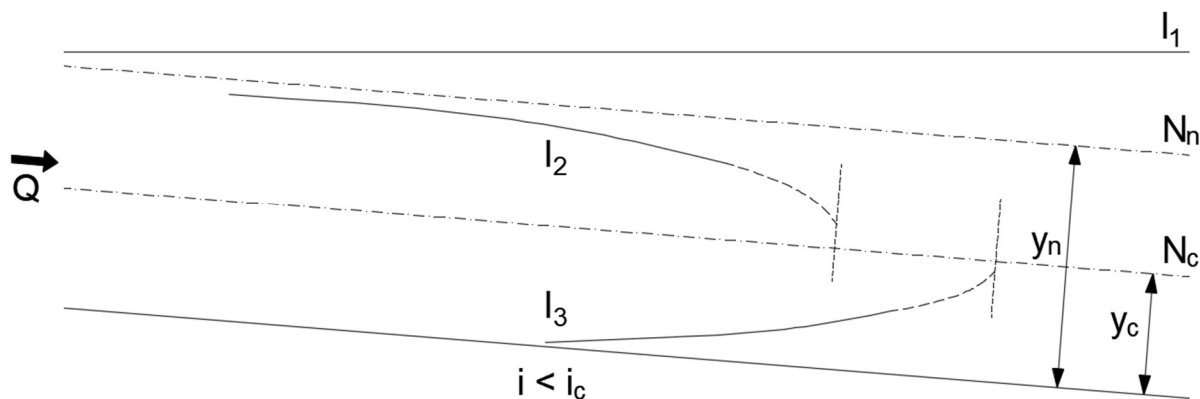


Figura 282 – Curvas de regolfo em canais de declive fraco (adaptado de Barbosa, 1982).

Assim, num canal prismático de declive fraco, para caudal constante, poderão ocorrer três curvas de regolfo distintas, geralmente designadas por curvas I1, I2 e I3 (Barbosa, 1982).

A curva I1 é uma curva de regolfo de elevação, pelo que a altura de água aumenta com o aumento da coordenada S. Esta curva tende para o nível normal a montante e a jusante tende para a horizontal dado que a altura de água tende para infinito e, por consequência, o número de Froude e a perda de energia por unidade de comprimento tendem para zero, o que se traduz numa assíntota horizontal.

A curva I2 é normalmente designada por curva de regolfo de abaixamento. Esta curva tende a aproximar-se do talvegue a jusante, dado que $dy/dS < 0$, ou seja, a curva tende para a o nível crítico, e a montante a altura tende a aproximar-se da altura normal do escoamento.

Por fim, a curva I3 caracteriza-se pelo aumento da sua altura de água com o aumento da coordenada S, tendendo para a altura crítica.

Curvas de regolfo em canais de declive crítico, $i = i_c \wedge y_n = y_c$:

Nos canais com a inclinação igual à crítica, Figura 283, dada a coincidência entre a altura normal e a altura crítica, podem ocorrer apenas duas configurações distintas para as curvas de regolfo, uma quando a altura da água correspondente ao regime é superior à crítica e a outra quando é inferior à crítica.

As curvas C1 e C3 caracterizam-se por um aumento da profundidade da água com o aumento de S, sendo que a curva C1 parte da altura crítica e sofre um aumento, onde, ao passo que a curva C3 atinge a altura máxima com valores próximos do crítico e da altura normal (dado que nesta situação os dois valores, isto é, a altura crítica e a altura normal coincidem).

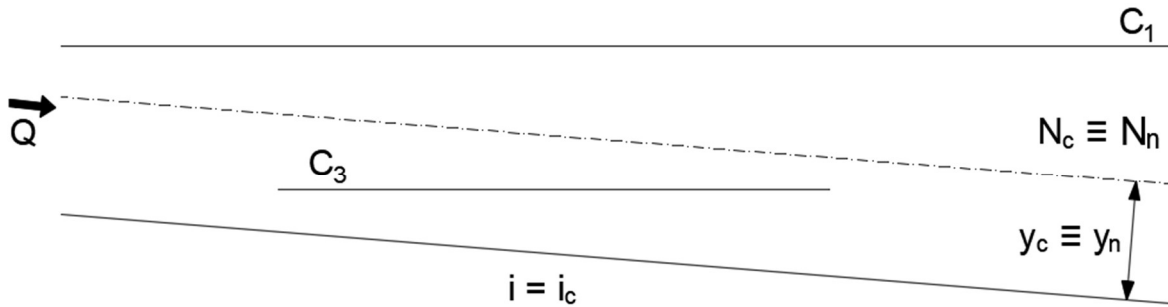


Figura 283 – Curvas de regolfo em canais de declive crítico (adaptado de Barbosa, 1982).

$$\frac{dy}{dS} = \frac{\sin \theta - J}{(1 - Fr) \cos \theta} = \tan \theta \frac{1 - \frac{J}{\sin \theta}}{1 - Fr}$$

Utilizando a fórmula de Chézy:

$$\frac{dy}{dS} = \tan \theta \frac{1 - \frac{S_n^2 R_n C_n^2}{S^2 R C^2}}{1 - \frac{\alpha b Q^2}{g \cos \theta S^3}}$$

$$Fr = \frac{\alpha b_c Q^2}{g \cos \theta S_c^3} = 1 \Rightarrow \frac{\alpha Q^2}{g \cos \theta} = \frac{S_c^3}{b_c} \text{ (Em regime crítico)}$$

$$\frac{\alpha b Q^2}{g \cos \theta S^3} = \frac{b S_c^3}{b_c S^3} = \frac{b S_c^2 \chi_c R_c}{b_c S^2 \chi R} \Rightarrow \frac{dy}{dS} = i \frac{1 - \frac{S_n^2 R_n C_n^2}{S^2 R C^2}}{1 - \frac{b S_c^2 \chi_c R_c}{b_c S^2 \chi R}}$$

$$\begin{cases} C_n^2/C^2 \cong 1 \\ b\chi_c/(b_c\chi) \cong 1 \end{cases} \Rightarrow \frac{dy}{dS} = i \frac{1 - \frac{S_n^2 R_n}{S^2 R}}{1 - \frac{S_c^2 R_c}{S^2 R}}$$

Logo, $dy/dS = i = \tan \theta$.

Em canais de declive crítico, as curvas de regolfo são aproximadamente retílineas e horizontais.

Curvas de regolfo em canais de declive forte, $i > i_c \wedge y_n < y_c$:

Designam-se por canais com inclinação forte aqueles que apresentam uma inclinação superior à crítica. Nesta situação podem surgir três configurações (Figura 284) possíveis para as curvas de regolfo, cujas características estão resumidas na Tabela 48.

Tabela 48 – Discretização de curvas de regolfo em canais de declive forte.

y	$(1 - Fr) \cos \theta$	$\sin \theta - J$	dy/dS	Curva de Regolfo
$y > y_c$	> 0	> 0	> 0	S1
$y_n < y < y_c$	> 0	> 0	< 0	S2
$y < y_n$	< 0	< 0	> 0	S3

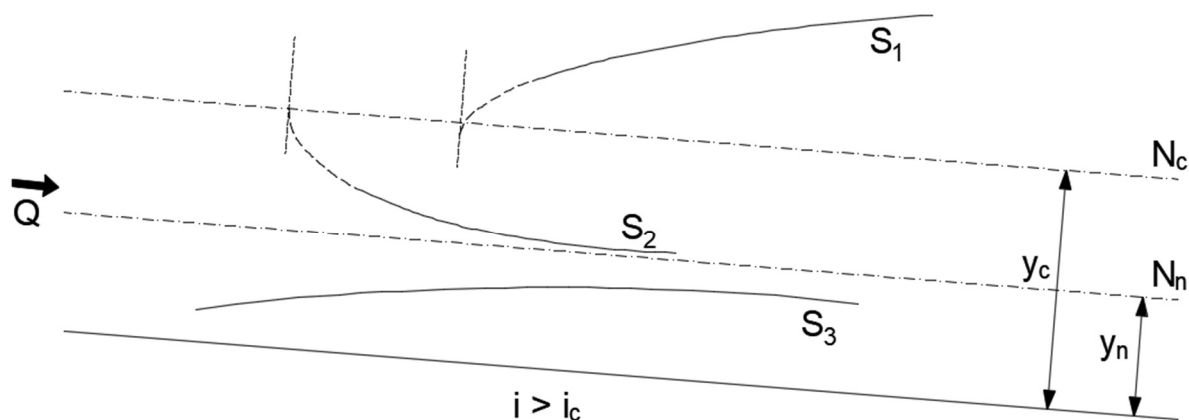


Figura 284 – Curvas de regolfo em canais de declive forte (adaptado de Barbosa, 1982).

A curva S1 assume um aumento das alturas de água de montante para jusante, tendendo de uma altura próxima da normal até uma profundidade de água superior a esta. Por sua vez, a configuração S2 apresenta um decréscimo da profundidade de água, compreendido desde a altura crítica do escoamento até à altura normal. A configuração S3 apresenta uma variação da altura de água para um valor inferior à altura normal, tendendo para a altura normal do escoamento.

Curvas de regolfo em canais de declive nulo (talvegue horizontal), $i = 0$:

Dado o canal não ter inclinação,

$$\frac{dy}{dS} = - \frac{J}{1 - Fr}$$

Analisando a equação anterior, pelo facto de a perda de energia por unidade de comprimento ser sempre positiva ($J > 0$), o quociente dy/dS é positivo ou negativo, consoante o valor de Froude seja maior ou menor à unidade.

Em canais horizontais não é possível definir a altura normal, pelo que vão existir apenas duas configurações de curvas de regolfo que se formam quando a altura de água no canal é maior ou menor à altura crítica. Em Barbosa (1982), definiu-se a configuração H2 quando a altura da água é superior à crítica, havendo um decrescimento sucessivo das alturas de água até à altura crítica. A curva H3 dá-se para um aumento das alturas de água desde profundidades de água inferiores à crítica até à altura crítica.

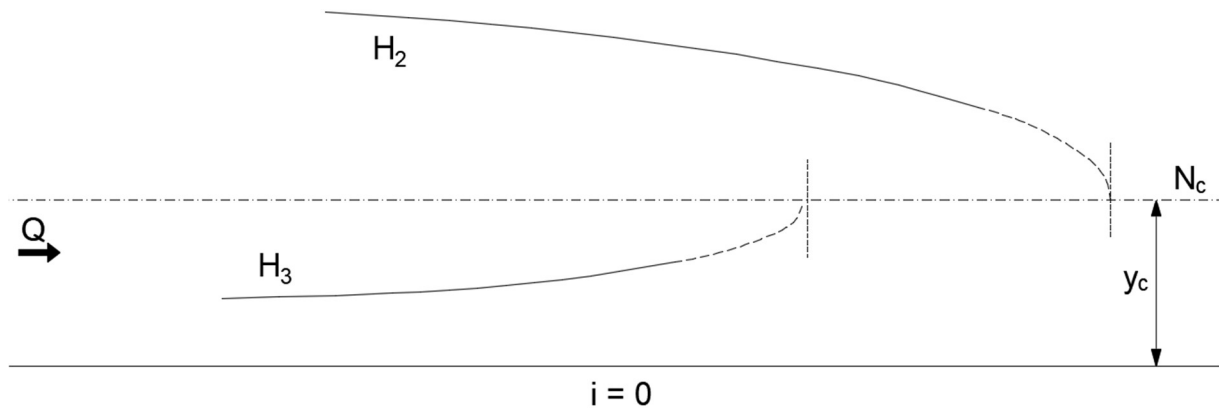


Figura 285 – Curvas de regolfo em canais de declive nulo (adaptado de Barbosa, 1982).

Curvas de regolfo em canais de declive negativo, $i < 0$:

$$\frac{dy}{dS} = \frac{\sin \theta - J}{(1 - Fr) \cos \theta}; \sin \theta - J < 0$$

Nesta situação, o canal apresenta uma inclinação oposta ao sentido do escoamento, não sendo deste modo possível definir a altura normal, sendo que esta situação é similar à anterior. Assim, surgem as configurações N2 e N3, referentes às situações em que a altura da água é superior ou inferior à altura crítica, respetivamente.

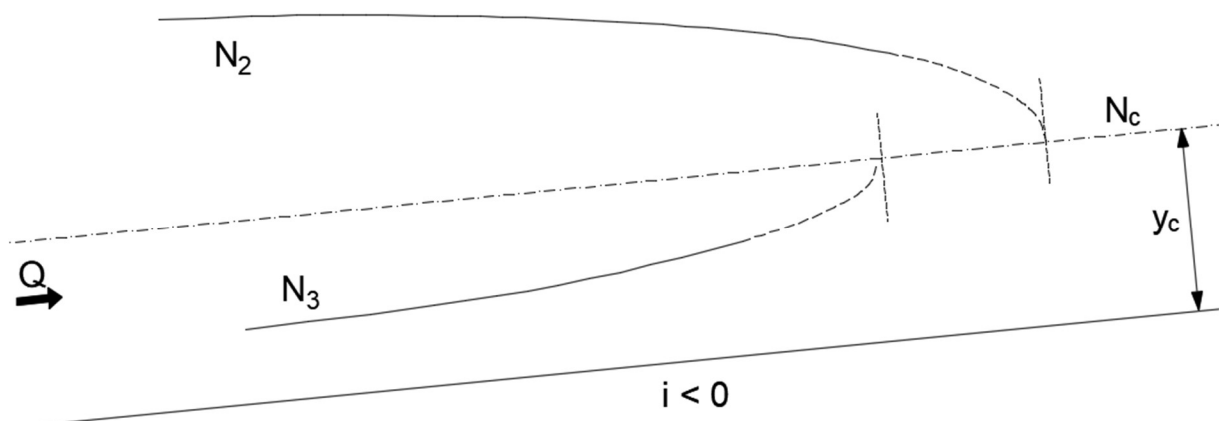


Figura 286 – Curvas de regolfo em canais de declive negativo (adaptado de Barbosa, 1982).

Determinação das curvas de regolfo:

Por integração numérica:

$$\frac{dy}{dS} = \frac{\sin \theta - J}{(1 - Fr) \cos \theta} \Rightarrow dS = \frac{(1 - Fr) \cos \theta}{\sin \theta - J} dy$$

Se:

$$\frac{(1 - Fr) \cos \theta}{\sin \theta - J} = \Omega y$$

Então:

$$dS = \Omega(y) dy$$

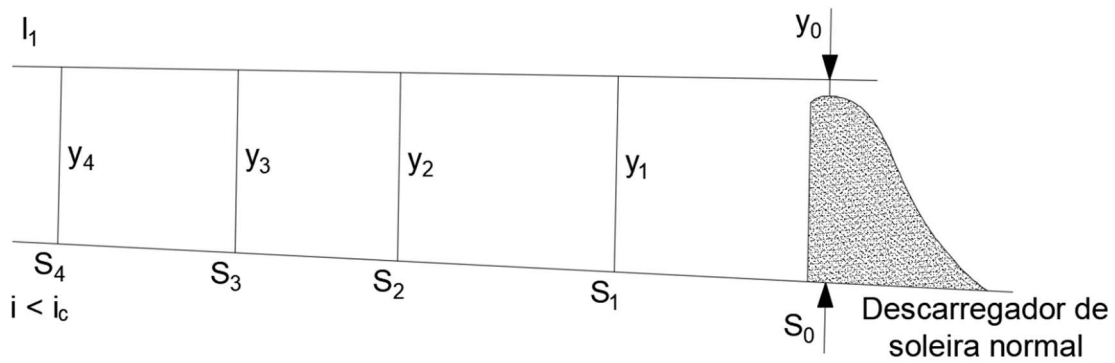


Figura 287 – Integração numérica de curvas de regolfo.

$$S_{l+1} - S_l = \int_{y_l}^{y_{l+1}} \Omega(y) dy$$

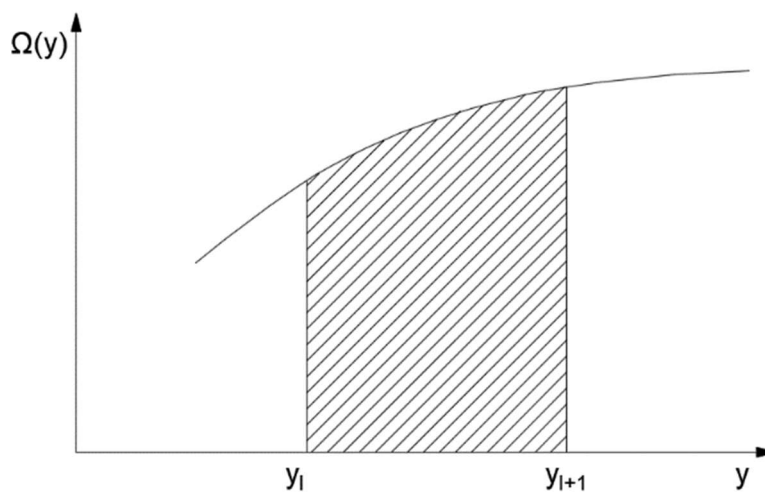


Figura 288 – Distância entre S_{l+1} e S_l .

Pelo método das diferenças finitas com aproximações sucessivas:

A determinação do comprimento das curvas de regolfo pela aplicação do método das diferenças finitas, consiste no somatório dos Δs obtidos, conhecendo as características do escoamento em duas secções sucessivas, isto é, na secção l e $l + 1$. Ou seja, conhecendo as alturas do escoamento em dois pontos do canal, é possível determinar a sua energia e a sua perda de carga contínua, e assim, por aplicação direta da equação conhecer a distância entre essas duas secções. O somatório de todos os Δs traduzir-se-á no comprimento total da curva de regolfo. A precisão do resultado será tanto maior quanto mais pequenos forem os intervalos considerados.

A partir da equação de Bernoulli:

$$\frac{d}{dS} \left(z + y \cos \theta + \frac{\alpha U^2}{2g} \right) = -J$$

Considerando um troço de canal,

$$(z_{l+1} - z_l) + (y_{l+1} - y_l) \cos \theta + \left(\frac{\alpha_{l+1} U_{l+1}^2}{2g} - \frac{\alpha_l U_l^2}{2g} \right) = -\frac{J_l + J_{l+1}}{2} \Delta S$$

Em que J_{l+1} e J_l representam as perdas de energia por unidade de comprimento dos escoamentos uniformes tangentes.

Procedimento:

1. Fixa-se ΔS a partir da secção S_l ;
2. Itera-se para S_{l+1} , considerando inicialmente $J_{l+1} = J_l$;
3. Erro em $y_{l+1} < \text{Tolerância}$:
 - a. Sim, avançar para o passo 4;
 - b. Não, retornar ao passo 2;
4. Avança-se para o trecho seguinte.

11.5.3 Regolfo em canais com caudal variável

Canal coletor ($\Delta M = 0 \wedge Q_1 < Q_2$)

Para o caso de um canal coletor, é corrente considerar-se que a transição se efetua com conservação da quantidade de movimento total ($dM/ds = 0$), desde que a entrada do caudal adicional se efetue perpendicularmente ao escoamento (para a perturbação ser mínima) (Braga, 2014).

$$\begin{cases} Q = a \cdot s \\ Q_2 = a \cdot L \end{cases}$$

$$\frac{dM}{ds} = \gamma S \cdot \frac{dh}{ds} - \alpha' \frac{\gamma b}{g} \cdot \frac{Q^2}{S^2} \cdot \frac{dh}{ds} + 2\alpha' \frac{\gamma}{g} \cdot \frac{Q}{S} \cdot \frac{dQ}{ds}$$

$$\tau_0 = \gamma \cdot J \cdot R \Rightarrow \frac{dM}{ds} = \gamma S \left(\sin \theta - \frac{\tau_0}{\gamma R} \right)$$

Equação do regolfo para canal coletor:

$$\frac{dh}{ds} = \frac{\sin \theta - J - \frac{2Q}{gS^2} \cdot \frac{dQ}{ds}}{1 - Fr^2}$$

Canal Descarregador ($\Delta E = 0 \wedge Q_1 > Q_2$)

No caso de um canal descarregador, considera-se que o escoamento se dá sem perda de energia específica ($dE/ds = 0$), desde que o fundo do canal seja constante, assim como a crista do descarregador (Braga, 2014).

$$\begin{cases} Q = Q_1 - a \cdot s \\ Q_2 = Q_1 - a \cdot L \end{cases}$$

$$\frac{dE}{ds} = \cos \theta \cdot \frac{dh}{ds} - \alpha \frac{bQ^2}{gS^3} \cdot \frac{dh}{ds} + \underbrace{\alpha \cdot \frac{Q}{gS^2} \cdot \frac{dQ}{ds}}_{\text{Termo novo}} = 0$$

Equação do regolfo para canal descarregador lateral:

$$\frac{dh}{ds} = - \frac{\frac{Q}{gS^2} \cdot \frac{dQ}{ds}}{1 - Fr^2}$$

Variação do caudal ao longo do descarregador:

$$- \frac{dQ}{ds} = C \sqrt{2g(h - p^{3/2})}$$

Em que C é o coeficiente de descarga do descarregador.

Substituindo:

$$\frac{dh}{ds} = \frac{Q}{gS^2(1 - Fr^2)} - \frac{\frac{Q}{gS^2} \cdot \frac{dQ}{ds}}{1 - Fr^2}$$

Para E = cte., tem-se:

$$Q = S \cdot \sqrt{2g(H_0 - h)}$$

Considerando uma secção retangular ($S = b \cdot h$), dh/ds vem:

$$\frac{dh}{ds} = \frac{2C}{b} \cdot \frac{\sqrt{(H_0 - h)(h - p^{3/2})}}{3h - 2H_0}$$

Merece referência especial o caso em que há um descarregador lateral precedido de um canal de declive fraco e seguido de um canal de declive forte. O regime crítico, ligando o regime lento, de montante, ao regime rápido de jusante, não pode situar-se na secção de jusante do descarregador lateral: com efeito, admitida a constância da energia específica, ter-se-ia na secção de montante, em que o caudal é necessariamente maior, uma energia específica insuficiente. O regime crítico na hipótese da constância da energia específica localizar-se-ia no início do descarregador lateral, tendo-se ao longo deste um regolfo em regime rápido (Braga, 2014).

11.6 Regime permanente rapidamente variado em canais

11.6.1 Considerações gerais

No escoamento permanente rapidamente variado as características do escoamento variam de forma repentina de uma secção para a outra. Este tipo de escoamento, fortemente dependente das condições de fronteira, ocorre geralmente associado a singularidades e estruturas hidráulicas. Neste tipo de escoamento, a linha da superfície livre apresenta uma acentuada curvatura (Vasconcelos, 2005).

O conjunto de peculiaridades associadas a este tipo de escoamento condiciona a ocorrência de discontinuidades no escoamento, acarretando a não validade das expressões estabelecidas para o estudo dos escoamentos uniforme e gradualmente variado (Vasconcelos, 2005).

De forma geral, os aspetos deste tipo de escoamento inviabilizam o estabelecimento de fórmulas genéricas, aplicáveis a todos os tipos de situações. O tratamento teórico dos diversos tipos de situação, quando possível, pode ser efetuado com a aplicação dos princípios de Conservação de Energia e de Quantidade de Movimento (Vasconcelos, 2005).

As situações habituais de escoamento rapidamente variado são associadas a estruturas hidráulicas, tais como: vertedores, comportas, dissipadores de energia, degraus, obstáculos, transições bruscas, os dispositivos para medição de caudal, entre outros (Figura 289) (Vasconcelos, 2005).

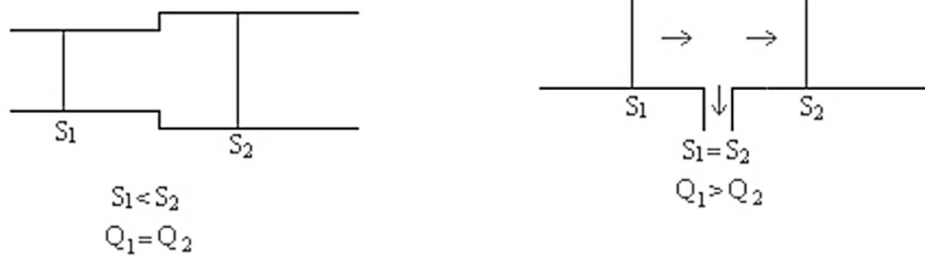


Figura 289 – Exemplos de escoamento permanente rapidamente variado (Vasconcelos, 2005).

11.6.2 Ressalto hidráulico

Características e classificações

O ressalto hidráulico é um tipo de escoamento rapidamente variado. É um escoamento provocado pela passagem brusca do regime de escoamento rápido a lento, sendo geralmente um fenómeno que envolve grande dissipação de energia (Nalluri & Featherstone, 2001). Essa perda de energia é provocada pela turbulência presente no fenómeno, mas também pelo atrito entre o escoamento e as fronteiras sólidas (Lencastre, 1972).

O ressalto hidráulico é vulgarmente utilizado em bacias de dissipação instaladas a jusante dos descarregadores das obras hidráulicas (Figura 290). Com efeito, o caudal descarregado pelos órgãos de descarga, descarregadores de cheia, em regime rápido, pode criar erosões a jusante, algo indesejável sob o ponto de vista da segurança das referidas estruturas.

Surge a necessidade de construir uma bacia de dissipação, com o objetivo de provocar o ressalto hidráulico no seu interior e a consequente passagem do regime rápido ao regime lento, promovendo uma significativa dissipação de energia de forma a evitar problemas de instabilidade. Logo, o comprimento da bacia de dissipação vai ser definido em função do comprimento do ressalto.

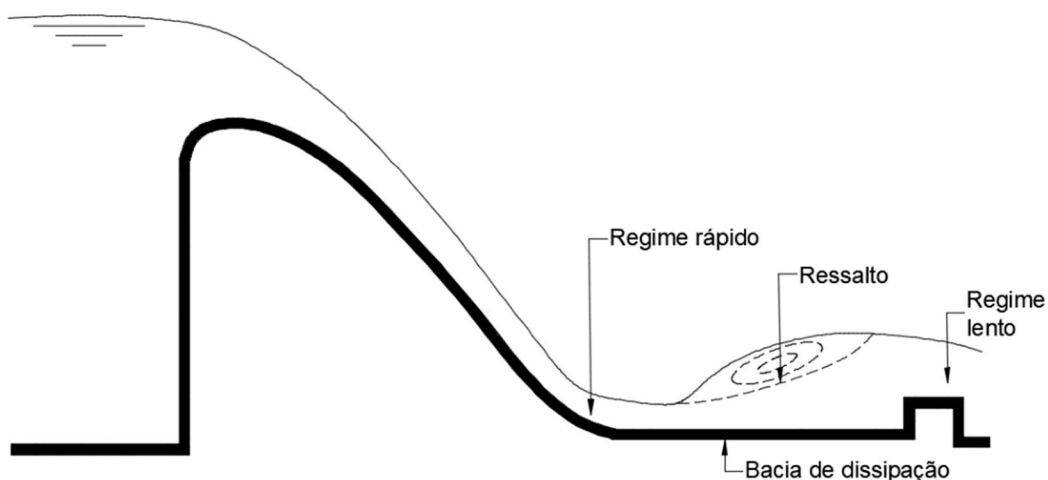


Figura 290 – Ressalto hidráulico (adaptado de Barbosa, 1982).

Ao longo dos anos vários autores têm-se debruçado no estudo do ressalto hidráulico, ao nível de distintos aspetos como a comprimento do ressalto, a classificação dos ressaltos, entre outros, realizando vários estudos e analisando os aspetos que influenciam o fenómeno, como por exemplo, a energia dissipada durante o fenómeno e as diferentes classificações dos autores em função do parâmetro de Froude. Analisando as várias propostas dos diferentes autores chegou-se à conclusão que a classificação do ressalto hidráulico varia entre autores.

Barbosa (1982), apresenta vários tipos de ressalto, sendo a sua classificação feita em função do valor do número de Froude, na secção de montante,

$$Fr = \frac{bQ^2}{gS_n^3 \cos \theta}$$

Para números de Froude compreendidos entre 1 e 4 o ressalto diz-se ondulado, não se apresentando muito bem definido, revelando ondulações superficiais que vão diminuindo à medida que o escoamento segue para jusante (Figura 291).

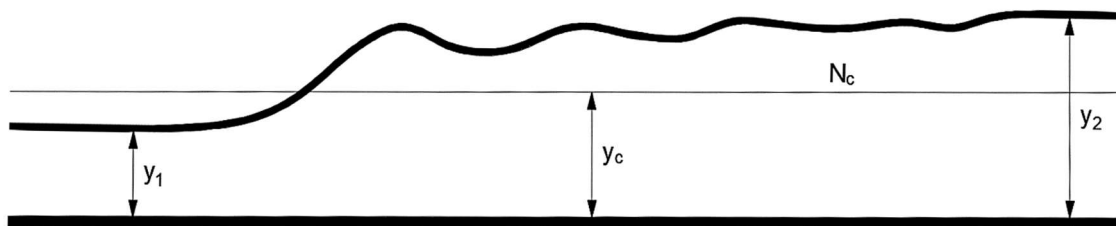


Figura 291 – Ressalto hidráulico ondulado (adaptado de Barbosa, 1982).

Para valores do número de Froude superiores a 4, o ressalto diz-se ordinário ou livre. Neste ressalto hidráulico existe uma sobreposição de uma camada de turbilhões de eixo horizontal sob a zona de expansão da corrente líquida, sendo que a camada de turbilhões permanece um curto intervalo de tempo, dado serem bruscamente arrastadas para o escoamento inferior. Este fenómeno acontece com grande intensidade e uma considerável dissipação de energia. (Figura 292).

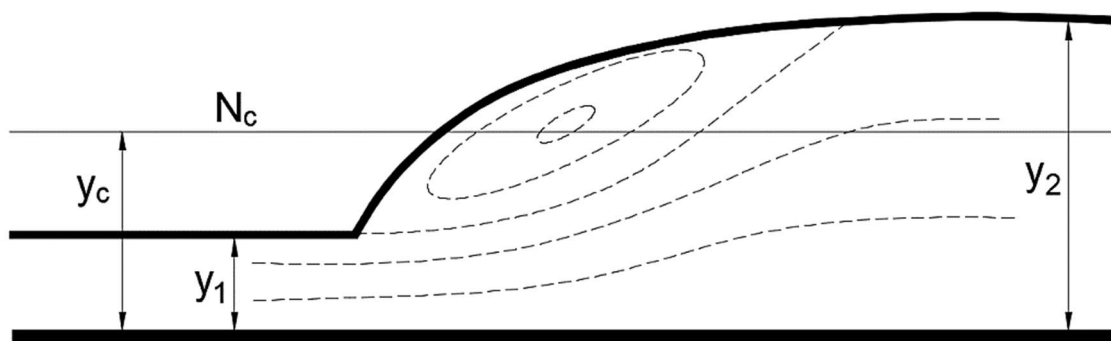


Figura 292 – Ressalto hidráulico ordinário (adaptado de Barbosa, 1982).

Por fim, resta referir o ressalto afogado (Figura 293). Este ressalto poderá ocorrer quando um ressalto ordinário sofre efeito da subida do nível da água a jusante,

criando-se um regolfo de elevação que empurra o ressalto para montante, até que este encontre o dispositivo (ou obstáculo) que provoca o regime rápido (por exemplo, o descarregador), fixando-se nesse ponto. Esse efeito é tanto mais acentuado quanto maior for a desproporção entre a profundidade de água real e a profundidade que corresponderia ao ressalto livre.

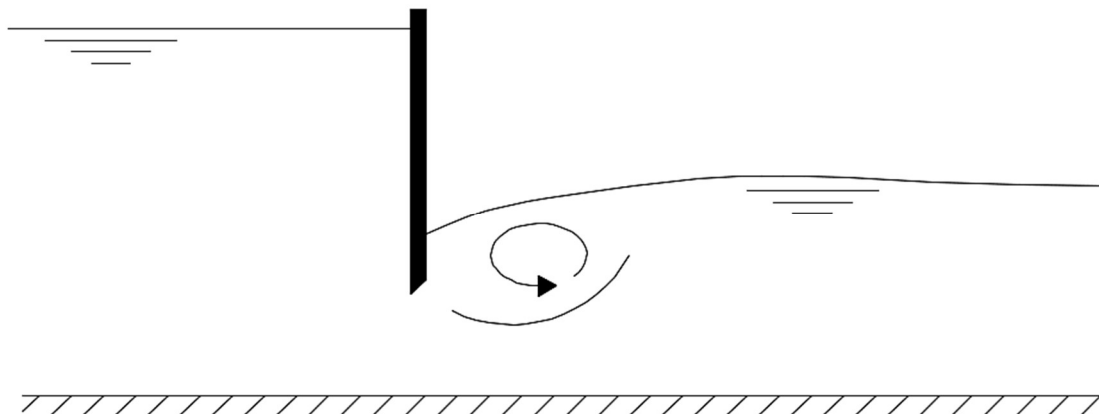


Figura 293 – Ressalto afogado (adaptado de Nalluri e Featherstone, 2001).

Peterka (1958) apresenta uma classificação distinta (Figura 294) da proposta por Barbosa (1982), uma vez mais, classificando o ressalto mediante o cálculo do número de Froude na secção a montante, sendo este calculado pela aplicação da seguinte equação:

$$Fr_1 = \frac{U_1}{\sqrt{gy_1}}$$

Em que:

U_1 traduz a velocidade média do escoamento;

y_1 é a altura conjugada 1;

g é a aceleração gravítica.

Para valores do número de Froude inferiores ou iguais a 1, o regime é lento ou crítico, não ocorrendo a formação de ressalto (Lencastre A., 1983; Rijo, 2010).

Para valores do número de Froude compreendidos entre 1 e 1.7, o autor classifica de ressalto ondulado (Figura 294b), sendo este caracterizado sobretudo por ondulações moderadas à superfície (Peterka, 1958).

Entre 1.7 e 2.5, o ressalto diz-se fraco ou pré-ressalto (Figura 294c), dado haver a formação de um rolo (Peterka, 1958).

Com o número de Froude a variar entre 2.5 e 4.5, o autor classifica o ressalto de oscilante (Figura 294d) e apresenta ondulações fortes (Peterka, 1958).

Para valores compreendidos entre 4.5 e 9, o ressalto diz-se estável (Figura 294e) e apresenta uma estrutura bem definida, havendo turbulência dentro dos limites do ressalto e não apresenta grandes ondulações (Peterka, 1958).

No ressalto estável, o fenómeno é bem caracterizado e localizado, sendo preferido no dimensionamento, principalmente para dissipação de energia. Neste caso, a dissipação de energia varia entre 45% e 70% de energia disponível a montante.

Por fim, para valores superiores a 9, o ressalto é classificado como forte (Figura 294f) e caracteriza-se pela sua grande turbulência (Peterka, 1958).

Para o ressalto forte, apesar de indicar um potencial de dissipação maior, notam-se massas de fluido que rolam para baixo no início do ressalto, provocando ondas significativas para jusante impróprias aos dimensionamentos. Não é utilizado em construções hidráulicas, devido aos efeitos colaterais sobre as estruturas de dissipação, como processos abrasivos e cavitação.

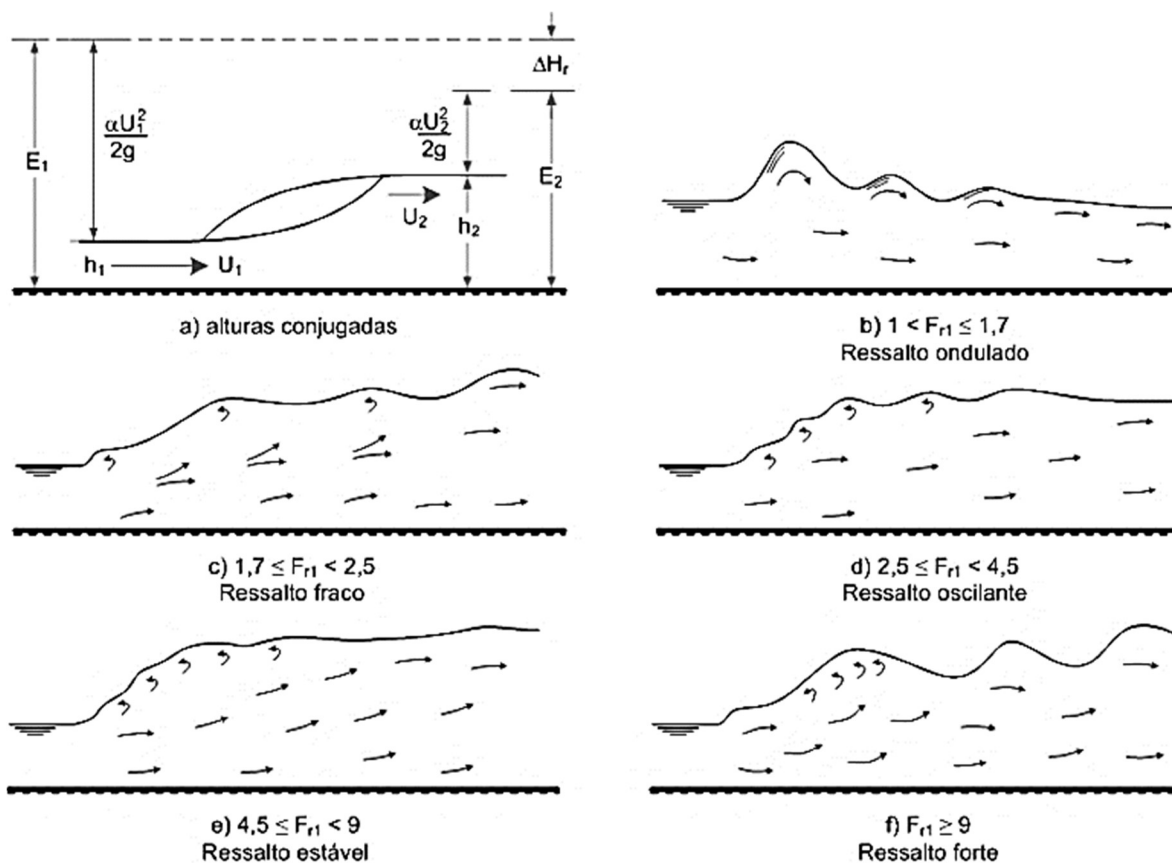


Figura 294 – Formas do ressalto hidráulico (Lencastre, 1983).

Caracterização e localização do ressalto hidráulico

No estudo do ressalto hidráulico o conhecimento das alturas conjugadas (Figura 294a) assume grande importância. Vários autores têm ao longo dos anos sugerido diferentes propostas para o seu cálculo (Lencastre A., 1972).

Por exemplo, Barbosa (1982), aplica o teorema da quantidade de movimento total, através da expressão da distribuição das pressões hidrostáticas, na secção a montante e jusante (Lencastre A., 1972).

Neste caso, não é possível aplicar o teorema de Bernoulli dado que no ressalto há uma perda de energia considerável e esta não é conhecida (Lencastre A., 1972).

$$M = \gamma \left(S\eta \cos \theta + \frac{\alpha'}{g} \cdot \frac{Q^2}{S} \right)$$

No estudo deste fenómeno, considera-se que durante o ressalto a quantidade de movimento total se mantém constante. Para tal:

$$M_1 = M_2$$

$$S_1\eta_1 \cos \theta + \frac{\alpha'_1}{g} \cdot \frac{Q^2}{S_1} = S_2\eta_2 \cos \theta + \frac{\alpha'_2}{g} \cdot \frac{Q^2}{S_2}$$

Portanto, aplicando a equação anterior, possibilita o cálculo de y_2 , conhecendo o valor de y_1 (valor da altura de água na secção inicial) normalmente conhecida, ou vice-versa.

Em Quintela (2005), recorrendo novamente ao teorema da continuidade de movimento, o autor apresenta a seguinte proposta para o cálculo das alturas conjugadas, para o estudo do ressalto em canais retangulares.

$$y_1^* = -\frac{y_2}{2} + \sqrt{\frac{y_2^2}{4} + \frac{2U_2^2 y_2}{g}}$$

$$y_2^* = -\frac{y_1}{2} + \sqrt{\frac{y_1^2}{4} + \frac{2U_1^2 y_1}{g}}$$

Uma vez apresentada uma formulação para o cálculo das alturas conjugadas, é possível agora calcular a perda de energia, por Barbosa (1982).

$$\Delta E = y_1 \cos \theta + \frac{\alpha'_1}{2g} \cdot \frac{Q^2}{S_1} - \left(y_2 \cos \theta + \frac{\alpha'_2}{2g} \cdot \frac{Q^2}{S_2} \right)$$

É possível ainda calcular a perda de energia graficamente (Figura 295), representando em simultâneo a curva de variação da quantidade de movimento total e a curva de variação da energia específica, ambas em função da profundidade da água.

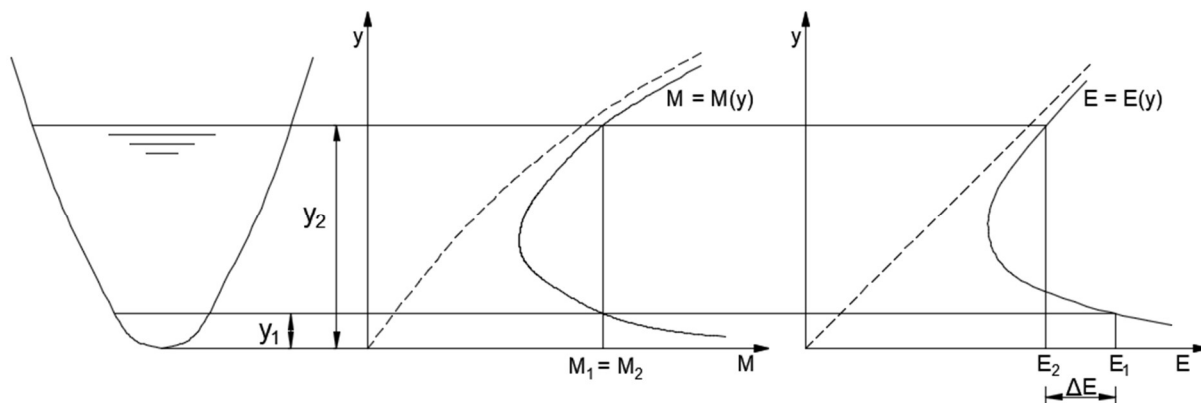


Figura 295 – Perdas de energia em função das alturas conjugadas do ressalto (adaptado de Barbosa, 1982).

Por fim, para o ressalto ficar totalmente caracterizado, falta definir o seu comprimento e a sua localização.

No que respeita ao seu comprimento, Barbosa (1982) apresenta uma proposta para a determinação do comprimento do ressalto graficamente (Figura 296) em função do número de Froude na secção de montante para canais de secção transversal retangular e da altura conjugada a jusante.

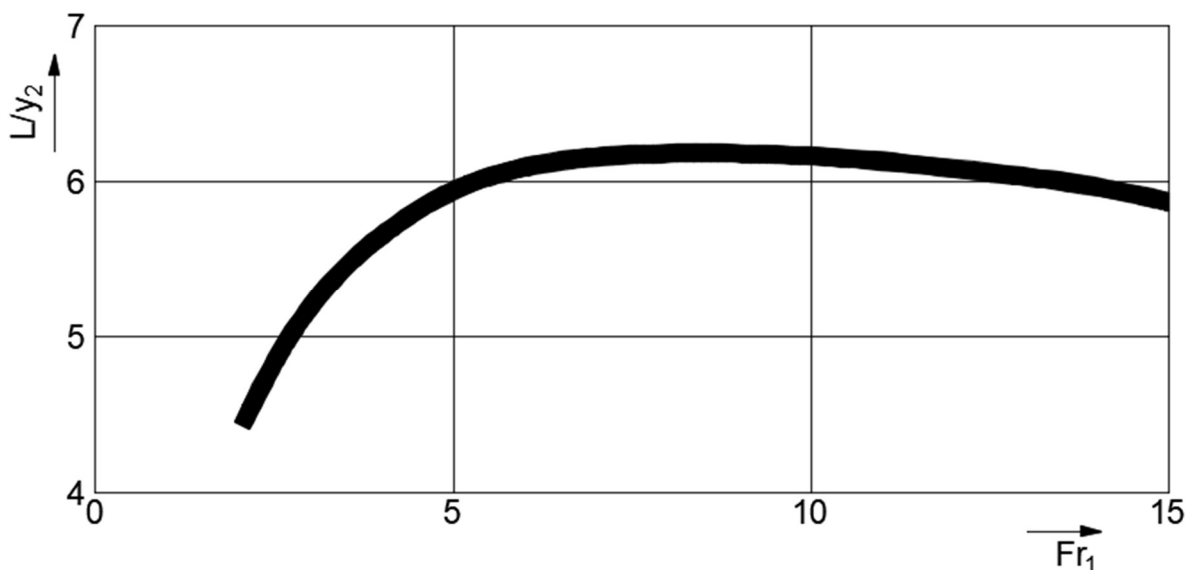


Figura 296 – Comprimento do ressalto (adaptado de Barbosa, 1982).

Teixeira (2003), realizou um trabalho de recolha de diferentes propostas matemáticas para o cálculo do comprimento do ressalto, realizadas por distintos autores e diferentes condições e ensaio (Tabela 49).

Em relação aos parâmetros: D_1 representa a altura conjugada 1, D_2 a altura conjugada 2 e Fr o número de Froude na secção 1.

Tabela 49 – Síntese de propostas para o cálculo do comprimento do ressalto.

Autor	Ano	Equação
Riegel	1917	$L = 5(D_2 - D_1)$
Woycicki	1934	$L = (D_2 - D_1) \left(8 - \frac{0.05 \times D_2}{D_1} \right)$
Sanetana	1934	$L = 6(D_2 - D_1)$
Chertoussov	1935	$L = 10.3D_1(Fr - 1)^{0.81}$
Aravin	1935	$L = 5.4(D_2 - D_1)$
Bakhmeteff-Matzke	1936	$L = 5(D_2 - D_1)$
Kinney	1941	$L = 6.02(D_2 - D_1)$
Posey	1941	$L = 4.5 - 7(D_2 - D_1)$
Wu	1949	$L = 10(D_2 - D_1)Fr^{-0.16}$
Peterka	1957	$L = 6.1D_2$
Elevatorski	1959	$L = 6.9(D_2 - D_1)$
Silvester	1964	$L = 9.75D_1(Fr - 1)^{1.61}$
Marques et al.	1997	$L = 8.5(D_2 - D_1)$

Para a localização do ressalto é necessário conhecer as características do escoamento em duas secções de controlo, uma a montante e outra a jusante do ressalto, podendo esta ser realizada por dois modos distintos:

- Calculando as alturas conjugadas das sucessivas alturas de água determinadas para uma curva de regolfo correspondente ao regime rápido, obtendo-se assim uma curva de alturas conjugadas que quando intersectada com a curva de regolfo do regime lento, define assim a localização do ressalto;
- Traçando-se as linhas de quantidades de movimento total correspondentes às curvas de regolfo relativas aos regimes rápidas e lentas, o ponto de interseção corresponde à localização do ressalto hidráulico.

No início deste subcapítulo foi referido que o ressalto tem origem na mudança brusca do regime rápido para o regime lento. Importa agora apresentar diferentes formas de provocar este fenómeno hidráulico.

O ressalto pode ser provocado por uma sobrelevação, por um descarregador de soleira espessa, pela passagem de um reservatório para um canal de declive forte, pela passagem do escoamento por uma comporta e por fim, pelo alargamento ou estreitamento do canal.

O fenómeno ressalto hidráulico é correntemente aplicado em estações de abastecimento de água ou de tratamento de águas residuais, para se provocar a mistura, através da turbulência gerada, de substâncias para esse efeito, encontrando assim um método eficaz de mistura.

As soleiras Venturi e Parshal são mais dois exemplos da aplicação do ressalto hidráulico, possibilitando assim a medição do caudal com rigor, bem como a mistura de substâncias no seu interior, através da contração e/ou sobrelevação da secção transversal do canal, tendo em atenção que o efeito do escoamento de jusante não se faz sentir a montante.

A medição do caudal através da aplicação das soleiras Venturi (Figura 297) é realizada conhecendo as características do escoamento a montante e na secção de controlo (secção contraída). No caso de o regime de escoamento ser rápido, imediatamente a jusante da soleira o escoamento tenderá para a altura normal. Pelo contrário, se o regime de escoamento for lento, dar-se-á o ressalto hidráulico (Henriques *et al.*, 2006).

Em conclusão, poderá assumir-se que a soleira Venturi deverá ser dimensionada de modo a funcionar em descarga livre para a gama de caudais que irão circular no equipamento, isto é, o regime passará pelo regime crítica na zona do estreitamento, de modo a garantir que haja o ressalto hidráulico (Henriques *et al.*, 2006).

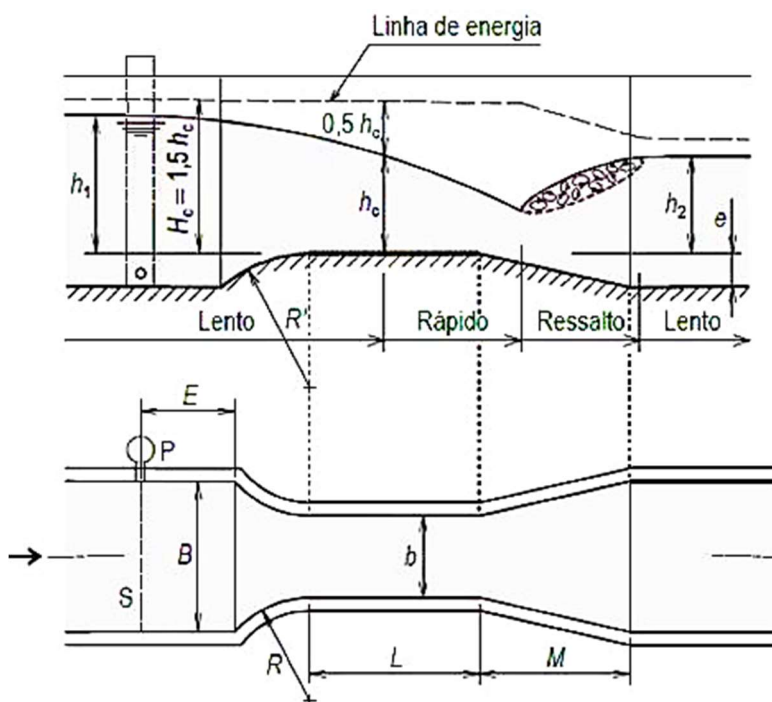


Figura 297 – Soleiras Venturi (Henriques *et al.*, 2006).

Nas soleiras Venturi o cálculo do caudal é feito através de,

$$Q = C_d \cdot \sqrt{g} \cdot b \cdot s^{3/2} \cdot h_1^{3/2}$$

onde s é dado por:

$$s = \frac{1}{0.5 + \cos \left[\frac{2}{3} \cdot \sin^{-1} \left(\frac{b}{B} \right) \right]}$$

onde b refere-se à largura da zona contraída do canal, s representa um valor constante da relação de submersão, h_1 traduz-se na altura do escoamento a montante da secção contraída, B é a largura total do canal onde a soleira Venturi está inserida e por fim, C_d representa o coeficiente de descarga. De referir que o coeficiente de descarga (C_d) tem em conta os efeitos da perda de carga por atritos e da curvatura das linhas de corrente. O seu valor varia entre 0.95 e 0.99.

Porém, este equipamento apresenta algumas condicionantes sob o ponto de vista de dimensões e de operacionalidade, nomeadamente (Henriques *et al.*, 2006)

- A largura da zona contraída deverá ser maior ou igual a 9 cm;
- $\left(\frac{b}{B} \right) \left(\frac{h_1}{h_1 - e} \right) \leq 0.7$;
- $\frac{h_1}{b} \leq 3$;
- $0.005 \text{ m} \leq h_1 \leq 1.8 \text{ m}$.

A soleira Parshall (Figura 298) é outro exemplo de um dispositivo de medição de caudais, sendo uma variante das soleiras Venturi, distinguindo-se pelas suas dimensões normalizadas, e as suas formas angulosas (Henriques *et al.*, 2006).

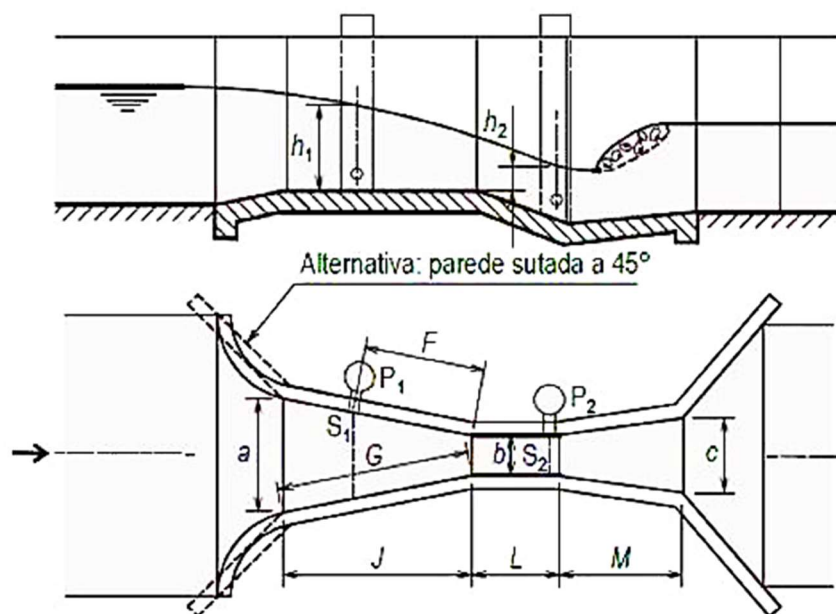


Figura 298 – Soleira Parshall (Henriques *et al.*, 2006).

Neste aparelho a água é forçada a passar por um estreitamento e é considerado o nível de água na secção a montante, independentemente das condições a jusante ou até das condições de afogamento (Henriques *et al.*, 2006).

O caudal é medido através do ponto situado a 2/3 no canal de transição e é geralmente designado por ponto zero. O caudal é dado por:

$$Q = K \cdot h_1^w$$

Em que:

K, w são parâmetros característicos da caleira;

h_1 é a altura de água na secção 1 localizada no convergente.

Casos particulares:

Ressalto provocado por um descarregador de soleira espessa ou sobrelevação

O ressalto hidráulico provocado pela passagem do escoamento por um descarregador de soleira espessa ou por uma sobrelevação do talvegue do canal (Figura 299) ocorre quando o escoamento não tem energia suficiente para ultrapassar o obstáculo, sendo que o seu regime pode ser rápido ou lento.

Caso um escoamento em regime lento não tenha energia suficiente para transpor o obstáculo, as condições do escoamento têm tendência a alterar-se, de modo a atingir a energia mínima necessária para ultrapassar o obstáculo, passando assim o escoamento pelo regime crítico. Uma vez que, originalmente, o regime é lento e após encontrar o obstáculo passa a crítico, imediatamente a jusante da sobrelevação o regime torna-se rápido. O ressalto dá-se então quando o escoamento em regime rápido, provocado pela sua passagem no obstáculo, encontra a jusante do obstáculo novamente o regime lento (Barbosa, 1982).

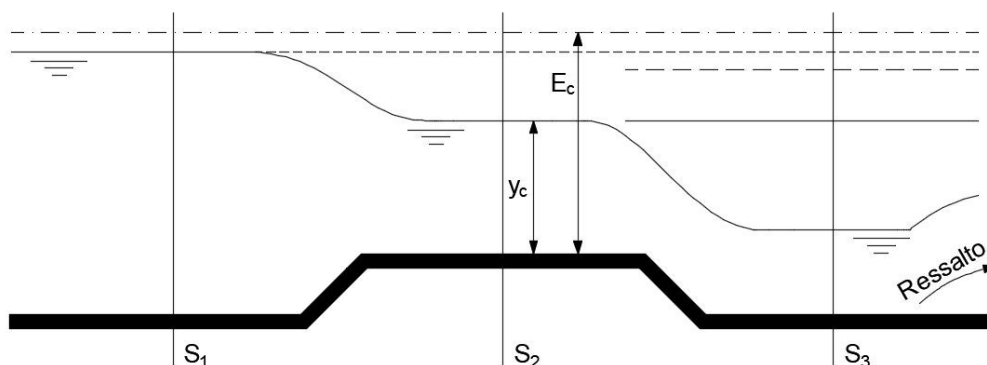


Figura 299 – Ressalto a jusante provocado por uma soleira espessa ou sobrelevação (Barbosa, 1982).

Por outro lado, caso o escoamento se dê no regime rápido e com energia insuficiente para a transposição do obstáculo, o ressalto passa a ocorrer a montante acompanhado por uma curva de regolfo de elevação. Ou seja, o regime rápido encontra um obstáculo e não tem energia suficiente para passar (Figura 300). O nível

da água vai aumentar chegando o regime às condições críticas e em seguida passando a lento. Após passar a regime lento, o escoamento como é rápido vai originar o ressalto a montante o escoamento. Por fim, após o obstáculo, o escoamento tendo a estabelecer-se novamente no regime rápido (Barbosa, 1982).

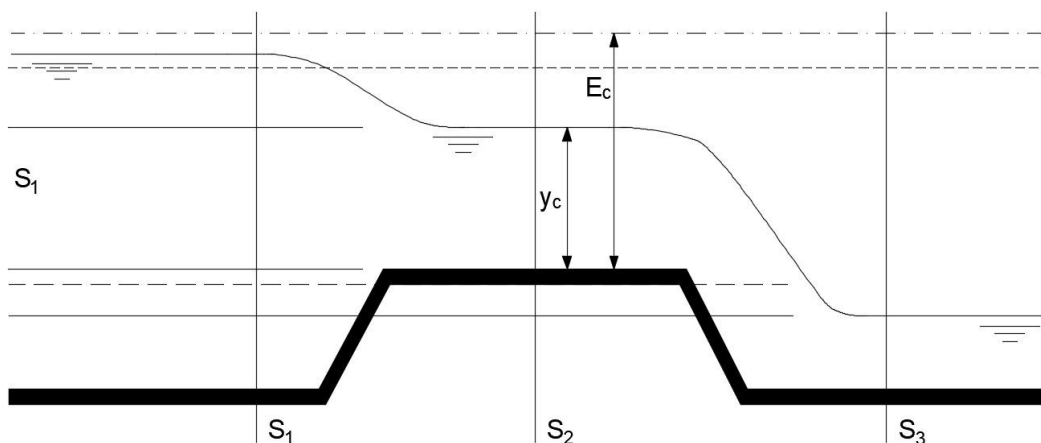


Figura 300 – Ressonho a montante provocado por soleira espessa ou sobrelevação (Barbosa, 1982).

Ressonho hidráulico provocado pela mudança de declive do canal

O ressonho hidráulico provocado pela mudança de declive do canal (Figura 301) dá-se quando o primeiro trecho do canal tem um declive forte, onde o regime do escoamento é rápido, e há uma mudança da inclinação para um declive fraco, encontrando o regime lento (Lencastre A., 1972).

Põe-se a questão de saber em que trecho se situará o ressonho hidráulico, dado que este se pode situar no trecho de declive forte ou no trecho de declive lento. Quando o regime é rápido, ou seja, quando o escoamento for controlado por montante, este tende a manter-se uniforme até à secção S_0 , onde posteriormente se seguirá uma curva de regolho I_3 , dando-se o ressonho no trecho de declive fraco (Barbosa, 1982).

Se o escoamento for controlado por jusante, portanto regime lento, o regime permanecerá uniforme desde a secção S_0 até à secção S_2 , sendo antecedida de uma curva de regolho do tipo S_1 , dando-se o ressonho no trecho de declive forte (Barbosa, 1982).

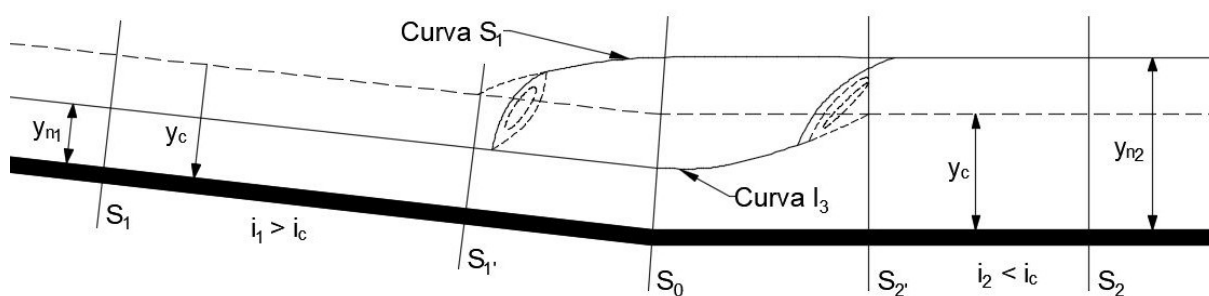


Figura 301 – Ressonho provocado pela mudança brusca do declive (Barbosa, 1982).

Ressalto hidráulico provocado pelo alargamento ou estreitamento do canal

Quando o escoamento atinge o estreitamento do canal, quando o escoamento não tem energia suficiente, as suas características alteram-se, passando o regime a lento e aí, a sua profundidade de água aumenta. Neste caso o escoamento dá-se a montante do estreitamento do canal. No caso do regime de escoamento ser lento, o ressalto hidráulico dar-se-á a jusante do estreitamento.

Do mesmo modo, quando há um alargamento do canal se o regime é lento, quando surge o alargamento o regime poderá passar a rápido, e caso isso aconteça, como jusante o escoamento volta a ser lento, dá-se o ressalto, pela passagem brusca do regime rápido a lento.

Ressalto hidráulico provocado pela passagem do escoamento por uma comporta

A passagem do escoamento por uma comporta (Figura 302) pode originar 3 situações de ressaltos hidráulicos. A primeira situação dá-se quando a abertura da comporta é inferior ao nível crítico de um canal de declive forte. A segunda situação dá-se quando a abertura do canal é inferior ao nível crítico de um canal de declive fraco, onde a energia na secção contraída do escoamento é igual ou superior à do regime uniforme e por fim, a terceira situação refere-se ao ressalto afogado (Barbosa, 1985).

Na situação em que a abertura da comporta é inferior ao nível crítico num canal de declive forte, o ressalto dá-se a montante da comporta, onde, uma vez que o escoamento não tem energia suficiente, o nível de água vai aumentando. Deste modo, dá-se o ressalto hidráulico pela passagem brusca do escoamento em regime rápido e regime lento, precedida de uma curva de regolfo do tipo S_1 .

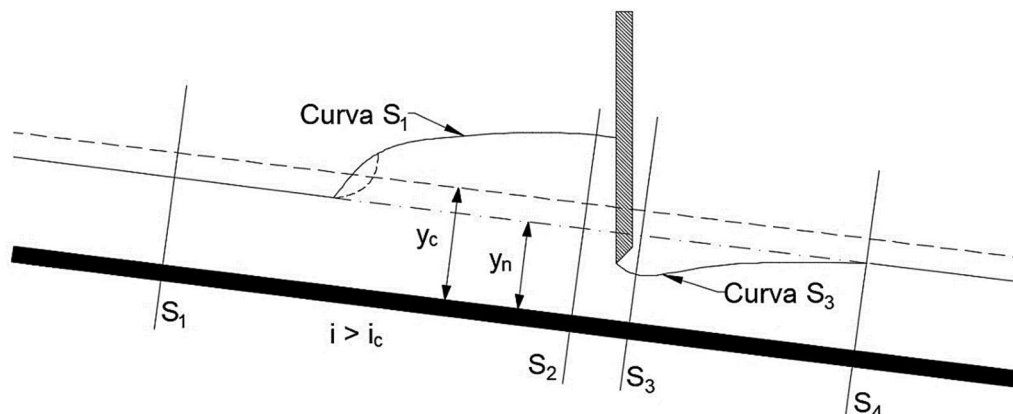


Figura 302 – Ressalto provocado por comporta em canal com declive forte (Barbosa, 1982).

No caso do ressalto provocado por uma comporta com abertura inferior à crítica num canal com declive fraco (Figura 303), o escoamento a montante da comporta tem um comportamento semelhante ao anterior, uma vez que, ao se aproximar da comporta forma-se uma curva de regolfo do tipo I_1 . A jusante da comporta forma-se uma curva de regolfo do tipo I_3 e em seguida dá-se o ressalto, dado que o regime a jusante tende a ser lento, logo y_2 é igual à altura normal do escoamento.

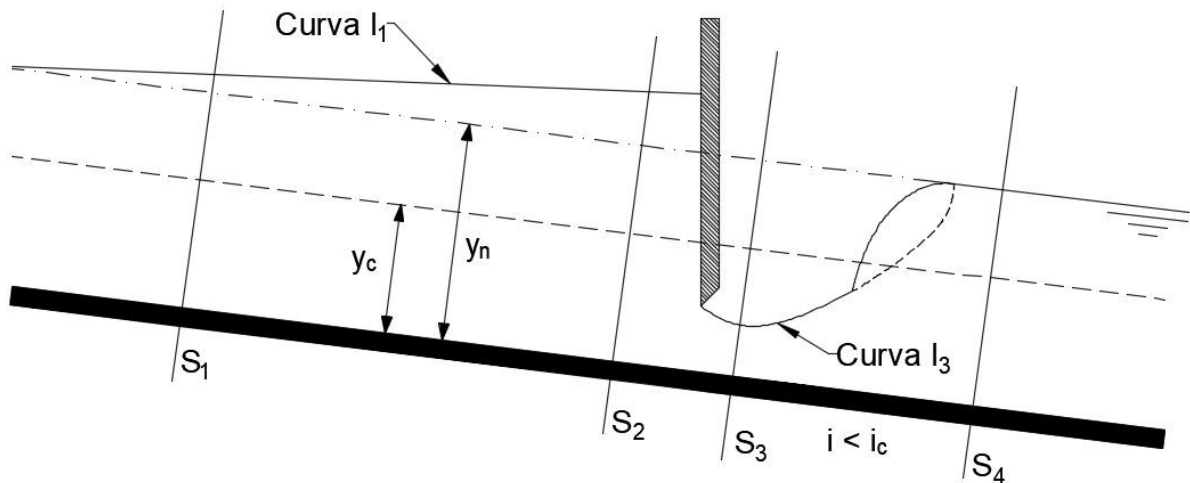


Figura 303 – Ressalto provocado por comporta em canal com declive fraco (Barbosa, 1982).

No caso do escoamento a jusante não ter energia suficiente para restabelecer o regime natural, dá-se o ressalto afogado (Figura 304). Nesse caso, há a elevação da profundidade de água junto à secção contraída, fruto da necessidade do incremento de energia na secção S_3 para o escoamento ter energia suficiente para retomar o seu regime uniforme.

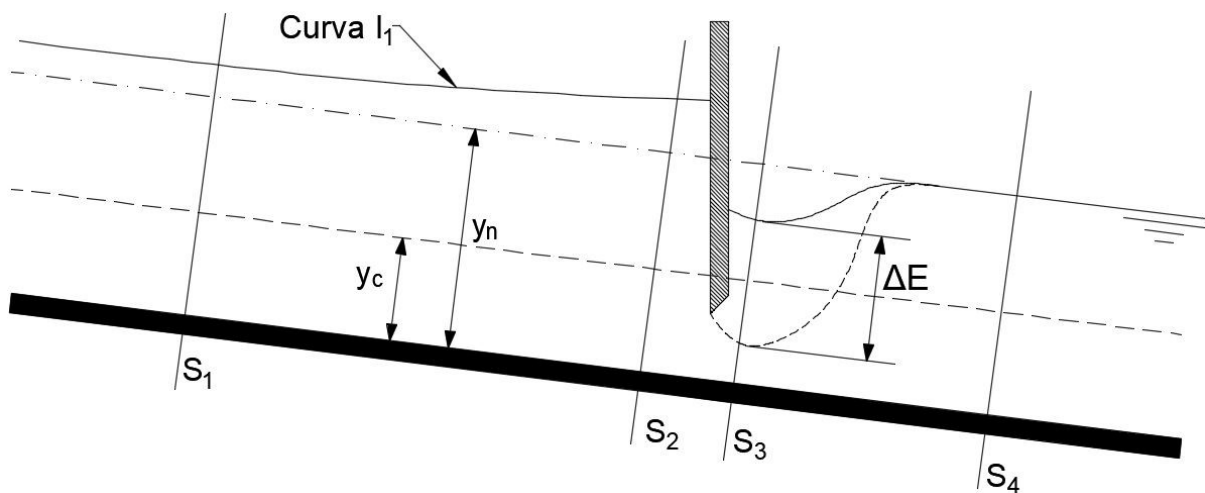


Figura 304 – Ressalto afogado (Barbosa, 1982).

11.6.3 Outros tipos de escoamentos rapidamente variados

Com exceção do ressalto, os escoamentos rapidamente variados ocorrem nas seguintes condições:

- Troços curtos, não associados a fenómenos de separação, como é o caso das mudanças de inclinação e dos descarregadores;
- Troços curtos, associados a fenómenos de separação, como é o caso dos alargamentos e estreitamentos;
- Ondas estacionárias oblíquas resultantes, por exemplo, de mudanças de direção.

Importa referir que os escoamentos rapidamente variados com separação, originam perdas de carga localizadas, e que a possível formação de ondas estacionárias oblíquas torna a superfície irregular, dificultando a adequada definição das condições de escoamento (Manzanares & Quintela, 1980).

O estudo do escoamento rapidamente variado é complexo a nível teórico, devido às condições supracitadas. Por isso, o estudo deste tipo de escoamento é essencialmente feito com base em procedimentos experimentais baseados nos princípios de semelhança e análise dimensional (Soares A. S., 2014).

REFERÊNCIAS

- Area Mecânica. (2011). *Ingeniería Mecánica: Curvas características de una bomba centrífuga (II)*. Obtido de Area Mecânica: <https://areamecanica.wordpress.com/2011/06/16/ingenieria-mecanica-curvas-caracteristicas-de-una-bomba-centrifuga-ii/>
- Baliño, J. L. (2017). *Ecuaciones de Navier-Stokes*. São Paulo, Brasil: USP.
- Barbosa, J. N. (1982). *Mecânica dos fluidos e Hidráulica Geral*. Porto Editora.
- Barbosa, J. N. (1985). *Mecânica dos fluidos e Hidráulica Geral 2*. Porto Editora.
- Braga, J. (2014). *Hidráulica II*. U.M.A.
- Brunetti, F. (2008). *Mecânica dos Fluidos* (2ª ed.). São Paulo: Pearson. Prentice Hall.
- Coelho, J. G., Brasil Junior, A. C., & Noleto, L. (2006). *Escoamento Turbulento em Difusores*. Rio de Janeiro: EPTT.
- Costa, A. S. (2003). *Turbinas Hidráulicas e Condutos Forçados*. Santa Catarina: UFSC. Obtido de <http://www.labspot.ufsc.br/~simoies/dincont/turb-hidr-2003.pdf>
- Costa, T. d., & Lança, R. (2011). *Hidráulica Aplicada*. Faro: Universidade do Algarve.
- Cruz, J. (2006). *Aproveitamentos Hidroelétricos*. Lisboa: IST.
- DRHGSA. (2007). *Capítulo II. Orifícios*. Piauí, Brasil: UFPI. Obtido de <http://leg.ufpi.br/subsiteFiles/ct/arquivos/files/pasta/CAP%202.pdf>
- Eisberg, R., & Resnick, R. (1979). *Física Quântica - Átomos, Moléculas, Sólidos, Núcleos e Partículas* (13ª ed.). Editora Campus.
- Escola da Vida. (2018). *Análise dimensional e leis de semelhança aplicadas as bombas hidráulicas*. Obtido de Escola da Vida: http://www.escoladavida.eng.br/mecfluquimica/analise_dimensional.htm
- Filho, J. G. (2015). *Turbinas Hidráulicas - Tipos e Usos*. Campinas: Universidade Estadual de Campinas. Obtido de <https://docslide.com.br/documents/turbinas-hidraulicas-55ef3ff5660bb.html>
- Fletcher, B. P., & Grace, J. L. (1972). Practical guidance for estimating and controlling erosion at culvert outlets. *U.S. Army Engineer Waterways Experiment Station*.
- Gaspar, R. (2005). *Mecânica dos Materiais*. São Paulo, Brasil: Centro Universitário Nove de Julho.
- Gobbi, M., Dias, N. L., Mascarenhas, F., & Valentine, E. (2011). *Introdução à Mecânica dos Fluidos e aos Fenómenos de Transporte*. Paraná, Brasil: UFRP.
- Henn, É. A. (2006). *Máquinas de Fluido* (2ª ed.). Santa Maria: UFSM.
- Henriques, J. D., Palma, J. C., & Ribeiro, Á. S. (2006). *Medição de caudal em sistemas de abastecimento de água e de saneamento de águas residuais*. Lisboa: LNEC.
- Ignácio, R. F., & Nóbrega, R. L. (2004). *Mecânica dos Fluidos. Análise Dimensional e Semelhança Dinâmica*. Paraíba, Brasil: AERH. UFCG.
- Junior, L. B. (2005). *Orifícios, Bocais e Tubos curtos*. Goiânia - GO, Brasil: PUC Goiás.
- Junior, N. V., & Colvara, L. D. (2010). Os modelos mentais de alunos em relação a vetores em duas e três dimensões: uma análise da dinâmica da aprendizagem e da inadequação das avaliações tradicionais. *Ciências & Cognição*, 55-69. Obtido de <http://pepsic.bvsalud.org/pdf/cc/v15n2/v15n2a06.pdf>
- KSB. (2003). *Manual de Treinamento. Seleção e Aplicação de Bombas Centrífugas*. KSB. Obtido de <https://pt.slideshare.net/EvandroTP/ksb-manual-de-selecao-e-aplicacao>

- Lencastre, A. (1972). *Manual de Hidráulica Geral*.
- Lencastre, A. (1983). *Hidráulica Geral*. Lisboa: Hidroprojeto.
- Lewis, E. V. (1988). *PNA - Principles of Naval Architecture, Volume I - Stability and Strength*. New Jersey, USA: SNAME.
- Manzanares, A., & Quintela, A. (1980). *Hidráulica Geral II. Escoamentos Líquidos*. Lisboa: AEIST.
- Martins, M. R. (2010). *Hidroestática e Estabilidade*. São Paulo, Brasil: USP. Obtido de http://www.ndf.poli.usp.br/~gassi/disciplinas/pnv2341/Martins_2010_Hidrost%C3%A1tica_e_Estabilidade_PNV2341.pdf
- Mata-Lima, H. (2010). *Apontamentos de Hidráulica*. Funchal: UMA.
- Mendonça, F. C. (2015). *Hidrometria*. São Paulo, Brasil: USP. Obtido de http://www.esalq.usp.br/departamentos/leb/disciplinas/Fernando/leb472/Aula_12/Aula%2012_Hidrometria.pdf
- Nalluri, C., & Featherstone, R. (2001). *Civil engineering hydraulics: essential theory with worked examples*. Wiley-Blackwell.
- NETeF. (2012). *Análise Dimensional e Semelhança*. São Paulo, Brasil: USP. Obtido de <http://www2.eesc.usp.br/netef/Oscar/Aula23>
- Netto, A. (1998). *Manual de Hidráulica*. Edgard Blucher Ltda.
- Oliveira, R. J. (2007). *Cavitação: Como entender este fenômeno? Como identificar?* Minas Gerais: MGS - Tecnologia.
- Pacífico, A. L. (2016). *Introdução à Cinemática dos Flúidos*. São Paulo, Brasil: USP.
- Peterka, A. J. (1958). *Hydraulic design of stilling basins and energy dissipators*.
- Pinho, J. L., Vieira, J. M., & Lima, M. M. (2011). *Apontamentos para as Aulas de Hidráulica Geral I & II*. Minho: Universidade do Minho.
- Pontes, J. d., & Mangiavacchi, N. (2013). *Fenômenos de Transferência Com Aplicações às Ciências Físicas e à Engenharia* (Vol. I). Rio de Janeiro: UFRJ.
- Pordeus, R. V. (2015). *Nota de Aula: Fenômenos de Transporte. Mecânica dos Fluidos. Tipos de Regime de Escoamento*. Rio Grande do Norte, Brasil: UFERSA. Obtido de <http://www2.ufersa.edu.br/portal/view/uploads/setores/111/CAP%20V%20TIP OS%20E%20REGIME%20DE%20ESCOAMENTO.pdf>
- Queiroz, G. (2017). *Vertedores*. Minas Gerais, Brasil: UFOP. Obtido de <http://www.em.ufop.br/deciv/departamento/~gilbertoqueiroz/CIV225-Vertedores.pdf>
- Quintela, A. d. (2005). *Hidráulica* (9ª ed.). Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian.
- Ramalho, F. J., Nicolau, G. F., & Toledo, P. A. (2015). *Os Fundamentos da Física* (11ª ed.). São Paulo, Brasil: Moderna.
- Rijo, M. (2010). *Canais de Adução - Projecto, Operação, Controlo e Modernização* (1ª ed.). Lisboa: Edições Sílabo.
- Silva, G. Q. (2014). *Estudo dos Orifícios e Bocais*. Minas Gerais, Brasil: UFOP.
- Simões, J. G. (2011). *Condutos livres. Escoamento uniforme em canais*. São Paulo, Brasil: Unisanta.
- Smith, H. (1886). *Hydraulics: The Flow of Water Through Orifices, Over Weirs, and Through Open Conduits and Pipes*. Truebner and co.
- Soares Júnior, R. L. (2013). *Projeto Conceitual de uma Turbina Hidráulica a ser Utilizada na Usina Hidrelétrica Externa de Henry Borden*. Rio de Janeiro: UFRJ.

- Soares, A. S. (2014). *Análise Experimental das Condições de Escoamento Superficial em Zonas Urbanas na Presença de Viaturas*. Lisboa: UNL.
- Soares, H. (2011). *Hidráulica Geral*. Minas Gerais, Brasil: UFJF. Obtido de <http://slideplayer.com.br/slide/5382800/>
- Tavares, I. T. (2014). *A Influência de Difusor na Eficiência de uma Turbina Hidráulica*. Brasília, DF: UnB.
- Teixeira, E. (2003). *Previsão dos valores de pressão junto ao fundo em bacias de dissipação por ressalto hidráulico*. Rio Grande do Sul, Brasil: UFRGS.
- UALG. (2018). *Guia do princípio de Arquimedes*. Obtido de UALG. Guias: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Impuls%C3%A3o>
- UEL. (2017). *Resumo de Hidráulica - Introdução*. Obtido de ebah: <http://www.ebah.pt/content/ABAAAAICkAF/resumo-hidraulica-introducao?part=3>
- Universidade Federal do ABC. (2013). *Alimentação via turbo-bombas*. Universidade Federal do ABC. Obtido de <https://pt.slideshare.net/edpackness/liquid-propellant-rocket-engine-motor-foguete-liquido-part11>
- Vasconcelos, M. M. (2005). *Hidráulica Geral I*. Évora: Universidade de Évora.
- Villa, A. A. (2011). *Análise Dimensional e Semelhança*. Pernambuco, Brasil: UFPEP.
- White, H. E. (1948). *Modern College Physics*. van Nostrand.