

Georg Zehfuss: Sein Leben und seine Werke

Walter Strobl

Email: wstrobl@telefonica.net

Anschrift: Calle Infanta María Teresa 9, 5-B, E-28016 Madrid (Spanien)

Inhaltsverzeichnis

A. Einleitung	2
B. Bibliographische Daten	3
C. Liste der Werke.....	11
D. Beiträge zur Determinantentheorie	18
E. Einige Beiträge zur Physik und anderen Wissenschaften	21
F. Schlusswort.....	23
G. Literatur	23
H. Anhang	26

Zusammenfassung

Es ist viel über den historischen Ursprung der Definition des Tensorproduktes von Matrizen geschrieben worden, so haben ihn einige Autoren Kronecker und anderen Autoren Zehfuss zugeschrieben. Aber bis jetzt waren bibliographische Informationen von Georg Zehfuss (1832-1901) knapp und die Liste seiner Veröffentlichungen unvollständig, so dass schwer zu verstehen ist, dass ein so unbekannter Mathematiker hier mitbestimmend war.

Wir beabsichtigen hier diese Lücke auszufüllen, indem wir Daten aus verschiedenen bekannten und neuen Quellen sammeln, gruppieren, kategorisieren und kommentieren. Dies umfasst biographische Daten, seine Lehrer und Tutoren, viele seiner Publikationen und die Auswirkungen einiger seiner Errungenschaften in Mathematik und Physik. Die Schlussfolgerung ist, dass der Beitrag von Zehfuss zur Mathematik sich nicht auf die Definition vom Tensorprodukt von Matrizen beschränkt ist, da es weitere Beiträge zur Mathematik und nicht nur zur Determinantentheorie, auch zur Physik von ihm gibt, und abgesehen von seinen

Beiträgen zur Bildung von späteren Ingenieuren an höheren Gewerbeschulen mit seiner Lehrtätigkeit und mit seinen Büchern.

Keywords

Georg Zehfuss, Zehfuss product, Kronecker product, Theory of determinants, Matrix tensor product.

Anerkennungen

Wir möchten unsere Anerkennungen bei Prof. (em.) Dr. Friedrich Pukelsheim (Institut für Mathematik der Universität Augsburg, Deutschland) für seine Kommentare ausdrücken, ebenso bei Dr. Alīda Zigmunde (Professorin an der Technischen Universität Riga, Lettland) für ihre Unterstützung, Herrn Kalmer Mäeorg Archivar der Stadtarchiven von Tallinn (Estland) für seine Hilfe und letztendlich auch bei der Universitätsbibliothek Heidelberg.



Georg Zehfuss in der Zeit 1862-1863 als Professor für Mathematik an der *Estländische Ritter- und Domschule* zu Reval (jetzt Tallinn).

Photo mit freundlicher Genehmigung von den *National Archives of Estonia* (Estland).

A. Einleitung

Es ist viel über den historischen Ursprung der Definition des Tensorprodukts von Matrizen geschrieben worden, so haben ihn einige Autoren Kronecker zugeschrieben und andere Zehfuss (siehe z. B. Günther [16], Henderson, Pukelsheim und Searle, Shayle [18], Horn et al.

[20] und Muir [30]). Leopold Kronecker (1823-1891) ist ein bekannter Mathematiker und mit einem Platz in der Geschichte, wie Edwards in [9] äußert, während man Georg Zehfuss als "... a little known scientist...(who) published some four or five papers on determinants in the decade 1858-1868..." (siehe [18], S. 114) bezeichnet. Bis jetzt waren die bibliographischen Angaben von Georg Zehfuss knapp und die Liste seiner Veröffentlichungen unvollständig (siehe Kern [23], Poggendorff [33] und seine Todesnachricht in: *Leopoldina* [44]).

Wir wollen nicht auf die Kontroverse eingehen ob Kronecker oder Zehfuss den Ursprung der Definition des Tensorprodukts von Matrizen zuzuschreiben (oder als ein neuer Vorschlag ihn als *Zehfuss-Kronecker-Produkt* zu bezeichnen), sondern nur eine kleine Huldigung der wenig bekannten Person von Georg Zehfuss erweisen. Die zahlreichen Anwendungen des Matrix-Tensor-Produkts, die inzwischen entwickelt worden sind, können ebenfalls als eine indirekte Huldigung angesehen werden; dies wollen wir in einer anderen Arbeit behandeln.

Die Arbeit über *Die Entwicklung des Faches Mathematik an der Universität Heidelberg 1835-1914* von Günter Kern (siehe [23]) enthält einen Teil des Lebenslaufes von Georg Zehfuss, von 1832 bis 1861. Günter Kern entnimmt diese Daten von dem Lebenslauf von Zehfuss und dessen Bericht über den Gang seiner mathematischen Studien (Fakultätsakten der Philosophischen Fakultät der Universität Heidelberg, UAH A-219/PA Georg Zehfuß). Wir beginnen mit diesen Daten und führen sie nach seiner Heidelberger Zeit, insbesondere seine Jahre in Reval und Riga, bis an sein Lebensende weiter.

Neben dieser Einleitung ist diese Arbeit in folgende Hauptabschnitte gegliedert:

- Abschnitt B: Enthält die Biographie von G. Zehfuss
- Abschnitt C: Besteht aus einer kommentierten Liste seiner Werke
- Abschnitt D: Details zu seinen Beiträgen zu Determinantentheorie
- Abschnitt E: Einige seiner Beiträge zur Physik.
- Abschnitt F: Schlußwort

Wir verwenden folgende allgemeine Notation: Ein Z und eine Zahl in runden Klammern (Z_{nn}) bezieht sich auf die Liste der Veröffentlichungen von Zehfuss in Abschnitt C; jeder Literaturhinweis dieses Artikels in Bezug auf den Abschnitt G ist mit einer Zahl in quadratischen Klammern $[mm]$ im Text gekennzeichnet.

B. Bibliographische Daten

Familie

Johann Georg Zehfuss, bekannt als Georg Zehfuss (auch Zehfuß geschrieben) wurde am 10. April 1832 in Darmstadt-Bessungen, das älteste Stadtteil von Darmstadt, geboren. Seine Eltern waren Hofkammer-Registrator Johann Heinrich Zehfuss und Susanne Magdalene

Noack. Am 11. Juli 1861 heiratete er Louise Stein; sie bekamen zwei Kinder, Immanuel Gustav Heinrich Julius Wilhelm, er wurde am 20. August 1862 in Reval (jetzt Tallinn) geboren und Cornelia Charlotte Marie Auguste Mathilde Victoria, geboren am 16. September 1864 in Darmstadt. Er starb in Frankfurt a.M. am 5. May 1901.

„Wie Zehfuß selbst eingesteht, zeigte er in seiner Jugend mehr Interesse für Sprachen und Geschichte denn für Mathematik. Mit 15 Jahren trat er in das Polytechnikum in Darmstadt ein, wo er sich -angeregt durch seinen Lehrer Strecker- dem Studium der Mathematik, Mechanik, Physik und Chemie widmete, daneben aber weiterhin auch an Veranstaltungen in Latein, Französisch sowie deutsche Geschichte und Literatur teilnahm.“ (Siehe Kern [23], S. 29).

Höhere Gewerbeschule Darmstadt: Reifeprüfung

Das hier genannte *Polytechnikum in Darmstadt* bezieht sich auf die *Höhere Gewerbeschule Darmstadt*. Diese Schule wurde 1836 gegründet und mit der *Realschule Darmstadt* zusammengeführt, beide wurden 1868 in eine *Polytechnische Schule* umbenannt und 1877 bildeten sie den Grundstein der heutigen *Technische Universität Darmstadt*. (Siehe [46]).

Die *Gewerbeschulen* waren eine Schulart im 19. Jahrhundert in Deutschland in der die Schüler, im Gegensatz zu allgemeinbildenden Schulen, berufsbezogene Kenntnisse erlernten, die meistens den lokalen Bedürfnissen angepasst waren im Hinblick auf eine Ausbildung als Ingenieure an Technischen Hochschulen. Die Lehre beinhaltet vor allem Zeichnen, Mathematik, Physik und Chemie.

Der gemeinsame Direktor der *Gewerbeschule* und der *Realschule Darmstadt* Edmund Külp (1800-1862, der 1824 in Giessen promoviert hatte) war auch der Förderer der Gewerbeschule zur Polytechnischen Schule. In [36] beschreibt Schubring wie das Interesse von Külp an der Mathematik durch Adolphe Quetelet (1796-1874) geweckt und unterstützt wurde. Dieses Interesse, hauptsächlich an Mathematik, Physik und Chemie haben er und der Chemiker Adolph Strecker (1822-1871, Dokortentitel 1842 und Habilitation 1849 in Giessen) an Zehfuß weitergeleitet. Strecker folgte im März 1846 einer Berufung als Privatassistent bei Liebig an der Universität Giessen; das heißt er war nur kurze Zeit Mentor von Zehfuß. Ein weiterer Lehrer an der Gewerbeschule Darmstadt war Ludwig Christian Wiener (1826-1896), der wie Zehfuß 1850 in Giessen promovierte (siehe Kössler [26]) und sich später als Mathematiker, Physiker und Philosoph auszeichnete.

Durch selbständige Studien erarbeitete sich Zehfuß während seiner Schulzeit eine praktische Geschicklichkeit in der Behandlung trigonometrischer Formeln, Kenntnisse in der analytischen Geometrie der Ebene und der Differential- und Integralrechnung nach Leibnitz (1646-1716) und in die Lehre der Schwingungen. *Schon im Alter von 16 Jahren war es Zehfuß mit Hilfe*

dieser Kenntnisse möglich, deren "vorzüglichste Anwendungen auf Geometrie und Mechanik" zu studieren und bis zu seinem Eintritt in die Universität auch mathematische Abhandlungen in deutscher, französischer und lateinischer Sprache zu lesen." (Siehe Kern [23], S. 29).

Justus-Liebig-Universität Gießen: Doktorengrad

Nach Abschluß der Reifeprüfung mit der Note "*summa cum laude*" ging er 1850 nach Gießen (*Justus-Liebig-Universität Gießen*), in der Nähe von Darmstadt. An der Universität Giessen fand er aber wenig wissenschaftliche Anregung. Dort hatten auch seine Lehrer Kūlp, Strecker und Wiener studiert.

An der Universität Gießen galt sein Hauptinteresse der endlichen Differenzenrechnung, deren Ergebnisse er in der Veröffentlichung (Z2) und (Z6) zusammenfasste (siehe Abschnitt C). Zehfuss beendete sein Studium in Giessen zum 31. Januar 1853 mit dem Gymnasiallehrexamen und dem Doktorengrad (siehe Kern [26]).

Lehrer an der Gewerbeschule Darmstadt

Von 1853 bis 1858 lehrte Zehfuss als provisorischer Lehrer Mathematik und Mechanik an der *Gewerbeschule Darmstadt* und unterstützte Kūlp bei seinen Werken in Physik und Mathematik (siehe Schubring [36] und Kūlp [27]). Auch Georg Cantor (1845-1918) studierte an der Gewerbeschule Darmstadt, aber etwas später, von 1860 bis 1862.

Ruprecht-Karls-Universität Heidelberg: Habilitation und Privatdozent

Im Jahr 1857 habilitierte sich Zehfuss in Mathematik und Physik an der Universität Heidelberg (*Ruprecht-Karls-Universität*, die älteste Universität Deutschlands) mit einer Arbeit die von den Professoren Otto Hesse (1811-1874) in Mathematik und Gustav Kirchhoff (1824-1887) in Physik bewertet wurde. Diese Arbeit besteht aus vier Teilen, die drei mathematische und ein physikalisches Problem lösen (siehe (Z3), Abschnitt 0). Die Meinung von Hesse zur Habilitationsarbeit war, daß sie sich mit "schwierigen, und deshalb nur den mehr ausgebildeten Mathematikern zugänglichen Teilen der Wissenschaft" beschäftigt (siehe Kern [23], S. 30). Kirchhoff äußerte sich in der selben Richtung über den vierten Teil zur theoretischen Wärmelehre.

In dieser Zeit entwickelte Hesse, ein Schüler von Jacobi (1804-1851), mehrere Werke über Determinantentheorie im Rahmen der algebraischen Funktionen und der Invariantentheorie (siehe [3], S. 13-23) und regte Zehfuss zu seinen frühen Arbeiten zur Determinantentheorie an, die er im Jahre 1858 veröffentlichte (siehe Abschnitt 0 Veröffentlichungen (Z13), (Z14) und (Z15)). Die Determinantentheorie blieb eines der Hauptthemen seiner mathematischen Arbeiten wie man in der Graphik 1 sehen kann. Auch in (Z31) kann man lesen, wie Hesse

Zehfuss Untersuchungen anregte, indem er ihm seinen Briefwechsel mit seinem Lehrer Friedrich Bessel (1784-1846) zeigte.

Zehfuss lehrte als Privatdozent seit seiner Habilitation bis 1861 an der Universität Heidelberg Arithmetik, Algebra und Geometrie, Differentialrechnung, Theorie der bestimmten Integrale, Elliptische Funktionen, Theorie der höheren Gleichungen, Analytische Geometrie der Ebenen und des Raumes, analytische Mechanik und Feldmeßkunst (siehe seine Personalakte an dem Polytechnikum in Riga [29]).

An der Universität Heidelberg waren neben Zehfuss in jenen Jahren auch Moritz Cantor, Friedrich Eisenlohr, August Kekulé und Heinrich Weber tätig.

Wir möchten hier hinzufügen, daß Georg Zehfuss am 11. Juli 1861 Louise Stein heiratete.

Anfang November 1861 wurde die Nachfolge von Richard Dedekind an dem Polytechnikum Zurich ausgeschrieben, und Zehfuss kandidierte (siehe Knus [25]). Rudolf Lipshitz wurde nominiert aber er trat zurück um die Ernennung nach Breslau anzunehmen. Schließlich wurde Elwin Christoffel 1862 als Nachfolger von Dedekind 1862 benannt.

In der Zeit von 1861 bis 1863 ließ sich Zehfuss von der Universität Heidelberg beurlauben um eine gutbezahlte Stellung als Gymnasialprofessor in Reval (heute Tallinn in Estland) wahrzunehmen, da er in Deutschland keine feste Anstellung finden konnte (siehe Kern [23]).

Estländischen Ritter- und Domschule in Reval (Tallinn): Lehramt

Das Angebot von Reval entspricht einer Zeit sozialem und kulturellen Fortschrittes in Estland, die durch Regierungsmaßnahmen unterstützt wurde, unter anderen die Reichweite der Schulausbildung zu erweitern, was die Nachfrage nach mehr Lehrern wachsen ließ.

Georg Zehfuss war Oberlehrer für Mathematik und Physik vom 26. September 1860 bis 1863 an der *Estländischen Ritter- und Domschule* in Tallinn. Die Estländischen Ritter- und Domschule zu Reval war zwar kein Gymnasium, aber ihre Schüler konnten dort studieren und sich auf ein höheres Studium als Ingenieure insbesondere in Mathematik, Physik und Chemie vorzubereiten.

Sein Sohn Immanuel Gustav wurde am 20. August 1862 in Reval (jetzt Tallinn) geboren.

Von Reval aus veröffentlichte Zehfuss ein Studium „Über eine mechanische Wirkung des elektrischen Funkens“ (siehe [29]).

Im Februar 1862 bewarb sich Zehfuss von Reval aus um eine Stelle als Professor in Mathematik oder Physik am Polytechnikum von Riga (Lettland), welches sich gerade in seiner Gründungsphase befand. Als Grund seiner Bewerbung nannte er, daß seine Stellung an der Domschule Reval ihm „keine wissenschaftliche Hilfsmittel bietet um seinen wissenschaftlichen

Bestrebungen und früherer Wirksamkeit“ nachzukommen. Eines dieser Hilfsmittel ist für Zehfuss das *Crelle's Journal (Journal für die reine und angewandte Mathematik)*, welches er sich vom ersten Band an für die Bibliothek des Polytechnikums Riga wünschte. Seine Bewerbung enthielt auch Empfehlungen unter anderen von Professor Wiener von der *Technischen Hochschule Karlsruhe* (jener Ludwig Christian Wiener, den er bereits seit seiner Schulzeit an der Gewerbeschule Darmstadt kannte), vom Mathematiker Ferdinand Minding (1806-1885), vom Physiker und Meteorologe Ludwig Friedrich Kämtz (1801-1867) und vom Mathematiker Peter Helmling (1817-1901, der in Heidelberg promoviert hatte) von der *Kaiserlichen Universität zu Dorpat* (jetzt Tartu, Estland), vom Mathematiker Osip Ivanovich Somov (1815-1876) von der *Universität St. Petersburg* (den er später in seiner Arbeit (Z35) zitiert), von Johann August Grunert (1797-1872) an der *Ernst-Moritz-Arndt-Universität Greifswald*, von Friedrich Julius Richelot (1808-1875) von der *Albertus-Universität Königsberg*, von Oskar Schlömilch (1823-1901) von der *Königlich Polytechnischen Schule Dresden*, seine Lehrer Otto Hesse und Gustav Kirchhoff an der *Ruprecht-Karls-Universität Heidelberg*, Richard Dedekind (1831-1916) vom *Polytechnikum Zürich*. So zum Beispiel, schrieb Schlömilch über Zehfuss: „Man erkennt aus diesen Arbeiten, daß (er) den neuesten Fortschritten der Wissenschaft vollkommend vertraut ist“ (Siehe Persönliche Akte der Polytechnischen Schule zu Riga [29]).

Das Bewerbungsschreiben weist auf zwei Tatsache hin, erstens, daß er ungeachtet seines Lehramtes an den Gewerbeschule Darmstadt und an der Domschule Reval gute Beziehungen zu vielen hervorragenden Professoren an verschiedenen Universitäten aufrecht hielt, und zweitens, daß er damals selbst keinen besonderen Wert auf seine Arbeiten über Determinantentheorie legte. Diese wurden erst mit den Arbeiten (Z31) über die *doppelt-orthosymmetrische Determinante* und (Z35) über *kubische Determinante und Determinante höherer Dimensionen* zu einer etwas späteren Zeit ausgearbeitet wurden.

Polytechnikum in Riga: Professor für Höhere Mathematik

Am 9. Januar 1863 wurde Zehfuss als Professor für Höhere Mathematik am Polytechnikum in Riga berufen (siehe Persönliche Akte der Polytechnischen Schule zu Riga [29]). Ernst Friedrich Nauck (1819-1875) war der erste Rektor und Professor des Polytechnikum Riga von 1862 bis zu seinem Tode 1875. Detaillierte Beschreibungen der Gründungsgeschichte des Polytechnikums Riga findet man in Kieseritzky [24] und Zigmunde [50].

Wie in der Livländische Gouvernements-Zeitung, nr. 73, vom 1. Juli 1863 zu lesen ist, besuchte Zehfuss Dorpat (jetzt Tartu, Estland); dort waren ja Minding, Kämtz und Helmling tätig.

Dezember 1863 wurde er Mitglied des technischen Veriens zu Riga. Er hielt dort mehrere Vorträge:

- a. Über die Eigenschaften des Elypsoidal-Pendels. (siehe [32], S. 210).
- b. Er leitete den Helmholtz'schen Satz über die Erhaltung der Kräfte mit niederer Analysis ab, stützte hierauf den Nachweis der Unmöglichkeit eines perpetuum mobile sowie einige ältere Theorien über Wärme-Entwicklung bei mechanischer Arbeit und die Mechanische Wärmetheorie. (siehe [32], S. 256).

Ein angesagter Vortrag über Planimeter fand schließlich nicht statt (siehe [32], S. 228). Die Beteiligung bei wissenschaftlichen Vereinen griff er später wieder auf, wie wir im Folgenden zeigen.

Doch Zehfuss verließ zum 29. Februar 1864 das Polytechnikum, eine junge Einrichtung mit ihren Anfangsschwierigkeiten. Für Nauck war es nicht leicht sich den Besonderheiten des Landes anzupassen und er hatte keine Erfahrung mit der Organisation einer Technischen Hochschule; dazu kamen Schwierigkeiten mit der Anpassung des aufgestellten Lehrplans und fehlende Geldmittel für die Anstalt. Zehfuss wird durch Kieseritzky ersetzt; der Lehrplan wurde überarbeitet und neue Geldmittel gewonnen, so daß die Zukunft des Polytechnikum schließlich gesichert war (siehe Kieseritzky [24] S. 25-32).

Gewerbeschule Frankfurt: Lehramt und Direktor

Im Jahr 1864 ging G. Zehfuss nach Frankfurt a.M. zurück, wo er zuerst als Lehrer und später als Direktor an der 1827 gegründeten *Gewerbeschule Frankfurt* tätig war. Er lehrte dort unter anderem Algebraische Analyse, Trigonometrie, Theorie der höheren Gleichungen, Analytische Geometrie der Ebene, Mechanik, Differential- und Integralrechnung und Analytische Geometrie des Raumes (siehe [35]).

Seine Tochter Cornelia Charlotte wurde am 16. September 1864 in Darmstadt geboren.

In der Zeit von 1867 bis 1889 zeichnete sich Zehfuss durch eine aktive Teilnahme an den Jahresversammlungen der *Gesellschaft Deutscher Naturforscher und Ärzte* (GDNA) aus, insbesondere wenn die Versammlungen in Frankfurt selbst oder in der Nähe stattfanden. Diese Gesellschaft wurde 1822 in Leipzig gegründet; aus ihr entstand 1890 die *Deutsche Mathematiker-Vereinigung* (DMV).

Wie es in den Versammlungsberichten nachzulesen ist, hat sich die Teilnahme von Georg Zehfuss u.a. durch folgende Beiträge gezeigt, welche oft auch als Veröffentlichungen erschienen sind. Während der Versammlungen bestand die Möglichkeit Kontakt mit seinen Kollegen der Mathematik und Physik aufrecht zu halten.

In Frankfurt a. M., 1867:

- c. „Über eine Erweiterung des Begriffs der Determinanten. Entstehung von kubischen und höheren Determinanten. Einige vorzügliche Eigenschaften dieser algebraischen Gebilde.“ (Siehe [40], S. 34). Dieser Vortrag ist eine Zusammenfassung der späteren Veröffentlichung (Z35).
- d. Zehfuss zeigte ein Modell einer Riemannschen Fläche (siehe [40], S. 66). Leider gibt es keine weitere Information über das Modell.
- e. Er spricht über ein Experiment, welches ein Beitrag zur Theorie der oscillatorischen Entladung liefert, bzgl. (Z34).
- f. Mit dem Vortrag „Über eine mögliche Ursache der Verzögerung der Erdrotation“ zeigt er, „daß magnetische Kräfte, welche die Himmelskörper gegenseitig ausüben, diese Verzögerung nicht bewirken können, daß dagegen das constante magnetische Feld, indem sich die Planeten bewegen, eine Veränderung der Präcession bewirkt, welche zur Erklärung der Beobachtung führen könnten.“ (siehe [40], S. 66 u. S. 94). Folgende Veröffentlichungen (Z38), (Z41) und (Z42) stehen in Zusammenhang mit diesem Vortrag.

In Dresden, 1868:

- g. Der angekündigte Vortrag von G. Zehfuss. "Vorzeigung eines Apparates zur Erläuterung von Capitän Liernur's pneumatischer Canalisation der Städte, als Bericht über den Ausgang eines von der physikalischen Section der vorherigen Jahres gegebenen Gutachtens" wurde nach Abschluss der Versammlung gehalten, nachdem man eine Beschädigung des Apparates behoben hatte (siehe [41], S. 171 u. S. 201). Dieser Vortrag bezieht sich auf die Veröffentlichung (Z39).

In Innsbruck, 1869:

- h. „Über kubische und höhere Determinanten“. Das folgende Zitat ist eine kurze Beschreibung des Inhaltes des Vortrages:

„Während jedes Element der gewöhnlichen Determinanten zwei Indices enthält, besitzt es bei den Determinanten höheren Ranges deren drei oder mehr. Bei den Determinanten dritten Ranges führt die räumliche Anordnung aller Elemente, statt wie bei den gewöhnlichen (quadratischen) Determinanten auf ein Quadrat, auf einen Kubus. Im Allgemeinen sind mehre Serien variabler Indices vorhanden, entsprechend dem Range. Ist die Gesamtsumme der Derangements aller einzelnen Serien gerade, so erhält das betreffende Glied der Determinanten das Zeichen +, wenn nicht, -. Beweis einer Anzahl Elementar-Eigenschaften der kubischen Determinanten. Die Determinanten mehrerer homogenen Formen nten Grades ist immer eine Invariante. Die höheren Determinanten bieten die einfachste Darstellungsform von Invarianten. Anwendung auf die Aufgabe: Durch acht Punkte einen Kegel zweiten Grades zu legen. Die Anzahl der Lösungen beträgt vier.“ (Siehe [42], S. 163).

Der Vortrag ist eine Kurzfassung der Veröffentlichung (Z35).

Ebenso beteiligte sich Zehfuss 1870 und 1871 an der *Wetterauischen Naturforschenden Gesellschaft zu Hanau*. Diese Gesellschaft wurde 1808 in Hanau (in der Nähe von Frankfurt) gegründet (siehe [14] insbesondere die Zeit der Zugehörigkeit zu Preußen, S. 189-209).

In Hanau, Januar 1870:

- i. Hielt Zehfuss einen Vortrag „Über Meteoriten“ (siehe Bericht der Wetterauischen Gesellschaft für die Gesamte Naturkunde zu Hanau: [4] S. XX und die Veröffentlichungen (Z41) und (Z42).

In Hanau, October 1871:

- j. Hielt Zehfuss einen Vortrag mit dem Titel „Einiges zur Erklärung der Erscheinung des Nordlichtes“, später detailliert in der Veröffentlichung (Z43) (siehe. [4], S. XVII).
- k. „Über den bei Himmelskörper stattfindenden Zusammenhang von Durchmesser und Masse“ (siehe [4], S. XL).



Georg Zehfuss Grabstein,
Bergfriedhof Heidelberg-Südstadt,
Heidelberg



In Heidelberg, September 1889:

- I. Vortrag „Betrachtung über den Erfolg, den man sich in der Theorie des Erdmagnetismus versprechen kann, indem man die Erde nicht kugelförmig, sondern ellipsoidisch annimmt“ (siehe [43], S. 215).

Obwohl der Unterricht in Mathematik und Physik für zukünftige Ingenieure die Haupttätigkeit von Georg Zehfuss sowohl an der Gewerbeschule Darmstadt, wie auch an der Domschule Reval und an der Gewerbeschule in Frankfurt a.M. war, hat er bis zu seinem Tode in Frankfurt a.M. am 5. May 1901, eine Reihe von Veröffentlichungen in wissenschaftlichen Zeitschriften und in Buchformat ausgearbeitet, die wir in den nächsten Abschnitten vorführen und kommentieren.

Die letzte Ruhestätte führt Georg Zehfuss zurück nach Heidelberg. Sein Grab befindet sich auf dem Bergfriedhof Heidelberg-Südstadt, zusammen mit seiner Frau Luisa (1838-1911), seiner Tochter Cornelia (1864-1949), seinem Schwiegersohn Georg Anton Karch (1856-1937) und seinen Schwiegereltern Anna Barbara Karch (geborene Lenz, 1819-1904) und Johann Ludwig Karch (1811-1874). Leider fehlt sein Sohn Immanuel Gustav.

C. Liste der Werke

Die folgende chronologisch sortierte Liste enthält fast fünfzig Werke von Zehfuss, die Mehrheit im Bereich der Mathematik (neun Werke davon über Determinanten) und über ein Drittel im Bereich der Physik; darunter sind auch sechs Bücher. In der Zeit an der Universität Heidelberg (1857-1861) war er am aktivsten in Veröffentlichungen; ab 1865 konzentrierte sich Zehfuss mehr auf die physikalische Untersuchungen.

Im Anhang ist eine Tabelle aufgeführt, die die Werke von Zehfuss klassifiziert. Die Arbeiten über Determinanten werden speziell im Abschnitt D und seine Beiträge zur Physik in Abschnitt E behandelt.

Die meisten Veröffentlichungen erfolgen in zwei Fachzeitschriften; beide Zeitschriften fügen Probleme für Studenten ein, um die Lektüre der Zeitschrift und die Lösung von Problemen zu fördern:

- *Archiv der Mathematik und Physik*, auch bekannt durch seinen Herausgeber J. A. Grunert; diese Fachzeitschrift hat besondere Rücksicht auf die Bedürfnisse der Lehre an Höheren Schulen.
- *Zeitschrift für Mathematik und Physik*, herausgegeben von O. Schlömilch und B. Witschel, eine Zeitschrift für Professoren und Spezialisten in angewandter Mathematik.

Obwohl wir versucht haben eine möglichst vollständige Liste der Werke von G. Zehfuss zusammenzustellen, haben wir keine Garantie, daß hier alle Werke aufgeführt sind.

- (Z1) Naturkunde, *Allgemeine Schul-Zeitung*, Darmstadt 31 (1854), 125, S. 1075.
- (Z2) Einige Punkte über die Bestimmung der Constanten, welche bei Integration der endlichen Differenzgleichungen eingehen, *Archiv der Mathematik und Physik* XXVII (1856), S. 12–29.
- (Z3) *Abhandlung über einige mathematische Gegenstände. Inauguralschrift. Philosophische Fakultät Universität Heidelberg*, Buchdruckerei Heinrich Brill Darmstadt 1857, 14 S.

Bemerkung: Diese kurze Veröffentlichung behandelt vier verschiedene Themen, auf die auch als einzelne Werke verwiesen werden könnte:

- I. Über die Auflösung der Congruenz $ax \equiv b, \text{ mod } (\alpha^m \beta^n \gamma^p \dots)$.
 - II. Über Lagrange's Reversionsformel
 - III. Bestimmung des Integrales $I = \int_0^{+\infty} \frac{\cos ax}{(1+x^2)} dx$
 - IV. Theoretische Formel für die Maxima der Spannkkräfte der Wasserdämpfe bei verschiedenen Temperaturen.
- (Z4) *Lehrbuch der Arithmetik*, Ernst Korn, Oppenheim am Rhein 1857, 144 S.

Bemerkung: Dieses Buch wird im *Archiv der Mathematik und Physik* XXX (1858), S. 108 zitiert. Es gibt außerdem ein gemeinsames Kommentar dieses Buches und des Buches (Z22) in *Zeitschrift für Mathematik und Physik* 6 (1861), Literaturzeitung S. 72. Was sich auf das Lehrbuch der Arthmetik bezieht lautet der Kommentar:

„(Dieses Buch zeichnet) sich durch theilweise neue Behandlung des Stoffes, durch größte wissenschaftliche Strenge, durch Kürze und Reichhaltigkeit vor anderen Schriften über denselben Gegenstand vortheilhaft aus. Wir machen nur aufmerksam auf die Untersuchung der Multiplication und Division der gebrochenen Zahlen, auf die Lehre von den Positiven und negativen Größen und die Lehre von den Potenzen mit negativen und gebrochenen Exponenten, auf die Rechnung mit imaginären Größen, auf die Behandlung der Gleichungen des ersten Grades. ... (und) die für das Studium der Zahlentheorie so wichtige Lehre von der Congruenz. Das Lehrbuch der Arithmetik enthält übrigens auch die praktischen Rechnungsarten (Reductionsrechnungen, Zinsrechnungen, kaufmännische Rechnungen). (Das Buch ist) ... so anregend geschrieben, daß wir nur wünschen können, es mögen dieselben in recht viele Hände gelangen; der Nutzen für den Leser wird nicht ausbleiben.“

- (Z5) Ein neues mathematisches Paradoxon, *Archiv der Mathematik und Physik XXX* (1858) S. 229.

Bemerkung: Zehfuss kündigt hier eine weitere Veröffentlichung an, die wahrscheinlich nie erschienen ist.

- (Z6) Ueber die Auflösung der linearen endlichen Differenzgleichungen mit variablen Coefficienten, *Zeitschrift für Mathematik und Physik 3* (1858), S. 175–177.

- (Z7) Zur Theorie der Beugungserscheinungen des Lichtes, *Archiv der Mathematik und Physik XXX* (1858), S. 92–104.

- (Z8) Einfache Herleitung des Gauß'schen Ausdrucks für $\Gamma(\mu)$, *Archiv der Mathematik und Physik XXX* (1858) S. 441.

Bemerkung: Die Funktion $\Gamma(\mu)$ erweitert den Begriff Fakultät ($n!$) von natürlichen Zahlen n auf komplexe Zahlen μ .

- (Z9) Verschiedene Sätze und Resultate, *Archiv der Mathematik und Physik XXX* (1858), S. 465–466.

Bemerkung: Diese kurze Arbeit enthält drei verschiedene Themen, die unabhängig voneinander im Inhaltsverzeichnis der Zeitschrift Für Mathematik und Physik. 4 (1859) zitiert werden, und auf die auch als einzelne Werke verwiesen werden könnte:

I. Über ein bestimmtes Integral, *Archiv der Mathematik und Physik XXX* (1858), S. 465.

II. Ein Analogon für die Taylor'schen Reihe, *Archiv der Mathematik und Physik XXX* (1858), S. 466.

Bemerkung: Zehfuss definiert ein Quotient als analogon zur Taylor'schen Reihe.

III. Zerlegung einer Zahl in vier gerade Quadrate, *Archiv der Mathematik und Physik XXX* (1858), S. 466.

- (Z10) Übungsaufgabe, *Archiv der Mathematik und Physik XXX* (1858) S. 469.

- (Z11) Übungsaufgaben für Schüler, *Archiv der Mathematik und Physik XXXI* (1858) S. 246–248.

Bemerkung: Diese Arbeit beinhaltet sechs Themen:

I. Berechnung einer Determinante

II. Über mehrere Integrale

III. Über ein Integral

- IV. Über ein Integral
- V. Über ein Integral
- VI. Über Wahrscheinlichkeitsrechnung

(Z12) Mathematische Miscellen, *Zeitschrift für Mathematik und Physik* 3 (1858), S. 247-249.

Bemerkung: Eine kurze Arbeit die vier verschiedene Themen behandelt; sie werden manchmal einzeln zitiert, und auf die auch als einzelne Werke verwiesen werden könnte:

- I. Über eine in zahlentheoretischer Beziehung interessante Reihe, *Zeitschrift für Mathematik und Physik* 3 (1858), S. 247.
- II. Summierung einiger unendlichen Reihen, *Zeitschrift für Mathematik und Physik* 3 (1858), S. 247-248.
- III. Ein Satz über Differentialgleichungen, *Zeitschrift für Mathematik und Physik* 3 (1858), S. 248.
- IV. Aufgaben und Lehrsätze, *Zeitschrift für Mathematik und Physik* 3 (1858), S. 248-249.

(Z13) Über die Zeichen der einzelnen Glieder einer Determinanten, *Zeitschrift für Mathematik und Physik* 3 (1858), S. 249-250.

(Z14) Über eine gewisse Determinante, *Zeitschrift für Mathematik und Physik* 3 (1858) S. 298–301.

(Z15) Kommentar des Buches von Richard Baltzer „Theorie und Anwendungen der Determinanten mit Beziehung auf die Originalquellen“, *Kritische Zeitschrift für Chemie, Physik und Mathematik* (1858), S. 354-363.

(Z16) Über einige bestimmte Integrale, Übungsaufgaben, *Zeitschrift für Mathematik und Physik* 4 (1859), S. 465-469.

(Z17) Déduction simple de l'Expression $\Gamma(x)$ de Gauss, *Nouvelles annales de mathématiques* (1859) série 1, tome 18, S. 356.

Bemerkung: Französische Übersetzung der Arbeit (Z8) von Olry Terquem (1782-1862) (siehe Persönliche Akte der Polytechnischen Schule zu Riga [29]).

(Z18) Sur le sens géométriques de quantités imaginaires, *Archiv der Mathematik und Physik* XXXII (1859), S. 234 -236.

(Z19) Resolutio congruentiarum primi gradus per formulas novas, *Archiv der Mathematik und Physik* XXXII (1859), S. 422-424).

Bemerkung: Erweiterung von Teil I der Inaugural-Dissertation (Z3).

(Z20) Über confocale Ellipsoide, *Zeitschrift für Mathematik und Physik*. 4 (1859) S. 166.

(Z21) Über die Determinante $Q_p = \sum_{\pm}(a_0+b_0)^p (a_1+b_1)^p \dots (a_n+b_n)^p$, *Zeitschrift für Mathematik und Physik* 4 (1859), S. 233-236.

(Z22) *Die Grundzüge der Algebra*. Korn, Oppenheim 1860, 200 S.

Bemerkung: Dieses Buch wird im *Archiv der Mathematik und Physik* XXX (1858), S. 108 zitiert. Es gibt außerdem ein gemeinsames Kommentar dieses Buches und des Buches (Z4) in *Zeitschrift für Mathematik und Physik* 6 (1861) Literaturzeitung S. 72. Was sich auf das Lehrbuch der Algebra bezieht lautet der Kommentar:

„(Dieses Buch zeichnet) sich durch theilweise neue Behandlung des Stoffes, durch größte wissenschaftliche Strenge, durch Kürze und Reichhaltigkeit vor anderen Schriften über denselben Gegenstand vortheilhaft aus. ... so ist ... die für die gesammte höhere Analysis so wichtige Determinantenlehre, das Nöthigste über die höheren Gleichungen und die unbestimmte Analysis (höhere Congruenzen, unbestimmte Gleichungen des zweiten Grades) aufgenommen. (Das Buch ist) ... so anregend geschrieben, daß wir nur wünschen können, es mögen dieselben in recht viele Hände gelangen; der Nutzen für den Leser wird nicht aus bleiben.“

(Z23) Über den Cartesischen Satz bezüglich der Anzahl der positiven und negativen Wurzeln einer Gleichung, *Archiv der Mathematik und Physik* XXXIV (1860), S. 400-404.

(Z24) Über bestimmte Integrale, *Archiv der Mathematik und Physik* XXXIV (1860), S. 486-488.

(Z25) Über eine Zurückführung bestimmter Integrale zwischen den Grenzen 0 und α auf andere zwischen denselben Grenzen, *Archiv der Mathematik und Physik* XXXIV (1860), S. 486-488.

(Z26) Über die Festigkeit einer am Rande aufgelöhteten kreisförmigen Platte, *Zeitschrift für Mathematik und Physik* 5 (1860), S. 14-24.

(Z27) Über ein gewisses mathematisches Prinzip, *Zeitschrift für Mathematik und Physik* 5. Jahrgang (1860), S.210-215.

(Z28) Bemerkungen über das Rationalmachen der Nenner der Brüche, *Archiv der Mathematik und Physik* XXXV (1861), S. 117-118.

Bemerkung: Diese Veröffentlichung bezieht sich auf die Ankündigung des Herausgeber Grunert eines Briefes von Zehfuss von Ende des Jahres 1859, mit einem Kommentar zu einem Artikel von Unferdinger (1833-1890), der in der nächsten

Ausgabe veröffentlicht wird (siehe *Archiv der Mathematik und Physik* XXXIV (1860) s. 120).

- (Z29) Über eine mechanische Wirkung des elektrischen Funkens, *Annalen der Physik und Chemie* 193 (1862), S. 487–502.
- (Z30) Zwei Sätze über Determinanten, *Zeitschrift für Mathematik und Physik* 7 (1862), S. 436-439.
- (Z31) Anwendung einer besonderen Determinante, *Zeitschrift für Mathematik und Physik* 7 (1862), S. 439-445.
- (Z32) Einfache Ableitung zweier bestimmten Integrale, *Zeitschrift für Mathematik und Physik* 7 (1862), S. 445-447.

Bemerkung: Erweiterung von Teil III der Inaugural-Dissertation (Z3).

- (Z33) Über gleichzeitige Dilatationen eines isotropen Körpers nach verschiedenen Richtungen, *Zeitschrift für Mathematik und Physik* 8 (1863) S. 127-133.
- (Z34) *Beiträge zur Theorie der statischen Elektrizität*, Programm der Höheren Gewerbschule zu Frankfurt a. M. (1865), 40 S.
- (Z35) *Über eine Erweiterung des Begriffes der Determinanten*. Hermann'sche Buchhandlung, Frankfurt a. M. (1868), 8 S.
- (Z36) Exposé des principes élémentaires de la théorie des déterminants à l'usage des élèves de mathématiques spéciales, *Nouvelles annales de mathématiques* (1868) Tome 7, S. 403-413.
- (Z37) Exposé des principes élémentaires de la théorie des déterminants, à l'usage des élèves de mathématiques spéciales (suite), *Nouvelles annales de mathématiques* (1869) Tome 8, S. 97-113.

Bemerkung: Die Werke (Z36) und (Z37) sind der 1. und der 2. Teil derselben Veröffentlichung.

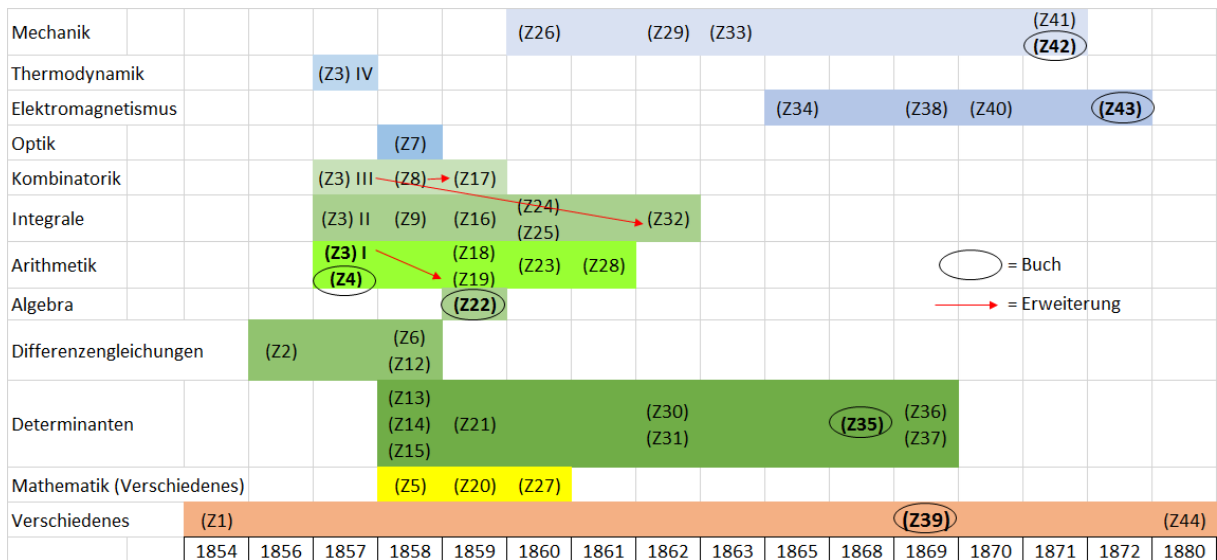
- (Z38) *Die kosmische Bedeutung der Aerolithen, namentlich gegenüber der Sonne, den Eiszeiten und dem Magnetismus der Himmelskörper*, Programm der Höheren Gewerbeschule zu Frankfurt a. M. (1869) S. 3-15 (siehe [35]).
- (Z39) *Die Pneumatische Canalisation beleuchtet mit Rücksicht auf Gesundheitspflege, Land- und Volkswirtschaft*. I. Abtheilung, F. Boselli'sche Buchhandlung, Frankfurt a. M. 1869.

- (Z40) Das Wichtigste über Theorie und Resultate der Spektralanalyse, *Programm der höheren Gewerbeschule zu Frankfurt a. M.* (1870).
- (Z41) Über eine bei Himmelskörpern stattfindenden Zusammenhang zwischen Durchmesser und Masse, *Programm der höheren Gewerbeschule zu Frankfurt a. M.* (1871).
- (Z42) *Über Masse und Abplattung der Himmelskörper*, Frankfurt a. M. 1871, 18 S.
- (Z43) *Physikalische Theorie des Nordlichtes*, Jaeger'sche Buch- Papier- und Lankarten-Sammlung, Adelman Frankfurt a. M. (1872), 40 S. Zu dem Osterprogramm der Schulen der Polytechnischen Gesellschaft gehörig. Direktor der höheren Gewerbeschule Frankfurt a. M. das selbe Thema.
- (Z44) Über Bewegungsnachbilder, *Annalen der Physik und Chemie* Band 245 (1880), S. 672–676.

Bemerkung: In Poggendorf [33] (S. 1400) wird ein weiteres Werk von Zehfuss zitiert, angeblich mit dem Titel „Über die willkürlichen Functionen, auf welche die Integration endlicher Differenzgleichungen führt“, in *Grunert's Arch. or Archiv der Mathematik und Physik* XXIX (1857), daß wir aber nicht ausfindig machen konnten.

Die folgende Graphik und die Tabelle im Anhang stellt Zehfuss Werke kronologisch und nach den behandelten Themen zusammen. Bemerkung zu enGraphik 1:

- Physikalische Werke sind in blau und mathematische Untersuchungen in grün gekennzeichnet; gelb bezeichnet Verschiedenes.
- Die 6 Veröffentlichungen in Buchformat sind durch Einkreisung markiert.
- Der Pfeil von (Z3) III nach (Z32) bedeutet: ((Z32) ist eine Erweiterung von Teil III der Inaugural-Dissertation (Z3).
- Der Pfeil von (Z3) I nach (Z19) bedeutet, daß Teil I der Inaugural-Dissertation (Z3) in (Z19) weiterentwickelt wird.
- Die Arbeiten über Differenzgleichungen haben zu den Arbeiten über Determinantentheorie geführt.
- Die Arbeiten (Z13), (Z14), (Z21), (Z30) und (**Z31**) sind Zwischenergebnisse und die letzten (Z35), (Z36) und (Z37) sind konsolidierte Ergebnisse der Determinantentheorie.



Graphik 1: Thematische und kronologische Folge der Werke

D. Beiträge zur Determinantentheorie

Es werden hier die damaligen Definitionen und Notationen der Determinanten aufgenommen, um das Verständnis der Inhalte der Arbeiten zu diesem Thema zu erleichtern. Der Name Determinante wurde von Gauß [13] in seinen *Disquisitiones arithmeticae* in 1801 eingeführt und das benutzte Symbol Σ_{\pm} geht auf Cauchy [8] and Binet [5] im Jahr 1812 zurück. Die heutige Notation benutzt das Symbol $||$ oder den Ausdruck $\det()$. Gehen wir davon aus, daß

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{vmatrix} = aek + dhc + gbf - gec - dbk - ahf = \Sigma (\pm a e k)$$

Im Allgemeinen werden entsprechend dieser Notation die Elemente der Diagonalen die Determinante benannt, mit dem Ausdruck des Symbols \pm die Variabilität des Vorzeichens der Elemente. Eine andere Schreibweise der damaligen Zeit berücksichtigt die typische Operation auf einer Determinante, die darin besteht die Unterdeterminante zu einem Element auszuwählen, wozu man die Notation des Differential der Determinante $\frac{\partial P}{\partial a}$ benutzt, was das Löschen der Zeile und Spalte des Elements a der Determinante P bedeutet.

$$\det(P) = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{vmatrix} = a(ek - hf) - b(dk - fg) + c(dh - ge) =$$

$$= a \begin{vmatrix} e & f \\ h & k \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} d & f \\ g & k \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} = a \frac{\partial P}{\partial a} - b \frac{\partial P}{\partial b} + c \frac{\partial P}{\partial c}$$

Das Löschen der Zeile und der Spalte eines bestimmten Elementes wurde damals ein *Derangement* bezeichnet.

Unter der Liste der Veröffentlichungen von G. Zehfuss, die in dem vorhergehenden Abschnitt 0 identifiziert sind, befinden sich neun Werke, die direkt mit der Determinantentheorie verbunden sind, das sind: (Z13) (Z14), (Z15), (Z21), (Z30), (Z31), (Z35), (Z36) und (Z37), die zwischen den Jahren 1858 und 1869 erschienen sind. Es folgt ein Kommentar für jedes dieser Arbeiten.

Insbesondere werden die Zitate von Zehfuss anderer Autoren angegeben, was seine tiefen Kenntnisse der Determinantentheorie seiner Zeit unterzeichnet. Diese Zitate sind manchmal ungenau, so daß wir hier die genauen Angaben aufnehmen.

(Z13) Über die Zeichen der einzelnen Glieder einer Determinanten

Zehfuss untersucht hier die Veränderung der Vorzeichen der Glieder der Determinanten, und zitiert das Werk von Gabriel Cramer (1704-1752) (siehe [10]), nach welchem als eine Regel gilt, daß jedes glied des Determinanten positiv oder negativ ist, je nachdem die Anzahl der *Derangements* gerade oder ungerade ist. Zehfuss beweist diese Regel.

(Z14) Über eine gewisse Determinante

In diesem kurzen Werk findet man den Ursprung der Kontroverse des Artikels von Henderson, Pukelsheim und Searle [18] mit der Bezeichnung *Zehfuss Produkt* an Stelle der üblicheren Bezeichnung *Kronecker Produkt* oder *Tensor Produkt von Matrizen* \otimes in der hetuigen Notation. Zehfuss beschreibt den Tensor Produkt and beweist, daß wenn A und B zwei quadratische Matrizen sind mit der Ordnung a bzw. b, für die Determinante des Tensor Produkt gilt:

$$|A \otimes B| = |A|^b |B|^a$$

Die Determinanten A und B entsprechen zwei Gleichungssystemen ersten Grades mit a bzw. b Unbekannten. In dieser arbeit warden auch Jacobi [21] und Brioschi [7] zitiert.

(Z15) Kommentar des Buches von Richard Baltzer

Hier führt Zehfuss eine detaillierte Analyse des Buches von Richard Baltzer [2] durch. Dieses Buch enthält zahlreiche anschauliche Hinweise auf die ursprünglichen Quellen der Determinantentheorie und ihre Anwendungen (siehe auch Muir [31]). Zehfuss kommentiert auch die Vorteile der Anwendung der Regel von seiner Schrift (Z13) auf S. 358).

Der Einfluss des Buches von Baltzer kann durch die Anzahl der eingegangenen Kommentare gemessen werden, zu denen Kronecker, Weierstraß, Brill, Gordon oder Borchardt, zu zählen sind und die die Auflagen 2, 3 und 4 des Buches herleiteten, wie es in den jeweiligen Vorreden jeder Auflage erwähnt wird.

(Z21) Über die Determinante $Q_p = \sum \pm (a_0+b_0)^p (a_1+b_1)^p \dots (a_n+b_n)^p$

Zehfuss untersucht diese Determinante für unterschiedliche Werte von p mit $0 < n \leq p$ und beweist, daß $Q_p = 0$, falls $p < n$. Er zitiert, daß bereits von Cauchy [7] für $p = -1$ und von C.W. Borchardt (1817-1880) für $p = -2$ [6]; außerdem zitiert er auch Joachimsthal ([22] S. 171) und Jacobi ([21] § 14).

(Z30) Zwei Sätze über Determinanten

Über die Zerlegung quadratischer Determinanten in Produkt zweier Determinanten.

(Z31) Anwendung einer besonderen Determinante

In dieser Arbeit untersucht Zehfuss folgende Determinante Δ , angeregt von seinem Lehrer O. Hesse und dessen Korrespondenz mit F. Bessel. Diese Determinanten werden des öfteren auch als „doppelt-orthosymmetrisch“ bezeichnet ($a \neq 0$). Das Charakteristische an dieser Determinante ist, daß in jeder Zeile und Spalte dieselben Elemente in verschiedener Reihenfolge vorkommen.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-2} \\ a_{n-2} & a_{n-1} & a & a_1 & \dots & a_{n-3} \\ a_{n-3} & a_{n-2} & a_{n-1} & a & \dots & a_{n-4} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \dots & a \end{vmatrix}$$

Man bemerke, daß für $n = 3$ diese Determinante die Form der kubischen Gleichung annimmt:

$$\Delta = \begin{vmatrix} x & y & z \\ z & x & y \\ y & z & x \end{vmatrix} = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$$

William Spottiswoode (1825-1883) hatte 1851 in Buchformat mit dem Titel *Elementary Theorems relating to Determinants* eine Determinantentheorie herausgegeben, jedoch fehlten in diesem Buch einige Beweise. Im *Crelle's Journal* von Anfang 1856 (siehe [38]) erschien unter demselben Titel eine überarbeitete Version versehen mit dem Datum 1853. Zehfuss vermisst den Beweis des Wertes von Δ bei Spottiswoode (siehe [38], § VIII), was er mit dieser Arbeit löst.

Und zusätzlich schreibt Zehfuss: „Später erschien auch in Terquem *„Nouvelles annales“* eine richtige Ableitung der Werthes von Δ ; der Name des Herrn Verfassers ist mir jedoch gegenwärtig nicht im Gedächtniss.“ (siehe (Z31), S. 440). Wir können nur Vermuten, daß es sich um Angelo Genocchi (1817-1889) handelt (siehe [15]).

Auch Moritz Abraham Stern (1807-1894) befasste sich 1871 mit dieser Determinante (siehe [39]) und einem vereinfachten Beweis des Wertes von Δ .

(Z35) Über eine Erweiterung des Begriffes der Determinanten

Dieses Buch entwickelt den Begriff einer Determinante in Dimension 3 (auch *kubische Determinante* genannt) und höherer Dimensionen sowie den Satz von Cramer über die Vorzeichen der Glieder der Determinante. Zehfuss zitiert Somov [37] (auch genannt J. Somoff = Osip Ivanovich Somov Osip = Joseph), den er auch in seinem Bewerbungsschreiben für das Polytechnikum von Riga nannte.

(Z36) y (Z37) Exposé des principes élémentaires de la théorie des déterminants à l'usage des élèves de mathématiques spéciales

Dieser zweiteilige Artikel entwickelt eine einfache Theorie der Determinanten für den Unterricht an höheren Schulen mit Anwendungen auf die Geometrie. So wurde z.B. die Determinantentheorie 1870 Teil als Unterrichtgegenstand für Gymnasien in Bayern (Siehe [19] Vorrede 1871).

E. Einige Beiträge zur Physik und anderen Wissenschaften

Die Liste der Werke von Zehfuss des Abschnittes 0 enthält dreizehn zwischen 1857 und 1880 veröffentlichte physikalische Schriften (und zwar (Z3), (Z7), (Z26), (Z29), (Z33), (Z34), (Z38), (Z39), (Z40), (Z41), (Z42), (Z43) und (Z44) im Abschnitt 0). Zu bemerken ist, daß die Arbeit

(Z44) über Bewegungsnachbilder in das Feld der Psychologie eindringt. Wir kommentieren hier drei dieser Arbeiten, wegen ihrem besonderen Einfluss in der Wissenschaft.

(Z39) Die Pneumatische Canalisation beleuchtet mit Rücksicht auf Gesundheitspflege, Land- und Volkswirtschaft

Dieses Buch wurde von Dr. F. Coar unter dem Titel "*The Pneumatic Sewage System Treated with Reference to Public Health, Agriculture and National Economy*", 1st Part, Wilhelm Hassel, Köln 1869, ins Englische übersetzt.

Das in diesem Buch beschriebene System erhielt auch einen Patentbrief oder *Letter of patent from the United States Patent Office in 1870 (letter of patent No. 100,347)* beantragt von Georg Zehfuss, dem Chemiker Carl Theodor Petersen (1836-1918), Friedrich Wicke and Julius Brenner aus Frankfurt a. M.

(Z43) Physikalische Theorie des Nordlichtes

Die Theorie des Nordlichtes von Zehfuss wird den magnetischen Theorien zugeschrieben, wobei die Theorien als kosmische, optische, magnetische oder elektrische Theorien klassifiziert werden (siehe Charles Alfred Angot (1848-1924) [1], S. 156) .

August Toepler (1836-1912) war ein deutscher Physiker, bekannt für seine Experimente in Elektrostatik; er zitiert Zehfuss Abhandlung "Physikalische Theorie des Nordlichtes" während eines Vortrages des *Naturwissenschaftlichen Vereins zur Steiermark* (Österreich) in 1873:

„Als Resultat des Vergleiches ber verschiedenen Theorien weist (der) Redner auf den unzweifelhaften kosmischen Ursprung des Nordlichts hin und betont, daß der Theorie von Baumhauer-Zehfuss die größte Wahrscheinlichkeit unter allen zuzusprechen sei, indem sie sämtliche, mit dem Nordlicht in Zusammenhang stehende Erscheinungen einfach und völlig befriedigend zu erklären vermag.“
(Siehe [45] S. 64).

In der *Encyclopædia Britannica, Ninth Edition/Aurora Polaris* heißt es:

„Although the electric hypothesis is the one generally hypothesis, accepted by scientific men, it is only fair to allude to one that has been recently proposed independently by Dr Zehfuss (...) and by H. J. H. Groneman of Groningen (Astronomische Nachrichten, No. 2010-2012).“

(Z44) Über Bewegungsnachbilder

Diese Arbeit übergreift die Felder der Physik und der Psychologie. Sigmund Exner (1846-1926), ein bedeutender österreichischer Psychologe, zitiert diese Arbeit von Zehfuss (siehe [12] und Verstraten et al. [47]).

F. Schlusswort

Obwohl der Name Zehfuss seit mehr als 30 Jahren in Verbindung mit dem Tensor Produkt oder Kronecker Produkt steht (siehe [18]) sind bis jetzt bibliographischen Angaben von Georg Zehfuss knapp und die Liste seiner Veröffentlichungen unvollständig. Wir hoffen mit dieser Arbeit diese Lücken zu schließen, in dem wir Daten aus verschiedenen bekannten und neuen Quellen sammeln, gruppieren, ordnen, kategorisieren und kommentieren. Dies umfasst biographische Daten, seine Lehrer und Tutoren, seine Veröffentlichungen und die Auswirkungen einiger seiner Leistungen in Mathematik und Physik.

Es gibt vier Anhaltspunkte dafür, daß Georg Zehfuss nicht nur als Lehrer der höheren Mathematik und Physik tätig war, sondern das wissenschaftliche Leben an verschiedenen Univeristäten miterlebte und seine Werke sowohl in Mathematik wie Physik anerkannt wurden; und zwar:

1. Der Einfluß seiner Lehrer in der Schule (E. Külp, A. Strecker und Ch. Wiener) und an der Universität Heidelberg (unter anderen O. Hesse und G. Kirchhoff).
2. Seine Beziehungen zu bedeutenden Physiker und Mathematiker seiner Zeit (wie z.B. F. Minding , O. Somov, J. A. Grunert, F. J. Richelot und O. Schlömilch, O. Terquem).
3. Seine aktive Teilnahme an Jahresversammlungen der *Gesellschaft Deutscher Naturforscher und Ärzte* (GDNA) und der *Wetterauischen Naturforschenden Gesellschaft zu Hanau*.
4. Eine Liste von mehr als 50 Arbeiten und Bücher, mit Beiträgen zur Mathematik (Determinantentheorie, Differenzgleichungen, Arithmetik, Algebra Differential und Integralrechnung und Kombinatorik) und zur Physik (Mechanik, Thermodynamik, Elektromagnetismus und Optik).

G. Literatur

- [1] Angot, Alfred, *The Aurora Borealis*, London, Kegan Paul, Trench, Trübner & Co. Ltd. Paternoster House, Charing Cross Road, 1896.
- [2] Baltzer, Richard; *Theorie und Anwendungen der Determinanten mit Beziehung auf die Orginalquellen*, Leipzig bei Hirzel, 1. Auflage 1857, 2. Auflage 1864, 3. Auflage 1870, 4. Auflage 1875.
- [3] Bauer, Gustav; *Gedächtnissrede auf Otto Hesse*, Königlich Bayerische Akademie der Wissenschaften, München 1882.
- [4] Bericht der Wetterauischen Gesellschaft für die Gesamte Naturkunde zu Hanau: über den Zeitraum 1868/73, 1868/73. – 1874, Hanau, M. : Wetterauische Gesellschaft., 1874
- [5] Binet, Jacques, Mémoire sur un système de formules analytiques et leur application à de considérations géométriques, *Journal de l'Ecole Polytechnique* IX, cahier 16 (1812), S. 280-354.

- [6] Borchardt, Carl Wilhelm, Bestimmung der symmetrischen Verbindungen mittelst ihrer erzeugenden Function, *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 53 (1857) S. 199-243.
- [7] Brioschi, Francesco, *Théorie des déterminants et leurs principales applications*, Mallet-Bachelier, Paris, 1856. (French translation by E. Combescure of *La teorica dei determinanti e le sue principali applicazioni* 1854).
- [8] Cauchy, Augustin Louis, Mémoire sur les fonctions qui ne peuvent que obtenir que deux valeur égales et de signe contraires par suite des transpositions opérées entre les variables qu'elles renferment, *Journal de l'Ecole Polytechnique* X (1812), S. 29-112.
- [9] Cauchy, Augustin Louis, Mémoire sur les sommes alternées, connues sous le nom de résultants, *Exercices d'analyse et de physiques mathématiques*, tome 2^{eme}, Paris (1841) S. 160-176.
- [10] Cramer, Gabriel, *Introduction à l'analyse de lignes courbes algébriques*, Genf 1750.
- [11] Edwards, Harold; *Kronecker's Place in History*, Minnesota Studies in the Philosophy of Science, vol. XI: History and Philosophy of Modern Mathematics, Minneapolis: University of Minnesota Press, S. 139-144.
- [12] Exner, Siegmund, Einige Beobachtungen über Bewegungsnachbilder, *Centralblatt für Physiologie* 1 (1887) S. 135–140.
- [13] Gauß, Carl Friedrich, *Disquisitiones arithmeticae*, Königliche Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen 1863 des Original von Leipzig 1801, sectio quinta.
- [14] Geschichte der Wetterausischen Gesellschaft, Hanau 1908.
- [15] Genocchi, Angelo, Théorème de M. Brioschi (voir t. XV, p. 366), *Nouvelles annales de mathématiques*, Série 1: Tome 16 (1857) S. 95-96
- [16] Günther, Siegmund; *Lehrbuch der Determinanten-Theorie für Studierende*, Eduard Besold, Erlangen 1877.
- [17] Heidelbergische Jahrbücher der Literatur, Volumen 59 (1866) S. 93-96.
- [18] Henderson, Harold v.; Pukelsheim, Friedrich and Searle, Shayle R., On the History of the Kronecker Product, *Linear and Multilinear Algebra*, (1983), Volume 14, S.113-120.
- [19] Hesse, Ludwig Otto, *Die Determinanten elementar behandelt*. Leipzig: Teubner, 1872.
- [20] Horn, Roger A. and Johnson, Charles R.: *Topics in Matrix Analysis*, Cambridge University Press 1991, ISBN 05-521-30587-X, S. 254.
- [21] Jacobi, Carl Gustav Jacob, De formatione et proprietatibus determinantium, *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 22 (1841), S. 285-318.
- [22] Joachimsthal, Ferdinand, De aequationibus quarti et sexti gradus quae in theoria linearum et superficierum secundi gradus occurrunt, *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 53 (1857), S. 155-178.
- [23] Kern, Günter, *Die Entwicklung des Faches Mathematik an der Universität Heidelberg 1835-1914*, Universitätsbibliothek Heidelberg 1992.
- [24] Kieseritzky Gustav, Die Entstehung des baltischen Polytechnikums und die ersten 25 Jahre seines Bestehens, Festschrift der polytechnischen Schule zu Riga zur Feier ihres XXV jährigen Bestehens, Riga 1887, 137 S.
- [25] Knus, Max-Albert, *Dedekind und das Polytechnikum in Zürich*, 1861 Bewerbung TU Zürich, Festschrift der Braunschweigischen Wissenschaftlichen Gesellschaft und der Technischen Universität Carolo Wilhelmina zu Braunschweig zur 150. Wiederkehr des Geburtstages von Richard Dedekind, Erich Göltze, 1982, S. 43-60.

- [26] Kössler, Franz, Verzeichniss der Doktorpromotionen an der Universität Giessen von 1801-1884, Giessen Universitätsbibliothek 1970.
- [27] Külp, Edmund, Die höhere Gewerbschule zu Darmstadt, Darmstadt 1850, ISBN 1517086310, Kindle Edition.
- [28] Külp, Edmund; *Lehrbuch der Experimental-Physik*, Erster Band: *Die Statik und Dynamik fester und flüssiger Körper*, Zweiter Band: *Die Lehre von Schall und vom Licht*, Dritter Band: *Die Lehre von der Elektrizität und dem Magnetismus*, Vierter Band: *Die Lehre von der Wärme*, Verlag Darmstadt, Diehl 1860-1867. Erscheinungsdatum 1860.
- [29] Latvian State Historical Archives, Acta des Verwaltungsrat der Polytechnischen Schule zu Riga, betr. den Herrn Professor G. Zehfuss, Polytechnical Institute LVVA 7175 1 288, vom 24. Februar 1862 bis 13. August 1863.
- [30] Muir, Thomas, *A treatise on the theory of determinants*, London, MacMillan & Co 1882.
- [31] Muir, Thomas; A List of Writings on Determinants, *Quarterly Journal of Mathematics* vol. XVIII (1881), S. 110-149).
- [32] Notizblatt des technischen Vereins zu Riga, Zweiter Jahrgang, 1863, Buchdruckerei von W. F. Häker.
- [33] Poggendorff, Johann Christian, *Biographisch-literarisches Handwörterbuch zur Geschichte der exacten Wissenschaften*. Band 2. Leipzig 1863, S. 1400 and Band 3, S. 1479.
- [34] Programm der Gewerbeschule Frankfurt a.M. für das Schuljahr 1865/1866. C. Adelmann 1865.
- [35] Programm der Gewerbeschule Frankfurt a.M. zu Ostern 1869, S. 18, C. Adelmann.
- [36] Schubring, Gert, *Documents on the mathematical education of Edmund Külp (1800–1862), the mathematics teacher of Georg Cantor*, ZDM The International Journal on Mathematics Education (2007) 39: S.107–118.
- [37] Somov, Osip Ivanivich, *Moyen d'exprimer directement en coordonnées curvilignes quelconques, ortogonales ou obliques, les paramètres différentiels du premier et second ordres et la courbure d'une surface* Mémoires de l'Académie impériale des sciences de St.-Pétersbourg, VII^{ème} série, tome VIII, N^o 16 et dernier, S. 1-45.
- [38] Spottiswoode, William, *Elementary Theorems relating to Determinants*, Journal für die reine und angewandte Mathematik (1856), Band 51, Teil 1 S. 209-271 und Teil 2 S. 328-381.
- [39] Stern, Moritz Abraham, Eine Bemerkung über eine Determinante, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, Band 73, 1871, S. 374-380.
- [40] *Tageblatt der 41. Versammlungsberichte der Gesellschaft Deutscher Naturforscher und Ärzte in Frankfurt a. M.*, von Neumann 1867.
- [41] *Tageblatt der 42. Versammlung deutscher Naturforscher und Ärzte in Dresden 1868*, Teubner 1868.
- [42] *Tageblatt der 43. Versammlung deutscher Naturforscher und Ärzte in Innsbruck 1869*, Wagne'schen Universitätsbuchhandlung 1869.
- [43] *Tageblatt der 62. Versammlung deutscher Naturforscher und Ärzte in Heidelberg vom 18. bis 23. September 1889*. Heidelberg, Üniveritätsbuchdruckerei von J. Höbning 1890.
- [44] Todesnachricht in: *Leopoldina - Amtliches Organ der Kaiserlichen Leopoldina-Carolinischen Deutschen Akademie der Naturforscher*, Heft 37, Jahrgang 1901, S. 56, Eberhard Karras in Halle1901.

- [45] Toepler, August, Vortrag über die neueren Theorien des Nordlichtes, , *Mitteilungen des naturwissenschaftlichen Vereins zur Steiermark*, Versammlung am 25. Januar 1873, S. 60-64, Graz, 1873.
- [46] TU Darmstadt, *Adressen-Verzeichnis der ehemaligen Studierenden der höheren Gewerbeschule, der technischen Schule, sowie der polytechnischen Schule, bzw. technischen Hochschule zu Darmstadt*, Darmstadt 1885.
- [47] Verstraten, Frans A. J.; Niehorster, Diederick C.; van de Grind, Wim A. and Wade, Nicholas J.; Sigmund Exner's (1887) Einige Beobachtungen über Bewegungsnachbilder (Some Observations on Movement Aftereffects): An Illustrated Translation With Commentary, *i-Perception* 2015 6 (5) S. 1-18.
- [48] Zehfuss, Johann Georg, https://de.wikisource.org/wiki/Georg_Zehfuss.
- [49] Zehfuss, Johann Georg, Hessische Biografie LaGIS Hessen, <http://www.lagis-hessen.de/pnd/116968702>.
- [50] Zigmunde, Alīda, *Pedagoģiskās Darbības Saturs Rīgas Politehnikumā Un Rīgas Politehnikajā Institutā (1862-1919) Die pädagogische Tätigkeit des Polytechnikums und des Politechnischen Institut von Riga (1862-1919)*, Riga 2006.

H. Anhang

Folgende Tabelle fasst die Werke von Zehfuss zusammen.

Id.	Jahr	Allgemein			Mathematik							Physik			Kommentar	
		Mathematik	Physik	Andere	Deteminanten	Integrale	Arithmetik	Geometrie	Differentialgleichungen	Algebra	Differenzgleichunge	Verschiedenes Math.	Mechanik	Magnetismus		Verschiedenes Physik
(Z1)	1854			x												Wissenschaft
(Z2)	1856	x								x						
(Z3)	1857	x	x								x			x		Dissertation, 4 verschiedene Teile
(Z4)	1857	x					x									Buch
(Z5)	1858	x									x					
(Z6)	1858	x									x					
(Z7)	1858		x											x		Beugung, Optik
(Z8)	1858	x									x					Kombinatorik
(Z9)	1858	x				x										Quotial
(Z10)	1858	x									x					
(Z11)	1858	x									x					
(Z12)	1858	x									x					

Id.	Jahr	Allgemein			Mathematik							Physik			Kommentar	
(Z13)	1858	x			x											Kombinatorik
(Z14)	1858	x			x											
(Z15)	1858	x			x											Baltzer
(Z16)	1859	x				x										
(Z17)	1859	x										x				Kombinatorik
(Z18)	1859	x					x									
(Z19)	1859	x					x									
(Z20)	1859	x										x				
(Z21)	1859	x			x											
(Z22)	1859	x									x					Buch
(Z23)	1860	x					x									
(Z24)	1860	x				x										
(Z25)	1860	x				x										
(Z26)	1860		x									x				Statik
(Z27)	1860	x										x				Algebraische Funktionen
(Z28)	1861	x					x									
(Z29)	1862		x										x			
(Z30)	1862	x			x											
(Z31)	1862	x			x											
(Z32)	1862	x				x										
(Z33)	1863		x										x			Molekular Physik
(Z34)	1865		x											x		Elektromagnetismus
(Z35)	1868	x			x											Buch
(Z36)	1869	x			x											
(Z37)	1869	x			x											
(Z38)	1869		x											x		Elektromagnetismus
(Z39)	1869			x												Patent, Buch
(Z40)	1870		x											x		Spektralanalyse, Elektromagnetismus
(Z41)	1871		x											x		
(Z42)	1871		x											x		Buch

Id.	Jahr	Allgemein			Mathematik								Physik			Kommentar
(Z43)	1872		x											x		Aurora borealis, Buch, Elektro- magnetismus
(Z44)	1880			x												Psychologie
	?	x									x					Nicht gefunden
	43	31	11	3	9	5	5	1	2	1	3	8	5	4	2	