Sveučilište u Zagrebu
Prirodoslovno-matematički fakultet
Matematički odsjek

Ana Šlogar

Teorija izglednosti i rizik

Diplomski rad

Voditelj rada:
Dr.sc. Lavoslav Čaklović

Zagreb, srpanj 2017.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ______________________________ , predsjednik
2. ______________________________ , član
3. ______________________________ , član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ______________________ .

Potpisi članova povjerenstva:

1. ______________________________
2. ______________________________
3. ______________________________

Sadržaj

1 Uvod

Diplomski rad razrađuje deskriptivni model odlučivanja pri riziku, zvan teorija izglednosti. Prije razvijanja ovog modela, teorija očekivane korisnosti je dominirala analiziranjem odluka donešenih pri riziku. Ta teorija je bila opće prihvaćena kao normativni model racionalnog izbora, te je bila uvelike primjenjivana kao opisni model ekonomskog ponašanja. Pri tome se pretpostavlja da će svaka racionalna osoba slijediti aksiome teorije. Ovim radom ćemo opisati nekoliko kategorija problema izbora u kojima preferencije krše pravila teorije očekivane korisnosti. Primjerice, ljudi podcjenjuju ishode koji su manje vjerojatni u usporedbi s ishodima koji su sigurni. Takva tendencija, zvana "efekt sigurnosti", doprinosi averziji prema riziku pri izboru koji uključuje siguran gubitak. Nadalje, ljudi često odbacuju komponente koje su zajedničke svim prospektima koje razmatramo. Takva tendencija se naziva "izolacijski efekt" te ona vodi ka nekonzistentnim preferencijama ukoliko je isti ishod prezentiran na drugačiji način. Promjene u izborima su proučavane na primjerima koji se odnose na novčane ishode, te na primjere koji se odnose na mogućnost preživljavanja ili umiranja u slučaju neke teške bolesti. Pokazalo se da ljudi biraju opcije koje su pozitivno oblikovane, ili u drugu ruku najmanje negativno i nama prihvatljivo oblikovane. Također, u našoj alternativnoj teoriji odlučivanja, svaki se izbor vrednuje pojedinačno umjesto da se promatra ukupan konačni ishod, pri čemu su vjerojatnostima dodane i težine. Funkcija vrijednosti je normalno konkavna za dobit, a umjereno konveksna i strmija za gubitak. Ranije spomenute težine su uglavnom manje od odgovarajućih vjerojatnosti, osim za jako male vjerojatnosti. Precjenjivanje malih vjerojatnosti može doprinijeti atraktivnosti osiguranja kao i kockanja. Vođeni tim zapažanjima, argumentirat ćemo zašto teorija korisnosti, sa svojim uvaženim interpretacijama i primjenama, nije prikladan deskriptivni model, te predlažemo alternativnu ideju za analizu odlučivanja pri riziku. U radu ćemo pokazati i praktičnu primjenu ove relativno mlade teorije koja postaje sve popularnija zbog svoje mogućnosti modeliranja ljudskog ponašanja te potencijalne manipulacije istog.

2 Očekivana korisnost

Važne financijske odluke u našim životima tiču se velikih ulaganja, pa promatranje očekivane vrijednosti možda nije razumno. Većina naših odluka se niti ne odnose na kvantitativne ishode, kao što su primjerice one vezane uz zdravstveno stanje. U tom slučaju ne možemo koristiti očekivanu vrijednost jer je niti ne možemo definirati. Iz tih razloga potrebna nam je općenitija teorija, pa smo se okrenuli teoriji očekivane korisnosti. Proučavati ćemo slučajeve u kojima su vjerojatnosti događaja poznate. Takvi slučajevi zovu se odlučivanje pri riziku. U odlučivanju pri riziku, skup ishoda je R, pri čemu realni brojevi označavaju novac. Prospekti su vjerojatnosne distribucije nad R koje poprimaju konačno mnogo vrijednosti. Zapisujemo ih u obliku $(p_1 : x_1, p_2 : x_2, ..., p_n : x_n)$, koji označava da se za svaki $j \in 1, 2, ..., n$ ishod x_j dogodio s vjerojatnošću p_j. Ovdje je n prirodni broj, različit za različite prospekte. Često u zapisu ispustimo zagrade i zareze te ukoliko neće doći do zabune i množenja, pišemo $p_1x_1p_2x_2...p_nx_n$. Također, ukoliko imamo samo dvije vjerojatnosti, često izbacimo drugu i pišemo $x_1p_1x_2$. Relaciju preferencije označavamo s $\succeq$. Primjerice, jasno je da vrijedi $95_{0.5}70 \succeq 80_{0.5}60$ ili $80_{0.3}60 \succeq 50$. U prvom slučaju su oba ishoda iz prospekta s lijeve strane veća od odgovarajućih ishoda s desne strane za istu danu vjerojatnost ishoda. U drugom primjeru vidimo da će ishodi prospekta s lijeve strane biti veći od ishoda s desne strane za bilo koju vjerojatnost ishoda. No koji bismo prospekt preferirali od sljedeće ponuđenih: 50 ili $100_{\frac{1}{2}}0$? Prije no što odgovorimo na to pitanje, definirajmo pojmove averzija prema riziku, sklonost ka riziku, te neutralnost prema riziku.

Definicija 2.1. Averzija prema riziku *se očituje ukoliko niti jedan prospekt ne preferiramo u odnosu na njegovu očekivanu vrijednost.*

Definicija 2.2. Sklonost ka riziku *se očituje ukoliko svaki prospekt preferiramo u odnosu na njegovu očekivanu vrijednost.*

Definicija 2.3. Neutralnost na rizik *se očituje ukoliko smo indiferentni na prospekt u odnosu na njegovu očekivanu vrijednost.*

Averzija prema riziku implicira sljedeću preferenciju $50 \succeq 100_{\frac{1}{2}}0$, dok sklonost ka riziku implicira $50 \preceq 100_{\frac{1}{2}}0$. Neutralnost na rizik znači da se istovremeno manifestira averzija prema riziku i sklonost ka riziku te ju označavamo s $50 \sim 100_{\frac{1}{2}}0$.

3 Paradoks izbora

Istraživanja su pokazala da će ljudi preferirati siguran dobitak u odnosu na lutriju. Također, kada se radi o negativnim ishodima, primjerice gubitku novca, istraživanja su pokazala da u tom slučaju većina ispitanika izrazila sklonost ka riziku s ciljem da pokušaju minimizirati gubitak. Taj rezultat uvelike odstupa od ekonomske pretpostavke o univerzalnoj averziji prema riziku. Također, pokazuje da ljudi različito reagiraju kada se radi o gubitku i dobitku. Iduća zanimljiva karakteristika koja se može primijetiti proučavajući izbore za koje se ljudi odlučuju, odnosi se na način na koji im je izbor formuliran. Postoji veza između riskiranja i pozitivne i negativne formulacije. Negativno formulirani problemi potiču sklonost ka riziku. S obzirom da gubitak više "boli" nego ekvivalentni dobitak, ljudi prate konzervativne strategije kada se suočavaju s pozitivno formuliranom dilemom, a riskantne strategije kada se suočavaju s negativno formuliranom dilemom. Kako bismo to zorno dočarali, promotrimo eksperiment u kojem se reprezentativni uzorak liječnika pitalo iduće:

"Zamislite da se SAD priprema za epidemiju neuobičajene azijske bolesti, od koje se očekuje da će umrijeti šesto ljudi. Predložena su dva alternativna programa za borbu protiv bolesti. Pretpostavimo da su precizne znanstvene procjene posljedica određenih programa sljedeće: ukoliko se prihvati program A, dvjesto ljudi će biti spašeno. Ukoliko se prihvati program B, postoji vjerojatnost od $\frac{1}{3}$ da će šesto ljudi preživjeti i $\frac{2}{3}$ da nitko neće preživjeti. Koji biste program izabrali?"

Primijetite da je sljedeća dilema pozitivno formulirana. Ona prikazuje problem u terminima spašenih života. Kada se pitanje formuliralo na ovaj način, 72 posto liječnika su izabrali program A, sigurnu strategiju, a samo 28 posto se odlučilo za program B, rizičnu strategiju. Istom uzorku liječnika je sada postavljeno isto pitanje, ali negativno formulirano.

"Zamislite da se SAD priprema za epidemiju neuobičajene azijske bolesti, od koje se očekuje da će umrijeti šesto ljudi. Predložena su dva alternativna programa za borbu protiv bolesti. Pretpostavimo da su precizne znanstvene procjene posljedica određenih programa sljedeće: ukoliko se prihvati program C, četiristo ljudi će umrijeti. Ukoliko se prihvati program D, postoji vjerojatnost od $\frac{1}{3}$ da nitko neće umrijeti i vjerojatnost od $\frac{2}{3}$ da će šesto ljudi umrijeti. Koji biste program izabrali?"

Ova dva pitanja propituju istu dilemu: dvjesto spašenih je isto što i četiristo od šesto koje smo izgubili. Međutim, ukoliko je pitanje negativno formulirano, liječnici se više koncentriraju na gubicima, nego na dobitku te su odgovarali u dramatično različitom stilu. Ukoliko je pitanje negativno formulirano, 28 posto liječnika su izabrala konzervativnu strategiju, a 72 posto se odlučilo za rizičnu strategiju. Stoga je jasno da formulacija može snažno utjecati na percepciju problema, što može dovesti do preferiranja radikalno različitih rješenja.
Ljudi su skloni izbjegavati rizik pri razmatranju pozitivno formuliranog problema, a pokazuju sklonost ka riziku pri razmatranju negativno formuliranog problema. Posljedica toga se očituje u obliku krivulje korisnosti.
Ovaj zaključak također sadrži važne implikacije vezane uz reakcije investitora na dobre ili loše novčane ishode, u smislu zarade ili gubitka, te na preporuke financijskih analitičara.

4 Teorije odlučivanja o riziku

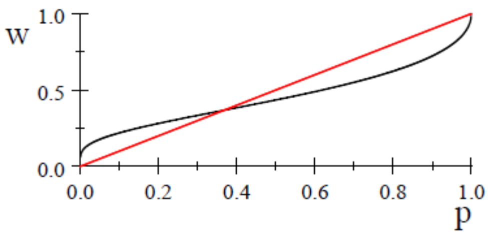
4.1 Motivacija za razvijanjem teorije

U ovom radu ćemo se baviti predstavljanjem teorije odlučivanja koja najdetaljnije obuhvaća neke specifičnosti u ljudskom ponašanju. Specifičnosti kojima ćemo se baviti su:
1.) Za vjerojatnosti ishoda koje nisu u rubovima intervala vjerojatnosti $[0, 1]$, donositelji odluke precjenjuju male vjerojatnosti, a podcjenjuju velike vjerojatnosti.
2.) Za događaje čije su vjerojatnosti na samim rubovima intervala vjerojatnosti $[0, 1]$, donositelji odluke pokazuju dva tipa ponašanja:
2.a) Jedan dio donositelja odluke zanemaruju ishode s vrlo malim vjerojatnostima dok one s velikim vjerojatnostima uzimaju kao sigurne.
2.b) Preostali donositelji odluke se koncentriraju na volumen ishoda, pri tome zanemarujući vjerojatnost njegova događaja, bila ona velika ili mala. Takvo ponašanje je naglašenije kada se radi o gubitku.
Teorije koje su naslijedile teoriju očekivane korisnosti u kontekstu donošenja odluka uvode pojam vaganja odluka, pri tome koristeći težinsku funkciju u

oznaci $w(p)$, definiranu s $w(p) : [0,1] \to [0,1]$, kako bi obuhvatili subjektivno stajalište donositelja odluke o vjerojatnosti p nekog ishoda. Razne teorije, poput rang ovisne korisnosti i kumulativne teorije izglednosti integrirale su težinske funkcije koje su uspjele obuhvatiti najviše jednu ili dvije od ranije navedenih specifičnosti ljudskog ponašanja.
Takav primjer je Prelecova funkcija:

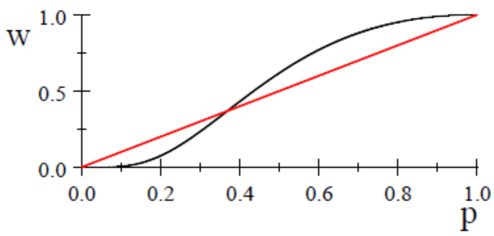
$$w(p) = e^{-\beta(-lnp)^{\alpha}}, \alpha > 0, \beta > 0, 0 \leq p \leq 1$$

U slučaju $\alpha < 1$ ova funkcija precjenjuje male vjerojatnosti i podcjenjuje velike, no zanemaruje drugu specifičnost ponašanja.



Slika 1: $\alpha = 0.5$, $\beta = 1$

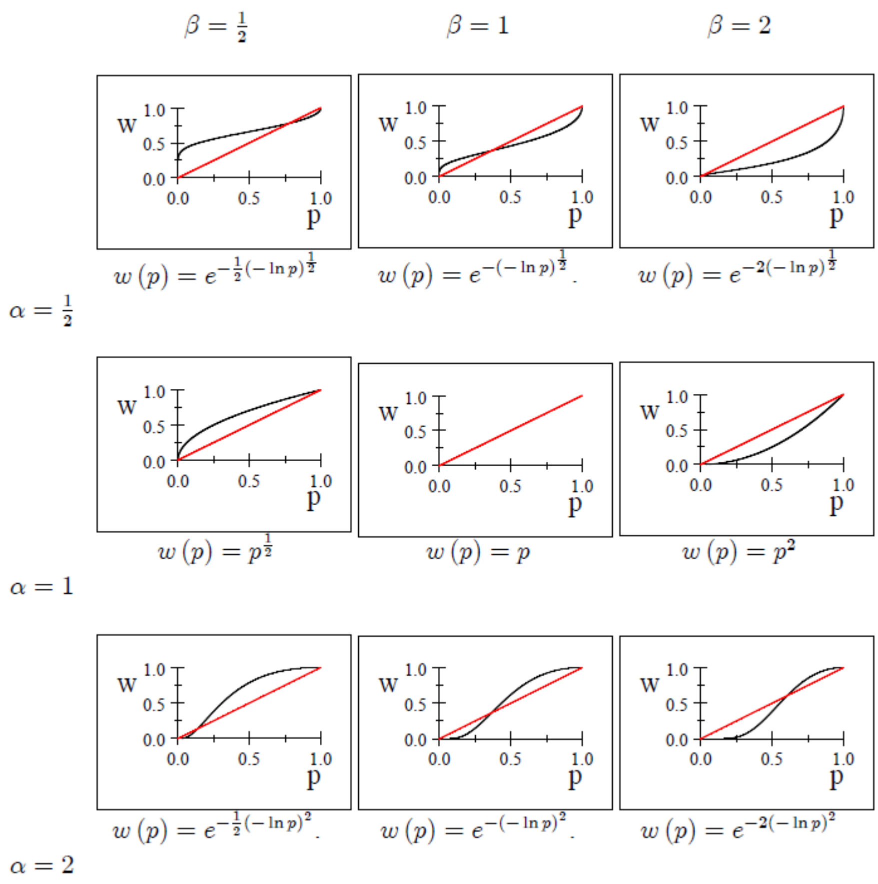
U drugom slučaju, za $\alpha > 1$, Prelecova funkcija ne obuhvaća iste specifičnosti kao u prvom slučaju, već pokriva preostale specifičnosti ljudskog ponašanja.



Slika 2: $\alpha = 2$, $\beta = 1$

Napomena 4.1. *Kako bismo razlikovali dva slučaja, $\alpha < 1$ i $\alpha > 1$, prvi ($\alpha < 1$) ćemo zvati standardna Prelecova funkcija. Ona precjenjuje infinitezimalne vjerojatnosti tako da vrijedi svojstvo $\lim_{p \to 0} \frac{w(p)}{p} = \infty$ i precjenjuje vjerojatnosti blizu 1 tako da vrijedi $\lim_{p \to 1} \frac{1-w(p)}{1-p} = \infty$. Težinske funkcije za koje vrijedi navedeno svojstvo zvati ćemo standardne težinske funkcije.*

Sada ćemo objasniti značenje pojedinog parametra u funkciji. Parametar α utječe na konveksnost, tj. konkavnost Prelecove funkcije. Najviše ćemo se usredotočiti na proučavanje tog parametra. Ukoliko je $\alpha < 1$ tada je Prelecova funkcija strogo konkavna za male vjerojatnosti, a strogo konveksna za velike vjerojatnosti. U tom slučaju je funkcija oblika naopakog slova S kao što je prikazano na slici 1. Nasuprot tome, ako je $\alpha > 1$, Prelecova funkcija je oblika slova S, konveksna za male vjerojatnosti a konkavna za velike. Izmeu strogo konveksnog ($w'' > 0$) i strogo konkavnog ($w'' < 0$) dijela funkcije nalazi se točka infleksije ($w'' = 0$). Parametar β utječe na poziciju točke infleksije u odnosu na os koja leži pod kutem od 45°. Ukoliko je $\beta = 1$ točka infleksije nalazi se na osi. Ukoliko je $\beta < 1$ točka infleksije nalazi se iznad osi, a ukoliko je $\beta > 1$ nalazi se ispod osi. Pogledajmo kako izgleda Prelecova funkcija za različite kombinacije parametara α i β.



Slika 3: Prelecova funkcija za različite parametre

4.2 Definicija teorije izglednosti

Međutim, do sada spomenute teorije ne opisuju specifičnosti ljudske percepcije i ponašanja na zadovoljavajući način. Stoga su Dhami i al-Nowaihi, dvojica profesora iz područja bihevioralne ekonomije sa sveučilišta Leicester, predložili kompozitnu kumulativnu teoriju izglednosti. Teorija je temeljena na Prelecovoj kompozitnoj težinskoj funkciji. Prvo ćemo definirati svojstvo lokalne invarijantnosti na potenciranje koje se koristi za definiranje kompozitne Prelecove funkcije.

Definicija 4.2. (Lokalna invarijantnost s obzirom na potenciju)
Neka je $0 = p_0 < p_1 < ... < p_n = 1$. *Težinska funkcija w zadovoljava svojstvo lokalne invarijantnosti na potenciranje ako za* $i = 1, 2, ..., n$ *i* $\forall p, q \in (p_{i-1}, p_i)$, $(w_i(p))^\mu = w_i(q)$ *i* $p^\lambda, q^\lambda \in (p_{i-1}, p_i)$ *slijedi da je* $(w(p^\lambda))^\mu = w(q^\lambda)$

Definicija 4.3. (Kompozitna Prelecova funkcija)
Kompozitnu Prelecovu funkciju $w : [0, 1] \to [0, 1]$ *definiramo s*

$$w(p) = \begin{cases} 0, \text{ ako je } p = 0 \\ e^{-\beta_i(-lnp)^{\alpha_i}}, \text{ ako je } p_{i-1} < p \leq p_i, \ i=1,2,...,n \end{cases} \tag{1}$$

pri čemu su $\alpha_i > 0$, $\beta_i > 0$, $p_0 = 0$, $p_n = 1$, *i*

$$e^{-\beta_i(-lnp_i)^{\alpha_i}} = e^{-\beta_{i+1}(-lnp_i)^{\alpha_{i+1}}}, \ i=1,2,...,n-1 \tag{2}$$

Zadnja jednadžba osigurava neprekidnost težinske funkcije w.

Teorem 4.4. (Reprezentacija kompozitne Prelecove funkcije)
Sljedeće tvrdnje su ekvivalentne:
(a) težinska funkcija w je lokalno invarijantna s obzirom na potenciju
(b) postoje funkcije $\varphi_i : \Lambda_i \to \mathbb{R}_{++}$, *takve da je* φ_i *klase* C^1 *na* $(\frac{\ln p_i}{\ln p}, \frac{\ln p_{i-1}}{\ln p})$, $i = 1, 2, ..., n$, *pri čemu je* $0 = p_0 < p_1 < ... < p_n = 1$ *i* $\forall p \in P_i$, $\forall \lambda \in \Lambda_i$, $w(p^\lambda) = (w(p))^{\varphi_i(\lambda)}$. *Štoviše, za svaki* $i = 1, 2, ..., n$, $\exists \alpha_i \in (0, \infty)$, $\varphi_i(\lambda) = \lambda^{\alpha_i}$
(c) w je kompozitna Prelecova funkcija.

Dokaz: $(a) \to (b)$ Pretpostavimo da je težinska funkcija lokalno invarijantna na potenciju. Neka je

$$f(x, \lambda) = w((w^{-1}(e^{-x}))^\lambda), \ x, \lambda \in \mathbb{R}_{++} \tag{3}$$

i

$$\varphi(\lambda) = -\ln f(1, \lambda) = -\ln w((w^{-1}(e^{-1}))^\lambda), \ \lambda \in \mathbb{R}_{++} \tag{4}$$

Očito je da φ preslikava $\mathbb{R}_{++}$ u $\mathbb{R}_{++}$. S obzirom da je $w^{-1}(e^{-1}) \in (0,1)$, slijedi da je $(w^{-1}(e^{-1}))^{\lambda}$ strogo padajuća funkcija u ovisnosti o λ, kao i funkcije $w((w^{-1}(e^{-1}))^{\lambda})$ i $\ln w((w^{-1}(e^{-1}))^{\lambda})$. Stoga je φ strogo rastuća funkcija u ovisnosti o λ. Koristimo funkciju f:

$$f(-\mu \ln w(p), \lambda) = w((w^{-1}((w(p))^{\mu}))^{\lambda}), \text{ za } p \in (0,1),\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}_{++} \tag{5}$$

Neka je $0 = p_0 < p_1 < ... < p_n = 1$ i za $p, q \in (p_{i-1}, p_i)$ vrijedi

$$(w(p))^{\mu} = w(q), \text{ za } p^{\lambda}, q^{\lambda} \in (p_{i-1}, p_i) \tag{6}$$

slijedi

$$q = w^{-1}((w(p))^{\mu}) \tag{7}$$

zbog lokalne invarijantnosti na potenciju

$$(w(p^{\lambda}))^{\mu} = w((w^{-1}((w(p))^{\mu}))^{\lambda}) \tag{8}$$

sada možemo uvrstiti

$$f(-\mu \ln w(p), \lambda) = (w(p^{\lambda}))^{\mu},\ p, p^{\lambda} \in (p_{i-1}, p_i) \tag{9}$$

konkretno, za $\mu = 1$ imamo

$$f(-\ln w(p), \lambda) = w(p^{\lambda}),\ p, p^{\lambda} \in (p_{i-1}, p_i) \tag{10}$$

nadalje

$$(f(-\ln w(p), \lambda))^{\mu} = (w(p^{\lambda}))^{\mu},\ p, p^{\lambda} \in (p_{i-1}, p_i) \tag{11}$$

pa imamo

$$f(-\mu \ln w(p), \lambda) = (f(-\ln w(p), \lambda))^{\mu},\ p, p^{\lambda} \in (p_{i-1}, p_i) \tag{12}$$

koristeći supstituciju $z = -\ln w(p)$

$$f(\mu z) = (f(z, \lambda))^{\mu},\ p, p^{\lambda} \in (p_{i-1}, p_i) \tag{13}$$

te vrijedi

$$f(\mu) = (f(1, \lambda))^{\mu} = e^{-\mu\varphi(\lambda)},\ p, p^{\lambda} \in (p_{i-1}, p_i) \tag{14}$$

pa je stoga

$$w(p^\lambda) = (w(p))^{\varphi(\lambda)},\ p, p^\lambda \in (p_{i-1}, p_i) \tag{15}$$

odakle slijedi

$$\varphi(\lambda) = \frac{\ln w(p^\lambda)}{\ln w(p)},\ p, p^\lambda \in (p_{i-1}, p_i) \tag{16}$$

Neka su $p, p^\lambda, p^\mu, p^{\lambda\mu} \in (p_{i-1}, p_i)$. Iz posljednje dvije jednakosti slijedi

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda\mu) &= \frac{\ln w(p^{\lambda\mu})}{\ln w(p)} = \frac{\ln w((p^\mu)^\lambda)}{\ln w(p)} = \frac{\ln\left[(w(p^\mu))^{\varphi(\lambda)}\right]}{\ln w(p)} = \frac{\varphi(\lambda)\ln(w(p^\mu))}{\ln w(p)} \\ &= \frac{\varphi(\lambda)\ln\left[(w(p))^{\varphi(\mu)}\right]}{\ln w(p)} = \frac{\varphi(\lambda)\varphi(\mu)\ln w(p)}{\ln w(p)} = \varphi(\lambda)\varphi(\mu)\ ,\ p, p^\lambda \in (p_{i-1}, p_i)\end{aligned}$$

tj. vrijedi

$$\varphi(\lambda\mu) = \varphi(\lambda)\varphi(\mu)\ ,\ p, p^\lambda, p^\mu, p^{\lambda\mu} \in (p_{i-1}, p_i) \tag{17}$$

s obzirom da je funkcija φ strogo rastuća na $(\frac{\ln p_i}{\ln p}, \frac{\ln p_{i-1}}{\ln p})$,
$0 < \frac{\ln p_i}{\ln p} < 1 < \frac{\ln p_{i-1}}{\ln p}$, za svaki $\lambda, \mu \in (\frac{\ln p_i}{\ln p}, \frac{\ln p_{i-1}}{\ln p})$ takve da $\lambda\mu \in (\frac{\ln p_i}{\ln p}, \frac{\ln p_{i-1}}{\ln p})$, $\varphi(\lambda\mu) = \varphi(\lambda)\varphi(\mu)$. Stoga,

$$\exists\alpha_i \in \mathbb{R}, \forall\lambda \in (\frac{\ln p_i}{\ln p}, \frac{\ln p_{i-1}}{\ln p})\ ,\ \varphi(\lambda) = \lambda^{\alpha_i} \tag{18}$$

Kako je φ strogo rastuća funkcija u ovisnosti o λ onda je $\alpha_i > 0$. Neka je $p \in P_i$. Definiramo $\varphi_i : \Lambda_i \to \mathbb{R}_{++}$ tako da $\varphi_i(\lambda) = \lambda^{\alpha_i}$. Tada je očito φ_i klase C^1 na $(\frac{\ln p_i}{\ln p}, \frac{\ln p_{i-1}}{\ln p})$. Za svaki $p \in P_i$ i za svaki $\lambda \in \Lambda_i$, $w(p^\lambda) = (w(p))^{\varphi_i(\lambda)}$ što dokazuje tvrdnju (b).
$(b) \to (c)$ S obzirom da je $e^{-1} \in (0,1)$, $e^{-1} \in P_i$ za neke $i = 1, 2, ..., n$. Prvo ćemo naći rješenje za P_i, a onda indukcijom i neprekidnošću proširiti rezultat na $P_{i+1}, P_{i+2}, ..., P_n$ i na $P_{i-1}, P_{i-2}, ..., P_1$. Neka je $\beta_i = -\ln w(e^{-1})$. Tada je $w(e^{-1}) = e^{-\beta_i}$. Neka je $p \in P_i$ i $\lambda = -\ln p$. Tada je $p = e^{-\lambda}$. Stoga je $w(p) = w(e^{-\lambda}) = w((e^{-1})^\lambda) = (w(e^{-1}))^{\varphi_i(\lambda)} = (e^{-\beta_i})^{\lambda^{\alpha_i}}$

Pa smo pokazali

$$w(p) = e^{-\beta_i(-\ln p)^{\alpha_i}} \tag{19}$$

Neka je $p \in P_i$ i $\lambda = \frac{\ln p}{\ln p_i}$. Tada je $p = p_i^\lambda$. Stoga $w(p) = w(p_i^\lambda) = (w(p_i))^{\varphi_{i+1}(\lambda)} = (w(p_i))^{\lambda^{\alpha_{i+1}}} = (e^{-\beta_i(-\ln p_i)^{\alpha_i}})^{\lambda^{\alpha_{i+1}}} = (e^{-\beta_{i+1}(-\ln p_i)^{\alpha_{i+1}}})^{\lambda^{\alpha_{i+1}}} =$

$e^{-\beta_{i+1}(-\lambda \ln p_i)^{\alpha_{i+1}}} = e^{-\beta_{i+1}(-\ln p_i^{\lambda})^{\alpha_{i+1}}} = e^{-\beta_{i+1}(-\ln p_i)^{\alpha_{i+1}}}$. Tako smo pokazali da vrijedi

$$w(p) = e^{-\beta_{i+1}(-\ln p)^{\alpha_{i+1}}} \tag{20}$$

Neka je $p \in P_{i-1}$ i $\lambda = \frac{\ln p}{\ln p_{i-1}}$. Tada je $p = p_{i-1}^{\lambda}$. Stoga $w(p) = w(p_{i-1}^{\lambda}) = (w(p_{i-1}))^{\varphi_{i-1}(\lambda)} = (w(p_{i-1}))^{\lambda^{\alpha_{i-1}}} = (e^{-\beta_i(-\ln p_{i-1})^{\alpha_i}})^{\lambda^{\alpha_{i-1}}} = (e^{-\beta_{i-1}(-\ln p_{i-1})^{\alpha_{i-1}}})^{\lambda^{\alpha_{i-1}}} = e^{-\beta_{i-1}(-\lambda \ln p_{i-1})^{\alpha_{i-1}}} = e^{-\beta_{i-1}(-\ln p_{i-1}^{\lambda})^{\alpha_{i-1}}} = e^{-\beta_{i-1}(-\ln p)^{\alpha_{i-1}}}$. Tako smo pokazali da vrijedi

$$w(p) = e^{-\beta_{i-1}(-\ln p)^{\alpha_{i-1}}} \tag{21}$$

Analogno nastavljajući pokazali smo

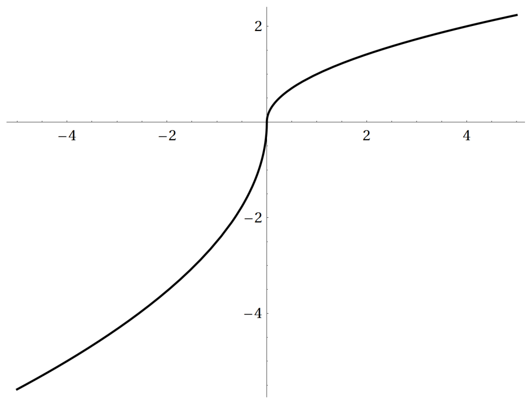
$$w(p) = e^{-\beta_i(-\ln p)^{\alpha_i}} \ , p \in P_i \ , i = 1, 2, ..., n \tag{22}$$

čime smo dokazali (c). Jednostavnim računom se pokaže da iz (c) slijedi (a).

5 Korisnost u ovisnosti o rangu

U pozadini teorije izglednosti krije se rangiranje ishoda, pa shodno tome i dodjeljivanje težina pojedinom ishodu, kako bi te odluke postale očito usporedive. U sljedećem odlomku opisati ćemo nasljeđe iz teorije rang-ovisne korisnosti u kontekstu teorije izglednosti. Pogledajmo lutriju $p_1 x_1 p_2 x_2 ... p_n x_n$, pri čemu za ishode vrijedi $x_1 \geq x_2 \geq ... \geq x_k \geq 0 \geq x_{k+1} \geq ... \geq x_n$, a p_i, $i = 1, 2, ..., n$ su odgovarajuće vjerojatnosti tih ishoda x_i, $i = 1, 2, ..., n$. Četiri važna elementa teorije izglednosti su : a) referentna točka, b) averzija prema riziku, c) smanjivanje osjetljivosti i d) dodjeljivanje težina odlukama u ovisnosti o vjerojatnosti ishoda. U teoriji izglednosti imamo dvije težinske funkcije, u oznaci w^+ za dobitke i w^- za gubitke. Težinska funkcija w^+ se odnosi na vjerojatnosti rangirane obzirom na pozitivan ishod, a w^- se odnosi na vjerojatnosti rangirane obzirom na negativan ishod. Rangiranje obzirom na referentnu vrijednost nula zove se potpuno rangiranje obzirom na predznak.

Kahneman i Tversky su predložili funkciju korisnosti koju ćemo definirati u nastavku. Ona je konkavna za vrijednosti veće od referentne točke, a konveksna za vrijednosti manje od referentne točke. Također, funkcija korisnosti je strmija za gubitke, nego za dobitke. Ovo svojstvo se javlja kao posljedica averzije prema riziku, odnosno psihološkog zapažanja da gubitak ostavlja veći emocionalni trag od ekvivalente dobiti.



Slika 4: Funkcija korisnosti

Spomenuta dva uvjeta se odražavaju na načelo smanjenja osjetljivosti. Utjecaj promjene se smanjuje s udaljenošću od referentne točke. Načelo smanjenja osjetljivosti se također primjenjuje i na funkciju težina. Imamo dvije prirodne granice, a to su rubovi intervala vjerojatnosti, pri čemu 0 označava nemogućnost događaja, a 1 sigurnost događaja. Smanjenje osjetljivosti ukazuje na to da se dana promjena u težinama smanjuje pri udaljavanju vjerojatnosti od granica. Na primjer, povećanje od 0.1 u vjerojatnosti osvajanja nagrade ima veći efekt (pa bi stoga trebalo imati i veću težinu) ukoliko se ta vjerojatnost pomakne s 0.9 na 1, ili s 0 na 0.1, nego ako se pomakne s 0.3 na 0.4, ili 0.6 na 0.7. Prema tome, smanjivanje osjetljivosti ima za posljedicu izgled funkcije koja je konkavna blizu 0, a konveksna blizu 1.

Funkciju kojom vrednujemo pojedine odluke u teoriji izglednosti definiramo formulom:

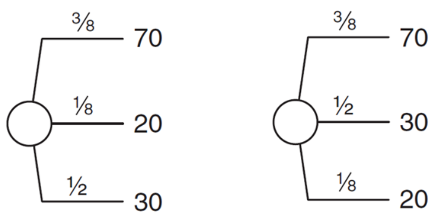
$$F = \sum_{j=1}^{n} \pi_j U(x_j)$$

pri čemu su π_j težine pojedinih odluka i one su nenegativne.

S obzirom da težine odluka ovise o rangu, prvo ćemo objasniti što je korisnost u ovisnosti o rangu.

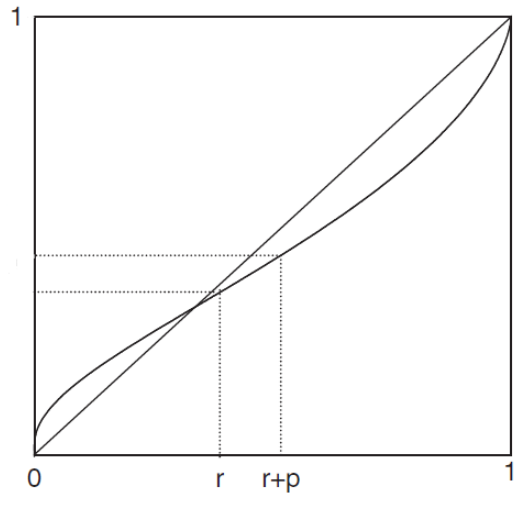
5.1 Rangiranje

Specifično svojstvo rang-ovisne teorije je to što težina ishoda ne zavisi samo u vjerojatnosti događanja, već također i o rangu ishoda. Stoga je pogodno rangirati ishode od najboljeg prema najgorem pri računanju korisnosti ovisne o rangu. Pogledajmo primjerice lijevi prospekt (Slika 2.). Ishodi nisu rangirani. Potrebno je prvo napisati ponovo prospekt, ali na način da rangiramo ishode kao što je na slici desno. Potom rangiramo ishode na način da najbolji



Slika 5: Određivanje ranga

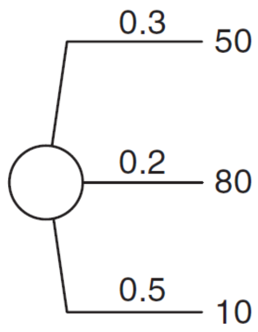
ishod ima rang 0, a svakom sljedećem ishodu je rang jednak zbroju prethodnih vjerojatnosti. Pomoću prethodno definirane težinske funkcije w, za svaki ishod x računamo granični doprinos vjerojatnosti ishoda rangu ishoda koristeći sljedeću formulu: $w(p+r)-w(r)$, pri čemu je $w(p+r)$ susjedni (lošiji) ishod po rangu od x.



Slika 6: Težinska funkcija

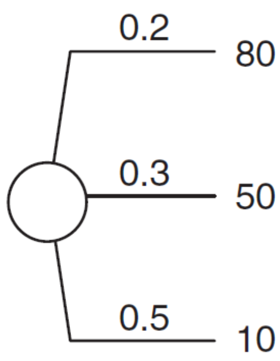
Korisnost ovisnu o rangu dobijemo sumiranjem graničnih težina odluka pomnoženih sa pripadnim korisnostima ishoda.

Primjer: Definirat ćemo težinsku funkciju sa $w(p) = p^2$ i funkciju korisnosti sa $U(\alpha) = \alpha$.



Slika 7: Određivanje ranga

Potom rangiramo ishode.



Slika 8: Određivanje ranga

Ako pogledamo primjer sa slike iznad, rang od 80 je 0, rang od 50 je 0.2 a rang od 10 je 0.5. Težinske funkcije redom iznose $w(0) = 0$, $w(0.2) = 0.04$ te $w(0.5) = 0.25$. Na kraju računamo korisnost u ovisnosti o rangu uvrštavanjem u formulu:

$$w(0.2)U(80) + (w(0.5) - w(0.2))U(50) + (1 - w(0.5))U(10)$$

i kao rezultat dobijemo 21.2.

5.2 Vjerojatnosti loših ishoda, rang gubitka

Ulomak opisuje dualnost rang ovisne korisnosti koja je zbunila mnoge kada su prvi puta počeli proučavati ovu teoriju. Ova tematika nam je iznimno bitna za predstavljanje teorije izglednosti. Naime, do zabune može doći ukoliko se težinska funkcija w promatra izolirano, bez da se pri tome uzme u obzir da se funkcija w može koristiti samo za rangiranje (vjerojatnosti dobrih ishoda), a ne za druge vjerojatnosti i događaje. Sada ćemo zamijeniti strane i staviti u središte pažnje loše ishode. Za loš ishod je potrebno odrediti vjerojatnost, ali na način da bude lošije rangiran, a ne bolje kao što smo do sada gledali za dobre ishode. Rang gubitka označavamo s l, a pripadnu vjerojatnost s p_l. Rang gubitka transformirat ćemo pomoću funkcije z. Težina ishoda bi trebala biti granički doprinos vjerojatnosti tog ishoda njegovom rangu gubitka:

$$\pi(p_l) = z(p + l) - z(l).$$

Kada raspišemo formulu, dobit ćemo:

$$\sum_{j=1}^{n} \pi_j U(x_j) = \sum_{j=1}^{n} \pi(p_j) U(x_j) \ = \sum_{i=1}^{n} (z(p_j + ... + p_n) - z(p_{j+1} + ... + p_n)) U(x_j)$$

U idućem koraku ćemo razmotriti težinske funkcije. Za rangiranje loših ishoda, koristiti ćemo težinsku funkciju z. Definirat ćemo ju kao dual težinske funkcije dobrih ishoda w:

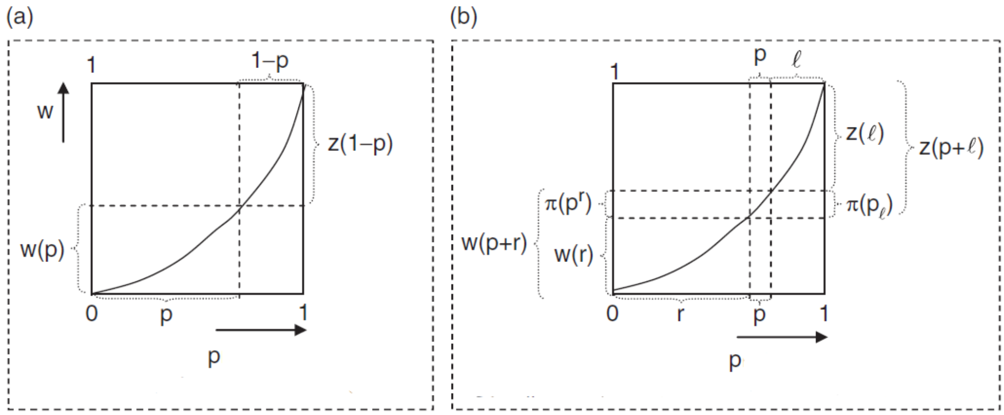
$$z(p) = 1 - w(1 - p) \text{ i } w(p) = 1 - z(1 - p)$$

U nastavku ćemo pokazati da je težinska funkcija z za rangiranje gubitaka zaista ekvivalent funkciji w za rangiranje dobrih ishoda.

Za prospekt s ishodom α i vjerojatnošću tog ishoda p, imamo rang dobiti g i rang gubitka l, takve da vrijedi $l = 1 - p - g$ i $g = 1 - p - l$. Stoga vidimo da rang od p jedinstveno određuje rang gubitka, i obratno, tako da zajedno, u sumi s vjerojatnošću p, iznose 1.

Definicija 5.1. U *uvjetima teorije izglednosti, ishod x, s pripadnom vjerojatnošću p, rangom dobiti g i rangom gubitka $l = 1 - p - g$ ima sljedeću težinu:*

$$\begin{aligned} x \geq 0 &: \pi = \pi(p^g) = w^+(p + g) - w^+(g) \\ x = 0 &: U(x) = 0 \text{ (status quo)} \\ x \leq 0 &: \pi = \pi(p_l) = w^-(p + l) - w^-(l) \end{aligned}$$



Slika 9: Težinske funkcije za rangiranje dobrih i loših ishoda

Kada bismo raspisali gornju formulu u odnosu na referentnu točku, te preko odgovarajućih vjerojatnosti, dobili bismo sljedeće tvrdnje:

$$i \leq k : \pi_i = \pi(p_i^{p_{i-1}+...+p_1}) = w^+(p_i + ... + p_1) - w^+(p_{i-1} + ... + p_1)$$
$$j \geq k+1 : \pi_j = \pi(\pi_{j_{p_{j+1}+...+p_n}}) = w^-(p_j + ... + p_n) - w^-(p_{j+1} + ... + p_n)$$

Sljedeća formula teorije izglednosti napisana je u potpunosti u terminima rangiranja i rang-zavisnih težina odluka. Ona glasi:

$$F(x) = \sum_{i=1}^{k} \pi(p_i^{p_{i-1}+...+p_1})U(x_i) + \sum_{j=k+1}^{n} \pi(p_{j_{p_{j+1}+...+p_n}})U(x_j)$$

Definicija 5.2. T*eorija izglednosti vrijedi ukoliko postoji strogo rastuća neprekidna funkcija korisnosti* $U : R \rightarrow R$ *, za koju vrijedi U(0)=0, pri čemu postoje* w^+ *i* w^- *funkcije, takve da je prospekt* $p_1x_1p_2x_2...p_nx_n$ *u potpunosti rangiran ovisno o predznaku,* $x_1 \geq x_2 \geq ... \geq x_k \geq 0 \geq x_{k+1} \geq x_n$.

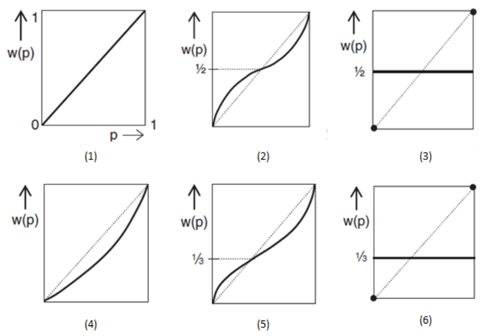
Za neki $0 \leq k \leq n$ je funkcija teorije izglednosti određena s:

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} \pi_j U(x_j) = & \sum_{i=1}^{k} \pi(p_i^{p_{i-1}+...+p_1}) U(x_i) + \\
& \sum_{j=k+1}^{n} \pi(p_{i_{p_{j+1}+...+p_n}}) U(x_i) \\
= & \sum_{i=1}^{k} (w^+(p_i + ... + p_1) - w^+(p_{i-1} + ... + p_1)) U(x_i) + \\
& \sum_{j=k+1}^{n} (w^-(p_j + ... + p_n) - w^-(p_{j+1} + ... + p_n)) U(x_j)
\end{aligned}$$

5.3 Primjena i proširenja rang ovisne korisnosti

Ovisnost o rangu se može iskoristiti za modeliranje pesimizma i optimizma u odlučivanju. Još jedna, također važna komponenta vaganja vjerojatnosti tiče se vjerojatnosne osjetljivosti. U narednom ćemo ulomku predstaviti spomenute komponente.

Slika 10. prikazuje dvije vrste devijacija koje utječu na kreiranje općenite težinske funkcije. Slika 1 pokazuje tradicionalnu očekivanu korisnost kojoj



Slika 10: Težinske funkcije

su vjerojatnosti vagane linearno, npr. $w(p) = p$. Slika 4 pokazuje pesimizam. Nadalje, slika 2 sadrži psihološki fenomen. Reflektira se na smanjivanje vjerojatnosne osjetljivosti. U odnosu na očekivanu korisnost, težinska funkcija je plitka na središnjem području, a jako strma na rubovima. Ekstreman primjer toga prikazan je na slici 3. Ovdje je w dosta strma oko 0 i 1, te potpuno plitka po sredini. Takvo se ponašanje tipično prepoznaje u slučajevima kada ljudi razlikuju samo ono što će se sigurno dogoditi, ono što se sigurno neće dogoditi i ono za što ne znamo što će se dogoditi. Za izražavanje takve nerafinirane percepcije neizvjesnosti u razgovoru se često koristi izraz "šanse su pola-pola", tj. događaj će se ili ostvariti ili neće, više od toga ne znamo. Ljudi su skloni razlikovati različite razine vjerojatnosti između krajnosti, no pri tome nisu dovoljno detaljni. Shodno tome, pretjerano su osjetljivi na promjenu s nemogućeg na moguće, dok su manje osjetljivi na promjenu s mogućeg na sigurno. Takvo stanje pokazuje regresivni oblik krivulje na slici 2, gdje se vidi da težine ishoda nisu savršeno korelirane s njihovim vjerojatnostima, tj. utjecaj vlastitih percepcijskih i kognitivnih ograničenja. Pri odlučivanju, ljudi odstupaju od očekivane korisnosti ishoda i to ne samo zbog pesimizma (koji je prikazan na slici 4 već i zbog toga što ne razumiju u potpunosti vjerojatnost događaja.

Dva faktora na slikama 4 i 2 (podcjenjivanje ishoda i averzija prema riziku) imaju slične implikacije za prospekte x_p0 s velikom vjerojatnošću p ishoda x, ali suprotne implikacije za prospekte x_p0 s malom vjerojatnošću p ishoda x. U kasnijem primjeru vidjet ćemo da pesimizam i dalje utječe na averziju prema riziku ali intenzivnost vjerojatnosti nekog događaja utječe na sklonost ka riziku. Prevladavajući rezultati istraživanja se kombinacija utjecaja pesimizma i neosjetljivost vjerojatnosti ishoda kao što je prikazano na slici 5, pri čemu su malo vjerojatni ishodi precijenjeni. Također su opaženi dokazi o neosjetljivosti vjerojatnosti ishoda, te su vođene rasprave o psihološkoj interpretaciji tih dvaju faktora. Kod funkcije prikazane na slici 5 strmi prelazak dijagonale u prvom dijelu segmenta sugerira optimizam i sklonost ka riziku. Dijagonalu siječe u točno 1/3. Veći dio domene funkcija se nalazi ispod dijagonale, te ponovo postaje strma blizu jedinice. To ponašanje sugerira pesimizam i averziju prema riziku. Težinska funkcija u 1/2 iznosi približno 0.42. U ovoj težinskoj funkciji, najbolje rangiranim ishodima dodijeljene su relativno velike težine, ali najlošije rangiranim ishodima dodijeljene su još i veće težine. Prosječni ishodi, rangirani negdje u sredini dobivaju niske težine. Stoga se čini da ljudi obraćaju previše pozornosti na ekstremne i iznimne ishode. Težinska funkcija sugerira da ljudi uglavnom osjećaju averziju prema riziku, iako nije nužno pravilo, što odstupa od ideje univerzalne averzije prema riziku kao modelu ponašanja.

Većina autora koji pišu o rang ovisnoj korisnosti u području teoretske ekonomije pretpostavljaju globalni pesimizam s težinskim funkcijama koje podcjenjuju vjerojatnosti događaja, kao što je prikazano na slici 4 S druge strane eksperimentalna istraživanja uglavnom mogu potvrditi da težinska krivulja izgleda kao naopako slovo S kao što se vidi na slici 5.

Javne lutrije čine klasičan primjer u kojem se očituje sklonost ka riziku s obzirom na malu vjerojatnost da će ishod biti uspješan. Takav primjer je također često viđen u medicini, gdje pacijenti sa slabim izgledima za preživljavanje, biraju riskantne tretmane s malom vjerojatnošću uspjeha, zato što im bude nadu.

Strmi nagib težinske funkcija blizu jedinice implicira precijenjivanje najgoreg mogućeg ishoda. Ovaj fenomen zove se efekt sigurnosti. Također strmi nagib težinske funkcije blizu nule implicira precijenjivanje najboljeg mogućeg ishoda. Ovaj fenomen se zove efekt mogućnosti.

Primjetiti ćemo da paradoks poput koegzistencije kockanja i kupovanja osiguranja može biti objašnjen pomoću rang zavisne korisnosti. Štoviše, isto osnovno svojstvo uzrokuje i kockanje i kupovanje osiguranja, a to je precijenjivanje ekstremnih ishoda, bilo da se radi o maloj vjerojatnosti osvajanja velike novčane nagrade u vidu kockanja (efekt mogućnosti) ili maloj vjerojatnosti da će se dogoditi nesreća u vidu kupovine osiguranja (efekt sigurnosti).

6 Kompozitna kumulativna teorija izglednosti

6.1 Parametrizacija težinske funkcije

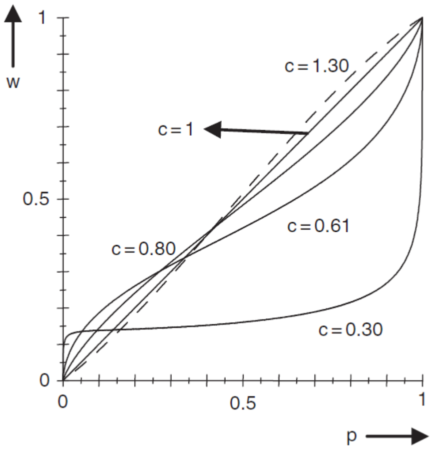
Autori Tversky i Kahneman su u svom radu 1992. godine predložili sljedeću parametarsku familiju težinskih funkcija:

Definicija 6.1. D*efinirajmo* w *na sljedeći način:*
$w(p) = \frac{p^c}{(p^c+(1-p)^c)^{\frac{1}{c}}}$ *, pri čemu je* $c \geq 0.28$.

Za c manji od 0.28 funkcije nisu strogo rastuće. Tversky i Kahneman su procijenili da će za $c = 0.61$ težinska funkcija najbolje odgovarati podacima. Ova funkcija je prikazana na slici 5.

Na sljedećoj slici 11. prikazano je više slučajeva.

Primjerice, za $c = 1$ težinska funkcija postaje linearna. Smanjivanjem parametra c dobivamo istaknutiji obrnuti S oblik krivulje te veći naglasak na pesimizmu. Za c veće od jedinice, težinska funkcija postaje S krivulja.



Slika 11: Tversky i Kahnemanova familija težinskih funkcija

6.2 Direktna provjera konveksnosti, konkavnosti te vjerojatnosne neosjetljivosti kršenjem principa sigurnog događaja

Funkcija korisnosti je subjektivni parametar kojim određujemo stav prema riziku. Ispitali smo kako ćemo ju mjeriti. Zatim smo zapažanja proširili na teoriju korisnosti ovisne o rangu. Empirijski zaključci vezani uz nelinearno dodjeljivanje težina odlukama koje smo objasnili u prethodnim poglavljima, temelje se na parametarskom simultanom uklapanju težinske funkcije w i funkcije korisnosti U. Cilj nam je direktno izmjeriti nelinearne težine odluka u teoriji korisnosti ovisne o o rangu te ispitati njihova svojstva. Takva direktna mjerenja služe da bismo povezali svojstva subjektivnih parametara s preferencijama što je jednostavnije i direktnije moguće. U narednom odlomku predstavit ćemo rezultate ispitivanja konveksnosti i konkavnosti pri određivanju težina.

Definicija 6.2. R*elacija* $\geq$ *je relacija preferencije na skupu svih prospekata, štoviše, na svim konačnim vjerojatnosnim distribucijama na skupu ishoda R.*

Definicija 6.3. T*eorija očekivane korisnosti vrijedi ako postoji strogo rastuća funkcija korisnosti U na skupu ishoda x iz R i njihovim pripadnim vjerojatnostima p takva da*

$$E(U) = p_1U(x_1) + p_2U(x_2) + ... + p_nU(x_n)$$

predstavlja preferencije.

Definicija 6.4. D*efinirajmo Kahnemanovu i Tverskyjevu funkciju korisnosti* U*, u koju uključimo i parametar averzije prema riziku* λ*:*

$$x \geq 0 : U(x) = x^{\gamma}$$
$$x < 0 : U(x) = -\lambda(-x)^{\theta}$$

pri čemu su γ*,* θ *i* λ *konstante. Za koeficijente funkcije potencija vrijedi* $0 < \gamma < 1$*,* $0 < \theta < 1$*. Za parametar averzije prema riziku vrijedi* $\lambda > 1$*.*

Tversky i Kahneman su koristili ovaj model za uklapanje svojih podataka i zaključili da su podaci najbolje uklopljeni za parametre: $c = 0.61$, $d = 0.69$, $\gamma = \theta = 0.88$ te $\lambda = 2.25$

7 Primjena teorije izglednosti

Teorija izglednosti je ponajprije model odlučivanja pri riziku. Kao takav, najviše primjene ima u područjima poput financija i osiguranja, gdje stav prema riziku igra presudnu ulogu u odlučivanju. Pogledajmo kako je teorija izglednosti integrirana u ta područja na jednom primjeru vezanom za odlučivanje o osiguranju te opisom ostalih grana aktivne primjene.

7.1 Osiguranje

Primjer 7.1. *Pretpostavimo da donositelj odluke može pretrpiti gubitak* $L > 0$ *s vjerojatnošću* $p \in (0, 1)$*. Donositelj odluke može kupiti osiguranje,* $C \in [0, L]$ *po cijeni od* rC*, pri čemu je* $r \in (0, 1)$ *premija (ukoliko je* $r = p$*, govorimo o aktuarskoj fer premiji). S vjerojatnošću* $1 - p$*, bogatstvo donositelja odluke iznosi* $W - rC$*, a s vjerojatnošću* p *njegovo bogatstvo iznosi* $W - rC - L + C \leq W - rC$*. Pretpostavimo da je referentna točka upravo status quo, tj. početna razina bogatstva* $y_0 = W$*. Donositelj odluke sada gleda lutriju* $(-L + C - rC, p; -rC, 1 - p)$*. Oba ishoda su u domeni gubitka. Računamo vrijednost kupnje osiguranja* $C \in [0, L]$

$$F(C) = \pi(p)U(-L + C - rC) + [1 - \pi(p)]\, U(-rC) \tag{23}$$

S obzirom da je F *neprekidna na nepraznom kompaktu* $[0, L]$*, postoji optimalna razina osiguranja* C^* *koja daje isplatu* $F(C^*)$*. Prema definiciji, funkcija korisnosti je konveksna za gubitke pa se optimalna razina osiguranja postiže na rubovima:*

$$C^* = 0 \text{ ili } C^* = L \tag{24}$$

Ukoliko donositelj odluke ne kupi osiguranje, $C = 0$ *i* $U(0) = 0$*, ostaje nam* $F(C) = \pi(p)U(-L)$*. Da bi donositelj odluke kupio neku razinu osiguranja* $C^* > 0$ *mora biti zadovoljen uvjet:* $F(C) \leq F(C^*)$*. Za* $C^* = L$ *idući uvjet je nužan i dovoljan:*

$$\pi(p)U(-L) \leq U(-rL) \tag{25}$$

Sada ako pretpostavimo da imamo fer aktuarsku premiju, $r = p$*:*

$$\pi(p)U(-L) \leq U(-pL) \tag{26}$$

Prema definiciji funkcije korisnosti vrijedi $-\lambda\pi(p)L^\gamma \leq -\lambda p^\gamma L^\gamma$ *iz čega slijedi:*

$$\frac{\pi(p)}{p^\gamma} \geq 1 \tag{27}$$

U tom slučaju će donositelj odluke kupiti potpuno osiguranje. U suprotnom, za $C^* = 0$ *donositelj odluke neće kupiti osiguranje. Drugim riječima, ukoliko* $\lim\limits_{p\to 0} \frac{\pi(p)}{p^\gamma} = \infty$*, donositelj odluke će uzeti potpuno osiguranje. S druge strane, ako* $\lim\limits_{p\to 0} \frac{\pi(p)}{p^\gamma} = 0$ *donositelj odluke neće kupiti osiguranje.*

Osiguranje je jedno od područja ekonomije u kojem presudnu ulogu igraju stavovi prema riziku. Na tržištu su najznačajnija osiguranja posjeda, osiguranje od nesreće, životno i zdravstveno osiguranje. Justin Sydnor, profesor upravljanja rizicima i osiguranja na poslovnom sveučilištu u Winsconsinu je proučavao odluke 50 000 korisnika osiguranja jedne velike osiguravajuće kuće. Odluka koju domaćinstva moraju donijeti je izbor jedne od četiri ponude odbitnih franšiza: \$100, \$250, \$500 i \$1000. Sydnor je primijetio da kućanstva koja biraju odbitnu franšizu od \$500 godišnje plaćaju prosječnu premiju od \$715. Pri tome, nisu izabrali policu osiguranja s odbitnom franšizom \$1000 gdje je prosječna godišnja premija \$615. Ukoliko je stopa zahtjeva za povratom (prijava štete) 5%, ova kućanstva su pristala platiti \$100 godišnje kako bi se osigurali od dodatnog plaćanja \$500 u slučaju zahtjeva za povratom, za koji je vjerojatnost događanja 5%. U okviru očekivane korisnosti, ovaj se izbor može racionalizirati u kontekstu nerazumno visoke averzije prema riziku. Sydnor ovo ponašanje objašnjava dodjeljivanjem težina pojedinim odlukama, tj. vjerojatnostima pojedinih ishoda kao što je definirano u teoriji izglednosti. U kontekstu dodjeljivanja težina vjerojatnostima, promatrana kućanstva su precijenila događaje iz repa distribucije, u ovom slučaju je to ishod u kojem se zahtjeva povrat (prijavljuje šteta) i treba se platiti franšiza. Zbog pretjeranog fokusa na ovaj malovjerojatni ali neugodni ishod, kućanstva su voljna platiti veću premiju za policu osiguranja s manjom odbitnom franšizom. Sydnor je također napomenuo da mjera do koje teorija izglednosti može objasniti dobivene podatke o odlukama ovisi o referentnoj točki kućanstava. Ukoliko je referntna točka samo razina bogatstva pojedinog kućanstva u trenutku biranja police osiguranja, onda teorija izglednosti može djelomično objasniti plaćanje visoke premije. No ukoliko je referentna točka očekivanje budućih ishoda, u tom slučaju teorija izglednosti može u potpunosti objasniti izbore kućanstava koje promatramo. Pretpostavka je sljedeća: s obzirom da je premija iznos koji kućanstvo očekuje platiti, dok se franšiza plaća u slučaju prijave štete (koji je malo-vjerojatni ishod) kućanstvo ne osjeća toliku averziju prema riziku prilikom plaćanja premije koliko prilikom plaćanja franšize. Kao rezultat možemo vidjeti da su kućanstva spremna platiti veću premiju. Profesori Barseghyan, O'Donoghue, Teitelbaum i profesorica Molinari, koji su posvetili svoja istraživanja bihevioralnoj ekonomiji, otišli su korak dalje u proučavanju odluka pri izboru police osiguranja. Analizirali su formalni strukturni model izbora osiguranja u okviru teorije izglednosti, pri čemu su kao referentnu točku uzeli očekivanja budućih ishoda. Model su procijenjivali koristeći podatke za osiguranje kuće ili stana te automobila. Također su zapazili utjecaj dodjeljivanja težina pojedinim ishodima. Njihove procjene insinuiraju da će kućanstva, pri odabiru police osiguranja, precijeniti ishod u kojem moraju prijaviti štetu. Nadalje, jedna od nedoumica na tržištu životnog osiguranja je činjenica da ljudi u trenutku odlaska u mirovinu manje novca ulože u proizvode s anuitetom nego što normativni model nalaže da bi trebali. Plaćanje anuiteta je nepopularno iz razloga što ga ljudi smatraju riskantnim kockanjem čija isplata, koja nije poznata u trenutku odlaska u mirovinu, je sadašnja vrijednost budućih novčanih tokova primljenih od anuiteta prije smrti, umanjeno za inicijalno plaćen iznos anuiteta. Primjerice, ukoliko osoba od 65 godina kupi anuitet i premine u 66-oj godini, možemo reći da je ostvarila veliki gubitak. S druge strane, ukoliko je osoba kupila anuitet u 65-oj godini a doživjela 90, u tom slučaju možemo reći da je osoba ostvarila dobit. Ako ovu situaciju promatramo u kontekstu teorije izglednosti, kupnja anuiteta se čini neprivlačnom. Averzija prema riziku u ovom slučaju igra bitnu ulogu s obzirom da je osoba osjetljivija na potencijalni gubitak ukoliko ne poživi dugo, nego što je u slučaju potencijalne dobiti i dugog života. Također, bitno je i dodjeljivanje težina pojedinom ishodu, jer ukoliko osoba smatra da nema velike mogućnosti da će brzo preminuti, biti će sklonija uzeti ovakvu vrstu proizvoda.

7.2 Dionice

Financije su grana ekonomije u kojoj se teorija izglednosti također aktivno primjenjuje. Istraživanja u ovom području primjenjuju teoriju izglednosti u dva glavna konteksta: a) agregatno tržište dionica, b) trgovanje financijskom imovinom kroz vrijeme. Zašto neke vrijednosnice imaju veći prosječni povrat o drugih? Najpoznatiji model za razmišljanje o ovom pitanju je poznati model za vrednovanje kapitalne imovine (eng. CAPM). Ovaj model počiva, između ostalog, na pretpostavci da investitori procjenjuju rizik s obzirom na očekivanu korisnost. Model govori da vrijednosnice s većom betom (vrijednosnice čiji povrati više kovariraju s povratom na ukupnom tržištu), moraju imati veće prosječne povrate. Proučavanje cijena imovine u jednoperiodnoj ekonomiji te aktivnim investitorima koji izvode korisnost teorije izglednosti iz promjene vrijednosti svojih portflja kroz određeni vremenski period dovelo je do zanimljivih zaključaka. U tom modelu, teorija izglednosti vodi do novog predviđanja, predviđanja koje ne proizlazi iz tradicionalne analize bazirane na očekivanoj korisnosti. Naime, asimetrija u funkciji distribucije povrata vrijednosnice, čak i specifična asimetrija koja nije povezana s povratima na tržištu, biti će vrednovana. Posebno, pozitivno asimetrična vrijednosnica, tj. ona čija distribucija povrata ima desni rep dulji od lijevog repa, biti će relativno precijenjena u odnosu na cijenu koju bi postigla u ekonomiji u kojoj se investitori oslanjaju na teoriju korisnosti, te bi kao takva ostvarila niže prosječne povrate. Ovaj rezultat je vrlo intuitivan. Primjerice, zauzimanjem značajne pozicije u dionici s pozitivno asimetričnom distribucijom povrata, investitori imaju šanse obogatiti se ukoliko dionica pokaže izuzetne performanse desnog repa te se ispostavi da je sljedeći "Google". Prisjetite se da pri vaganju vjerojatnosti ishoda u teoriji izglednosti investitori precjenjuju repove distribucije, što u ovom slučaju znači distribucija potencijalnih zarada ili gubitaka. To znači da su skloni precijeniti malo vjerojatni ishod zarade velike količine novca ulaganjem u pozitivno asimetričnu dionicu. Kao rezultat, vidimo da su investitori spremni platiti veću cijenu dionice čak i kada to znači da će ostvariti manji prosječni povrat za nju. U zadnjih nekoliko godina, implikacije teorije izglednosti na poprečni presjek prosječnih povrata popraćene su značajnom empirijskom potporom. Prvenstveno, nekoliko radova, koji koriste raznovrsne tehnike mjerenja asimetrije, potvrdilo je osnovnu pretpostavku; da će pozitivno asimetrične dionice imati niže prosječne povrate. Nadalje, nekoliko radova se zalagalo da predviđanje asimetrije teorije izglednosti može rasvijetliti druge empirijske uzorke. Primjerice, nepoznanica je razlog zašto je dugoročni prosječni povrat na dionice koje rade inicijalnu javnu ponudu (IPO) niži od povrata na kontrolnu skupinu dionica, poduzeća koja su po karakteristikama srodna izdavateljima dionica

na visokim razinama važnosti. Jedno zanimljivo svojstvo povrata na IPO dionice je to da su pozitivno asimetrični. Većina ovih dionica se ne kreće posebno dobro, ali neke, poput Googla ili Microsofta, ostvaruju nevjerojatno dobar rezultat. Kao takve, teorija izglednosti tvrdi da bi dionice koje rade ponudu trebale imati niže prosječne povrate. Sukladno toj hipotezi, zapaženo je također da što je veća predviđena asimetrija, to je niža razina dugoročnih prosječnih povrata. U istraživanjima se koristilo vrednovanje asimetrije, koju je predviđala teorija izglednosti, kako bi se istaknuli još neki financijski fenomeni:
1) niski prosječni povrat na dionice kompanija u bankrotu, dionice trgovane neslužbenim putem (Over the counter), te Out of the money opcije (navedena imovina ima pozitivno asimetrične povrate),
2) niska relativna vrijednost konglomerata u odnosu na jedno-segmentna poduzeća (jedno-segmentna poduzeća imaju više asimetrične povrate),
3) manjak diverzifikacije portfelja kućanstva.
Teorija izglednosti nudi jedinstveni način razmišljanja o brojnim, naizgled nepovezanim, činjenicama.

Primjena teorije izglednosti u financijama očituje se na agregatnom tržištu dionica. Averzija prema riziku objašnjava razlog zašto je prosječni povrat na američkom tržištu dionica nadmašio prosječni povrat na trezorske zapise s većom maržom od one koju su procijenili tradicionalno orijentirani modeli procjene vrijednosti imovine. Pojedinac koji planira investirati na tržištu dionica, promatra distribuciju povijesnih godišnjih povrata na dionice. S obzirom da investitor osjeća averziju prema riziku, odbojna mu je velika raspršenost te distribucije. Kako bi to investitor kompenzirao i bio spreman uložiti novac, dionica mora imati daleko veći očekivani povrat od nekog sigurnog ulaganja, primjerice u trezorski zapis. Objašnjenje leži, osim u teoriji izglednosti, u pretpostavci zvanoj iskrivljeno oblikovanje koja se javlja u slučaju da pojedinac procjenjuje specifični rizik odvojeno od drugih konkurentnih rizika. Pojavljuje se na način da investitor primjenjuje teoriju izglednosti na promjenu vrijednosti pojedinog aspekta svog bogatstva, primjerice vrijednost pozicije u dionicama.
Iduća bitna primjena teorije izglednosti u financijama usmjerena je na razumijevanje trgovanja financijskim instrumentima kroz vrijeme. Promatra se sklonost investitora, kao i upravitelja fonda, za prodajom dionica kojima je porasla vrijednost od kupnje, radje nego prodaju onih čija je vrijednost pala. S vremenom, dogodi se to da dionice koje su rasle u vrijednosti, nastavljaju rasti, a one kojima je vrijednost pala od kupnje i dalje nastavi polako padati. Investitori bi se trebali riješavati dionica koje se loše kreću na tržištu, ali oni čine upravo suprotno. Nevoljko prodavanje dionica koje ostvaruju rela-

tivni gubitak u odnosu na cijenu pri kupnji, također se ispostavilo istinito i na tržištu nekretnina. Proučavano je tržište nekretnina 1990-ih u Bostonu. Ukoliko se usporedila dva stana s istom procjenjenom vrijednosti, pri čemu je prvi kupljen za više novaca, a drugi za manje, u tom slučaju prvi vlasnik traži veću cijenu za prodaju stana od drugog vlasnika. Ovo ponašanje slijedi prirodno iz teorije izglednosti, konkretno, iz konveksnosti funkcije korisnosti u području gubitka. Intuicija kaže da ako se vrijednost dionice (ili nekretnine) loše kreće na tržištu, vlasnik počinje pokazivati sklonost ka riziku, te zadržava imovinu s nadom da će joj kasnije porasti cijena.

Postoje još mnoge obećavajuće primjene teorije izglednosti koje nećemo objašnjavati u detalje. Teorija izglednosti se, donekle uspješno, primjenjuje pri proučavanju tržišta kladionica. Dva profesora iz područja ekonomije i javne politike, Snowberg i Wolfers, potvrđuju da vaganje pojedinih ishoda daje dobru perspektivu za promatranje jedne od najpoznatijih anomalija klađenja, a to je da su koeficijenti precijenjeni za ishode koji su manje vjerojatni, dok su podcijenjeni za favorite. Drugo zapažanje koje svoje obrazloženje traži u teoriji izglednosti je vremenski period proveden u kasinu. Ljudi se u kasinu zadržavaju dulje nego što su u početku planirali kada gube novac.

Postoje područja u ekonomiji koja još ne primjenjuju teoriju izglednosti, iako ima potencijala da se teorija primijeni. Javne financije, ekonomija zdravstva te makroekonomija se tri izvrsna primjera za potencijalnu primjenu teorije izglednosti. Ranije spomenute primjene izrasle su kao pokušaj da se opažena ponašanja smisleno i racionalno objasne.

Literatura

[1] Ali al-Nowaihi, S. Dhami, *Cumulative Prospect Theory*, Univerity of Leicester, 2010.

[2] Nicholas C. Barberis, *Thirty Years of Prospect Theory in Economics: A Review and Assessment*, Journal of Economic Perspectives, 2013.

L. Čaklović, *Teorija vrednovanja s naglasnom na metodu potencijala*, Naknada Slap, 2014.

[3] Bing Han, Jason Hsu, *Prospect Theory and Its Applications in Finance*, 2004.

[4] D. Kahneman, A. Tversky *Advances in Prospect Theory: Cumulative Representation of Uncertainty*, Journal of Risk and Uncertainty, Kluwer Academic Publishers, 1993.

[5] D. Kahneman, A. Tversky *Prospect Theory: An Analysis of Decision under Risk*, Econometrica, 1979.

[6] D. Kahneman, A. Tversky *The Framing of Decisions and the Psychology of Choice*, Science, 1981.

[7] Peter P. Wakker, *Prospect Theory for Risk and Ambiguity*, Cambridge university press, New York, 2010.

[8] Peter P. Wakker, A. Tversky *An Axiomatization of Cumulative Prospect Theory*, Journal of Risk and Uncertainty, Kluwer Academic Publishers, 1993.

Sažetak

Rad predstavlja aksiomatsku metodu modeliranja ponašanja u uvjetima nesigurnosti i rizika, čiji smo razvoj opisali od teorije korisnosti koja se u početku uzimala relevantnom u području odlučivanja, pa do kompozitne kumulativne teorije izglednosti koja obuhvaća više karakteristika ljudskog ponašanja te time postaje sve više primjenjivana u praksi. Pokušaj da se objasni odlučivanje u uvjetima nesigurnosti i rizika koja ne prati teoriju očekivane korisnosti rezultirao je razvojem nekoliko novih ideja. Jedna zamisao je gledati moguće ishode kao dobit ili gubitke relativno ovisne o referentnoj točki. Ta ideja je bila temelj teorije izglednosti koju su predstavili Kahneman i Tversky. Značajnost referentne točke proizlazi iz karakteristike da ljudi osjećaju averziju prema riziku u slučajevima kada ostvaruju dobit u odnosu na referentnu točku te da osjećaju sklonost prema riziku u slučajevima kada ostvaruju gubitak. Iduća generalizacija koja je integrirana u teoriju izglednosti jest tendencija da se precjenjuju male vjerojatnosti pojedinih ishoda dok se, s druge strane, podcjenjuju ishodi s velikom vjerojatnošću događanja. Stoga je potrebno modelirati ovaj efekt dodjeljivanjem težina odlukama koje ću transformirati vjerojatnosnu skalu ishoda. Uvodi se kumulativni model koji transformira kumulativne vjerojatnosti umjesto pojedinačnih. U ovom radu smo obradili kumulativnu teoriju izglednosti koja je dodatno proširila i generalizirala odlučivanje koristeći Quiqqenovu teoriju rang-ovisne korisnosti koja osigurava da donositelj odluke ne bira nužno stohastički dominirajući ishod. Ispreplitanjem teorije izglednosti i kompozitne teorije izglednosti, na kraju dobivamo kompozitnu kumulativnu teoriju izglednosti koja osim što uvažava precjenjivanje ishoda s malim vjerojatnostima i podcjenjivanje ishoda s velikim vjerojatnostima, također i obuhvaća drugu krajnost po kojoj ljudi nekada u potpunosti zanemaruju malo vjerojatne ishode dok one s velikom vjerojatnosti uzimaju kao sigurne ishode. Takva kompleksnija teorija pronalazi sve više primjene u praksi, posebice u svijetu financija, osiguravajućih kuća te tržišta dionica.

Summary

This paper presents an axiomatic method for modeling human behavior under uncertainty and risk which development is observed as of the early beginning of expected utility theory up to composite cumulative prospect theory which incorporates thorough behavioral characteristics making its application even more welcome. An attempt to explain decision under uncertainty and risk that violate expected utility have resulted in several new ideas. One is to think of prospects in terms of gains and losses relative to neutral reference point. This notion was the cornerstone of Kahneman and Tversky's prospect theory. The significance of the reference point arises from the fact that people are generally risk averse when they realize gain and risk seeking when they realize loss. Another generalization integrated in prospect theory is the tendency to overweight small probability and underweight high probability. Therefore, the modeling of this effect incorporates decision weights which transform the probability scale. This model transforms cumulative rather than individual probabilities. In this paper, we elaborated cumulative prospect theory which offered generalized decision theory using Quiggen's rank dependent utility theory and ensuring that decision maker doesn't necessarily chooses stochastically dominating outcome. Combining prospect theory and composite prospect theory results in composite cumulative prospect theory which not only embraces the overweighting of small probability outcome and underweighting high probability outcomes but also includes the decision makers occasional tendency to absolutely ignore unlikely outcomes as well as to consider highly likely events as certain. Due to its ability to describe complex human behavior, the application in practice is becoming more welcome, especially in finance, insurance and stock markets.

Životopis

Rođena sam i živim u Zagrebu. Osnovnu školu sam pohađala u Cvjetnom naselju te upisala IX. gimnaziju na Trešnjevci. Tijekom školovanja sam razvila interes prema matematici te sudjelovala na raznim matematičkim natjecanjima. Upisala sam matematički smjer na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu, te završila preddiplomski sveučilišni studij, nastavnički smjer. Za vrijeme studiranja radila sam u tehničkoj podršci u Iskonu. Također sam se honorarno bavila prevođenjem s engleskog jezika na hrvatski za naručitelje iz područja informatike i obrade informacija. No, počela sam razvijati sve veći interes za ekonomiju i usmjerila se na primjenu stečenog znanja iz matematike u ekonomiji. Upisala sam diplomski studij financijske i poslovne matematike na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu. Što se više bližio zadnji semestar diplomskog studija, počela sam gledati oglase za posao i razmišljati što bih voljela raditi. Prijavila sam se u odjel financijskih i tržišnih rizika u Privrednoj banci Zagreb, te počela raditi krajem 2016. godine. Svakim danom osjećam sve veći entuzijazam prema poslu jer mi daje priliku koristiti znanje stečeno na fakultetu te ga dodatno obogaćuje novim znanjima i vještinama. Redovito pohađam dodatne seminare i edukacije vezane uz aktualne promjene u svijetu financija, te smatram kako moje obrazovanje ovim radom ne završava, već naprotiv, tek počinje.