



Joana Inês
Guapo Pereira
dos Santos Mota

Otimização de Processos Produtivos na Prébuild
Alumínios, S.A.

PRÉBUILD[®]
ALUMÍNIOS



**Joana Inês
Guapo Pereira
dos Santos Mota**

**Otimização de Processos Produtivos na Prébuild
Alumínios, S.A.**

Relatório de estágio apresentado à Universidade de Aveiro para cumprimento dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Matemática e Aplicações, realizado sob a orientação científica do Doutor Agostinho Miguel Mendes Agra, Professor Auxiliar do Departamento Matemática da Universidade de Aveiro.

o júri

presidente

Professor Doutor António Ferreira Pereira

Professor Auxiliar do Departamento Matemática da Universidade de Aveiro
(por delegação do Reitor da Universidade de Aveiro)

vogais

Professora Doutora Maria Adelaide da Cruz Cerveira

Professora Auxiliar do Departamento Matemática da Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro (arguente principal)

Professor Doutor Agostinho Miguel Mendes Agra

Professor Auxiliar do Departamento Matemática da Universidade de Aveiro
(orientador)

agradecimentos

Dedico este trabalho a todos os que se cruzaram na minha vida

palavras-chave

Extrusão de alumínio, Otimização, Programação Inteira, Forno de envelhecimento.

Resumo

O estágio teve por base analisar o processo produtivo da Prébuild Alumínios, S.A., de modo a identificar operações que causem constrangimentos na linha de produção e simultaneamente sejam suscetíveis de ser otimizadas. Nesse sentido foi identificada a operação de envelhecimento que inclui o recurso ao forno de envelhecimento. São discutidos dois problemas de otimização que correspondem a práticas diferentes de envelhecimento. Para cada problema são apresentadas formulações em programação inteira mista. São apresentados exemplos baseados em dados reais e as respectivas instâncias são resolvidas usando um software de otimização.

keywords

Aluminium extrusion, Optimization, Integer programming, Ageing ovens.

Abstract

The internship aimed at analyze the production process of Prébuild Alumínios, S.A., in order to identify operations causing constraints on the flow of the extrusion process and that can be optimized. The ageing operation including the use of the oven ageing was identified as having relevant roll in the extrusion process. Two optimization problems, that correspond to different aging practices, are discussed. For each problem a formulation in mixed integer programming is presented. Examples based on real data are presented and the corresponding instances are solved using an optimization software.

Conteúdo

Conteúdo	i
Lista de Figuras	iii
Lista de Tabelas	v
1 Introdução	1
2 Prébuild Alumínios, S.A.	3
2.1 Apresentação	3
2.1.1 Organização e Serviços	3
2.2 Alumínio	6
2.2.1 Ligas de Alumínio	6
2.3 Processo Produtivo	15
3 Problemas que ocorrem na extrusão de alumínio	23
3.1 Determinação do ciclo ótimo de vida das matrizes	23
3.2 Dimensionamento ótimo de lotes	23
3.3 Sequenciamento da produção	24
3.4 Otimização do forno de envelhecimento	24
4 Trabalho realizado na Prébuild	27
5 Modelação matemática dos problemas de otimização do forno de envelhecimento	29
5.1 Problema 1	29
5.1.1 Formulação	31
5.1.2 Casos particulares e variantes	32
5.2 Problema 2	35
5.2.1 Formulação	37
5.3 Melhoramentos	38

6 Exemplos baseados em dados reais	41
6.1 Problema 1	41
6.1.1 Exemplos baseados em dados reais	42
6.2 Problema 2	51
6.2.1 Exemplos baseados em dados reais	51
6.3 Discussão dos Exemplos	56
7 Conclusão	57
Bibliografia	59
A Dados 1	61
B Dados 2	63
C Formulação (5.1)	65
D Formulação (5.3)	69
E Formulação (5.4)	73
F Formulação (5.5)	77
G Formulação (5.6)	81

Lista de Figuras

2.1	Ciclo de vida do alumínio (imagem retirada de [13])	6
2.2	Ligas de alumínio e suas durezas (retirado dos arquivos da Prébuild)	14
2.3	Matéria-prima (bilete)	15
2.4	Matriz	15
2.5	Alimentador/pista de biletas	16
2.6	Forno de matrizes	17
2.7	Bilete, previamente cortado, a ser queimado	17
2.8	Prensa de extrusão	18
2.9	Púlpito principal	18
2.10	Pistas	19
2.11	Processo de encestamento	20
2.12	Forno de envelhecimento	20
2.13	Processo de embalagem	21
2.14	Zona de separação do perfil	21
2.15	Esquema do processo produtivo da Prébuild Alumínios desde a preparação do bilete até à expedição do perfil.	22

Lista de Tabelas

2.1	Composição Química das Ligas de Alumínio EN AW-6060, EN AW-6061 e EN AW-6063	9
2.2	Propriedades físicas das Ligas de Alumínio EN AW-6060, EN AW-6061 e EN AW-6063 (valores aproximados para 20°C)	9
2.3	Propriedades físicas das Ligas de Alumínio EN AW-6060, EN AW-6061 e EN AW-6063	13
5.1	Dimensões e tempos de execução das várias instâncias	40
6.1	Resultados referentes a um dia de produção utilizando a formulação (5.1) .	42
6.2	Resultados referentes a um dia de produção utilizando a formulação (5.3) .	42
6.3	Resultados referentes a um dia de produção utilizando a formulação (5.4) .	43
6.4	Resultados referentes a um dia de produção utilizando a formulação (5.5) .	43
6.5	Resultados referentes a uma semana de produção utilizando a formulação (5.1)	44
6.6	Resultados referentes a uma semana de produção utilizando a formulação (5.3)	45
6.7	Resultados referentes a uma semana de produção utilizando a formulação (5.4)	46
6.8	Resultados referentes a uma semana de produção utilizando a formulação (5.5)	47
6.9	Resultados referentes a duas semanas de produção utilizando a formulação (5.1)	49
6.10	Resultados referentes a quatro semanas de produção utilizando a formulação (5.1)	50
6.11	Resultados referentes a um dia de produção utilizando a formulação (5.6) .	51
6.12	Resultados referentes a uma semana de produção utilizando a formulação (5.6)	52
6.13	Resultados referentes a duas semanas de produção utilizando a formulação (5.6)	54
6.14	Resultados referentes a quatro semanas de produção utilizando a formulação (5.6)	55

Capítulo 1

Introdução

Hoje em dia, para que as empresas sejam eficazes, é preciso gerir eficientemente a sua produção. Devido à evolução das condições de competitividade económica nos mercados e a globalização, a gestão da produção é o epicentro na estratégia de uma empresa.

Face à globalização dos mercados, os clientes ficam cada vez mais exigentes o que induz a uma concorrência fortíssima entre empresas. As empresas são forçadas a otimizar os seus recursos, a ter uma qualidade dos seus produtos acima da média, maior eficácia e eficiência, e a prazos de entrega curtos que sejam cumpridos.

Para que tal aconteça, é necessário, *e.g.*, melhorar internamente o processo de produção, *i.e.*, elaborar um planeamento e controlo de produção eficaz.

O planeamento de produção visa planear a aquisição de recursos e de matéria-prima, assim como planear as atividades inerentes à produção, *i.e.*, à transformação da matéria-prima em produto acabado que satisfaça a procura dos clientes de forma mais eficiente e económica. Para que tal aconteça é necessário haver uma interação forte entre todas as áreas da empresa.

No contexto industrial, os problemas abordados neste âmbito estão relacionados com as decisões a tomar sobre o tamanho dos lotes de produção dos variados itens a ser fabricados ou transformados, o momento em que são produzidos, a máquina ou fila de produção onde a produção deve ter lugar, ou ainda, o sequenciamento destes.

Consequentemente, o objetivo do planeamento de produção é tomar decisões de estratégia/planeamento que otimizam os objetivos económicos, como a minimização de custos e/ou a maximização de lucros, tendo em conta a satisfação do cliente. Para tal, os sistemas de planeamento e controlo de produção estão, a cada dia que passa, mais sofisticados de forma a que se aumente a produtividade e a flexibilidade da produção.

Este relatório surge do estágio final no curso de Mestrado em Matemática e Aplicações

proposto pela empresa Prébuild Alumínios, S.A., uma empresa nacional de extrusão de alumínio. O estágio teve como objetivo a identificação de problemas de otimização que ocorrem no planeamento de produção e o respetivo estudo. Este estudo centrou-se na minimização da utilização do forno de envelhecimento.

No segundo capítulo, é feita uma descrição da empresa onde se realizou o estágio curricular.

No terceiro capítulo são revistos alguns problemas que ocorrem no processo produtivo da extrusão de alumínio e que foram abordados por um ponto de vista matemático.

No quarto capítulo é feita uma breve descrição do trabalho desenvolvido na empresa ao longo do estágio.

No quinto capítulo são descritos os problemas de otimização que ocorrem na utilização do forno de envelhecimento. São introduzidos dois modelos de programação inteira mista e são apresentados exemplos.

No sexto capítulo são apresentados alguns exemplos baseados em dados reais.

No sétimo capítulo são apresentadas as conclusões.

Capítulo 2

Prébuild Alumínios, S.A.

Neste capítulo é feita a descrição da empresa onde foi realizado o estágio curricular. E também é feito uma descrição do processo produtivo.

2.1 Apresentação

A Prébuild Alumínios, S.A., é uma empresa nacional de extrusão de perfis de alumínio para aplicação na arquitetura e indústria, que surge da aquisição, em Junho de 2010, da Extruverde - Extrusão de Alumínios, S.A., por parte do Grupo Prébuild. A empresa encontra-se localizada na Zona Industrial da Mota, Gafanha da Encarnação [12].

A sua missão tem por base a criação de valor para os clientes, consolidada pela competência técnica e pela prestação de um serviço interessado e de qualidade, proporcionando um retorno sustentado para a empresa e o seu meio envolvente. Esta missão é sustentada pelo seu Sistema de Gestão de Qualidade, com base na norma NP EN ISO 9001, e Certificado de Conformidade PT 04 1099, que garante e reconhece a qualidade dos seus produtos.

2.1.1 Organização e Serviços

A produção trabalha a três turnos e produz por prestação de serviço para as extrusoras ibéricas, denominadas nesta dissertação por *E* e *C*, encomenda de clientes e, pontualmente, também produz para stock.

Organização

A empresa encontra-se dividida em diferentes secções, sendo algumas destas as seguintes:

- planeamento;
- matrizes;
- extrusão;
- embalagem/expedição;
- poliamida;
- manutenção.

De seguida fazer-se-á a descrição de cada uma destas secções que obedecem a um procedimento, definido pelo Sistema de Gestão da Qualidade, sendo ajustado através de reuniões intercalares com os chefes de cada secção.

Secção de Planeamento Após a receção das encomendas por parte dos clientes, o Sistema de Apoio ao Cliente (SAC) dá seguimento das encomendas para a Secção de Planeamento.

Por sua vez, a Secção de Planeamento é responsável por fazer a planificação da produção efetuando as ordens de fabrico dos perfis pedidos e o planeamento das matrizes e ferramentas necessárias.

Esta secção é fundamental pois é aqui que se planeia toda a cadeia da linha de produção e se organizam as ordens de fabrico consoante a tipologia do perfil.

Secção das Matrizes A secção das Matrizes é uma secção importante para a extrusão pois garante o sucesso da produção.

Após a receção de novas matrizes, a secção é responsável por elaborar testes, correções e retoques para que estas fiquem operativas e conseqüentemente aptas para produzir.

Esta secção também garante que as matrizes existentes estejam limpas e operativas para que o perfil pedido na encomenda possa ser produzido.

Para aumentar o seu tempo de vida a matriz recebe um tratamento superficial de nitruração.

Secção de Extrusão Esta secção é responsável por garantir que o processo de extrusão decorra da melhor forma possível. Conseqüentemente, o operador é auxiliado pelo programa da prensa de extrusão que fornece toda a informação necessária, relativamente aos parâmetros necessários para satisfazer a Ordem de Fabrico bem como os controlos (dimensional - fora de quotas; e visual - com bolhas) a serem efetuados.

Após a extrusão, o perfil extrudido é esticado, cortado, de acordo com o comprimento solicitado pelo cliente. De seguida é colocado em cestos, passando para o tratamento de envelhecimento artificial, no forno de envelhecimento, ou tratamento de envelhecimento natural à temperatura ambiente.

Secção de Embalagem/Expedição e Secção de Poliamida A Secção de Embalagem/Expedição controla a dureza do perfil após o envelhecimento deste. Aqui os perfis são protegidos por um filme manualmente.

Caso os perfis sejam da empresa *C*, o processo termina e são expedidos para Espanha. Se os perfis forem de encomendas de clientes ou da empresa *E* o processo de embalagem continua e são embalados em cartão ou plástico (e o processo da empresa *E* termina).

Esta secção também é responsável por separar os perfis de acordo com as necessidades do cliente. Se a vontade do cliente for anodizar ou lacar, o perfil é expedido para uma outra empresa especializada e, por vezes, volta para ser novamente separado e expedido para o cliente.

No caso da encomenda se tratar de um perfil com rutura térmica ou ser um perfil rasgado, os perfis passam para a secção de Poliamida que faz o cravamento dos perfis, isto é, a união de dois perfis de alumínio por poliamida, permitindo um isolamento térmico e acústico. Além da cravação existe o rasgo do perfil, neste caso o perfil é furado, e também há encomendas que exigem que o perfil seja cortado em dimensões mais pequenas e furado, como as abraçadeiras. Terminando esta tarefa os perfis são embalados, separados e expedidos.

Secção de Manutenção A secção de Manutenção, composta por um mecânico e um electricista, garante que as máquinas funcionem regularmente, sem quebras de produção e de qualidade, evitando as anomalias inerentes ao desgaste do equipamento. Sempre que seja possível, esta secção implementa melhorias nos equipamentos existentes.

No início de cada ano, a secção elabora um plano anual de manutenção, onde se planeiam todas as ações de manutenção preventiva e preditiva, de todos os equipamentos existentes na Prébuild Alumínios.

Serviços

Desde Fevereiro de 2016, a empresa presta serviços a dois grupos de Extrusão, empresa *C* e empresa *E*. Esta prestação é feita em moldes diferentes. Para a empresa *C* tudo o que entra de bilete sai em forma de perfil, amostras, sucata e limalha; e a manutenção das matrizes fica a cargo da empresa *C*. Relativamente à empresa *E*, a prestação é feita da seguinte forma: a manutenção das matrizes é feita pela secção de Matrizes da Prébuild e o bilete que entra só sai na forma de perfil, ou seja o pagamento por parte da empresa *E* é feito em forma de perfil, sucata e limalha.

2.2 Alumínio

O alumínio é a matéria-prima da Prébuild Alumínios. Este metal é relativamente recente. Foi descoberto em 1827 por Friedrich Wöhler¹, mas foi só a meados do século XX que foi usado na indústria. O Alumínio também é o metal mais abundante da crosta terrestre (8.07%) que à temperatura ambiente se encontra na forma sólida. Na natureza, o alumínio surge combinado com outros elementos, tais como, o ferro, o oxigénio e o silício. A elevada afinidade do alumínio com o oxigénio, origina a formação de um composto químico designado por alumina. Por sua vez, a alumina aparece na crosta terrestre incorporada num minério designado por bauxite, que contém um elevado teor de alumina, entre 35% e 45%. O bauxite encontra-se sobretudo em países tropicais e subtropicais da África, Ásia, América do Sul e Austrália, embora existam também algumas minas na Europa. Uma excecional combinação de propriedades, faz do alumínio um dos mais versáteis materiais utilizados na engenharia, arquitetura e indústria em geral.[11, 13]

As características principais do alumínio são: a baixa densidade, a boa resistência à corrosão atmosférica, o ponto de fusão moderado que permite a obtenção de ligas, a elevada condutibilidade elétrica e térmica, o bom poder refletor, não ser tóxico e ser reciclável. O ciclo de vida do alumínio é descrito na figura 2.1.



Figura 2.1: Ciclo de vida do alumínio (imagem retirada de [13])

2.2.1 Ligas de Alumínio

O alumínio tem uma baixa resistência mecânica e não pode ser usado diretamente em aplicações onde a resistência à deformação e à fratura sejam fundamentais. Consequentemente, são adicionados outros elementos, em pequenas percentagens, que melhoram a sua resistência mecânica, sem detrimento de outras propriedades, dando origem às ligas de alumínio. As diferentes combinações possíveis entre o alumínio e os elementos de liga têm

¹Friedrich Wöhler foi um químico alemão que conseguiu sintetizar o alumínio
<http://www.chemistryexplained.com/Va-Z/W-hler-Friedrich.html>

permitido o desenvolvimento de novas ligas.

O desenvolvimento das ligas de alumínio associado a avanços tecnológicos do processo de extrusão, possibilitam a produção de uma grande variedade de perfis, que abrangem quase todas as áreas de aplicação no campo da indústria e da arquitetura.

A Prébuild Alumínios produz perfis nas ligas da série 6xxx, cujos principais elementos de liga são o silício e o magnésio. Estas ligas são envelhecidas termicamente, o que significa que podem ver as suas propriedades mecânicas melhoradas através de ciclos de tratamento térmico apropriados.

A empresa trabalha essencialmente com as seguintes ligas:

- Liga EN AW-6060 [Al MgSi]: Esta liga oferece média resistência e é fácil de extrudir, mesmo para perfis complicados. Esta é uma das ligas mais usadas em processos de extrusão, principalmente em aplicações onde se pretendem propriedades mecânicas moderadas, em simultâneo com uma boa resposta à anodização. Apresenta uma boa resistência à corrosão e boas características de soldabilidade. É usada em perfis de construção, sobretudo em caixilharia, na indústria automóvel e indústria em geral. Esta liga apresenta boa conformabilidade na condição T4.
- Liga EN AW-6061 [Al Mg1Si Cu]: É considerada uma liga de média resistência e é usada sobretudo em aplicações que combinam resistência mecânica com boa resistência à corrosão. É praticamente inexistente a suscetibilidade de corrosão por tensão. A liga EN AW-6061 oferece uma alta resistência e excelentes características de união. Aplicações típicas desta liga incluem componentes para indústria automóvel e de transportes, indústria em geral, componentes para máquinas, entre outras. Esta liga oferece boas características de acabamento e responde bem a anodização. Em particular, apresenta excelente resposta a anodização dura. A têmpera T4 oferece boa formabilidade por recalque a frio e dobramento. A liga é facilmente soldada e unida por vários métodos comerciais. Se a liga for tratada termicamente com uma têmpera T6, a resistência pode ser reduzida na região de solda.
- Liga EN AW-6063 [Al Mg0.7Si]: É bastante semelhante à liga 6060, mas com propriedades mecânicas superiores. Esta é uma das ligas mais populares da série 6xxx, pois oferece boa extrusão e uma alta qualidade no acabamento superficial. Em condições de tratamento térmico, a liga oferece boa resistência à corrosão em geral, incluindo a corrosão por tensão. É facilmente soldada por diferentes métodos convencionais. Por ser uma liga tratável termicamente, sua resistência pode ser diminuída na região de solda. A seleção de uma liga metálica adequada para preenchimento e solda depende das características de solda desejadas. A liga é frequentemente utilizada em aplicações elétricas nas condições de têmperas T5 e T6, devido a sua boa condutividade elétrica. A anodização é considerada um excelente revestimento para a têmpera

T5 como acabamento fosco. Devido à sua versatilidade, é usada em aplicações diversificadas na indústria automóvel e de transportes, e na indústria em geral.

As tabelas 2.1 e 2.2 apresentam as composição química (de acordo com a Norma Portuguesa EN 573-3[8]) e propriedades físicas das ligas de alumínio anteriormente descritas.

Composição Química das Ligas:		Elementos										
		Si (%)	Fe (%)	Cu (%)	Mn (%)	Mg (%)	Cr (%)	Zn (%)	Ti (%)	Outros Cada (%)	Outros Total (%)	Al (%)
EN AW-6060	min	0.30	0.10	–	–	0.35	–	–	–	–	–	restante
	max	0.60	0.30	0.10	0.10	0.60	0.05	0.15	0.10	0.05	0.15	
EN AW-6061	min	0.40	–	0.15	–	0.8	0.04	–	–	–	–	restante
	max	0.80	0.70	0.40	0.15	1.2	0.35	0.25	0.15	0.05	0.15	
EN-AW 6063	min	0.20	–	–	–	0.45	–	–	–	–	–	restante
	max	0.60	0.35	0.10	0.10	0.90	0.10	0.10	0.10	0.05	0.15	

Tabela 2.1: Composição Química das Ligas de Alumínio EN AW-6060, EN AW-6061 e EN AW-6063

6

	Densidade [kg/m^3]	Intervalo de Fusão [$^{\circ}C$]	Condutividade elétrica [MS/m]	Condutividade térmica [$W/m.K$]	Coefficiente de expansão térmica $10^{-6}/K$	Módulo de elasticidade GPa
EN AW-6060	2700	585-650	28-34	200-220	23.4	~ 70
EN AW-6061	2700	585-640	22-30	170-200	23	~ 70
EN AW-6063	2700	585-650	28-34	200-220	23.4	~ 70

Tabela 2.2: Propriedades físicas das Ligas de Alumínio EN AW-6060, EN AW-6061 e EN AW-6063 (valores aproximados para 20°C)

É ainda possível a produção de outras ligas e Estados Metalúrgicos especiais (Têmperas), de acordo com a especificação do cliente, e quando solicitados por este.

Associada às ligas estão as têmperas. Antes de se definirem os estados das têmperas, ir-se-ão definir conceitos² que são usados nestas, tais como:

Deformação a frio: Deformação plástica do metal a uma temperatura e a uma velocidade tais que o metal endureça.

Encruamento: Modificação da estrutura do metal associada à deformação a frio que se traduz num aumento da resistência mecânica e da dureza com uma diminuição da ductilidade.

Solubilização: Tratamento térmico que consiste em aquecer os produtos a uma temperatura apropriada, mantê-los a essa temperatura durante um tempo suficientemente longo para permitir aos constituintes entrar em solução sólida e arrefecê-los rapidamente para conservar os constituintes em solução.

Envelhecimento: Precipitação a partir de uma solução sólida sobressaturada de que resulta a alteração das propriedades da liga, a qual se produz lentamente à temperatura ambiente (envelhecimento natural ou maturação) e mais rapidamente a temperatura elevada (envelhecimento artificial ou revenido).

Recozimento: Tratamento térmico destinado a amaciar o metal por eliminação do encruamento ou por coalescência dos precipitados formados a partir da solução sólida.

Os diferentes estados metalúrgicos (têmperas) baseiam-se na sequência dos tratamentos de base utilizados. Os limites das propriedades mecânicas aplicam-se às combinações individuais de liga-estado-produto.

As designações dos estados metalúrgicos de base são constituídas por letras, e no caso de haver subdivisões dos estados base, serão indicados por um ou mais dígitos a seguir à letra do estado base.

Para a liga EN AW-6060 aconselha-se o uso dos estados metalúrgicos (têmperas) T4, T5, T6 e T66. Na liga EN AW-6061 as têmperas T4 e T6. E para a liga EN AW-6063 aconselham-se as têmperas T4, T5, T6 e T66. Note-se que ainda são possíveis outros esta-

²texto integralmente retirado de [6]

dos se o cliente desejar outras propriedades mecânicas. De seguida, definem-se os estados metalúrgicos e as suas subdivisões: ³

Estados Definições

F *Bruto de fabricação.* Esta designação aplica-se aos produtos resultantes de um processo de enformação no qual não é aplicado qualquer meio de controlo particular das condições térmicas ou de encruamento. Não se especificam limites das características mecânicas para este estado.

O *Recozido.* Esta designação aplica-se aos produtos que são recozidos para obter o estado cuja resistência mecânica é mínima.⁴ (...)

H *Encruado:* Esta designação aplica-se aos produtos submetidos a uma deformação a frio após recozimento (ou após enformação a quente); ou à combinação de uma deformação a frio com um recozimento parcial ou com um recozimento de estabilização, a fim de obter as características mecânicas especificadas.

(...)

T *Tratado termicamente para obter um estado estável diferente de F, O ou H:* Esta designação aplica-se aos produtos tratados termicamente com ou sem encruamento suplementar para obter um estado estável. A letra **T** é sempre seguida de um ou mais dígitos que indicam a sequência específica dos tratamentos.

(...)

T4 *Solubilizado e envelhecido naturalmente até à obtenção de um estado praticamente estável.* Esta designação aplica-se aos produtos que não sofrem encruamento após solubilização ou para os quais o efeito de encruamento associado ao aplanamento ou ao endireitamento não afeta os limites das características mecânicas.

³texto integralmente retirado de [6]

⁴Os produtos que, após uma enformação a quente, apresentam as propriedades requeridas para o estado recozido, podem ser acompanhadas pelo estado **O**.

T5 *Arrefecido após um tratamento de enformação a quente e depois envelhecido artificialmente.* Esta designação aplica-se aos produtos que não sofrem encruamento após arrefecimento praticado a seguir a uma enformação a quente ou para os quais o efeito de encruamento associado ao aplanamento ou ao endireitamento não afeta os limites das características mecânicas.

T6 *Solubilizado e depois envelhecido artificialmente.* Esta designação aplica-se aos produtos que não sofrem encruamento após solubilização, ou para os quais o efeito de encruamento associado ao aplanamento ou endireitamento não afeta os limites das características mecânicas.

(...)

TX6 *Número 6 depois de **T5** ou **T6**.* Este número pode ser utilizado para indicar um nível de características mais elevado que um **T5** ou **T6** respetivamente, obtido por um controlo especial do processo.

(...)

A tabela 2.3 apresenta as diferentes propriedades mecânicas (de acordo com a Norma Portuguesa EN 755-2[7])

	Têmpera	Espessura da parede* e [mm]	Tensão de cedência $Rp_{0.2}$ [MPa]	Tensão de rutura Rm [MPa]	Alongamento		Dureza Brinell [HB]
					A [%]	A_{50mm} [%]	
EN AW-6060	T4	$e \leq 25$	60	120	16	14	45
	T5	$e \leq 5$	120	160	8	6	55
		$5 < e \leq 25$	100	140	8	6	50
	T6	$e \leq 3$	150	190	8	6	65
		$3 < e \leq 25$	140	170	8	6	60
	T66	$e \leq 3$	160	215	8	6	70
$3 < e \leq 25$		140	195	8	6	65	
EN AW-6061	T4	$e \leq 25$	110	180	15	13	65
	T6	$e \leq 5$	240	260	9	7	85
		$5 < e \leq 25$	240	260	10	8	85
EN AW-6063	T4	$e \leq 25$	65	130	14	12	45
	T5	$e \leq 3$	130	175	8	6	55
		$3 < e \leq 25$	110	160	7	5	50
	T6	$e \leq 10$	170	215	8	6	65
		$10 < e \leq 25$	160	195	8	6	60
	T66	$e \leq 10$	200	245	8	6	75
$10 < e \leq 25$		180	225	8	6	70	

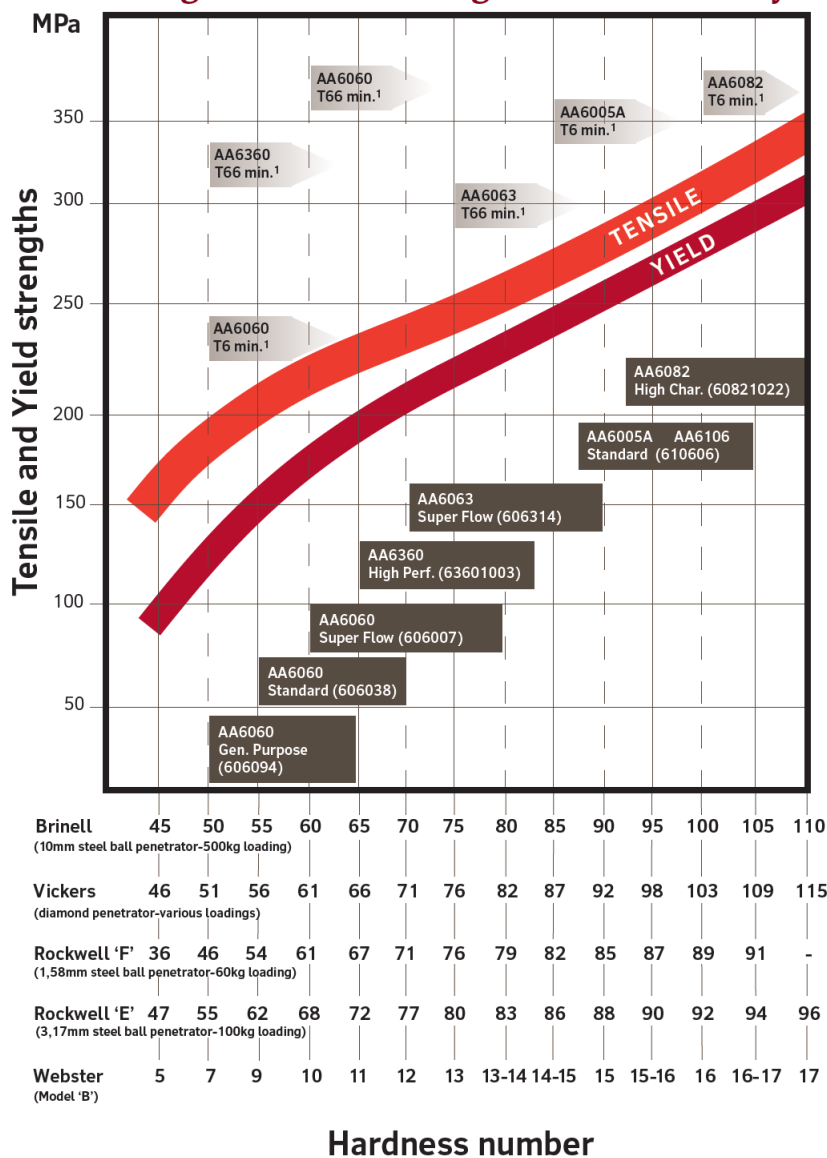
*Para diferentes espessuras de parede de um dado perfil, os valores mais baixos das propriedades devem ser considerados válidos para todo o perfil da secção transversal.

Tabela 2.3: Propriedades físicas das Ligas de Alumínio EN AW-6060, EN AW-6061 e EN AW-6063

Além da dureza de *Brinell* existem outros tipos de dureza. Na Prébuild Alumínios,S.A utiliza-se um durómetro que mede a dureza *Webster*. A seguinte figura 2.2 ilustra os diferentes tipo de liga e suas diferentes durezas:

Rio Tinto Alcan

Hardness-tensile property conversion chart for age hardened Al-Mg-Si extrusion alloys



This chart is intended only as a guide for the user. Rio Tinto Alcan makes no representations or warranties in relation to the information contained herein and shall have no liability for any actions taken by your reliance on such information. Where required by a specification, tensile properties should always be established using recognized tensile testing procedures.

¹ Based on EN755-2 properties.

©2015 Rio Tinto Alcan

Figura 2.2: Ligas de alumínio e suas durezas (retirado dos arquivos da Prébuild)

2.3 Processo Produtivo

*"O processo produtivo só existe, se existir matéria-prima"*⁵. Esta matéria-prima é fornecida sob a forma de cilindros de liga de alumínio - AlMgSi - denominados por bilette (tarugo ou lingote). (figura 2.3)



Figura 2.3: Matéria-prima (bilette)

Além da matéria-prima, outra ferramenta indispensável no processo de extrusão são as matrizes (figura 2.4). Estas são blocos de aço, com um ou mais orifícios, sólidos e resistentes onde cada orifício dá forma ao perfil desejado.



Figura 2.4: Matriz

O processo base da Prébuild Alumínios é o processo de extrusão de alumínio que é um processo de conformação mecânica onde o bilette é sujeito a uma deformação plástica e quente. Esta deformação é resultante da resistência imposta pela matriz à passagem do

⁵palavras do eng. Paulo Simões

metal.

De seguida ir-se-á apresentar, mais detalhadamente, o processo produtivo da Prébuild Alumínios.

Após receção, o bilette é controlado em termos de dimensão, peso e composição química de forma a verificar se está apto a ser utilizado. Se o bilette cumprir todos os pré-requisitos dar-se-á início ao processo produtivo.

Para eliminar todas as impurezas existentes no bilette, este é lavado com jatos de água. De seguida é colocado no alimentador/pista de bilettes (figura 2.5) e posteriormente, o bilette é pré-aquecido, de forma homogénea, no forno túnel entre os 450/490°C.



Figura 2.5: Alimentador/pista de bilettes

Para que o processo de extrusão tenha início é também necessário aquecer as matrizes e o porta-matriz de forma a evitar choques térmicos. Estas são preparadas e montadas pelo operador, que as coloca nos fornos de matrizes (figura 2.6) totalmente automatizados. As matrizes e porta-matriz são mantidas no forno durante 4 horas a uma temperatura de 400-450°C°. Depois de aquecidas são levadas para a prensa conjuntamente com o *bloster* ou o *insert* respetivo.



Figura 2.6: Forno de matrizes

Desta forma, poder-se-á iniciar o processo de extrusão. O bilette é cortado, recorrendo a uma cizalha quente e a sua medida e quantidades são estipuladas pela ordem de fabrico. O bilette é queimado com acetileno por forma a este não se agarrar à cabeça da prensa (figura 2.7) e segue para a prensa de extrusão para iniciar o processo.



Figura 2.7: Bilette, previamente cortado, a ser queimado

A prensa (figura 2.8) recebe de um lado o bilette e do lado oposto a matriz. Por ação hidráulica da prensa, o bilette é pressionado contra a matriz através do pistão provocando a formação do perfil que está nos orifícios da matriz.

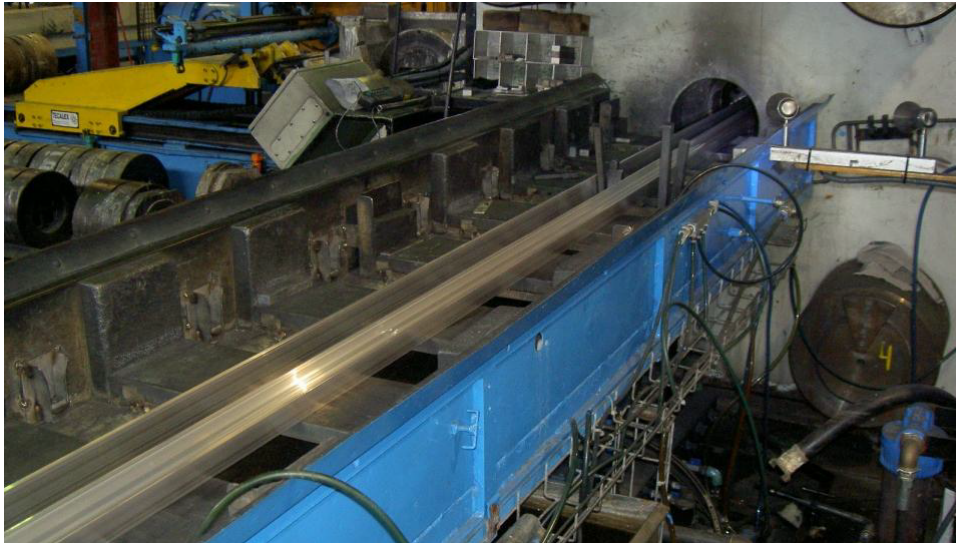


Figura 2.8: Prensa de extrusão

Este processo é acompanhado por um prensista que controla as operações da prensa no púlpito principal (figura 2.9). Os perfis de alumínio saem da prensa a temperaturas que rondam os 530/575°C, sendo arrefecidos por ar forçado ou vapor de água. É neste momento que a dureza do perfil fica determinada (por via da liga do alumínio e do ar forçado ou vapor de água).



Figura 2.9: Púlpito principal

Desta forma o perfil é rapidamente arrefecido ao longo da pista, sendo a ponta do perfil presa por um alicate, *puller*, que o transporta até ao final das pistas/mesas (figura 2.10), sendo cortado por uma serra móvel. As pistas encontram-se divididas em 5 zonas distintas, a extrusão, arrefecimento, esticamento, espera e corte.

Após a extrusão do primeiro bilette, é realizado o primeiro controlo de qualidade analisando visualmente o aspeto superficial do perfil. Também é efetuado o controlo dimensional das cotas principais através da medição no paquímetro. Este controlo é repetido com frequência ao longo da extrusão.



Figura 2.10: Pistas

Após o arrefecimento do perfil, este passa pelo esticamento, isto é, o perfil é fixo nas extremidades por duas garras e esticado para endireitar, evitar eventuais torções e empeno. Após esta fase passa a ficar à espera para ser cortado, por uma serra fria, segundo as medidas solicitadas pelo cliente. Estas encontram-se descritas na ordem de fabrico.

De seguida, inicia-se o processo de encestamento (figura 2.11). Os perfis são colocados em cestos onde cada camada é separada por papel ou barretas com pano, barretas intercaladas com cartão, consoante o perfil extrudido. É necessário realizar esta separação pois permite que o ar circule entre os perfis.



Figura 2.11: Processo de encestamento

Por último, segue-se o envelhecimento/maturação/endurecimento do perfil - processo de envelhecimento. Este é feito com recurso a um forno de envelhecimento artificial (figura 2.12) onde permanecem cerca de 4 horas e 30 minutos com a temperatura estabilizada a 185°C. Pontualmente, há perfis que envelhecem à temperatura ambiente.



Figura 2.12: Forno de envelhecimento

Após saída do forno é necessário que o perfil arrefeça. De seguida, poderá sofrer a operação de cravação e rasgo, caso contrário, este pode ser embalado (figura 2.13) e separado e expedido para os clientes. No caso de se tratar de um perfil da empresa *C* este é logo expedido.



Figura 2.13: Processo de embalagem

Se for um perfil Prébuild Alumínios ou empresa *E*, este é separado na zona da separação (figura 2.14) e expedido para o cliente.



Figura 2.14: Zona de separação do perfil

No caso de o tratamento do perfil ser de lacagem ou de anodização, este não é efetuado na Prébuild Alumínios, conseqüentemente, os perfis são embalados e seguem para o local de tratamento. Regressando à Prébuild Alumínios os perfis são novamente separados e expedidos e no caso de serem perfis de ruptura térmica estes passam pela secção de poliamida para serem cravados e de seguida são separados e expedidos para o cliente.

Na figura 2.15, apresenta-se o processo de produção da Prébuild Alumínios.

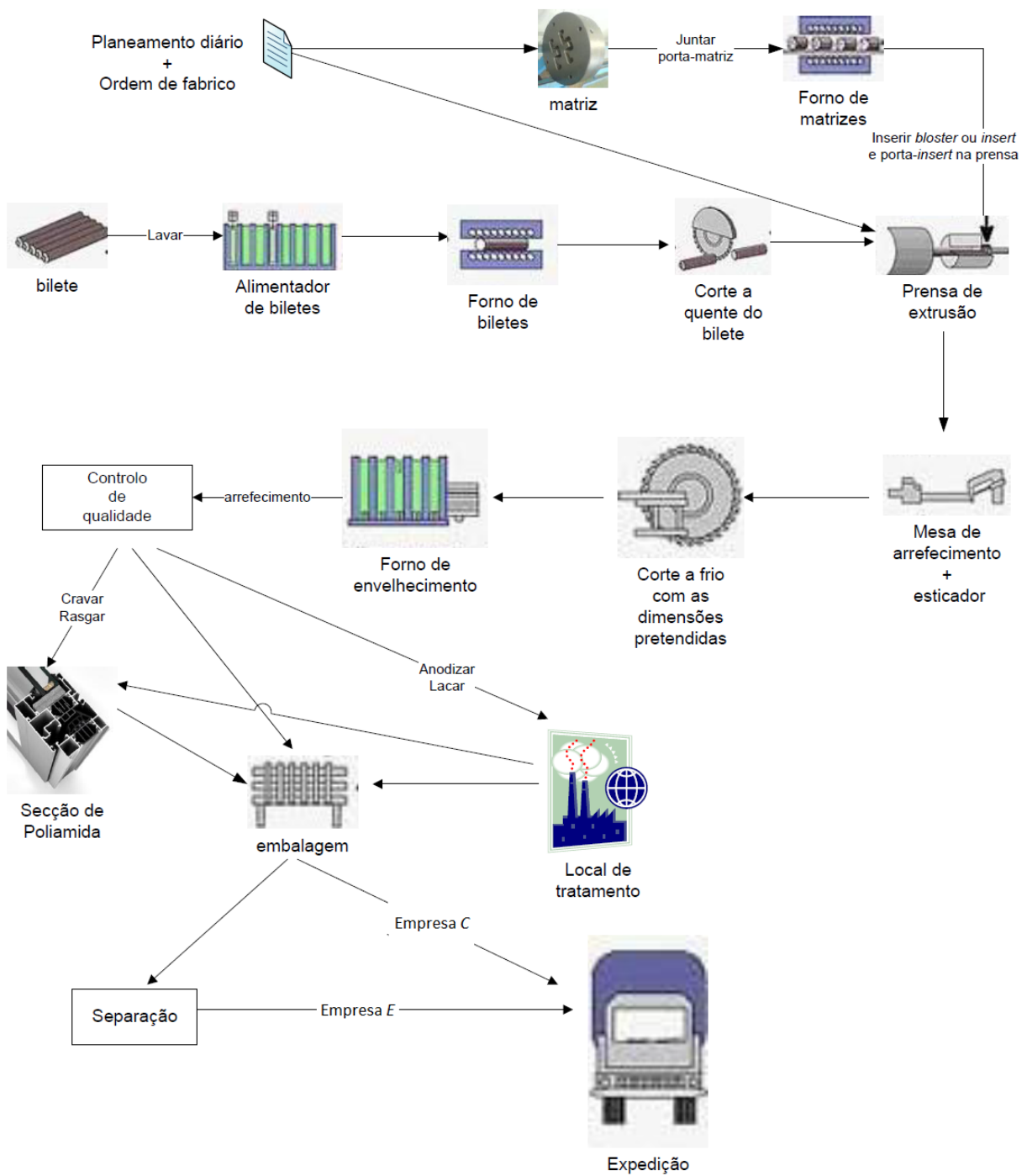


Figura 2.15: Esquema do processo produtivo da Prébuild Alumínios desde a preparação do bilete até à expedição do perfil.

Capítulo 3

Problemas que ocorrem na extrusão de alumínio

Tendo em vista a importância da eficiência do planeamento de produção ([2], [9]), as empresas têm vindo progressivamente procurar junto das universidades resposta para alguns problemas práticos.

Neste capítulo apresentam-se alguns problemas no âmbito da extrusão do alumínio que entretanto foram estudados usando abordagens matemáticas.

3.1 Determinação do ciclo ótimo de vida das matrizes

Em primeiro lugar apresentar-se-á o problema que foi proposto no 74th ESGI (European Study Group with Industry) pela Extruverde, S.A, agora Prébuild Alumínios, S.A. [4]. Ao longo do processo de extrusão as matrizes sofrem desgastes o que origina falhas de qualidade dos perfis extrudidos. Quando as matrizes se encontram danificadas têm de ser reparadas através de operações de manutenção. Tempos curtos entre manutenções causam custos excessivos de manutenção. Tempos longos entre manutenções podem originar perdas do material produzido e até mesmo perda da própria matriz. O problema proposto foi o de estudar o ciclo ótimo de vida da matriz, ou seja, quanto quilos podem ser produzidos por uma matriz entre manutenções, sem que esta fique danificada. Para este estudo foi utilizada a teoria dos valores extremos. Por exemplo, para a matriz do perfil PK40.04, chegou-se à conclusão que os valores de risco associados a probabilidade de 0.05 e 0.01, eram respetivamente 3900kg e 4700kg. Este estudo foi posteriormente aprofundado em [5].

3.2 Dimensionamento ótimo de lotes

Em 2015, Micael Santos [10] debruçou-se sobre o problema de otimização do dimensionamento de lotes na Extrusal.

No planeamento da sua produção, a empresa segue uma política *make-to-order*, isto é, produz para satisfazer encomendas concretas de clientes. Contudo, quando as quantidades encomendadas são inferiores à quantidade mínima de produção, essas encomendas ficam pendentes. O problema de otimização surge quando a empresa tem capacidade excedentária de produção (em termos de tempo disponível da linha de produção e de matéria prima). Nesse caso, essa capacidade é usada para satisfazer algumas das encomendas pendentes. Como o valor das encomendas é inferior à quantidade mínima de produção, a produção origina necessariamente *stocks*. O problema de otimização resultante consiste em determinar que perfis produzir e em que quantidades de modo a satisfazer encomendas pendentes minimizando os custos produção, de *set-up* e de stock resultantes da produção excedentária. Nesse trabalho é apresentada uma formulação em programação inteira, são propostas duas heurísticas e é estudado o caso onde as procuras futuras dos perfis são consideradas incertas. Para lidar com cenários de incerteza é introduzido um modelo de otimização robusta.

3.3 Sequenciamento da produção

Em 2014, Cátia Couto [3] estudou a sequenciamento da produção da Prébuild Alumínios onde procurou minimizar o uso da matriz na produção com as restrições inerentes ao uso desta, ou seja, só se pode produzir uma matriz de cada vez; não se pode extrudir consecutivamente duas matrizes com o mesmo *bloster*; não se pode extrudir duas matrizes consecutivamente com o mesmo *insert*; não se pode produzir consecutivamente duas matrizes com o mesmo *porta-insert*.

São apresentadas duas formulações: uma em programação linear inteira e outra em programação por restrições. Algumas instâncias são resolvidas usando um *software* comercial.

3.4 Otimização do forno de envelhecimento

Além dos problemas mencionados anteriormente, também existe o problema da utilização do forno de envelhecimento.

Uma vez que a Prébuild Alumínios é um exemplo de *Job Shop*¹ e de *Make-to-Order*², os prazos de entrega são importantes que sejam cumpridos.

¹*Job Shop* - produção descontínua, o sistema é concebido de forma a responder a uma grande diversidade de produtos em quantidades reduzidas. Neste âmbito, o processo produtivo é mais flexível e está orientado a satisfazer as encomendas com um elevado grau de especificação por parte do cliente.

²*Make-to-Order* - etapa só se inicia após a existência de um compromisso entre a empresa e o cliente. O prazo de atendimento é alto. Este tipo de produção é em tudo vantajosa na medida em que todos os custos associados a *stocks* de produtos acabados são relativamente baixos. [2],[9]

Desta forma, o problema de otimização do forno de envelhecimento, de uma forma geral, procura minimizar a utilização do forno tendo em conta a duração de cada fornada e o prazo de entrega das encomendas aos clientes. Este problema vai ser estudado no capítulo 5.

Capítulo 4

Trabalho realizado na Prébuild

Neste capítulo apresenta-se a uma breve descrição do trabalho realizado na Prébuild Alumínios, no decorrer do estágio curricular.

Durante o estágio curricular foi permitido acompanhar o planeamento da Prébuild, tendo sido autorizado assistir às reuniões. *A posteriori*, como a prestação de serviços, extrusão para a empresa *C* e empresa *E*, ocupava praticamente todos os turnos de produção, o planeamento era realizado com base nas encomendas mais urgentes e com encomendas onde existiam prazos contratuais. De seguida emitia-se as ordens de fabrico e enviava-se para a prensa.

Durante as primeiras semanas, observou-se todo o funcionamento da empresa. Com o passar das semanas foram sendo atribuídas, gradualmente, tarefas tais como: a contagem de perfis da empresa *C* que estavam nos cestos, também se confirmavam os perfis da Prébuild e da empresa *E*, pois por vezes os valores eram muito dispares daqueles que tinham sido escritos na ordem de fabrico; como a redundância é importante para a Prébuild, todos os dados relativos à produção foram inseridos numa folha de *excel*. Uma vez que o diretor industrial teve que se ausentar, todas as faltas e horas extraordinárias dos colaboradores foram apontadas para posteriormente o diretor ver.

As tarefas atribuídas relativamente à empresa *C* foram: a recolha de dados dos seus perfis para inserir no sistema da Prébuild, tais como a recolha do peso teórico, do peso real, do tipo de porta-matriz a usar, o número de saídas da matriz; posteriormente elaborava-se uma ficha técnica do perfil, com a foto do perfil, o modo de embalar, o seu peso e o número de perfil por minuto para que fosse distribuído na secção de embalagem; como o sistema da empresa *C* é paralelo ao da Prébuild, os colaboradores preenchiam a folha de embalagem onde também apontavam o número de perfis que iam para a sucata; após recolha destas folhas, estas eram introduzidas informaticamente numa folha de *excel*. Para a Prébuild ter uma noção de quanto tempo demorava uma equipa a embalar um certo perfil foi pedido para que se calculasse o seu tempo médio, este tempo seria também colocado na ficha técnica do respetivo perfil; para que houvesse um maior controlo do que saía da Prébuild,

a empresa C pediu que fosse enviada, juntamente com a carga, uma listagem das etiquetas colocadas nas lata (contentores) que iam no camião.

Além das tarefas que iam sendo atribuídas, um dos objetivos do estágio foi o de analisar o planeamento da produção e estudar os processos produtivos de modo a identificar aspetos que possam vir a ser otimizados. No Capítulo 3 serão apresentados alguns exemplos desses aspetos que ocorrem na indústria de extrusão de alumínio. Esses exemplos cobrem aspetos relativos à otimização do processo produtivo e do planeamento da produção.

Durante o estágio, a análise centrou-se no estudo da utilização do forno de envelhecimento. Numa primeira fase, o forno era utilizado consoante as propriedades mecânicas da tabela 2.3 solicitadas pelo cliente, ou seja, para uma têmpera T5 o forno tinha uma duração de 4 horas a 195° e para uma têmpera T6, o forno tinha uma duração de 8 horas a 195°. A dureza fica determinada pela temperatura e duração do forno. Posteriormente, o processo de envelhecimento foi alterado e a dureza passou a ficar determinada à boca da prensa com uma injeção de ar sobre o perfil. Neste caso, todos os fornos têm uma duração de 4 horas e meia a 185°.

Tendo em conta estas duas fases, o problema de otimização varia substancialmente.

No primeiro caso, há que ter em conta a têmpera do perfil, pois a duração dos fornos é diferente. Assim, o problema de otimização consiste em decidir como agrupar perfis com têmperas iguais de modo a satisfazer os prazos de entrega das encomendas, minimizando a utilização do forno.

No segundo caso, o problema de otimização fica simplificado, pois todos os fornos têm a mesma duração. Assim, o problema consiste em decidir o número de cestos que entram no forno de modo a satisfazer os prazos de entrega das encomendas, minimizando a utilização do forno.

Em ambos os casos assume-se que cada cesto só leva um tipo de perfil, caso contrário, ter-se-ia outro problema de otimização, o de alocação dos perfis nos cestos.

Estes dois problemas irão ser estudados no Capítulo 5.

Capítulo 5

Modelação matemática dos problemas de otimização do forno de envelhecimento

Neste capítulo apresenta-se a modelação matemática em programação inteira mista dos problemas de otimização da utilização do forno de envelhecimento. A função objetivo procura minimizar o uso do forno de envelhecimento, tendo em conta as restrições inerentes à sua utilização.

No Capítulo 4 foram referidos dois problemas de utilização do forno de envelhecimento. Numa primeira fase, formular-se-á o caso em que todos os fornos têm a mesma duração, e numa segunda fase, formular-se-á o caso em que a têmpera do perfil é tida em conta, pois a duração dos fornos é diferente.

5.1 Problema 1

É dado um conjunto de cargas resultantes do processo de extrusão, caracterizadas pela quantidade, às quais são associadas uma hora de início e um prazo de entrega previsto. O forno de envelhecimento tem um limite de cestos e cada fornada tem uma duração constante.

Antes de se formular o problema apresenta-se os índices, conjuntos e os parâmetros que irão ser usados.

Índices

- i o índice do perfil na carga
- j o índice do forno

Constantes

- C o número máximo de cestos que o forno leva numa fornada
- T o tempo de duração do forno
- H o horizonte temporal
- m o número máximo de fornos no horizonte temporal

Conjuntos

- N o conjunto das cargas
- M o conjunto dos potenciais fornos. $M = \{1, \dots, m\}$

Parâmetros

- n_i o número de cestos relativo ao perfil i , $i \in N$
- r_i a hora a que o perfil i fica disponível, $i \in N$
- d_i a data da entrega da encomenda do perfil i , $i \in N$
- t_j hora de início do forno j . Sendo a hora de fim da fornalha dada por $t_j + T$, $j \in M$

Para cada perfil $i \in N$ é associado o terno (n_i, r_i, d_i) .

Variáveis de decisão

- y_j para representar se o forno j é produzido, para $j \in M$
- x_{ij} a quantidade de cestos da carga i no forno j , para $i \in N$ e $j \in M$.
- δ_{ij} para indicar se o perfil i pode ser afeto à fornalha j ou não. Isto acontece se a hora a que o perfil i fica disponível não é superior à hora de início do forno j e se a hora de fim do forno j não é superior ao prazo de entrega do perfil i , $i \in N$ e $j \in M$. Ou seja, $\delta_{ij} = 1$, se $t_j \geq r_i$ e $t_j + T \leq d_i$, e $\delta_{ij} = 0$, se $r_i > t_j$.

5.1.1 Formulação

Segue-se a descrição da formulação em programação inteira mista:

$$\min \quad \sum_{j \in M} y_j \quad (5.1a)$$

$$s.a \quad \sum_{j \in M} x_{ij} = n_i, \quad \forall i \in N \quad (5.1b)$$

$$t_j \geq t_{j-1} + T y_j, \quad \forall j \in M \quad (5.1c)$$

$$t_m + T y_m \leq H \quad (5.1d)$$

$$r_i - t_j \leq H(1 - \delta_{ij}), \forall i \in N, j \in M \quad (5.1e)$$

$$t_j + T - d_i \leq H(1 - \delta_{ij}), \forall i \in N, j \in M \quad (5.1f)$$

$$x_{ij} \leq n_i \delta_{ij}, \forall i \in N, j \in M \quad (5.1g)$$

$$\sum_{i \in N} x_{ij} \leq C y_j, \forall i \in N, j \in M \quad (5.1h)$$

$$\delta_{ij} \in \{0, 1\}, \forall i \in N, j \in M \quad (5.1i)$$

$$y_j \in \{0, 1\}, \forall j \in M \quad (5.1j)$$

$$x_{ij} \text{ inteiros}, \forall i \in N, j \in M \quad (5.1k)$$

onde $t_0 = 0$.

A função objetivo (5.1a) pretende minimizar o número de fornos, ao longo do planeamento.

A restrição (5.1b) indica que o número de cargas dos perfis extrudidos tem que ser igual ao número de cestos a produzir.

A restrição (5.1c) indica que a hora de início de um forno t_j deve ser superior à hora de fim do forno anterior $t_{j-1} + T$. Note-se que se $y_j = 1$ a restrição fica $t_j \geq t_{j-1} + T$ e se $y_j = 0$ a restrição apenas indica que $t_j \geq t_{j-1}$.

A restrição (5.1d) indica que o hora de fim do último forno, caso seja efetuada a fornalha ($y_m = 1$), tem que ser inferior ao fim do horizonte temporal.

As restrições (5.1e) e (5.1f) garantem que se $\delta_{ij} = 1$ então o perfil i pode ser afeto à fornalha j . A restrição (5.1e) indica que se o perfil é afeto ao forno j ($\delta_{ij} = 1$) então a hora a que o perfil fica disponível tem de anteceder o início do forno j . Note-se que se $\delta_{ij} = 0$, a restrição fica $r_i - t_j \leq H$ e por isso é sempre satisfeita qualquer que sejam r_i e t_j .

A restrição (5.1f) garante que se o perfil i é afeto ao forno j então o forno j termina ($t_j + T$) antes do prazo de entrega do perfil i (d_i), ou seja, se o prazo final for posterior ao prazo de entrega do perfil i , este tem de ser igual a zero. Note-se que se $\delta_{ij} = 0$, a restrição fica

$t_j + T - d_i \leq H$, que é satisfeita para todos os valores t_j e d_i correspondentes a uma solução admissível.

A restrição (5.1g) indica que a quantidade máxima de cestos do perfil i a entrar no forno é no máximo n_i e garante que se a quantidade de cestos do perfil i colocados no forno j é positiva, $x_{ij} > 0$, então $\delta_{ij} = 1$.

A restrição (5.1h) garante que a capacidade do forno é respeitada, ou seja, no limite o forno leva C cestos e também garante que se $x_{ij} > 0$ então o forno j é produzido, $y_j = 1$.

As restrições (5.1i), (5.1j), e (5.1k), modelam o domínio das variáveis.

Note-se que se pode sempre assumir que são produzidos os primeiros fornos. Deste modo

$$y_j \leq y_{j-1}, j \in M \quad | \quad j > 1 \quad (5.2)$$

Isto é, se a fornalha j é produzida então a $j - 1$ -ésima fornalha também tem de ser. Deste modo reduz-se o número de soluções ótimas alternativas.

5.1.2 Casos particulares e variantes

Nesta secção considera-se variantes ao modelo (5.1) que permitem estabelecer relações com problemas de otimização combinatória clássicos.

No caso em que todos os cestos do perfil i têm de ser colocados no mesmo forno, há que considerar novas variáveis binárias z_{ij} que indicam se as cargas do perfil i são colocadas no forno j ou não.

Nesse caso $x_{ij} = n_i z_{ij}$, $i \in N, j \in M$ e o modelo fica:

$$\min \quad \sum_{j \in M} y_j \quad (5.3a)$$

$$s.a \quad \sum_{j \in M} z_{ij} = 1, \forall i \in N \quad (5.3b)$$

$$t_j \geq t_{j-1} + T y_j, \forall j \in M \quad (5.3c)$$

$$t_m + T y_m \leq H \quad (5.3d)$$

$$r_i - t_j \leq H(1 - \delta_{ij}), \forall i \in N, j \in M \quad (5.3e)$$

$$t_j + T - d_i \leq H(1 - \delta_{ij}), \forall i \in N, j \in M \quad (5.3f)$$

$$z_{ij} \leq \delta_{ij}, \forall i \in N, j \in M \quad (5.3g)$$

$$\sum_{i \in N} n_i z_{ij} \leq C y_j, \forall i \in N, j \in M \quad (5.3h)$$

$$\delta_{ij} \in \{0, 1\}, \forall i \in N, j \in M \quad (5.3i)$$

$$y_j \in \{0, 1\}, \forall j \in M \quad (5.3j)$$

$$z_{ij} \in \{0, 1\}, \forall i \in N, j \in M \quad (5.3k)$$

A função objetivo (5.3a) pretende minimizar o número de fornos, ao longo do planeamento diário.

A restrição (5.3b) indica que as cargas com perfil i estão num dos fornos.

As restrições (5.3c)-(5.3f) são análogas às restrições (5.3c)-(5.3f) da formulação (5.1)

A restrição (5.3g) indica que se $z_{ij} = 1$ então δ_{ij} é obrigatoriamente igual a 1.

A restrição (5.3h)¹ garante que a capacidade do forno é respeitada, ou seja, no limite leva C cestos e também garante que $n_i z_{ij} > 0$ então o forno j é produzido, isto é, $y_j = 1$.

E por fim, as restrições (5.3i), (5.3j), e (5.3k), modelam o domínio das variáveis.

¹Note-se que, em muita literatura, esta restrição é apelidada de *restrição de capacidade* ou *restrição Knapsack*

As variáveis δ_{ij} podem ser eliminadas, ficando apenas

$$\min \quad \sum_{j \in M} y_j \quad (5.4a)$$

$$s.a \quad \sum_{j \in M} z_{ij} = 1, \forall i \in N \quad (5.4b)$$

$$t_j \geq t_{j-1} + T y_j, \forall j \in M \quad (5.4c)$$

$$t_m + T y_m \leq H \quad (5.4d)$$

$$r_i - t_j \leq H(1 - z_{ij}), \forall i \in N, j \in M \quad (5.4e)$$

$$t_j + T - d_i \leq H(1 - z_{ij}), \forall i \in N, j \in M \quad (5.4f)$$

$$\sum_{i \in N} n_i z_{ij} \leq C y_j, \forall i \in N, j \in M \quad (5.4g)$$

$$y_j \in \{0, 1\}, \forall j \in M \quad (5.4h)$$

$$z_{ij} \in \{0, 1\}, \forall i \in N, j \in M \quad (5.4i)$$

que é um caso particular de um problema do saco-mochila.

A restrição (5.4b) é análoga à restrição (5.3b) da formulação (5.3).

As restrições (5.4c) e (5.4d) são análogas às restrições (5.1c) e (5.1d) da formulação (5.1).

As restrições (5.4e) e (5.4f) garantem que se $z_{ij} = 1$ então a carga do perfil i pode ser afeta à fornalha j .

A restrição (5.4e) indica que se a carga do perfil é afeta ao forno j ($z_{ij} = 1$) então a hora a que o perfil fica disponível tem de anteceder o início do forno j . Note-se que se $z_{ij} = 0$, a restrição fica $r_i - t_j \leq H$ e por isso é sempre satisfeita qualquer que sejam r_i e t_j .

A restrição (5.4f) garante que se a carga do perfil i é afeta ao forno j então o forno j termina ($t_j + T$) antes do prazo de entrega do perfil i (d_i), ou seja, se o prazo final for posterior ao prazo de entrega do perfil i , z_{ij} tem de ser igual a zero. Note-se que se $z_{ij} = 0$, a restrição fica $t_j + T - d_i \leq H$, que é satisfeita para todos os valores t_j e d_i correspondentes a uma solução admissível.

A restrição (5.4g) é análoga à restrição (5.3h) da formulação (5.3).

E por fim, as restrições (5.4h) e (5.4i), modelam o domínio das variáveis.

Em particular, se a hora a que fica disponível cada perfil for zero $r_i = 0$ e o prazo de

entrega for $d_i \geq H$ então o problema fica simplificado:

$$\min \sum_{j \in M} y_j \quad (5.5a)$$

$$\sum_{j \in M} z_{ij} = 1, \forall i \in N \quad (5.5b)$$

$$\sum_{i \in N} n_i z_{ij} \leq C y_j, \forall i \in N, j \in M \quad (5.5c)$$

$$y_j \in \{0, 1\}, \forall j \in M \quad (5.5d)$$

$$z_{ij} \in \{0, 1\}, \forall i \in N, j \in M \quad (5.5e)$$

E nesse caso temos um *Bin-packing*[1]. Usando a terminologia destes problemas, tem-se: Considerem-se n perfis (*itens*) e m fornos (*bins*), com n_i o número de cestos do perfil i (*peso*) e C a capacidade do forno (*bin*). Então o objectivo é o de determinar o menor número de fornos (*bins*) necessários para envelhecer todos os perfis considerados.

Note-se que o problema do *Bin-packing* é \mathcal{NP} -difícil, e como é um caso particular do problema definido por (5.4), então este último também é um problema \mathcal{NP} -difícil.

5.2 Problema 2

Neste problema vamos considerar o caso em que há que ter em conta a têmpera do perfil, pois a duração dos fornos é diferente. Neste caso, o problema de otimização consiste em decidir como agrupar perfis com t mperas iguais de modo a satisfazer os prazos de entrega das encomendas, minimizando a utilização do forno.

Antes de se formular o problema apresenta-se os índices, conjuntos e os parâmetros que irão ser usados.

 ndices

- i o  ndice do perfil na carga
- j o  ndice do forno
- ℓ o  ndice da têmpera

Constantes

- C o número máximo de cestos que o forno leva numa fornada
- H o horizonte temporal
- m o número máximo de fornos no horizonte temporal

Conjuntos

- N o conjunto das cargas
- M o conjunto dos possíveis fornos
- L o conjunto das tâmporas

Parâmetros

- n_i o número de cestos relativo ao perfil i , $i \in N$
- r_i a hora a que o perfil i fica disponível, $i \in N$
- d_i a data da entrega da encomenda do perfil i , $i \in N$
- $g_i(\ell)$ $g_i(\ell) = 1$ se a tâmpora i é ℓ , e $g_i(\ell) = 0$, caso contrário, $i \in N$, $\ell \in L$
- T_ℓ a duração do forno da tâmpora ℓ , $\ell \in L$
- t_j hora de início do forno j .

Para cada perfil $i \in N$ é associado o terno $(n_i, r_i, d_i, g_i(\ell))$.

Variáveis de decisão

- $y_{j\ell}$ para representar se o forno j é produzido com a tâmpora ℓ , para $j \in M$, $\ell \in L$
- x_{ij} a quantidade de cestos da carga i no forno j , para $i \in N$ e $j \in M$.
- δ_{ij} para indicar se o perfil i pode ser afeto à fornalha j . Isto acontece se a hora a que o perfil i fica disponível é inferior à hora de início do forno j e se a hora de fim do forno j não é superior ao prazo de entrega do perfil i , $i \in N$ e $j \in M$. Ou seja, $\delta_{ij} = 1$, se $t_j \geq r_i$ e $t_j + T_\ell \leq d_i$, e $\delta_{ij} = 0$, se $r_i > t_j$.

5.2.1 Formulação

Segue-se a descrição da formulação em programação inteira mista:

$$\min \quad \sum_{j \in M} \sum_{\ell \in L} y_{j\ell} \quad (5.6a)$$

$$s.a \quad \sum_{\ell \in L} y_{j\ell} \leq 1, \forall j \in M \quad (5.6b)$$

$$\delta_{ij} \leq \sum_{\ell \in L} g_i(\ell) y_{j\ell}, \forall i \in N, j \in M \quad (5.6c)$$

$$\sum_{j \in M} \sum_{\ell \in L} x_{ij} = n_i, \quad \forall i \in N, \quad (5.6d)$$

$$t_j \geq t_{j-1} + \sum_{\ell \in L} T_\ell y_{j\ell}, \quad \forall i \in N \quad (5.6e)$$

$$t_m + \sum_{\ell \in L} T_\ell y_{m\ell} \leq H \quad (5.6f)$$

$$r_i - t_j \leq H(1 - \delta_{ij}), \forall i \in N, j \in M \quad (5.6g)$$

$$t_j + \sum_{\ell \in L} T_\ell y_{j\ell} - d_i \leq H(1 - \delta_{ij}), \forall i \in N, j \in M \quad (5.6h)$$

$$x_{ij} \leq n_i \delta_{ij}, \forall i \in N, j \in M \quad (5.6i)$$

$$\sum_{i \in N} x_{ij} \leq \sum_{\ell \in L} C y_{j\ell}, \forall i \in N, j \in M \quad (5.6j)$$

$$\delta_{ij} \in \{0, 1\}, \forall i \in N, j \in M \quad (5.6k)$$

$$y_{j\ell} \in \{0, 1\}, \forall j \in M, \ell \in L \quad (5.6l)$$

$$x_{ij} \text{ inteiros}, \forall i \in N, j \in M, \ell \in L \quad (5.6m)$$

onde $t_0 = 0$.

A função objetivo (5.6a) pretende minimizar o número de fornos, ao longo do planeamento diário.

A restrição (5.6b) indica que quanto mais o forno j será produzido com uma temperatura.

A restrição (5.6c) indica que se $\delta_{ij} = 1$ então existe um forno j com o perfil i e respetiva temperatura a ser produzido.

A restrição (5.6d) indica que o número de cargas dos perfis extrudidos tem que ser igual ao número de cestos.

A restrição (5.6e) indica que a hora de início de um forno com a temperatura ℓ tem que ser superior à hora de fim do forno anterior. Note-se que se $y_{j\ell} = 1$ a restrição fica

$t_j \geq t_{j-1} + T_\ell y_{j\ell}$ e se $y_{j\ell} = 0$ a restrição apenas indica que $t_j \geq t_{j-1}$.

A restrição (5.6f) indica que o hora de fim do último forno, caso seja efetuada a fornalha ($y_{m\ell} = 1$), tem que ser inferior ao prazo de entrega menos a sua duração.

As restrições (5.6g) e (5.6h) garante que se $\delta_{ij} = 1$ então o perfil i pode ser afeto à fornalha j . A restrição (5.6g) indica que a hora a que o perfil fica disponível retirando-lhe a hora de início do forno correspondente tem que ser inferior ao prazo de entrega. Note-se que se $\delta_{ij} = 0$, a restrição fica $r_i - t_j \leq H$.

A restrição (5.6h) indica a hora de início do forno j adicionando-lhe a sua duração e retirando-lhe o prazo de entrega do perfil tem que ser inferior ao horizonte de planeamento, ou seja, se o prazo final for posterior ao prazo de entrega do perfil i , este tem de ser igual a zero. Note-se que se $\delta_{ij} = 0$, a restrição fica $t_j + T_\ell y_{j\ell} - d_i \leq H$.

A restrição (5.6i) indica que a quantidade máxima de cestos a entrar no forno é no máximo n_i e garante que se a quantidade de cestos do perfil i colocados no forno j é positiva, $x_{ij} > 0$, então $\delta_{ij} = 1$, ou seja, o forno j inclui os perfis do tipo i .

As restrição (5.6j) garantem que a capacidade do forno é respeitada, ou seja, no limite o forno leva C cestos e também garante que $x_{ij} > 0$ então o forno j é produzido, $y_{j\ell} = 1$.

As restrições (5.6k), (5.6l), e (5.6m), modelam o domínio das variáveis.

Note-se que, tal como na formulação (5.1) também agora se pode assumir sempre que são produzidos os primeiros fornos. Deste modo

$$\sum_{\ell \in L} y_{j\ell} \leq y_{j-1,\ell}, j \in M | j > 1, \quad (5.7)$$

No caso em que todas as têmperas dos perfis são iguais fica-se com o problema 1 e suas variantes mencionados na secção anterior.

5.3 Melhoramentos

Para melhorar a qualidade das formulações podem-se introduzir desigualdades válidas: restrições que não fazem parte do problema original mas que, não cortando soluções inteiras admissíveis, cortam a região admissível da respetiva relaxação linear (formulação obtida eliminando as restrições que obrigam as variáveis a ser binárias e inteiras), melhorando assim o desempenho da pesquisa da solução ótima inteira.

Para as presentes formulações, assumem-se, nas formulações (5.1), (5.3), (5.4) e (5.5), as seguintes desigualdades válidas:

$$\sum_{j \in M} \delta_{ij} \geq \left\lceil \frac{n_i}{C} \right\rceil, \quad i \in N \quad (5.8a)$$

$$\sum_{j \in M} y_j \geq \left\lceil \frac{\sum_{i \in N} n_i}{C} \right\rceil, \quad i \in N \quad (5.8b)$$

Para a formulação (5.6) assumem-se as desigualdades válidas:

$$\sum_{j \in M} \delta_{ij} \geq \left\lceil \frac{n_i}{C} \right\rceil, \quad i \in N \quad (5.9a)$$

$$\sum_{j \in M} y_{j\ell} \geq \left\lceil \frac{\sum_{i \in N} n_i g_{i\ell}}{C} \right\rceil, \quad i \in N, \quad \ell \in L \quad (5.9b)$$

As desigualdades válidas (5.8) impõem um limite inferior ao número de fornos afetos a um perfil (5.8a) e ao total de perfis (5.8a).

De forma análoga, obtêm-se as desigualdades válidas (5.9) que impõem um limite inferior ao número de fornos afetos a um perfil (5.9a) e ao total de perfis com têmpera ℓ , (5.9b).

Na tabela 5.1 resumam-se as dimensões das várias instâncias e o respetivo tempo de execução.

Horizonte	Formulação	Fornos produzidos	Número de Variáveis	Tempo de execução (s)		Número de restrições	
				sem desigualdades	com desigualdades	sem desigualdades	com desigualdades
1 dia	(5.1)	2	128	0.147	0.115	206	222
	(5.3)	2	128	0.132	0.105	206	222
	(5.4)	2	68	0.07	0.08	146	162
	(5.5)	2	64	0.38	0.252	19	35
	(5.6)	3	132	0.12	0.109	330	347
1 semana	(5.1)	17	3136	8.509	25.769	4758	4814
	(5.3)	17	3136	7.906	23.625	4758	4814
	(5.4)	17	1596	7.01	14.685	3218	3274
	(5.5)	17	1568	0.251	0.251	83	139
	(5.6)	18	3164	3600*	45.417	7866	7923
2 semanas	(5.1)	29	1920	1.105	1.081	2894	2910
	(5.6)	29	1980	8.878	10.177	4754	4771
1 mês	(5.1)	68	12544	192.348	108.607	18870	18926
	(5.6)	68	12656	3600*	146.604	31302	31359

* solução não encontrada ao fim de 1 hora

Tabela 5.1: Dimensões e tempos de execução das várias instâncias

Capítulo 6

Exemplos baseados em dados reais

Neste capítulo são apresentados alguns exemplos dos problemas anteriormente descritos. Para a obtenção das soluções ótimas utilizou-se *software Xpress 8.0*. Para a obtenção de todos os resultados aqui apresentados foi usado um computador pessoal equipado com Processador Genuine Intel(R) CPU U4100 @ 1.30 GHz e 4Gb de memória RAM.

Para a obtenção de resultados e posterior discussão foram recolhidos, aleatoriamente, um dia de produção e uma semana de produção da Prébuild Alumínios. E para a obtenção de resultados para 15 dias e um mês de produção incrementaram-se os dados, ou seja, para um dia incrementou-se a procura para 15 dias e de uma semana incrementou-se a procura para 1 mês (4 semanas).

O código das formulações (5.1), (5.3), (5.4), (5.5), (5.6) no *software Xpress* estão descritos nos anexos C, D, E, F, G, respetivamente.

Os resultados obtidos serão apresentados nas tabelas seguintes (6.1 - 6.14). São apresentados, na primeira linha, a solução ótima (o número de fornos), e nas colunas são apresentados os cestos dos perfis que fizeram fornada assim como a hora de início da fornada e se for o caso, a temperatura do perfil.

Note-se que, para 15 dias e 1 mês só foram testadas para as formulações (5.1) e (5.6).

Considera-se ainda o limite de tempo de execução igual a 1 hora.

6.1 Problema 1

Seja $C = 12$ o número máximo de cestos que o forno leva numa fornada.
 $T = 4.5$ a duração da fornada.

Considera-se ainda que cada cesto só leva um tipo de perfil.

6.1.1 Exemplos baseados em dados reais

Para um dia de produção, considera-se também que $m = 4$ pois cada fornada tem uma duração de quatro horas e trinta minutos ($T = 4.5$).

Com base nos dados A, tem-se:

Para a formulação (5.1):

Total de fornos produzidos: 2	
Tempo de execução: 0.147s	
Tempo de execução com (5.8): 0.115s	
Forno 1 que começa às 22.8:	Forno 2 que começa às 28.3:
PV00.02(2)	PV01.03(3)
PC14.29(3)	PC12.54(2)
PD12.30(1)	PD06.34(1)
PC14.26(1)	PK40.59(1)
PC14.24(1)	PK40.15(2)
PF09.51(2)	PR90.02(1)
PR90.38(1)	PD11.21(1)
	PR90.56(1)

Tabela 6.1: Resultados referentes a um dia de produção utilizando a formulação (5.1)

Para a formulação (5.3):

Total de fornos produzidos: 2	
Tempo de execução: 0.132s	
Tempo de execução com (5.8): 0.105s	
Forno 1 que começa às 22.8:	Forno 2 que começa às 28.3:
PV01.03(3)	PC14.24(1)
PV00.02(2)	PC12.54(2)
PC14.29(3)	PF09.51(2)
PD12.30(1)	PK40.59(1)
PC14.26(1)	PK40.15(2)
PD06.34(1)	PR90.02(1)
PR90.38(1)	PD11.21(1)
	PR90.56(1)

Tabela 6.2: Resultados referentes a um dia de produção utilizando a formulação (5.3)

Para a formulação (5.4):

Total de fornos produzidos: 2	
Tempo de execução: 0.07s	
Tempo de execução com (5.8): 0.08s	
Forno 1 que começa às 22.8:	Forno 2 que começa às 28.3:
PC14.26(1)	PV01.03(3)
PC12.54(2)	PV00.02(2)
PF09.51(2)	PC14.29(3)
PD06.34(1)	PD12.30(1)
PK40.59(1)	PC14.24(1)
PK40.15(2)	PR90.56(1)
PR90.02(1)	
PD11.21(1)	
PR90.38(1)	

Tabela 6.3: Resultados referentes a um dia de produção utilizando a formulação (5.4)

Para a formulação (5.5):

Total de fornos produzidos: 2	
Tempo de execução: 0.38s	
Tempo de execução com (5.8): 0.252s	
Forno 1:	Forno 2:
PV01.03(3)	PC14.24(1)
PV00.02(2)	PC12.54(2)
PC14.29(3)	PF09.51(2)
PD12.30(1)	PK40.59(1)
PC14.26(1)	PK40.15(2)
PD06.34(1)	PR90.02(1)
PR90.38(1)	PD11.21(1)
	PR90.56(1)

Tabela 6.4: Resultados referentes a um dia de produção utilizando a formulação (5.5)

Para uma semana de produção, considera-se $m = 28$ pois cada fornada tem uma duração de quatro horas e trinta minutos ($T = 4.5$)

Com base nos dados B, tem-se:

Para a formulação (5.1):

Total de fornos produzidos: 17				
Tempo de execução: 8.509s				
Tempo de execução com (5.8): 25.769s				
Forno 1: início às 22.5	Forno 2: início às 28:	Forno 3: início às 33.5	Forno 4: início às 64.5	Forno 5: início às 82.24
PB04.45(2) PC10.49(4) PC15.71(6)	PC16.08(4) PC15.71(5) PF04.44(3)	PD11.40(12)	PC15.71(1) PA06.03(3) PB09.83(1) PB05.37(2) PA06.19(5)	PA06.13(6) PF11.45(4) PD12.06(2)
Forno 6: início às 87.74	Forno 7: início às 93.24	Forno 8: início às 98.74	Forno 9: início às 104.24	Forno 10: início às 119
PB09.83(2) PB05.04(10)	PA06.09(4) PK40.12(4) PF11.46(4)	PD12.22(10) PC15.59(2)	PB05.05(1) PD12.09(1) PC12.48(1) PD12.18(1) PC15.55(2) PB04.76(4) PD01.11(2)	PC12.48(5) PB04.82(3) PC15.89(2) PCE02.10(2)
Forno 11: início às 124.5	Forno 12: início às 138.5	Forno 13: início às 144	Forno 14: início às 149.5	Forno 15: início às 164.02
PD06.31(2) PC15.74(2) PB04.69(2) PMV07.96(2) PB04.67(2) PB04.81(2)	PC15.59(10) PMV07.96(2)	PB04.77(2) PB04.73(4) PF10.13(2) PC15.75(2) PC12.05(2)	PB04.73(2) PC12.03(3) PD10.08(5) PD08.15(2)	PC12.03(1) PMV09.97(2) PC15.88(1) PC13.65(2) PV00.02(6)
Forno 16: início às 169.52	Forno 17: início às 175.02			
PC12.07(3) PD10.32(3) PD06.33(2) PC15.88(2) PC13.63(2)	PF10.12(2) PC15.60(2) PSM12.02(3) PF07.21(4)			

Tabela 6.5: Resultados referentes a uma semana de produção utilizando a formulação (5.1)

Para a formulação (5.3):

Total de fornos produzidos: 17				
Tempo de execução: 7.906s				
Tempo de execução com (5.8): 23.625s				
Forno 1: início às 30.8	Forno 2: início às 37.56:	Forno 3: início às 43.06	Forno 4: início às 59	Forno 5: início às 64.5
PB04.45(2) PC16.08(4) PA06.03(3) PB09.83(3)	PD11.40(12)	PC10.49(4) PB05.37(2) PA06.13(6)	PF04.44(3) PA06.09(4) PB05.05(1) PF11.45(4)	PC15.71(12)
Forno 6: início às 82.83	Forno 7: início às 93.5	Forno 8: início às 99	Forno 9: início às 104.5	Forno 10: início às 110
PA06.19(5) PK40.12(4) PD06.31(2) PD12.18(1)	PB05.04(10) PC15.74(2)	PD12.22(10) PD12.06(2)	PF11.46(4) PD12.09(1) PB04.82(3) PD01.11(2) PC15.89(2)	PC15.59(12)
Forno 11: início às 115.5	Forno 12: início às 121	Forno 13: início às 134.13	Forno 14: início às 161.52	Forno 15: início às 167.02
PC15.55(2) PB04.77(2) PB04.76(4) PMV07.96(4)	PC12.48(6) PB04.69(2) PCE02.10(2) PB04.81(2)	PB04.73(6) PB04.67(2) PC12.03(4)	PC12.05(2) PD08.15(2) PD06.33(2) PV00.02(6)	PC12.07(3) PD10.32(3) PMV09.97(2) PC15.88(3)
Forno 16: início às 172.52	Forno 17: início às 178.02			
PC15.60(2) PC15.75(2) PD10.08(5) PSM12.02(3)	PF10.12(2) PF10.13(2) PC13.65(2) PF07.21(4) PC13.63(2)			

Tabela 6.6: Resultados referentes a uma semana de produção utilizando a formulação (5.3)

Para a formulação (5.4):

Total de fornos produzidos: 17				
Tempo de execução: 7.01s				
Tempo de execução com (5.8): 14.685s				
Forno 1: início às 27.29	Forno 2: início às 37.56:	Forno 3: início às 43.06	Forno 4: início às 64.5	Forno 5: início às 70
PD11.40(12)	PC10.49(4) PA06.03(3) PA06.19(5)	PB04.45(2) PC16.08(4) PF04.44(3) PB09.83(3)	PC15.71(12)	PB05.37(2) PD12.22(10)
Forno 6: início às 77	Forno 7: início às 82.5	Forno 8: início às 88	Forno 9: início às 93.5	Forno 10: início às 99
PA06.13(6) PF11.45(4) PD12.06(2)	PA06.09(4) PK40.12(4) PD06.31(2) PC15.74(2)	PB05.05(1) PB05.04(10) PD12.09(1)	PC15.59(12)	PC12.48(6) PB04.69(2) PC15.55(2) PB04.77(2)
Forno 11: início às 104.5	Forno 12: início às 149.48	Forno 13: início às 154.98	Forno 14: início às 164.02	Forno 15: início às 169.52
PF11.46(4) PD12.18(1) PB04.82(3) PB04.76(4)	PD01.11(2) PMV07.96(4) PC12.03(4) PD08.15(2)	PCE02.10(2) PB04.81(2) PC12.07(3) PC15.60(2) PD10.32(3)	PC15.89(2) PB04.73(6) PB04.67(2) PMV09.97(2)	PV00.02(6) PSM12.02(3) PC13.63(2)
Forno 16: início às 175.02	Forno 17: início às 180.52			
PF10.13(2) PD10.08(5) PD06.33(2) PC15.88(3)	PF10.12(2) PC15.75(2) PC12.05(2) PC13.65(2) PF07.21(4)			

Tabela 6.7: Resultados referentes a uma semana de produção utilizando a formulação (5.4)

Para a formulação (5.5):

Total de fornos produzidos: 17				
Tempo de execução: 0.251s				
Tempo de execução com (5.8): 0.251s				
Forno 1:	Forno 2:	Forno 3:	Forno 4:	Forno 5:
PC10.49(4) PC15.74(2) PB04.76(4) PC13.63(2)	PC15.71(12)	PD11.40(12)	PC15.59(12)	PB05.04(10) PD01.11(2)
Forno 6:	Forno 7:	Forno 8:	Forno 9:	Forno 10:
PB04.45(2) PD12.22(10)	PC16.08(4) PA06.19(5) PC12.07(3)	PA06.13(6) PA06.09(4) PB04.81(2)	PK40.12(4) PF11.45(4) PF07.21(4)	PC12.48(6) PB04.73(6)
Forno 11:	Forno 12:	Forno 13:	Forno 14:	Forno 15:
PD12.18(1) PD10.08(5) PV00.02(6)	PF11.46(4) PMV07.96(4) PC12.03(4)	PF04.44(3) PB09.83(3) PD10.32(3) PSM12.02(3)	PA06.03(3) PD12.09(1) PB04.82(3) PF10.12(2) PC15.88(3)	PB05.37(2) PC15.89(2) PB04.67(2) PF10.13(2) PMV09.97(2) PD08.15(2)
Forno 16:	Forno 17:			
PD06.31(2) PC15.55(2) PCE02.10(2) PC15.60(2) PD06.33(2) PC13.65(2)	PB05.05(1) PD12.06(2) PB04.69(2) PB04.77(2) PC15.75(2) PC12.05(2)			

Tabela 6.8: Resultados referentes a uma semana de produção utilizando a formulação (5.5)

Os resultados da tabela 6.9 foram obtidos com base nos dados A, cuja procura foi incrementada para 15 dias da seguinte forma $n_i = 15 * n_i$, $r_i = 15 * r_i$ e $d_i = H$, com $H = 720$ e $m = 60$.

Os resultados da tabela 6.10 foram obtidos com base nos dados B, cuja procura foi incrementada para 4 semanas da seguinte forma $n_i = 4 * n_i$, $r_i = 4 * r_i$ e $d_i = H$, com $H = 864$ e $m = 112$.

Total de fornos produzidos: 29							
Tempo de execução: 1.105s							
Tempo de execução com (5.8): 1.081s							
Forno 1: início às 30	Forno 2: início às 35.5	Forno 3: início às 41	Forno 4: início às 46.5	Forno 5: início às 52	Forno 6: início às 57.5	Forno 7: início às 63	Forno 8: início às 310.5
PV01.03(6) PC12.54 (6)	PK40.59 (12)	PC12.54 (12)	PC12.54 (12)	PR90.38 (12)	PV01.03 (12)	PC14.26 (12)	PK40.15 (12)
Forno 9: início às 316	Forno 10: início às 321.5	Forno 11: início às 327	Forno 12: início às 332.5	Forno 13: início às 338	Forno 14: início às 343.5	Forno 15: início às 349	Forno 16: início às 345.5
PF09.51 (12)	PV01.03 (12)	PK40.15 (12)	PC14.26 (3) PD06.34(9)	PV01.03 (12)	PR90.02 (12)	PV01.03 (3) PC14.29(6) PR90.38 (3)	PV00.02 (9) PK40.59 (3)
Forno 17: início às 360	Forno 18: início às 365.5	Forno 19: início às 424.5	Forno 20: início às 430	Forno 21: início às 435.5	Forno 22: início às 441	Forno 23: início às 446.5	Forno 24: início às 452
PC14.29 (12)	PC14.29 (12)	PV00.02 (12)	PR90.56 (12)	PV00.02 (3) PD12.30 (6) PR90.02(3)	PC14.29 (6) PD06.34 (6)	PD11.21 (12)	PC14.24(3) PF09.51(6) PR90.56(3)
Forno 25: início às 457.5	Forno 26: início às 463	Forno 27: início às 468.5	Forno 28: início às 474	Forno 29: início às 479			
PV00.02 (6) PK40.15 (6)	PC14.24 (12)	PC14.29 (9) PD11.21(3)	PF09.51 (12)	PD12.30 (9)			

Tabela 6.9: Resultados referentes a duas semanas de produção utilizando a formulação (5.1)

Total de fornos produzidos: 68									
Tempo de execução: 192.348s									
Tempo de execução com (5.8): 108.607s									
Forno 1: início às 61.68	Forno 2: início às 67.18	Forno 3: início às 72.68	Forno 4: início às 202.06	Forno 5: início às 207.56	Forno 6: início às 213.06	Forno 7: início às 218.56	Forno 8: início às 224.06	Forno 9: início às 229.56	Forno 10: início às 235.06
PB04.45 (8) PF11.45 (4)	PD11.40 (12)	PF11.46 (12)	PD12.06 (4) PC12.05(8)	PC15.71 (4) PD10.32(8)	PC15.59 (12)	PD11.40 (4) PD06.31 (8)	PF04.44 (4) PC15.75 (8)	PC15.59 (12)	PF04.44 (4) PB04.67(8)
Forno 11: início às 240.56	Forno 12: início às 246.06	Forno 13: início às 252.56	Forno 14: início às 257.06	Forno 15: início às 262.56	Forno 16: início às 268.06	Forno 17: início às 273.56	Forno 18: início às 279.06	Forno 19: início às 284.56	Forno 20: início às 290.06
PF11.45 (4) PF10.13 (8)	PA06.19 (4) PB04.69(8)	PD11.40 (12)	PCE02.10 (8) PD10.32 (4)	PF04.44 (4) PF11.45 (8)	PD11.40 (12)	PC16.08 (4) PB05.04 (8)	PA06.09 (12)	PB04.73 (12)	PC15.71 (12)
Forno 21: início às 295.56	Forno 22: início às 301.06	Forno 23: início às 306.56	Forno 24: início às 312.06	Forno 25: início às 317.56	Forno 26: início às 323.06	Forno 27: início às 328.56	Forno 28: início às 334.06	Forno 29: início às 339.56	Forno 30: início às 345.06
PD11.40 (8) PC15.55(4)	PA06.19 (12)	PC15.59 (12)	PC15.59 (12)	PF07.21 (12)	PC12.03 (12)	PB04.73 (12)	PC15.74 (8) PC12.03(4)	PC10.49 (12)	PC15.88 (12)
Forno 31: início às 350.56	Forno 32: início às 356.06	Forno 33: início às 361.56	Forno 34: início às 367.06	Forno 35: início às 372.56	Forno 36: início às 378.06	Forno 37: início às 383.56	Forno 38: início às 426.5	Forno 39: início às 607.98	Forno 40: início às 613.48
PB05.05 (4) PD08.15 (8)	PB04.76 (12)	PSM12.02 (12)	PB05.04 (8) PC15.55 (4)	PB05.37 (4) PF11.46 (4) PD12.06 (4)	PA06.13 (12)	PB05.37 (4) PA06.19 (4) PF07.21 (4)	PD12.09 (4) PD12.18 (4) PB04.76(4)	PB04.77 (4) PMV09.97 (8)	PD01.11 (8) PMV07.96 (4)
Forno 41: início às 618.98	Forno 42: início às 624.48	Forno 43: início às 629.98	Forno 44: início às 635.48	Forno 45: início às 640.98	Forno 46: início às 646.48	Forno 47: início às 651.98	Forno 48: início às 657.48	Forno 49: início às 662.98	Forno 50: início às 668.48
PA06.09 (4) PB04.81 (8)	PC12.48 (4) PC13.65(8)	PD12.22 (12)	PC12.48 (12)	PB05.04 (12)	PD12.22 (12)	PB09.83 (12)	PC16.08 (12)	PD12.22 (4) PD10.08(8)	PB04.82 (12)
Forno 51: início às 673.98	Forno 52: início às 679.48	Forno 53: início às 684.98	Forno 54: início às 690.48	Forno 55: início às 695.98	Forno 56: início às 701.48	Forno 57: início às 706.98	Forno 58: início às 712.48	Forno 59: início às 717.98	Forno 60: início às 723.48
PC15.89 (8) PD06.33 (4)	PK40.12 (12)	PV00.02 (12)	PC12.07 (12)	PV00.02 (12)	PA06.03 (12)	PD06.33 (4) PC13.63 (8)	PA06.13 (12)	PB05.04 (12)	PD10.08 (12)
Forno 61: início às 728.98	Forno 62: início às 734.48	Forno 63: início às 739.98	Forno 64: início às 745.48	Forno 65: início às 750.98	Forno 66: início às 756.48	Forno 67: início às 761.98	Forno 68: início às 767.48		
PC15.71 (12)	PC15.71 (8) PB04.77 (4)	PC15.71 (12)	PK40.12 (4) PC15.60(8)	PD12.22 (12)	PC10.49com (4) PF10.12 (8)	PMV07.96 (12)	PC12.48 (8)		

Tabela 6.10: Resultados referentes a quatro semanas de produção utilizando a formulação (5.1)

6.2 Problema 2

Seja $C = 12$ o número máximo de cestos que o forno leva numa fornada.

Cada cesto só leva um tipo de perfil.

Se a temperatura do perfil for T5, o forno de envelhecimento tem uma duração de 4 horas ($T_{\ell=T5} = 4$); para uma temperatura T6, este tem uma duração de 8 horas ($T_{\ell=T6} = 8$).

6.2.1 Exemplos baseados em dados reais

Para um dia de produção, tendo em conta os dados A e base na formulação (5.6) tem-se:

Total de fornos produzidos: 3		
Tempo de execução: 0.12s		
Tempo de execução com (5.9): 0.109s		
Forno 1 que começa às 22.8: Tempera: T5	Forno 2 que começa às 27.3: Tempera: T5	Forno 3 que começa às 31.8: Tempera: T6
PC14.29(3) PC12.54(2) PF09.51(2) PD06.34(1) PD11.21(1)	PV01.03(3) PV00.02(2) PC14.26(1)	PD12.30(1) PC14.24(1) PK40.59(1) PK40.15(2) PR90.02(1) PR90.56(1) PR90.38(1)

Tabela 6.11: Resultados referentes a um dia de produção utilizando a formulação (5.6)

Para uma semana de produção, tendo em conta os dados B:

Total de fornos produzidos: 18				
Tempo de execução: 3600s*				
Tempo de execução com (5.9): 45.417s				
Forno 1: início às 28.5 Têmpera: T6	Forno 2: início às 37 Têmpera: T5	Forno 3: início às 50 Têmpera: T6	Forno 4: início às 58.5 Têmpera: T6	Forno 5: início às 67 Têmpera: T5
PC15.71(12)	PB04.45(2) PC10.49(4) PF04.44(3) PD11.40(3)	PC16.08(4) PA06.19(5)	PA06.03(3) PB09.83(3) PB05.37(2) PF11.45(4)	PD11.40(9) PA06.13(3)
Forno 6: início às 77.43 Têmpera: T5	Forno 7: início às 81.93 Têmpera: T6	Forno 8: início às 90.43 Têmpera: T5	Forno 9: início às 97.13 Têmpera: T6	Forno 10: início às 105.63 Têmpera: T6
PA06.13(3) PA06.09(4) PB05.05(1) PD12.09(1) PD06.31(2)	PA06.19(2) PK40.12(4) PF11.46(4) PC15.74(2)	PD12.22(10) PD12.06(2)	PB05.04(10) PB04.77(2)	PC12.48(6) PC15.59(4) PC15.55(2)
Forno 11: início às 120.43: Têmpera: T5	Forno 12: início às 129.03 Têmpera: T6	Forno 13: início às 140.53 Têmpera: T5	Forno 14: início às 145.88 Têmpera: T6	Forno 15: início às 157 Têmpera: T6
PD12.18(1) PB04.69(2) PB04.76(4) PMV07.96(4)	PC15.59(8) PB04.82(3) PC15.89(1)	PD01.11(2) PB04.81(2) PF10.12(2) PD10.08(5)	PB04.67(2) PCE02.10(2) PC15.60(2) PD10.32(3) PMV09.97(2)	PC15.89(1) PB04.73(6) PC15.75(2) PC12.05(2) PD08.15(1)
Forno 16: início às 174 Têmpera: T5	Forno 17: início às 178.5 Têmpera: T6	Forno 18: início às 187 Têmpera: T5		
PC12.07(3) PC12.03(4) PD06.33(2)	PD08.15(1) PC13.65(2) PSM12.02(3) PF07.21(4) PC13.63(2)	PF10.13(2) PC15.88(3) PV00.02(6)		

* solução não encontrada ao fim de 1 hora

Tabela 6.12: Resultados referentes a uma semana de produção utilizando a formulação (5.6)

Os resultados da tabela 6.13 foram obtidos com base nos dados A, cuja procura foi incrementada para 15 dias da seguinte forma $n_i = 15*n_i$, $r_i = 15*r_i$ e $d_i = H$, com $H = 720$.

Os resultados da tabela 6.14 foram obtidos com base nos dados B, cuja procura foi incrementada para 4 semanas da seguinte forma $n_i = 4*n_i$, $r_i = 4*r_i$ e $d_i = H$, com $H = 864$.

Total de fornos produzidos: 29							
Tempo de execução: 8.878s							
Tempo de execução com (5.9): 10.177s							
Forno 1: início às 210.5 Têmpera T6	Forno 2: início às 219 Têmpera T6	Forno 3: início às 227.5 Têmpera T6	Forno 4: início às 236 Têmpera T6	Forno 5: início às 244.5 Têmpera T6	Forno 6: início às 253 Têmpera T6	Forno 7: início às 257.5 Têmpera T6	Forno 8: início às 262 Têmpera T5
PK40.59(12)	PD12.30(9) PR90.38 (3)	PC14.24 (12)	PR90.38 (12)	PC14.24 (3) PK40.59 (3) PK40.15(6)	PC14.26(6) PD06.34(6)	PV00.02 (12)	PV01.03(12)
Forno 9: início às 266.5 Têmpera T5	Forno 10: início às 271 Têmpera T5	Forno 11: início às 275.5 Têmpera T5	Forno 12: início às 280.5 Têmpera T5	Forno 13: início às 285 Têmpera T5	Forno 14: início às 289.5 Têmpera T5	Forno 15: início às 294 Têmpera T5	Forno 16: início às 298.5 Têmpera T5
PC14.29 (12)	PC14.29(12)	PV01.03 (12)	PV00.02 (6) PF09.51(6)	PC12.54(12)	PV00.02 (12)	PF09.51 (12)	PV01.03(12)
Forno 17: início às 303 Têmpera T6	Forno 18: início às 311.5 Têmpera T5	Forno 19: início às 316 Têmpera T6	Forno 20: início às 324.5 Têmpera T5	Forno 21: início às 329 Têmpera T5	Forno 22: início às 333.5 Têmpera T5	Forno 23: início às 338 Têmpera T5	Forno 24: início às 342.5 Têmpera T5
PK40.15 (12)	PF09.51(12)	PD12.30(6) PR90.02(6)	PV01.03(9) PC14.29 (3)	PD11.21(12)	PD06.34 (9) PD11.21(3)	PC14.26 (9)	PC12.54 (12)
Forno 25: início às 347 Têmpera T5	Forno 26: início às 351.5 Têmpera T6	Forno 27: início às 360 Têmpera T5	Forno 28: início às 364.5 Têmpera T6	Forno 29: início às 373 Têmpera T6			
PC14.29(6) PC12.54 (6)	PR90.02(9) PR90.56(3)	PC14.29 (12)	PR90.56 (12)	PK40.15(12)			

Tabela 6.13: Resultados referentes a duas semanas de produção utilizando a formulação (5.6)

Total de fornos produzidos: 68									
Tempo de execução: 3600s*									
Tempo de execução com (5.9): 146.604s									
Forno 1: início às 165 Têmpera T5	Forno 2: início às 169.5 Têmpera T6	Forno 3: início às 178 Têmpera T5	Forno 4: início às 182.5 Têmpera T5	Forno 5: início às 187 Têmpera T6	Forno 6: início às 195.5 Têmpera T5	Forno 7: início às 200 Têmpera T5	Forno 8: início às 204.5 Têmpera T5	Forno 9: início às 209 Têmpera T6	Forno 10: início às 217.5 Têmpera T6
PB04.45 (8) PC10.49 (4)	PSM12.02 (12)	PD11.40(12)	PA06.13 (4) PF10.13(8)	PB04.73 (12)	PF04.44 (4) PD12.06(8)	PC10.49(12)	PD11.40 (4) PD06.31 (8)	PA06.19 (8) PF11.46 (4)	PC15.71 (4) PC15.74 (8)
Forno 11: início às 238 Têmpera T5	Forno 12: início às 242.5 Têmpera T6	Forno 13: início às 251 Têmpera T5	Forno 14: início às 255.5 Têmpera T5	Forno 15: início às 260 Têmpera T5	Forno 16: início às 264.5 Têmpera T6	Forno 17: início às 273 Têmpera T6	Forno 18: início às 281.5 Têmpera T5	Forno 19: início às 286 Têmpera T6	Forno 20: início às 294.5 Têmpera T6
PB04.76 (12)	PB04.67 (4) PCE02.10 (8)	PD11.40 (12)	PF04.44 (4) PB04.69 (8)	PC12.03 (12)	PC15.59 (12)	PC15.59 (4) PC15.55 (8)	PD11.40 (12)	PF11.45 (4) PC15.59 (8)	PA06.19(12)
Forno 21: início às 303 Têmpera T5	Forno 22: início às 307.5 Têmpera T5	Forno 23: início às 312 Têmpera T5	Forno 24: início às 316.5 Têmpera T6	Forno 25: início às 325 Têmpera T5	Forno 26: início às 329.5 Têmpera T6	Forno 27: início às 338 Têmpera T6	Forno 28: início às 346.5 Têmpera T5	Forno 29: início às 351 Têmpera T6	Forno 30: início às 359.5 Têmpera T6
PC15.88 (12)	PF04.44 (4) PD11.40 (8)	PA06.09 (4) PB04.76 (4) PC12.03 (4)	PC15.75 (8) PD10.32 (4)	PD12.22 (12)	PF11.45 (12)	PF11.46 (12)	PD12.22 (12)	PB09.83 (12)	PC15.59 (12)
Forno 31: início às 368 Têmpera T6	Forno 32: início às 376.5 Têmpera T6	Forno 33: início às 385 Têmpera T6	Forno 34: início às 393.5 Têmpera T6	Forno 35: início às 402 Têmpera T6	Forno 36: início às 410.5 Têmpera T6	Forno 37: início às 419 Têmpera T6	Forno 38: início às 600.52 Têmpera T6	Forno 39: início às 609.02 Têmpera T5	Forno 40: início às 613.52 Têmpera T6
PB04.67 (4) PF07.21 (8)	PB04.73 (12)	PC12.05 (4) PD08.15 (8)	PC12.48 (4) PF07.21 (8)	PC15.71 (4) PB04.82 (4) PC12.05 (4)	PB05.04 (4) PD10.32 (8)	PC15.59 (12)	PK40.12 (4) PB04.77 (8)	PD12.22 (8) PD01.11 (4)	PC12.48 (12)
Forno 41: início às 626.52 Têmpera T6	Forno 42: início às 635.02 Têmpera T6	Forno 43: início às 643.42 Têmpera T5	Forno 44: início às 648.02 Têmpera T5	Forno 45: início às 669.5 Têmpera T5	Forno 46: início às 674 Têmpera T6	Forno 47: início às 682.5 Têmpera T6	Forno 48: início às 691 Têmpera T6	Forno 49: início às 704 Têmpera T6	Forno 50: início às 717 Têmpera T6
PB05.04 (12)	PB05.04 (12)	PA06.13 (12)	PA06.13 (8) PMV07.96 (4)	PD12.18 (4) PD01.11(4)	PC15.71 (12)	PC16.08 (12)	PC16.08 (4) PB05.37(8)	PC15.71 (4) PC12.48(8)	PK40.12 (8) PB04.82(4)
Forno 51: início às 725.5 Têmpera T6	Forno 52: início às 734 Têmpera T6	Forno 53: início às 746.5 Têmpera T5	Forno 54: início às 751 Têmpera T5	Forno 55: início às 755.5 Têmpera T5	Forno 56: início às 760 Têmpera T5	Forno 57: início às 764.5 Têmpera T6	Forno 58: início às 773 Têmpera T6	Forno 59: início às 781.5 Têmpera T5	Forno 60: início às 786 Têmpera T5
PC15.71 (12)	PK40.12 (4) PMV09.97(8)	PC12.07 (12)	PV00.02 (12)	PMV07.96 (12)	PB05.05 (4) PV00.02(8)	PC15.71 (12)	PB05.04 (12)	PD12.22 (8) PV00.02(4)	PA06.09 (12)
Forno 61: início às 790.5 Têmpera T5	Forno 62: início às 795 Têmpera T5	Forno 63: início às 799.5 Têmpera T6	Forno 64: início às 808 Têmpera T5	Forno 65: início às 812.5 Têmpera T6	Forno 66: início às 821 Têmpera T6	Forno 67: início às 829.5 Têmpera T5	Forno 68: início às 834 Têmpera T6		
PD12.09 (4) PD10.08 (4) PD06.33 (4)	PB04.81 (8) PD06.33 (4)	PB04.82 (4) PC15.89 (8)	PF10.12 (8) PD10.08 (4)	PC15.60 (4) PC13.63 (8)	PA06.03 (12)	PD10.08 12)	PC15.60 (4) PC13.65 (8)		

* solução não encontrada ao fim de 1 hora

Tabela 6.14: Resultados referentes a quatro semanas de produção utilizando a formulação (5.6)

6.3 Discussão dos Exemplos

Para um dia de produção e sem considerar t mperas, constata-se que a solução ótima é a mesma e que a hora de início da fornada também é a mesma para a formulação do problema 1 e suas variantes. A solução ótima apenas difere na ordem de cestos a entrar no forno. Quando se introduzem as t mperas no problema, a solução ótima passa de 2 fornos diários para tr s, podendo observar-se que o primeiro forno se inicia à mesma hora.

Quando se passa para a produção ao longo de uma semana, o número de fornos ótimos são 17 e observam-se alterações na ordem de entrada no forno e de início dos fornos. Com são introduzidas as t mperas, a solução ótima passa de 17 para 18 fornos. Também é interessante visualizar na tabela 6.5 que, por exemplo, os cestos do perfil «PC15.71» são repartidos por 3 fornadas, o que já não acontece nas tabelas 6.6, 6.7 e 6.8 devido à restrição de todos os cestos do mesmo perfil fazerem a mesma fornada. Quando introduzida a têmpera do perfil, na tabela 6.12, os cestos do perfil «PC15.71» estão no mesmo forno.

Ao incrementar os dados iniciais tem-se só em consideração as formulações (5.1) e (5.6) pois não há a restrição de que todos os cestos do mesmo perfil estejam no mesmo forno. Neste caso, tem-se que para 15 dias os fornos ótimos são 29 para ambas formulações. E no caso de 1 m s, a solução ótima encontrada para ambas formulações foi 68 fornadas. Também se pode constatar que as desigualdades válidas (5.9) permitem encontrar mais rapidamente a solução ótima quando se aumenta a complexidade do problema.

Como pode ser visualizado na tabela 5.1, nem sempre as desigualdades (5.8) e (5.9) melhoram o tempo de execução, pois ao inserir no modelo aumenta o número de restrições.

Estas soluções ótimas não vão ao encontro ao que é feito na Prébuild, pois há espaçamentos temporais substanciais entre fornos. Por norma, a Prébuild Alumínios quando tem 12 cestos em espera faz fornada.

Capítulo 7

Conclusão

O estágio centrou-se no planeamento da produção da Prébuild Alumínios. Tendo sido identificados vários constrangimentos nesse planeamento com impacto no custo global da produção. O estudo centrou-se na utilização do forno de envelhecimento. Durante o estágio ocorreu uma mudança no processo produtivo que teve impacto na utilização do referido forno. Assim foram considerados dois problemas, cada um relativo a um dos processos produtivos. Esses problemas foram formulados em programação inteira mista tendo em conta as restrições dadas pela empresa.

Com base em dados reais foram elaborados exemplos os quais deram origem a instâncias que foram resolvidas recorrendo a um software de otimização - *Xpress*. Foi também considerado um limite de tempo de execução de 1 hora. A formulação (5.1) obtém menos fornadas feitas que a formulação (5.6), o que é compreensível acontecer pois a duração das fornadas do forno de envelhecimento varia consoante a dureza do perfil. Porém, quando se estende a linha temporal estas tendem a ser iguais, talvez isso aconteça devido às paragens entre fornadas. Estas paragens, em alguns exemplos chega a ser superior a 240 horas (5 dias)

Como trabalho futuro, seria importante ter em conta a capacidade espacial da empresa para ter cestos à espera de fazer forno, desta forma não haveria tanto espaçamento temporal entre fornadas observado na solução ótima. Por outro lado, também seria importante estudar a alocação dos perfis aos cestos. Os perfis têm comprimentos e pesos distintos. A inclusão da alocação dos perfis aos cestos torna o problema bem mais complexo mas traz mais flexibilidade, permitindo obter soluções que usem menor número de fornos.

Bibliografia

- [1] *Martello, S., Toth, P., (1990)* "Knapsack Problems: Algorithms and Computer Implementations". John Wiley & Sons, Inc.
- [2] *Courtois, A., Pilet, M., Martin-Bonnefous, C., (2015).* "Gestão da Produção" - 7ª Edição. Lidel - Edições Técnicas Lda.
- [3] *Couto, Cátia Santos do, (2014).* "Um estudo do sequenciamento da produção da Prébuild Alumínios". Tese de Mestrado. Universidade de Aveiro.
- [4] *Neves, C., Ferreira, E., Macedo, E., (2010).* Report on "How far can we go in aluminum extrusion?". 74th European Study Group with Industry, 26th-30th Abril 2010, Aveiro Portugal. <http://esgi.web.ua.pt/resources/ExtruverdeReport.pdf>
- [5] *Neves, C., Gomes, M. M. I., Alves, Isabel F. (2011).* "Extreme nitriding limits in aluminium extrusion". International Journal of Mathematical Modelling and Numerical Optimisation.
- [6] *NP EN 515:1994* Alumínio e ligas de Alumínio - Produtos acabados. Designação dos estados metalúrgicos.
- [7] *NP EN 755-2: 1999* Alumínio e ligas de alumínio - Barras, tubos e perfis extrudidos. Parte 2: Características mecânicas.
- [8] *NP EN 573-3: 1996* Alumínio e ligas de alumínio - Composição química e forma dos produtos trabalhados. Parte 3: Composição química.
- [9] *Roldão, V. Sequeira, (2002).* "Planeamento e Programação das Operações - na indústria e nos serviços". Monitor - Projectos e Edições Lda.
- [10] *Santos, Micael Patric, (2015).* "Otimização do Dimensionamento de Lotes na Extrusal". Tese de Mestrado. Universidade de Aveiro.
- [11] *Extrusal*, acessido a 2 de Maio de 2016, em <http://www.extrusal.pt/index.php>
- [12] *Prébuild Alumínios*, acessido a 10 de Abril de 2016, em <http://www.prebuilddaluminios.com/>
- [13] *SAPA Group*, acessido a 10 de Junho de 2016, em <http://www.sapagroup.com/pt/>

Anexos A

Dados 1

Dados referentes a um dia de produção:

Perfil	n_i	r_i	d_i	ℓ
PV01.03	3	4	60	T5
PV00.02	2	5.3	60	T5
PC14.29	3	6.9	60	T5
PD12.30	1	7.5	60	T6
PC14.26	1	8.2	60	T5
PC14.24	1	9	65	T6
PC12.54	2	9.8	65	T5
PF09.51	2	11.6	65	T5
PD06.34	1	13	60	T5
PK40.59	1	13.9	70	T6
PK40.15	2	16.3	70	T6
PR90.02	1	18.2	70	T6
PD11.21	1	20.8	70	T5
PR90.56	1	21.7	70	T6
PR90.38	1	22.8	70	T6

Anexos B

Dados 2

Dados referentes a uma semana de produção:

Perfil	n_i	r_i	d_i	ℓ
PB04.45	2	3.76	50	T5
PC10.49	4	7.86	50	T5
PC16.08	4	12.86	70	T6
PC15.71	12	15.42	70	T6
PF04.44	3	19.59	75	T5
PA06.03	3	22.59	80	T6
PD11.40	12	27.29	80	T5
PB09.83	3	30.8	95	T6
PB05.37	2	33.46	95	T6
PA06.19	5	37.56	95	T6
PA06.13	6	43.06	95	T5
PA06.09	4	47.14	100	T5
PK40.12	4	50.14	100	T6
PB05.05	1	54.64	110	T5
PF11.45	4	57.84	110	T6
PF11.46	4	60.14	110	T6
PB05.04	10	63.54	120	T6
PD12.09	1	66.54	120	T5
PD12.22	10	69.14	120	T5
PD12.06	2	71.24	125	T5
PD06.31	2	74.03	130	T5
PC12.48	6	77.23	130	T6
PC15.74	2	80.33	130	T6
PD12.18	1	82.83	150	T5
PC15.59	12	87.33	150	T6

Continua na página seguinte...

... continuação da página anterior				
Perfil	n_i	r_i	d_i	ℓ
PB04.69	2	90.43	150	T5
PC15.55	2	92.43	150	T6
PB04.82	3	95.13	150	T6
PB04.77	2	97.13	150	T6
PB04.76	4	99.43	150	T5
PD01.11	2	101.43	155	T5
PC15.89	2	103.43	170	T6
PMV07.96	4	107.33	170	T5
PB04.73	6	112.43	170	T6
PB04.67	2	116.33	170	T6
PCE02.10	2	118.33	170	T6
PB04.81	2	120.43	170	T5
PC12.07	3	123.13	200	T5
PF10.12	2	124.63	200	T5
PF10.13	2	125.73	200	T5
PC15.60	2	129.03	200	T6
PC15.75	2	132.13	200	T6
PC12.03	4	134.13	200	T5
PC12.05	2	137.03	200	T6
PD10.08	5	140.53	200	T5
PD10.32	3	142.28	200	T6
PMV09.97	2	145.88	200	T6
PD08.15	2	149.48	200	T6
PD06.33	2	151.27	200	T5
PC15.88	3	153.97	210	T5
PC13.65	2	156.12	210	T6
PV00.02	6	161.52	250	T5
PSM12.02	3	164.62	250	T6
PF07.21	4	166.62	250	T6
PC13.63	2	169.52	250	T6

Anexos C

Formulação (5.1)

Código da formulação (5.1) no *software Xpress*

```
model form1
  options noimplicit
  uses "mmxprs", "mmsystem"

parameters
  !DATAFILE="exemplo1.dat"
  DATAFILE="exemplo2.dat"
  grande = 1
  T = 5
  C = 12
end-parameters

declarations
  fornos, H: integer
end-declarations

if(DATAFILE="exemplo1.dat")then
  !H:=48
  !fornos:=4
  H:=48*15
  fornos:=4*15
end-if

if(DATAFILE="exemplo2.dat")then
  !H:=216
  !fornos:=28
  H:=216*4
```

```

    fornos:=28*4
end-if

declarations
    starttime: real
    Nperfis: set of string
end-declarations

initializations from DATAFILE
    Nperfis
end-initializations

finalize(Nperfis)

declarations
    perfis =getsize(Nperfis)      ! perfis
    Nfornos = 1.. fornos          ! fornos
    n: array(Nperfis) of integer  ! numero de cestos do perfil i
    r: array(Nperfis) of real     !hora disponível
    d: array(Nperfis) of real     !data de entrega
    carga: array(Nperfis,Nfornos) of mpvar ! #cestos carga i no forno j
    forno: array(Nfornos) of mpvar
    delta: array(Nperfis,Nfornos) of mpvar !delta
    t: array (Nfornos) of mpvar   ! hora de inicio do forno
    func: linctr
end-declarations

initializations from DATAFILE
    n r d
end-initializations

if (grande=1) then
setrandseed(1)
forall(i in Nperfis) do
    if(DATAFILE="exemplo1.dat")then !15 dias
        n(i):=15*n(i)
        if (random<0.5) then
            d(i):=H/2
            r(i):=r(i)
        else
            d(i):=H
            r(i):=15*r(i)
        end-if
    end-if
end-do

```

```

end-if
  if(DATAFILE="exemplo2.dat")then !1 mes
  n(i):=4*n(i)
  if (random<0.5) then
    d(i):=H/2
    r(i):=r(i)
  else
    d(i):=H
    r(i):=4*r(i)
  end-if
end-if
end-do
end-if

! Objective function: number of bins used
func:=sum(j in Nfornos) forno(j)

! Binary variables
forall(i in Nperfis,j in Nfornos) delta(i,j) is_binary
forall(j in Nfornos) forno(j) is_binary

!restrições
forall(i in Nperfis) sum(j in Nfornos) carga(i,j) = n(i)
forall(j in Nfornos|j>1) t(j)>= t(j-1)+T*forno(j-1)
t(fornos)+T*forno(fornos)<=H
forall(i in Nperfis,j in Nfornos) r(i) - t(j) <= H*(1-delta(i,j))
forall(i in Nperfis,j in Nfornos) t(j) +T - d(i) <= H*(1-delta(i,j))
forall(i in Nperfis,j in Nfornos) carga(i,j) <= n(i)*delta(i,j)
forall(j in Nfornos) sum(i in Nperfis) carga(i,j)<= C*forno(j)
forall(j in Nfornos| j<fornos) forno(j+1) <= forno(j)

!desigualdades válidas
forall(i in Nperfis) sum(j in Nfornos) delta(i,j) >= ceil(n(i)/C)
sum(j in Nfornos) forno(j) >= ceil((sum(i in Nperfis) n(i))/C)

! Setting parameters for Xpress-Optimizer
!setparam("xprs_verbose",true) ! Display Optimizer log
setparam("xprs_cutstrategy",3) ! Use aggressive cut strategy

! Solve the problem
minimize(func)

```

```

! Solution printing
!Modify Optimizer control parameter CPUTIME
writeln("runtime: ", gettime-starttime, "s")

writeln("Total de fornos produzidos: ", getobjval)
forall(j in Nfornos|j<=getobjval) do
writeln("Forno ", j, " que comeca as ", getsol(t(j)),": " )
  forall(i in Nperfis)
    if(getsol(delta(i,j))>0 and getsol(carga(i,j))>0) then
      writeln( i +" com total de cestos("+ n(i)+") e cestos no forno ("+
        getsol(carga(i,j))+")")
    end-if
  end-do
end-model

```

Anexos D

Formulação (5.3)

Código da formulação (5.3) no *software Xpress*

```
model form2
  options noimplicit
  uses "mmxprs", "mmsystem"

parameters
!DATAFILE="exemplo1.dat"
DATAFILE="exemplo2.dat"
T = 5          ! duração do forno
C = 12        ! numero de cestos maximo
end-parameters

declarations
fornos, H: integer
end-declarations

if(DATAFILE="exemplo1.dat")then
  H:=48
  fornos:=4
end-if

if(DATAFILE="exemplo2.dat")then
  H:=216
  fornos:=28
end-if

declarations
```

```

    starttime: real
    Nperfis: set of string
end-declarations

initializations from DATAFILE
    Nperfis
end-initializations

finalize(Nperfis)

declarations
    perfis =getsize(Nperfis)      ! perfis
    Nfornos = 1.. fornos          ! fornos
    n: array(Nperfis) of integer  ! numero de cestos
    r: array(Nperfis) of real     !hora  disponivel
    d: array(Nperfis) of real     !data de entrega
    forno: array(Nfornos) of mpvar
    delta: array(Nperfis,Nfornos) of mpvar !delta
    t: array (Nfornos) of mpvar   ! hora de inicio do forno
    z:array(Nperfis,Nfornos) of mpvar
    func: linctr
end-declarations

initializations from DATAFILE
    n r d
end-initializations

! Objective function: number of bins used
func:=sum(j in Nfornos) forno(j)

! Binary variables
forall(i in Nperfis,j in Nfornos) delta(i,j) is_binary
forall(i in Nperfis,j in Nfornos) z(i,j) is_binary
forall(j in Nfornos) forno(j) is_binary

!restrições
forall(i in Nperfis) sum(j in Nfornos) z(i,j)=1
forall(j in Nfornos|j>1) t(j)>= t(j-1)+T*forno(j)
t(fornos)+T*forno(fornos)<=H
forall(i in Nperfis,j in Nfornos) r(i) - t(j) <= H*(1-delta(i,j))
forall(i in Nperfis,j in Nfornos) t(j) +T - d(i) <= H*(1-delta(i,j))
forall(i in Nperfis,j in Nfornos) z(i,j) <= delta(i,j)
forall(j in Nfornos) sum(i in Nperfis) n(i)*z(i,j)<= C*forno(j)

```



```

forall(j in Nfornos| j<fornos) forno(j+1) <= forno(j)

!desigualdades válidas
forall(i in Nperfis) sum(j in Nfornos) z(i,j) >= ceil(n(i)/C)
sum(j in Nfornos) forno(j) >= ceil((sum(i in Nperfis)n(i))/C)

! Setting parameters for Xpress-Optimizer
!setparam("xprs_verbose",true)          ! Display Optimizer log
setparam("xprs_cutstrategy",3)          ! Use aggressive cut strategy

! Solve the problem
minimize(func)

! Solution printing
writeln("runtime: ", gettime-starttime, "s")
writeln("Total de fornos produzidos: ", getobjval)
forall(j in Nfornos|j<=getobjval) do
writeln("Forno ", j, " que começa as ", getsol(t(j))," : " )
forall(i in Nperfis)
if(getsol(delta(i,j))>0) then
    writeln( i +"("+ n(i)+") ")
end-if
writeln
end-do
end-model

```


Anexos E

Formulação (5.4)

Código da formulação (5.4) no *software Xpress*

```
model form3
  options noimplicit
  uses "mmxprs", "mmsystem"

parameters
  !DATAFILE="exemplo1.dat"
  DATAFILE="exemplo2.dat"
  T = 5           ! duração do forno
  C = 12          ! numero de cestos maximo
end-parameters

declarations
  fornos, H: integer
end-declarations

if(DATAFILE="exemplo1.dat")then
  H:=48
  fornos:=4
end-if

if(DATAFILE="exemplo2.dat")then
  H:=216
  fornos:=28
end-if

declarations
  starttime: real
```

```

    Nperfis: set of string
end-declarations

initializations from DATAFILE
    Nperfis
end-initializations

declarations
perfis =getsize(Nperfis)      ! perfis
Nfornos = 1.. fornos        ! fornos
    n: array(Nperfis) of integer      ! numero de cestos do perfil i
    r: array(Nperfis) of real !hora  disponivel
    d: array(Nperfis) of real !data de entrega
forno: array(Nfornos) of mpvar
    t: array (Nfornos) of mpvar      ! hora de inicio do forno
    z:array(Nperfis,Nfornos) of mpvar
    func: linctr
end-declarations

initializations from DATAFILE
    n r d
end-initializations

! Objective function: number of bins used
func:=sum(j in Nfornos) forno(j)

! Binary variables
forall(i in Nperfis,j in Nfornos) z(i,j) is_binary
forall(j in Nfornos) forno(j) is_binary

!restrições
forall(i in Nperfis) sum(j in Nfornos) z(i,j)=1
forall(j in Nfornos|j>1) t(j)>= t(j-1)+T*forno(j)
t(fornos)+T*forno(fornos)<=H
forall(i in Nperfis,j in Nfornos) r(i) - t(j) <= H*(1-z(i,j))
forall(i in Nperfis,j in Nfornos) t(j) +T - d(i) <= H*(1-z(i,j))
forall(j in Nfornos) sum(i in Nperfis) n(i)*z(i,j)<= C*forno(j)
forall(j in Nfornos| j<fornos) forno(j+1) <= forno(j)

!desigualdades válidas
forall(i in Nperfis) sum(j in Nfornos) z(i,j) >= ceil(n(i)/C)
sum(j in Nfornos) forno(j) >= ceil((sum(i in Nperfis)n(i))/C)

```

```

! Setting parameters for Xpress-Optimizer
!setparam("xprs_verbose",true)           ! Display Optimizer log
setparam("xprs_cutstrategy",3)           ! Use aggressive cut strategy

! Solve the problem
minimize(func)

! Solution printing
writeln("runtime: ", gettime-starttime, "s")
writeln("Total de fornos produzidos: ", getobjval)
forall(j in Nfornos|j<=getobjval) do
writeln("Forno ", j, " que começa as ", getsol(t(j)),": " )
forall(i in Nperfis)
  if(getsol(z(i,j))>0) then
    writeln( i +"(" + n(i)+" ) ")
  end-if
  writeln
end-do
end-model

```


Anexos F

Formulação (5.5)

Código da formulação (5.5) no *software Xpress*

```
model form4
  options noimplicit
  uses "mmxprs", "mmsystem"

parameters
  !DATAFILE="exemplo1.dat"
  DATAFILE="exemplo2.dat"
  C = 12          ! numero de cestos maximo
end-parameters

declarations
  fornos, H: integer
end-declarations

if(DATAFILE="exemplo1.dat")then
  H:=48
  fornos:=4
end-if

if(DATAFILE="exemplo2.dat")then
  H:=216
  fornos:=28
end-if

declarations
  starttime: real
  Nperfis: set of string
```

```

end-declarations

initializations from DATAFILE
  Nperfis
end-initializations

declarations
  perfis =getsize(Nperfis)      ! perfis
  Nfornos = 1.. fornos         ! fornos
  n: array(Nperfis) of integer  ! numero de cestos do perfil i
  forno: array(Nfornos) of mpvar
  z:array(Nperfis,Nfornos) of mpvar
  func: linctr
end-declarations

initializations from DATAFILE
  n
end-initializations

! Objective function: number of bins used
func:=sum(j in Nfornos) forno(j)

! Binary variables
forall(i in Nperfis,j in Nfornos) z(i,j) is_binary
forall(j in Nfornos) forno(j) is_binary

!restrições
forall(i in Nperfis) sum(j in Nfornos) z(i,j)=1
forall(j in Nfornos) sum(i in Nperfis) n(i)*z(i,j)<= C*forno(j)

!desigualdades válidas
forall(i in Nperfis) sum(j in Nfornos) z(i,j) >= ceil(n(i)/C)
sum(j in Nfornos) forno(j) >= ceil((sum(i in Nperfis)n(i))/C)

! Setting parameters for Xpress-Optimizer
!setparam("xprs_verbose",true)      ! Display Optimizer log
setparam("xprs_cutstrategy",3)      ! Use aggressive cut strategy

! Solve the problem
minimize(func)

! Solution printing
writeln("runtime: ", gettime-starttime, "s")

```



```
writeln("Total de fornos produzidos: ", getobjval)
forall(j in Nfornos|j<=getobjval) do
writeln("Forno ", j, ": " )
forall(i in Nperfis)
if(getsol(z(i,j))>0) then
    writeln( i +"("+ n(i)+") ")
    end-if
    writeln
end-do
end-model
```


Anexos G

Formulação (5.6)

Código da formulação (5.6) no *software Xpress*

```
model form1T
  options noimplicit
  uses "mmxprs", "mmsystem"

parameters
  DATAFILE="exemplo1.dat"
  !DATAFILE="exemplo2.dat"
  grande = 1
  C = 12           ! numero de custos maximo
  ell = 2         ! tâmperas
end-parameters

declarations
  fornos, H: integer
end-declarations

if(DATAFILE="exemplo1.dat")then
  !H:=48
  !fornos:=4
  H:=48*15
  fornos:=4*15
end-if

if(DATAFILE="exemplo2.dat")then
  !H:=216
  !fornos:=28
  H:=216*4
  fornos:=28*4
end-if
```

```

declarations
  starttime: real
  Nperfis: set of string
end-declarations

initializations from DATAFILE
  Nperfis
end-initializations

finalize(Nperfis)

declarations
  perfis =getsize(Nperfis)  ! perfis
  Nfornos = 1.. fornos      ! fornos
  L=1..ell
  temp: array(Nperfis) of string
  Tl: array (L) of real !duração das temperas
  g: array(Nperfis,L) of integer
  n: array(Nperfis) of integer      ! numero de cestos do perfil i
  r: array(Nperfis) of real  !hora a disponivel
  d: array(Nperfis) of real !data de entrega
  carga: array(Nperfis,Nfornos) of mpvar    ! #cestos da carga i no forno j
  forno: array(Nfornos,L) of mpvar
  delta: array(Nperfis,Nfornos) of mpvar  !delta
  t: array (Nfornos) of mpvar              ! hora de inicio do forno
  func: lincpr
end-declarations

initializations from DATAFILE
  n r d temp
end-initializations

Tl(1):=8.5 !1 tempera T6
Tl(2):=4.5 !2 tempera T5

if (grande=1) then
  setrandseed(1)
  forall(i in Nperfis) do
    if(DATAFILE="exemplo1.dat")then !15 dias
n(i):=15*n(i)
    if (random<0.5) then
      d(i):=H/2
      r(i):=r(i)
    else

```

```

        d(i):=H
        r(i):=15*r(i)
    end-if
end-if
    if(DATAFILE="exemplo2.dat")then !1 mes
n(i):=4*n(i)
    if (random<0.5) then
        d(i):=H/2
        r(i):=r(i)
    else
        d(i):=H
        r(i):=4*r(i)
    end-if
end-if
end-do
end-if

forall(i in Nperfis, l in L) g(i,l):=0

forall(i in Nperfis) do
if(temp(i)= "T5") then
    g(i,2):=1
    elif (temp(i)= "T6") then
        g(i,1):=1
end-if
end-do

! Objective function: number of bins used
func:=sum(j in Nfornos) sum(l in L) forno(j,l)

! Binary variables
forall(i in Nperfis,j in Nfornos) delta(i,j) is_binary
forall(j in Nfornos, l in L) forno(j,l) is_binary

!restrições
forall(j in Nfornos) sum(l in L) forno(j,l) <= 1
forall(i in Nperfis,j in Nfornos) delta(i,j)<= sum(l in L)g(i,l)* forno(j,l)
forall(i in Nperfis) sum(j in Nfornos) carga(i,j) = n(i)
forall(j in Nfornos|j>1) t(j)>= t(j-1)+sum(l in L)Tl(l)*forno(j-1,l)
t(fornos)+sum(l in L)Tl(l)*forno(fornos,l)<=H
forall(i in Nperfis,j in Nfornos) r(i) - t(j) <= H*(1-delta(i,j))
forall(i in Nperfis,j in Nfornos) t(j) +sum(l in L)Tl(l) - d(i) <= H*(1-delta(i,j))
forall(i in Nperfis,j in Nfornos, l in L) carga(i,j) <= n(i)*delta(i,j)

```

```

forall(j in Nfornos) sum(i in Nperfis) carga(i,j)<= C*sum(l in L)forno(j,l)
forall(j in Nfornos| j<fornos) sum(l in L)forno(j+1,l) <= sum(l in L)forno(j,l)

!desigualdades válidas
forall(i in Nperfis) sum(j in Nfornos) delta(i,j) >= ceil(n(i)/C)
forall(l in L) sum(j in Nfornos) forno(j,l) >= ceil((sum(i in Nperfis)g(i,l)*n(i))/C)

! Setting parameters for Xpress-Optimizer
!setparam("xprs_verbose",true)           ! Display Optimizer log
setparam("xprs_cutstrategy",3)           ! Use aggressive cut strategy

! Solve the problem
minimize(func)

! Solution printing
writeln("runtime: ", gettime-starttime, "s")
writeln("Total de fornos produzidos: ", getobjval)
forall(j in Nfornos|j<=getobjval) do
writeln("Forno ", j, " que começa as ", getsol(t(j)),": " )
forall(i in Nperfis)
if(getsol(delta(i,j))>0 and getsol(carga(i,j))>0) then
writeln( i +" com total de cestos("+ n(i)+") e cestos no forno ("+
        getsol(carga(i,j))+") com têmpera " + temp(i))
end-if
        writeln
end-do
end-model

```