Universidade
de Aveiro
2016

Departamento de Educação e Psicologia

MAFALDA MARIA
REIS COSTA

EXPLORAÇÃO DAS PROPRIEDADES DAS TRANSFORMAÇÕES DE GRÁFICOS DE FUNÇÕES COM O AUXÍLIO DO GEOGEBRA

Universidade de Aveiro
2016

Departamento de Educação e Psicologia

MAFALDA MARIA REIS COSTA

EXPLORAÇÃO DAS PROPRIEDADES DAS TRANSFORMAÇÕES DE GRÁFICOS DE FUNÇÕES COM O AUXÍLIO DO GEOGEBRA

Relatório de Estágio apresentado à Universidade de Aveiro para cumprimento dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Ensino de Matemática no 3º ciclo do Ensino Básico e Secundário, realizado sob a orientação científica da Professora Doutora Isabel Alexandra Vieira Brás, Professora auxiliar do Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

Aos Meus ...

O Júri

Presidente

Professora Doutora Isabel Maria Cabrita dos Reis Pires Pereira
Professora Auxiliar, Universidade de Aveiro

Professora Doutora Maria Helena Silva Sousa Martinho
Professora Auxiliar, Instituto de Educação da Universidade do Minho

Professora Doutora Isabel Alexandra Vieira Brás
Professora Auxiliar, Universidade de Aveiro

Agradecimentos

À Professora Doutora Isabel Brás por toda a ajuda e apoio prestado ao longo deste ano letivo;

À Professora Maria João Naia pela disponibilidade, ajuda, pelo acompanhamento e por todos os ensinamentos que me foi passando ao longo do ano de estágio.

À minha amiga Sónia Rocha, por ter sido a minha amiga crítica e por toda a disponibilidade e ajuda ao longo da elaboração deste trabalho e de todo o estágio curricular.

À minha Irmã, por me ter ajudado em todo este processo e por ter lido este trabalho vezes sem conta;

À minha Família e ao Zé por me terem acompanhado e apoiado em todo este processo.

Palavras - Chave

Tansformações geométricas de gráficos de funções, tarefas exploratórias, GeoGebra.

Resumo

Este trabalho tem como objetivo analisar se o *GeoGebra* é um recurso facilitador do processo de estabelecimento, por parte dos alunos, das relações entre gráficos de funções e auxiliador na resolução das tarefas propostas.

Para a realização deste estudo selecionou-se alguns estudantes de uma turma do 10º ano do curso científico-humanístico de Ciências e Tecnologias de uma escola, na qual foi desenvolvida a unidade curricular de Prática de Ensino Supervisionada. As técnicas utilizadas para a recolha de dados neste estudo foram: a recolha documental, a inquirição e ainda a observação. O estudo realizado é um estudo de casos múltiplos, que se insere num paradigma interpretativo de índole qualitativa.

Os resultados indicam que, no geral, o recurso ao *GeoGebra* parece facilitar o estabelecimento de relações entre gráficos de funções e auxiliar os alunos na resolução das tarefas propostas.

Keywords

Graphics geometric transformation functions, exploratory tasks, GeoGebra.

Abstract

This work aims to analyze if the GeoGebra is a facilitator resource in the process of establishing relations between function graphs, by the students, and a helper in the resolution of the proposed tasks.

For this study, some students were selected from a class in the 10th grade of scientific and humanistic course of Science and Technologies of a school, where the curricular unit of Prática de Ensino Supervisionada has taken place. The techniques used for data collection in this study were: the documentary collection, examination and further observation. The study is a multiple case study, whithin a interpretative paradigm of qualitative nature.

The results indicate that, in general, the use of GeoGebra seems to facilitate the establishment of relations between function charts and to help students in the resolution of the proposed tasks.

Índice

Índice 1

1. Introdução 7
   1.1. Motivações e Pertinência do Estudo 7
   1.2. Questões de Investigação e Objetivos 8
   1.3. Organização do Relatório 10
2. Enquadramento Teórico 11
   2.1. Abordagem Matemática: Transformações Geométricas de Gráficos de Funções 11
   2.2. Abordagem Didático Pedagógica 21
3. Método 27
   3.1. Opções Metodológicas 27
   3.2. Participantes 29
   3.3. Técnicas e Instrumentos de Recolha de Dados 30
      3.3.1. Recolha Documental 30
      3.3.2. Inquirição 31
      3.3.3. Observação 32
4. Apresentação e Análise dos Dados 33
   4.1. Casos de Estudo 33
   4.2. Apresentação e Análise dos Dados 34
      4.2.1. Análise das produções escritas dos alunos 35
      4.2.2. Análise dos Questionários 49
   4.3. Análise Sumária Global e por Grupo 52
5. Conclusão 55
   5.1. Principais Conclusões 55
   5.2. Reflexão 57

Bibliografia 59

Anexos 65

Anexo 1: Materiais Aula 1 67
   Anexo 1.1.: Planificação Aula 1 67
   Anexo 1.2.: Ficha Exploratória 1 70

Anexo 1.3.: Ficha de Trabalho 1 73
Anexo 2: Materiais Aula 2 76
Anexo 2.1.: Planificação de Aula 76
Anexo 2.2.: Ficha Exploratória 2 80
Anexo 2.3. Ficha de Trabalho 2 83
Anexo 3: Materiais Aula 3 86
Anexo 3.1.: Planificação 86
Anexo 3.2.: Ficha Exploratória 3 89
Anexo 3.3.: Ficha de Trabalho 3 99
Anexo 4: Questionário 101
Anexo 5: Grelhas de Observação 103
Anexo 5.1.: Grelha de Observação dos Casos em Estudo 105
Anexo 6: Descritores para o tópico Transformações de Gráficos de Funções 107

Índice de Figuras

Figura 1 - Ilustração: P' é a imagem de P pela translação de vetor $\vec{u}$ 13

Figura 2 - Ilustração: P' é a imagem de P pela rotação de centro O e amplitude α 13

Figura 3 - Ilustração: P' é a imagem de P pela reflexão axial de eixo r 14

Figura 4 - Ilustração: P' é a imagem de P pela reflexão central de centro O 14

Figura 5 - Ilustração: O ponto P'é a imagem do ponto P pela homotetia de centro O ... 14

Figura 6 - Ilustração: Relação entre os gráficos das funções $f(x)$ e $fx+k$ 15

Figura 7 - Ilustração: Relação entre os gráficos das funções $f(x)$ e $f(x-k)$ 17

Figura 8 - Ilustração: Relação entre os gráficos das funções $f(x)$ e $-f(x)$ 17

Figura 9 - Ilustração: Relação entre os gráficos das funções $f(x)$ e $kf(x)$ 18

Figura 10 - Ilustração: Relação entre os gráficos das funções $f(x)$ e $f(kx)$ 20

Figura 11 - Relação entre os diversos tipos de tarefas quanto ao seu grau de abertura e desafio (Ponte, 2005) 23

Figura 12 - Relação entre os diferentes tipos de tarefas quanto à sua duração (Ponte, 2005) 23

Figura 13 - Partes relevantes da questão 1 da FE1 35

Figura 14 - Resposta do Grupo 4 à questão 1.4 da FE1 36

Figura 15 - Resposta do Grupo 2 à questão 1.4 da FE1 36

Figura 16- Resposta do Grupo 1 à questão 1.5 da FE1 36

Figura 17 - Resposta do Grupo 4 à questão 1.5 da FE1 37

Figura 18 – Partes relevantes da questão 1.2, alínea a), da FT1 37

Figura 19 - Resposta do Grupo 2 à questão 1.2, alínea a), da FT1 37

Figura 20 - Questão 2 da FE1 38

Figura 21 - Resposta do Grupo 4 à questão 2.1 da FE1 38

Figura 22 - Resposta do Grupo 2 à questão 2.1 da FE1 39

Figura 23 - Resposta do Grupo 2 à questão 2.2 da FE1 39

Figura 24 - Resposta do Grupo 1 à questão 2.2 da FE1 39

Figura 25 - Questão 1.2, alíneas b e c, da FT1 40

Figura 26 - Resposta do Grupo 4 à questão 1.2 da FT1 40

Figura 27 - Partes relevantes da questão 1 da FE2 41

Figura 28 - Resposta do Grupo 3 à questão 1.4 da FE2 41

Figura 29 - Questão 1, alínea a) e b), da FT2 42

Figura 30 - Resposta do Grupo 3 à questão 1, alíneas a e b, da FT2 42

Figura 31 - Partes relevantes da questão 1 da FE2 43
Figura 32 - Resposta do Grupo 4 à questão 1.6 da FE2 43
Figura 33 - Resposta do Grupo 2 à questão 1.6 da FE2 43
Figura 34 - Resposta do Grupo 3 à questão 1.6 da FE2 43
Figura 35 - Partes relevantes da questão 1 da FT2 44
Figura 36 - Resposta do Grupo 3 à alínea c da FT2 44
Figura 37 - Partes relevantes da questão 1 da FE3 45
Figura 38 - Resposta do Grupo 3 à questão 1.6 da FE3 45
Figura 39 - Resposta do Grupo 1 à questão 1.6 da FE3 45
Figura 40 - Resposta do Grupo 4 à questão 1.6 da FE3 46
Figura 41 - Questão 1.1, alíneas a) e b), da FT3 46
Figura 42 - Resposta do Grupo 3 à questão 1.1. da FT3 46
Figura 43 - Resposta do Grupo 1 à questão 1.1. da FT3 47
Figura 44 - Partes relevantes da questão 1 da FE3 47
Figura 45 - Resposta do Grupo 3 à questão 1.8 da FE3 48
Figura 46 - Partes relevantes da questão 1 da FT3 48
Figura 47 - Resposta do Grupo 3 à questão 1.2, alínea b), da FT3 48
Figura 48 - Resposta de um elemento do Grupo 1 à questão 2 49
Figura 49 - Resposta do Elemento 1 do Grupo 2 à questão 1 50
Figura 50 - Resposta de um elemento do Grupo 2 à questão 3 50
Figura 51 - Resposta de um elemento do Grupo 3 à questão 3 51
Figura 52 - Resposta de um elemento do Grupo 4 à questão 1 51
Figura 53 - Resposta de um elemento do Grupo 4 à questão 3 51

Índice de Tabelas

Tabela 1 - Caracterização dos casos em estudo em relação ao seu género e classificação 33

Lista de Siglas

NCTM – National Council of Teachers of Mathematics

AGD – Ambiente de Geometria Dinâmica

FE1 – Ficha Exploratória 1

FE2– Ficha Exploratória 2

FE3– Ficha Exploratória 3

FT1 – Ficha de Trabalho 1

FT2– Ficha de Trabalho 2

FT3– Ficha de Trabalho 3

1. Introdução

Inicia-se esta introdução com a apresentação das motivações e da pertinência deste estudo. Em seguida apresenta-se a problemática da investigação, os objetivos e as questões de investigação a que o mesmo pretende dar resposta. Por fim, descreve-se, brevemente, a estrutura deste relatório.

1.1. Motivações e Pertinência do Estudo

As tecnologias assumem um papel fundamental na sociedade atual. Quer seja em casa ou no local de trabalho, a maioria das pessoas já não consegue passar um dia sem aceder ao computador ou ao telemóvel, sendo que os alunos não escapam a essa tendência. Esta geração de alunos é considerada como a *geração tecnológica* e é caracterizada por "uma apetência quase inata para descobrir, criar, manusear, desvendar os trilhos tecnológicos" (Marques, 2009, p.28). Os alunos contactam com as tecnologias desde muito cedo e, "talvez por esse motivo, não se interessam por aulas unicamente expositivas" (Calil, Veiga & Carvalho, 2010, p.3). Cabe à escola e aos professores acompanhar o desenvolvimento social e levar as novas tecnologias para dentro da sala de aula.

Atualmente, a maioria das escolas já possui pelo menos um computador por sala de aula e em algumas existem salas com vários computadores à disposição dos alunos, onde estes podem trabalhar. Sendo este um elemento indispensável no dia-a-dia dos alunos, por que não utilizá-lo para contribuir para a sua aprendizagem? Segundo o NCTM (2008), "a tecnologia é essencial no ensino e na aprendizagem da matemática; influencia a matemática ensinada e melhora a aprendizagem dos alunos"(p. 26). O Programa e Metas Curriculares de Matemática A do Ensino Secundário também faz referência à importância da tecnologia, dizendo que esta deve "ser aproveitada para ajudar os alunos a compreender certos conteúdos e relações matemáticas"(Bivar, Grosso, Oliveira, Timóteo & Loura, 2013, p.28).

Segundo Ponte (2009), as aulas de hoje em dia parecem ainda continuar a ser muito expositivas, no entanto, deve dar-se ênfase ao trabalho do aluno e fazer com que o este assuma um papel essencial no seu processo de aprendizagem. Segundo Santos (2011), as tecnologias, como as calculadoras, os computadores, as aplicações informáticas (tais como o *GeoGebra* e a folha de cálculo), encorajam os alunos a resolver problemas, que provavelmente de outra forma não os conseguiriam resolver. Ainda segundo a mesma autora, estas tecnologias vêm dinamizar as aulas, torná-las mais interativas e fazer com que os alunos tenham um papel central na sua aprendizagem.

Dentro das tecnologias existentes, os *softwares* de geometria dinâmica são uma ferramenta muito útil, não só para o estudo da Geometria, como também para o estudo de outros tópicos, como por exemplo as funções. No caso deste estudo, o *software* adotado foi o *GeoGebra,* visto que tem um acesso gratuito e é muito intuitivo.

Tendo em conta que o tema *Funções Reais de Variáveis Reais* é um dos domínios onde os alunos apresentam mais dificuldades (Eisenberg, 1991; Candeias, 2010), decidiu-se optar pelo estudo de um dos subtópicos presentes no programa de Matemática A do 10º ano. O subtópico escolhido foi “Transformações Geométricas de Gráficos de Funções”, dada a escassez de estudos com ele relacionados. No Programa e Metas Curriculares de Matemática do Ensino Secundário, nesse subtópico estão contemplados os seguintes descritores: 2.9, 2.10, 2.11, 2.12, 2.13, 2.14, 2.15 e 2.16, disponíveis em Anexo 6, os quais integram este estudo. Segundo Saraiva, Teixeira & Andrade (2010), o estudo das transformações geométricas de gráficos de funções, além de ser feito com recurso à tecnologia, deve recorrer também ao lápis e papel. Seguindo esta perspetiva, o estudo do subtópico referido anteriormente irá ser estudado pelos alunos com recurso a fichas exploratórias com o auxílio do *GeoGebra* e, em seguida, completado com a resolução de tarefas, recorrendo apenas a lápis e papel.

1.2. Questões de Investigação e Objetivos

Além de pretender detetar eventuais dificuldades que os alunos irão ter na aprendizagem deste tópico, pretende-se perceber que contributos o *software* de geometria dinâmica *GeoGebra* fornece aos alunos no processo de construção de aprendizagem deste tema. Concomitantemente, procura-se analisar se os alunos conseguem mobilizar esse conhecimento, anteriormente construído, em tarefas de “lápis e papel”. Para isso coloca-se a seguinte questão de investigação:

- Qual o contributo do *GeoGebra* para a construção e aplicação do conhecimento das Propriedades Geométricas de Gráficos de Funções?

Para dar resposta a esta questão de investigação define-se os seguintes objetivos:

- Analisar se os alunos mobilizam competências desenvolvidas através de tarefas com o *GeoGebra* e as aplicam em tarefas de "lápis e papel";
- Verificar eventuais dificuldades no estabelecimento da relação entre a transformação geométrica operada no gráfico de uma função com a correspondente modificação algébrica operada na forma como está definida, sempre que ambas as funções estejam definidas. Nomeadamente, estão em causa as seguintes relações:

  - Relação entre o gráfico de uma função f e os gráficos das funções $f(x) + k, k \in \mathbb{R}$;

  - Relação entre o gráfico de uma função f e os gráficos das funções $f(x - k), k \in \mathbb{R}$;

  - Relação entre o gráfico de uma função f e o gráfico da função $-f(x)$;
  - Relação entre o gráfico de uma função f e o gráfico da função $f(-x)$;
  - Relação entre o gráfico de uma função f e os gráficos das funções $kf(x), k \in \mathbb{R}^+$
  - Relação entre o gráfico de uma função f e os gráficos das funções $f(kx), k \in \mathbb{R}^+$.
- Analisar se os alunos consideram o *GeoGebra* um recurso auxiliador no processo de aprendizagem deste tópico;

Em suma, pretende-se, nomeadamente, analisar se o *GeoGebra* é um recurso facilitador do processo de estabelecimento das relações supracitadas, por parte dos alunos, e auxiliador na resolução das tarefas propostas.

1.3. Organização do Relatório

Este relatório de estágio está dividido em quatro capítulos, para além desta introdução.

O segundo capítulo, destinado ao enquadramento teórico, está dividido em duas secções: uma destinada ao estudo das transformações geométricas e à ligação entre estas e as relações entre gráficos de algumas funções; na segunda secção é justificada a abordagem didático pedagógica que será utilizada na implementação do estudo.

No terceiro capítulo, dedicado ao Método, são justificadas as opções metodológicas tomadas. Além disso, explicam-se as técnicas e instrumentos de dados utilizados e faz-se uma breve descrição dos participantes no estudo.

No quarto capítulo, intitulado Apresentação e Análise de Dados, explica-se como foi feita a seleção dos casos em estudo. Posteriormente, intercala-se a apresentação das questões analisadas com a análise das respostas dos casos em estudo a essas questões e analisa-se as respostas desses mesmos casos ao questionário. Para finalizar este capítulo, faz-se uma síntese muito breve das principais conclusões retiradas com a análise de dados.

No quinto e último capítulo, apresentam-se as conclusões e faz-se uma reflexão onde a investigadora refere algumas limitações do estudo.

2. Enquadramento Teórico

O enquadramento teórico deste estudo está dividido em duas secções. Na primeira, faz-se um enquadramento teórico do tópico que irá ser lecionado nas aulas onde se procedeu à recolha de dados para este estudo. Neste sentido, faz-se uma abordagem matemática do tópico Transformações Geométricas de Gráficos de Funções tendo em conta aquilo que está descrito no Programa e Metas Curriculares de Matemática A do Ensino Secundário, dando-lhe um pouco mais de profundidade. Na segunda secção são justificadas as opções didático pedagógicas tomadas para o desenvolvimento dessas aulas.

2.1. Abordagem Matemática: Transformações Geométricas de Gráficos de Funções

Nesta secção, analisa-se quais as transformações que estão envolvidas na relação entre gráficos de funções, nomeadamente:

- Relação entre o gráfico de uma função f e os gráficos das funções $f(x) + k, k \in \mathbb{R}$;
- Relação entre o gráfico de uma função f e os gráficos das funções $f(x - k), k \in \mathbb{R}$;
- Relação entre o gráfico de uma função f e o gráfico da função $-f(x)$;
- Relação entre o gráfico de uma função f e o gráfico da função $f(-x)$;
- Relação entre o gráfico de uma função f e os gráficos das funções $kf(x), k \in \mathbb{R}^+$;
- Relação entre o gráfico de uma função f e os gráficos das funções $f(kx), k \in \mathbb{R}^+$.

Na subsecção seguinte estuda-se alguns aspetos básicos relativos a transformações do plano: inclui-se a definição de transformação no plano e de algumas transformações de semelhança que interessam ressaltar neste estudo. Em seguida, relaciona-se essas transformações geométricas com as relações entre gráficos de funções supracitadas.

2.1.1. Transformações Geométricas do Plano

Uma transformação do plano é uma aplicação bijetiva do plano no plano, que a cada ponto P faz corresponder um e um só um ponto $P' = f(P)$ do plano (Breda, Serrazina, Menezes, Sousa & Oliveira, 2011). Segundo os mesmos autores, ao ponto P' dá-se o nome de transformado ou imagem de P por f. As únicas transformações geométricas que os alunos reconhecem até ao 10º ano, como tal são as isometrias. Este tipo de transformação geométrica caracteriza-se pela preservação das distâncias entre quaisquer dois pontos do plano (Breda, Serrazina, Menezes, Sousa & Oliveira, 2011). No entanto, as isometrias não são as únicas transformações geométricas existentes e podem ser englobadas num grupo de transformações mais amplo, o das semelhanças, que os alunos envolvidos no estudo também já conhecem, embora não sejam trabalhadas do ponto de vista das transformações geométricas (Bastos, 2007; Breda, Serrazina, Menezes, Sousa & Oliveira, 2011). Segundo Rosendo (1987, p. 7),

> [pode-se] pensar nas semelhanças como sendo transformações geométricas que não causam deformações, no sentido em que toda a semelhança conserva a forma das figuras; e nas isometrias como as que preservam a forma e as dimensões das figuras.

A definição de transformação de semelhança que se segue, foi retirada de Breda, Serrazina, Menezes, Sousa & Oliveira (2011, p. 75), e define transformação de semelhança:

> [como uma] transformação do plano no plano que preserva a razão das distâncias entre quaisquer dois pontos (distintos) do plano e os respetivos transformados. [Ou então,] se f é uma transformação de semelhança, as distâncias entre P e Q e entre $f(P)$ e $f(Q)$ são diretamente proporcionais.

Uma transformação de semelhança tanto pode ser uma ampliação, como uma redução ou uma isometria, sendo esta última, uma transformação geométrica "[que] mantem invariante (constante) a razão das distâncias entre os pontos e os seus transformados" (Breda, Serrazina, Menezes, Sousa & Oliveira, 2011, p. 76).

Do conjunto das isometrias, para a realização deste estudo destaca-se apenas a translação, a rotação e ainda a reflexão. Começa-se por estudar então a translação. José Sebastião e Silva (1975), define translação da seguinte forma: "Dado um vetor $\vec{u}$, chama-se translação definida por $\vec{u}$ a aplicação [...] que faz corresponder a cada ponto P do espaço $\mathcal{E}$ o ponto $P' = P + \vec{u}$ do mesmo espaço" (p. 39).

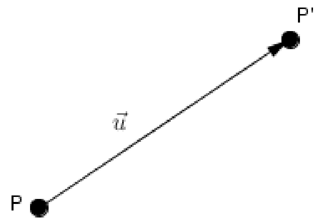


Figura 1 - Ilustração: P' é a imagem de P pela translação de vetor $\vec{u}$

Já para definir rotação considera-se dois pontos O e P. Diz-se que um ponto P' é imagem do ponto P por uma rotação de centro O e ângulo α quando os segmentos $[OP]$ e $[OP']$ têm o mesmo comprimento e os ângulos α e POP' têm a mesma amplitude (Bivar, Grosso, Oliveira, & Timóteo, 2013).

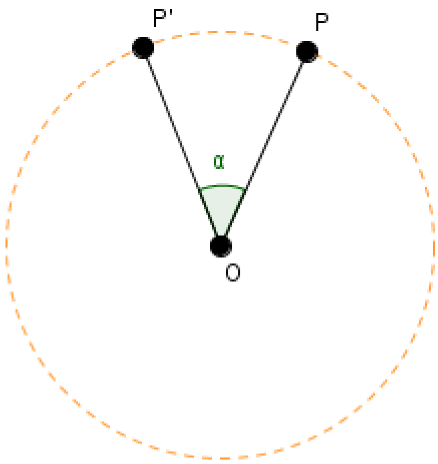


Figura 2 - Ilustração: P' é a imagem de P pela rotação de centro O e amplitude α

Para terminar esta descrição das isometrias falta apenas definir reflexão. O Programa de Matemática do Ensino Básico define dois tipos de reflexão: a reflexão central e a reflexão axial. Para se definir esta última reflexão, a reflexão axial, considera-se uma reta r e um ponto P não pertencente a r. A imagem de M pela reflexão axial de eixo r é o ponto P' tal que r é a mediatriz do segmento de reta $[PP']$, tal como mostra a figura a seguir (Bivar, Grosso, Oliveira, & Timóteo, 2013).

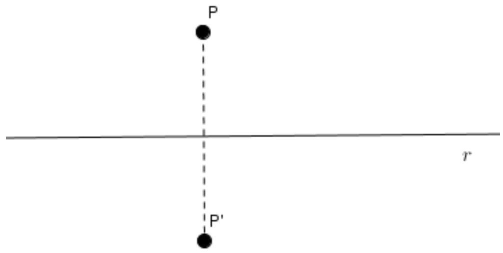


Figura 3 - Ilustração: P' é a imagem de P pela reflexão axial de eixo r

Para se definir reflexão central considera-se dois pontos O e P. Diz-se que P' é imagem do ponto P pela reflexão central de centro O quando O for o ponto médio do segmento de reta $[P, P']$ (Bivar, Grosso, Oliveira, & Timóteo, 2013).

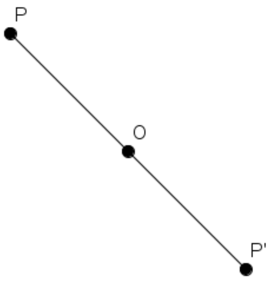


Figura 4 - Ilustração: P' é a imagem de P pela reflexão central de centro O

Outro tipo de transformação de semelhança a destacar é a homotetia (que já não é em geral uma isometria). Para isso considera-se um ponto do plano O e um número r tal que $r \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$. Chama-se homotetia de centro O e razão r, à aplicação que a todo ponto P desse plano faz corresponder o ponto P' do mesmo plano, tal que $P' = O + r\overrightarrow{OP}$ (Rosendo, 1987).

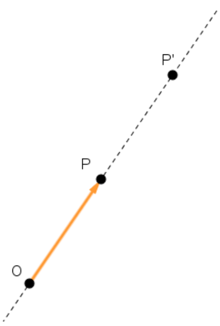


Figura 5 - Ilustração: O ponto P'é a imagem do ponto P pela homotetia de centro O

Sendo uma semelhança, toda a homotetia "se pode classificar em: ampliação se $|r| > 1$, redução se $|r| < 1$ e isometria se$|r| = 1$" (Rosendo, 1987, p.18). Outra propriedade importante das semelhanças é a seguinte: toda a semelhança do plano é a composta de uma homotetia com uma isometria (Rosendo, 1987).

As transformações geométricas até aqui descritas são aquelas com que os alunos até ao 10º ano contactaram (isometrias e semelhanças). No entanto, a definição de transformação no plano é mais abrangente e engloba outro tipo de transformações, menos estudadas. Aliás, na próxima subsecção utilizar-se-á a dilatação vertical, a contração vertical, a dilatação horizontal e a contração horizontal, que se definirá na altura.

2.1.2. Propriedades Geométricas de Gráficos de Funções

De seguida, procede-se à identificação das relações existentes entre os gráficos, listados no início desta secção, a partir das definições consideradas na subsecção anterior. No entanto, as últimas duas relações mencionadas, como se poderá observar, não serão nem isometrias, nem transformações de semelhança, visto que não há preservação da forma.

Relação entre o gráficos das uma função $\boldsymbol{f(x)}$ e os gráficos das funções $\boldsymbol{f(x)+k, k} \in \mathbb{R}$

Começa-se então este estudo por verificar a relação existente entre o gráfico de uma função f e o gráfico da função $g(x) = f(x) + k, k \in \mathbb{R}$.

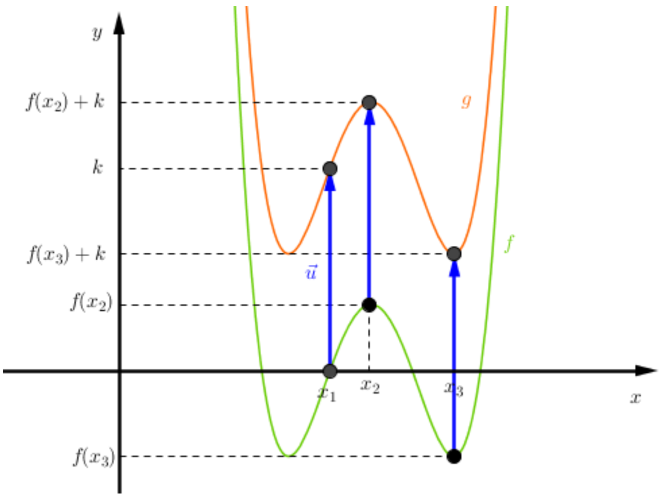


Figura 6 - Ilustração: Relação entre os gráficos das funções $f(x)$ e $f(x)+k$

Considera-se a função f, função real de variável real. Os pontos pertencentes ao gráfico de f têm coordenadas $(x, f(x))$ e os pontos pertencentes ao gráfico de g têm como coordenadas $(x, f(x) + k)$.

Tal como se pode observar na *Figura 6*, as distâncias entre quaisquer dois pontos do gráfico de f aos respetivos transformados, que constituem o gráfico de g, são preservadas. De facto, se P é um ponto, qualquer, pertencente ao gráfico da função f de coordenadas $(x_0, f(x_0))$, o ponto com a mesma abcissa pertencente ao gráfico de g tem coordenadas $P'(x_0, f(x_0) + k)$. Mais,

$$\vec{u} = P' - P = (x_0, f(x_0) + k) - \big(x_0, f(x_0)\big) = \big(x_0 - x_0, f(x_0) + k - f(x_0)\big) = (0, k)$$

Assim, para cada ponto P do gráfico de f, existe um ponto P' no gráfico de g tal que $P' = P + \vec{u}$, sendo $\vec{u}(0, k)$. Consequentemente, o gráfico da função g é imagem do gráfico da função f pela translação associada ao vetor $\vec{u}(0, k)$.

Relação entre o gráfico de uma função $\boldsymbol{f(x)}$ e os gráficos das funções $\boldsymbol{f(x-k), k} \in \mathbb{R}$

Para se estudar esta relação considera-se uma função f de domínio D_f e uma função g definida por $g(x) = f(x - k), k \in \mathbb{R}$, admitindo que $x - k \in D_f$, para o k considerado. Os pontos que pertencem ao gráfico da função f são da forma $(x, f(x)), x \in D_f$. Considera-se um ponto qualquer do gráfico dessa função, onde as suas coordenadas são da forma $\big(x_0, f(x_0)\big), x_0 \in D_f$. No gráfico de g existe um ponto que também terá ordenada $f(x_0)$. Esse ponto tem abcissa $x_0 + k$. De facto, $g(x_0 + k) = f(x_0 + k - k) = f(x_0)$.

Deste modo, considerando a translação associada ao vetor $\vec{v}(k, 0)$, verifica-se que $P' = (x_0 + k, g(x_0 + k))$ é a imagem de $P = (x_0, f(x_0))$, por essa translação.

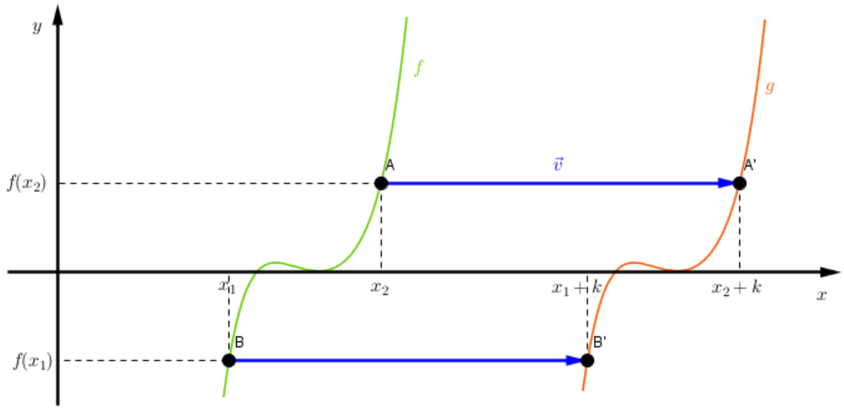


Figura 7 - Ilustração: Relação entre os gráficos das funções $f(x)$ e $f(x-k)$

A *Figura 7* ilustra a conclusão acima obtida: o gráfico de g é o transformado do gráfico de f pela translação associada ao vetor $\vec{v}(k, 0)$.

Relação entre o gráfico de uma função $f(x)$ e o gráfico da função $-f(x)$

Considere-se a função f, real de variável real e a função $g(x) = -f(x)$. Neste caso, o domínio de f e o domínio de g é o mesmo. A cada ponto $P(x_0, f(x_0))$ do gráfico de f, pode-se associar de forma única um ponto $P'(x_0, -f(x_0))$, do gráfico de g. Note-se que o ponto médio de $[PP']$ é $M(x_0, 0)$ e que a reta PP' de equação $x = x_0$ é perpendicular a Ox. Logo, Ox é a mediatriz do segmento de reta $[PP']$.

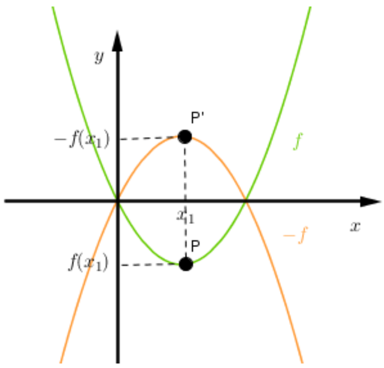


Figura 8 - Ilustração: Relação entre os gráficos das funções $f(x)$ e $-f(x)$

Sendo assim, pode-se concluir que o gráfico da função g é o transformado do gráfico da função f pela reflexão de eixo Ox.

Relação entre o gráfico de uma função $f(x)$ e o gráfico da função $f(-x)$

Para este caso, considera-se a função real de variável real f e a função g definida por $g(x) = f(-x)$. A cada ponto $P(x, f(x))$ do gráfico de f, pode-se associar, de forma única, um ponto P' de coordenadas $P'(-x, f(x))$ pertence ao gráfico de g. Assim sendo P' é o transformado de P pela reflexão de eixo Oy, situação que se encontra ilustrada na *Figura 9*.

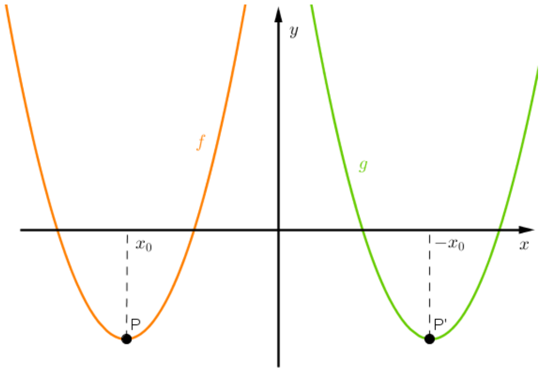


Figura 9 - Ilustração: Relação entre os gráficos das funções f(x) e f(-x)

Sendo o ponto P, um ponto qualquer do gráfico da função f, podemos concluir que o gráfico da função $f(-x)$ é imagem do gráfico da função $f(x)$ pela reflexão de eixo Oy.

Relação entre o gráfico de uma função $f(x)$ e os gráficos das funções $kf(x), k \in \mathbb{R}^+$

A relação entre estes dois gráficos não pode ser descrita usando uma transformação de semelhança.

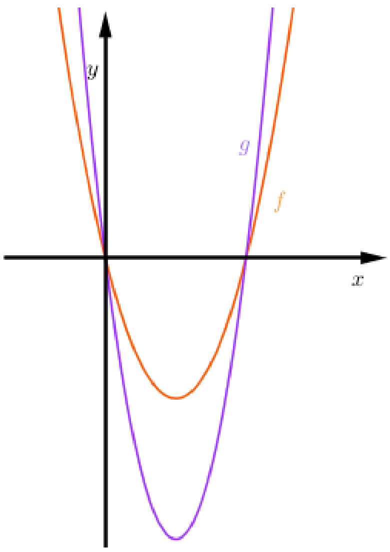


Figura 10 - Ilustração: Relação entre os gráficos das funções $f(x)$ e $kf(x)$

A relação entre os dois gráficos representados na *Figura 10*, não é dada por uma isometria visto que não são preservadas as distâncias entre pontos. Também não se pode afirmar que esta relação é uma semelhança, uma vez que a razão entre a distância entre dois pontos e a distância entre as respetivas imagens não é constante. Neste caso, como se irá ver, pode-se encarar o gráfico de g como a imagem do gráfico de f por uma transformação geométrica que é designada por dilatação/contração vertical (Bivar, Grosso, Oliveira & Timóteo, 2013).

Fixado $k \in \mathbb{R}^+$, considere-se a aplicação do plano cartesiano

$$\varphi: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(x, y) \rightsquigarrow (x, ky)$$

Note-se que φ é bijetiva. De facto, se $\varphi(x_1, y_1) = \varphi(x_2, y_2)$ então $(x_1, ky_1) = (x_2, ky_2)$ e portanto, porque $k \neq 0$, $x_1 = x_2$ e $y_1 = y_2$. Logo, φ é uma aplicação injetiva. Também é sobrejetiva, uma vez que dado $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, existe $\left(x_0, \frac{y_0}{k}\right) \in \mathbb{R}^2$, tal que $\varphi\left(x_0, \frac{y_0}{k}\right) = (x_0, y_0)$. Logo φ é uma transformação geométrica.

φ é designada por dilatação vertical de coeficiente k, se $k > 1$, e por contração vertical de coeficiente k, se $k < 1$. Note-se que, quando $k = 1$, φ é uma transformação de semelhança, mais concretamente uma isometria. Este caso, não é interessante no caso em estudo, pois f e $g = kf$, serão a mesma função.

Aplicando φ aos pontos do gráfico de f, obtém-se

$$\varphi\big(x, f(x)\big) = \big(x, kf(x)\big) = (x, g(x)),$$

onde g é a função tal que $D_g = D_f$ e $g(x) = kf(x)$. Deste modo, o gráfico de g é a imagem do gráfico de f por φ. Assim sendo, o gráfico da função g pode ser encarado como a imagem do gráfico de f pela dilatação/contração vertical de coeficiente k.

Relação entre o gráfico de uma função $\boldsymbol{f(x)}$ e os gráficos das funções $\boldsymbol{f(kx), k} \in \mathbb{R}^+$

Tal como acontece com a relação anterior, a relação entre o gráfico da função f e o gráfico da função g, definida por $g(x) = f(kx), k \in \mathbb{R}^+$, não pode ser interpretada à luz de uma transformação de semelhança.

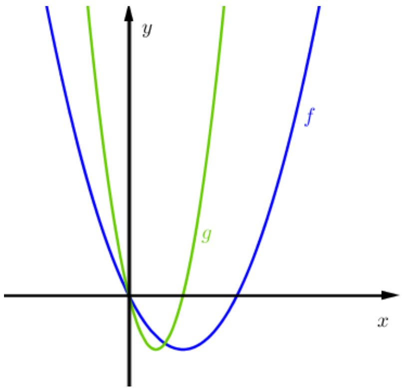


Figura 11 - Ilustração: Relação entre os gráficos das funções $f(x)$ e $f(kx)$

A relação entre estes dois gráficos, representados na figura anterior, não é dada por uma isometria visto que não são preservadas as distâncias entre pontos. Também não se pode afirmar que seja uma semelhança, uma vez que a razão entre a distância entre dois pontos e a distância entre as respetivas imagens não é constante.

Neste caso, como se irá ver, pode-se encarar o gráfico de g como a imagem do gráfico de f por uma transformação geométrica que é designada por dilatação/contração horizontal (Bivar, Grosso, Oliveira & Timóteo, 2013).

Fixado $k \in \mathbb{R}^+$, considere-se a aplicação do plano cartesiano

$$\varphi: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(x, y) \rightsquigarrow \left(\frac{1}{k}x, y\right)$$

Note-se que φ é bijetiva. De facto, se $\varphi(x_1, y_1) = \varphi(x_2, y_2)$ então $\left(\frac{1}{k}x_1, y_1\right) = \left(\frac{1}{k}x_2, y_2\right)$ e portanto, porque $k \neq 0$, $x_1 = x_2$ e $y_1 = y_2$. Logo, φ é uma aplicação injetiva. Também é sobrejetiva, uma vez que dado $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, existe $(kx_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, tal que $\varphi(kx_0, y_0) = (x_0, y_0)$. Logo φ é uma transformação geométrica.

φ é designada por uma dilatação horizontal de coeficiente $\frac{1}{k}$, se $k < 1$, e por contração horizontal de coeficiente $\frac{1}{k}$, se $k > 1$. Note-se que, quando $k = 1$, φ é uma transformação de semelhança, mais concretamente uma isometria.

Aplicando φ aos pontos do gráfico de f, obtém-se

$$\varphi\big(x, f(x)\big) = \left(\frac{1}{k}x, f(x)\right) = \left(\frac{1}{k}x, g\left(\frac{1}{k}x\right)\right), \text{ pois } g\left(\frac{1}{k}x\right) = f\left(k\frac{1}{k}x\right) = f(x),$$

onde g é a função definida por $g(x) = f(kx)$ tal que $D_g = \left\{\frac{x}{k} : x \in D_f\right\}$. Deste modo, o gráfico de g é a imagem do gráfico de f por φ. Assim sendo, o gráfico da função g pode ser encarado como a imagem do gráfico de f pela dilatação/contração horizontal de coeficiente $\frac{1}{k}$.

2.2. Abordagem Didático Pedagógica

Como já foi referido anteriormente esta investigação tem como objetivos: analisar se os alunos mobilizam competências desenvolvidas através de tarefas com o GeoGebra e as aplicam em tarefas de "lápis e papel"; verificar eventuais dificuldades na aprendizagem do tópico Transformações Geométricas de Gráficos de Funções e analisar se os alunos consideram o *GeoGebra* um recurso auxiliador no processo de aprendizagem desse mesmo tópico. Para isso, os alunos realizaram algumas tarefas onde tiveram a oportunidade de trabalhar com o *software GeoGebra*. Nesta subsecção são abordados alguns tópicos que justificam a abordagem didático pedagógica que foi adotada.

2.2.1. Construtivismo

Rego (2002), citada por Neves & Damiani (2006) descreve esta teoria da seguinte forma:

> Em síntese, nessa abordagem, o sujeito produtor de conhecimento não é um mero recetáculo que absorve e contempla o real nem o portador de verdades oriundas de um plano ideal; pelo contrário, é um sujeito ativo que em sua relação com o mundo, com seu objeto de estudo, reconstrói (no seu pensamento) este mundo (p. 8).

Ainda, segundo esta teoria, "todo o acto intelectual se constroí progressivamente a partir de estruturas cognitivas anteriores e mais primitivas" (Armella & Waldegg, 1992, p. 8). Mortimer (1996) defende que o construtivismo assenta em duas características principais: (i) a aprendizagem é feita pelo envolvimento do indivíduo na construção do conhecimento; (ii) os conceitos que o indivíduo adquiriu anteriormente têm um papel fundamental na aprendizagem de novos conceitos.

Na área da Educação Matemática são vários os autores que defendem as teorias construtivistas. Um desses autores é Shoenfeld (1988), citado por NCTM (2008, p. 21), refere que "os alunos devem aprender matemática com compreensão, construindo ativamente novos conhecimentos a partir da experiência e de conhecimentos prévios".

Além disso, o NCTM (2008) refere ainda que a matemática faz mais sentido e é mais facilmente aplicada e memorizada se os alunos relacionarem conceitos prévios com os conceitos novos de forma significativa. No entanto, os professores que adotam estas teorias construtivistas parecem revelar alguma dificuldade na sua própria preparação para atuar sobre este paradigma (Mortimer, 1996). De facto, o papel de um professor construtivista é muito mais complexo do que o papel de um professor dito "tradicional", pois este limita-se a transmitir os conhecimentos aos seus alunos. Já o papel do professor construtivista, " [consiste em] esboçar e apresentar situações que, fazendo apelo às estruturas anteriores de que o estudante dispõe**,** lhe permitam assimilar e conformar-se a novos significados do objeto de aprendizagem e novas operações associadas a ele" (Armella & Waldegg, 1992, p. 8).

Tendo em conta estes aspetos, pode afirmar-se que o ensino expositivo não assenta nesta perspetiva construtivista, visto que este tipo de ensino é caracterizado pela transmissão de conhecimentos do professor para o aluno e nele dá-se uma grande ênfase à resolução de exercícios (Ponte, 2005). Sendo assim, e tendo em conta as características da aprendizagem construtivista, analisou-se que tipo de tarefas se deve propor aos alunos para que eles tenham um papel ativo na sua aprendizagem.

2.2.2. As Tarefas em Matemática

Segundo João Pedro da Ponte (2005) uma tarefa é o objetivo do envolvimento de um aluno numa determinada atividade. Na disciplina de Matemática, as tarefas que se realizam, dentro ou fora da sala de aula, podem ser categorizadas de acordo com o seu grau de desafio e de estrutura. O grau de dasafio de uma tarefa está relacionado com o facto de a tarefa em questão poder ter um grau de desafio "reduzido" ou "elevado". Já o grau de estrutura está relacionado com o facto de a estrutura da tarefa poder estar entre o "aberto" e o "fechado", sendo que uma tarefa é considerada fechada se à partida já se conhece o que é pedido e o que é dado, e é considerada aberta se não é conhecido à partida o que é pedido. Juntando estas duas dimensões, pode dividir-se as tarefas matemáticas em quarto categorias (Ponte, 2005):

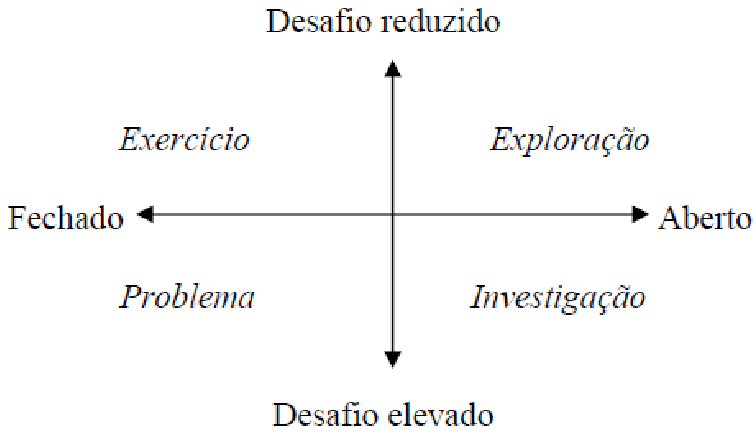


Figura 12 - Relação entre os diversos tipos de tarefas quanto ao seu grau de abertura e desafio (Ponte, 2005)

Deste modo podem realizar-se tarefas de exploração, tarefas de investigação, problemas e exercícios. No entanto, João Pedro da Ponte (2005) ainda introduz duas novas dimensões na categorização destas tarefas: a duração e o contexto. Estas tanto podem ter uma duração curta, como média ou longa. A divisão das tarefas, de acordo com esta dimensão, encontra-se retratada na figura seguinte:

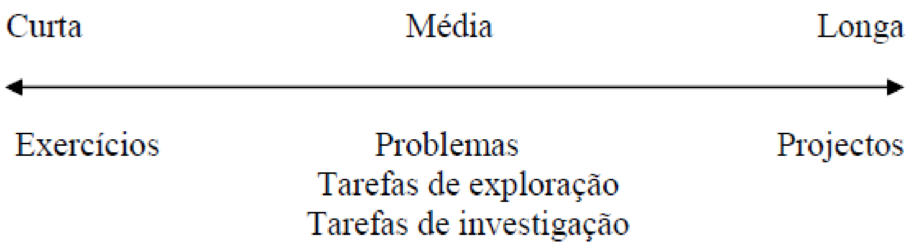


Figura 13 - Relação entre os diferentes tipos de tarefas quanto à sua duração (Ponte, 2005)

Como é possível verificar por observação da figura anterior, além das tarefas já referidas, introduz-se, um novo tipo de tarefa, os projetos, que são tarefas de investigação de longa duração (Ponte, 2005). Em relação ao contexto, o autor refere que as tarefas podem variar entre um contexto realista e de matemática pura. Salienta ainda o facto de que o professor deve diversificar o tipo de tarefas a propor aos alunos.

Neste trabalho, como já foi referido anteriormente, privilegiou-se as tarefas de exploração. Um ensino onde se privilegia este tipo de tarefas tem o nome de ensino-aprendizagem exploratório. "A sua característica principal é que o professor não procura explicar tudo, mas deixa uma parte importante do trabalho de descoberta e de construção do conhecimento para os alunos realizarem" (Ponte, 2005, p. 13). Apesar disso, podem coexistir momentos de sistematização de conceitos aprendidos pelos alunos. Christiansen & Walther (1986), citado por Ponte (2010), refere que uma aula de ensino-aprendizagem exploratório tem três fases principais: a introdução, o desenvolvimento do trabalho e a apresentação de resultados e discussão. Na segunda fase, desenvolvimento do trabalho, os alunos tanto podem trabalhar individualmente como em pequenos grupos, sendo que este último modo de trabalho foi o que se privilegiou neste estudo.

2.2.3. Ambiente de Geometria Dinâmica no Ensino da Matemática

Nas aulas lecionadas os alunos trabalharam num computador, mais propriamente num Ambiente de Geometria Dinâmica (AGD), o *GeoGebra*. "Um AGD constitui-se como uma "poderosa ferramenta" de construção e investigação que permite aos alunos explorar, analisar, conjeturar, argumentar, compreender e descobrir conceitos matemáticos, da álgebra, da geometria, da trigonometria, do cálculo, entre outros" (Carvalho, 2013, p. 93).

Os AGD apresentam uma fácil utilização e possibilitam uma abordagem exploratória dos conceitos (Ferreira, 2005). Bravo (2005) considera que a utilização de ambientes de geometria dinâmica no ensino da matemática,

> [permite] que os alunos contactem com um grande número de situações em tempo real e se apercebam do domínio de validade das propriedades estudadas. […] A sua aprendizagem decorre por etapas e a formulação de conjeturas e a sua validação, com a análise de exemplos e contra-exemplos, é facilitada pelo vaivém contínuo facultado pelas ferramentas (p. 28).

Segundo Trindade (2010), este tipo de *software* é um dos recursos que mais contribui para a motivação dos alunos para a disciplina de Matemática, visto que eles se sentem motivamos por manipularem este tipo de ferramentas. No entanto, o mesmo autor refere ainda que, além destes ambientes, também é importante que as tarefas propostas envolvam os alunos na sua aprendizagem.

Apesar do nome AGD remeter para o estudo da geometria, a verdade é que alguns deles também podem ser utilizados para o estudo das funções, como é o caso do *GeoGebra*. Um AGD que possui capacidades gráficas, "permite a criação de múltiplas representações, ainda com as vantagens de exibirem representações diversas e também permitirem ações sobre essas representações" (Gafanhoto & Canavarro, 2008, p. 5). Fernandes (1998) refere que "observando representações gráficas de várias funções de uma classe, podemos conjeturar propriedades da classe a que pertencem essas funções" (p. 33). O mesmo autor defende ainda que à medida que se vão fazendo representações gráficas de vários elementos de uma classe, fica-se mais convencido sobre a veracidade de uma determinada conjetura formulada.

2.2.4. Trabalho de Grupo ou em díade

Tal como nos diz Lopes & Silva (2009, p. 9), "Quem caminha sozinho pode até chegar mais rápido, mas aquele que vai acompanhado com certeza vai mais longe". Esta frase pode perfeitamente ser aplicada à sala de aula visto que os alunos aprendem, na maior parte dos casos, individualmente e bastante rápido. No entanto, o trabalho de grupo acrescenta ao trabalho de sala de aula e aos alunos outras características que com o trabalho individual é impossível obter. Pereira, Cardoso & Rocha (2015) referem que o trabalho de grupo constitui uma forma de trabalho colaborativo que traz múltiplos benefícios aos alunos, tais como: permite que os discentes mais tímidos se libertem, interajam com os colegas e faz com que estes respeitem os colegas e as opiniões deles. Além disso, os mesmos autores salientam que os trabalhos de grupo contribuem para o aumento da motivação dos alunos pela disciplina. Almeida & César (2007) referem ainda que este tipo de trabalho contribui para a mobilização de diversas competências por parte dos alunos, uma vez que permite que os alunos explorem situações e problemas de forma a encontrarem soluções, interrelacionem e mobilizem saberes e interajam uns com os outros de forma a chegarem a um consenso. O trabalho de grupo, segundo Ribeiro (2013), aumenta a responsabilidade dos alunos e faz com que estes desenvolvam um forte compromisso perante o seu trabalho dentro do grupo. Além disso, "Os discentes têm de partilhar ideias, estratégias, soluções, mas também os problemas, as dificuldades e até receios que sentem perante o trabalho a desenvolver" (Ribeiro, 2013, p. 21).

No decorrer da unidade curricular de Prática de Ensino Supervisionada, a investigadora apercebeu-se que os alunos mostravam bastante satisfação quando desenvolviam atividades de grupo. Por uma questão de organização de sala de aula torna-se mais complicado gerir o trabalho de grupos de grande dimensão e, por isso recorre-se muitas vezes ao trabalho em grupos com apenas dois elementos (díade). No entanto, os pares não devem ser escolhidos pelos alunos, visto que em vez de se formar um par de trabalho, provavelmente irá tornar-se um par de amigos (Ludovino, 2012). Cabe então, ao professor a formação destes pares que é "fundamental para a obtenção de resultados nas explorações a serem propostas" (Trindade, 2010, p.31). A formação da díade por parte do professor pode ser aleatória, heterogénea ou homogénea. Entenda-se por uma díade homogénea aquela que é formada por alunos com aptidões semelhantes, enquanto por díade heterogénea aquela onde os alunos têm aptidões diferentes.

Segundo Maria Helena Pato (1995), citada por Ribeiro (2013), o professor deve formar pares heterogéneos, pois entre alunos de aptidões diferentes existe uma maior probabilidade de interajuda, bem como uma maior diversidade de métodos e hábitos de trabalho. Além disso, nestes pares de trabalho o aluno com melhores resultados acaba por ter a responsabilidade de ajudar o colega a ultrapassar dificuldades existentes na resolução de uma tarefa.

Segundo Ribeiro (2013), o papel assumido pelo professor na preparação das tarefas propostas e na orientação das mesmas, enquanto se encontram a ser desenvolvidas, é muito importante. No entanto, durante a aula o papel desempenhado pelo mesmo é muito discreto, mas não secundário. Para este mesmo autor, o docente deve "supervisionar todo o trabalho, deve incentivar e quando necessário aconselhar" (Ribeiro, 2013, p.26).

Neste estudo os alunos trabalharam em díade, no entanto, as díades já se encontravam formadas desde o início do ano, pelo conselho de turma. Visto que os alunos já estavam habituados a trabalhar com o respetivo colega, a investigadora decidiu respeitar essa formação de díades.

3. Método

Neste terceiro capítulo intitulado por Método, primeiramente, justificam-se as opções metodológicas tomadas ao longo desta investigação. Em seguida, faz-se a caracterização dos participantes do estudo e ainda se apresentam os instrumentos elaborados e utilizados para a recolha de dados.

3.1. Opções Metodológicas

Este estudo tem como objetivo analisar se o *GeoGebra* é um recurso facilitador do processo de estabelecimento das relações supracitadas, por parte dos alunos, e auxiliador na resolução das tarefas propostas. Para se cumprir esses mesmos objetivos optou-se por um estudo de natureza qualitativa. Bodgan & Biklen (1994) definem investigação qualitativa de acordo com as seguintes categorias:

- "a fonte direta de dados é o ambiente natural, constituindo o investigador o instrumento principal" (p. 47)

- "A investigação qualitativa é descritiva" (p. 48)

- "Os investigadores qualitativos interessam-se mais pelo processo do que simplesmente pelos resultados ou produtos" (p. 49)

- "Os investigadores qualitativos tendem a analisar os seus dados de forma indutiva. Não recolhem os dados ou provas com o objetivo de confirmar ou infirmar hipóteses" (p. 50)

- "O significado é de importância vital na abordagem qualitativa" (p. 50)

No caso desta investigação, pode dizer-se que se trata de uma investigação qualitativa, porque:

- os dados (produções escritas dos alunos, respostas dos alunos aos questionários e o preenchimento das grelhas de observação) foram recolhidos em ambiente de sala de aula numa turma do 10º ano de escolaridade e a investigadora foi o instrumento principal da investigação, pois o conhecimento da mesma sobre a turma permitiu uma melhor compreensão das produções escritas dos alunos e das suas atitudes perante o trabalho que estava a ser desenvolvido;

- Esta investigação considera-se descritiva pois os dados, como já foi referido, são as produções escritas dos alunos, as respostas dos mesmos aos questionários e ainda as grelhas de observação;

- Este estudo pretende analisar se o *GeoGebra* é um recurso facilitador do processo de estabelecimento das relações supracitadas, por parte dos alunos, e auxiliador na resolução das tarefas propostas e, portanto, o que interessa nesta investigação é o processo que os alunos foram desenvolvendo ao longo desta aprendizagem, os erros cometidos, as relações que efetuaram, as dúvidas, etc;

- Nesta investigação não se pretende refutar ou confirmar nenhuma hipótese previamente formulada;

- Esta investigação pretende também conhecer a opinião dos alunos quanto ao *software GeoGebra*. Mais concretamente, saber se eles o consideram um recurso auxiliador no processo de aprendizagem deste tópico.

Além de ser uma investigação de índole qualitativa, pode dizer-se que esta tem características de um estudo de caso, visto que:

> Um estudo de caso visa conhecer uma entidade bem definida como uma pessoa, uma instituição, um curso, uma disciplina, um sistema educativo, uma política ou qualquer outra unidade social. O seu objetivo é compreender em profundidade o "como" e os "porquês" dessa entidade, evidenciando a sua identidade e características próprias, nomeadamente nos aspetos que interessam ao pesquisador (Ponte, 2006, p. 4).

Merriam (1988), citado por Bodgan & Biklen (1994, p. 89), refere que um estudo de caso "consiste na observação detalhada de um contexto, ou indivíduo, de uma fonte de documentos ou de um acontecimento específico". João Pedro da Ponte (2006, p. 7) reforça também esta ideia dizendo que este tipo de estudo "baseia-se fortemente no trabalho de campo ou em análise documental". Ainda de acordo com este autor utiliza-se este estudo quando,

> [se pretende] compreender a especificidade de uma dada situação ou fenómeno, para estudar os processos e as dinâmicas da prática, com vista à sua melhoria, ou para ajudar um dado organismo ou decisor a definir novas políticas, ou ainda para

formular novas teorias. O seu objetivo fundamental é proporcionar uma melhor compreensão de um caso específico e ajudar a formular hipóteses de trabalho sobre o grupo ou a situação em causa (p. 16).

Assim sendo, pode concluir-se que este estudo é um estudo de caso, no entanto, este tipo de estudos pode seguir duas perspetivas distintas: a perspetiva interpretativa e pragmática (Ponte, 2006). No caso deste estudo de caso, conclui-se que segue uma perspetiva interpretativa, pois pretende-se compreender (este tema) na perspetiva dos participantes.

Tal como o nome indica se se está perante um estudo de caso, a seleção um ou mais casos deverá ser feita. Pode escolher-se apenas um caso ou múltiplos casos. A escolha desses casos pode ser feita pela positiva, pela negativa, pela excecionalidade ou pela neutralidade (Ponte, 2006).

Resumindo, o estudo aqui apresentado é um estudo de caso múltiplo, com 4 casos, que foram selecionados pela investigadora, tendo por base as produções escritas dos alunos, as suas respostas aos questionários e ainda as grelhas de observação que foram preenchidas pelas colegas de núcleo de estágio e pela orientadora cooperante. O processo de seleção destes casos será explicado no capítulo seguinte.

3.2. Participantes

Ao longo do ano letivo 2015/2016, a investigadora desenvolveu o seu estágio curricular, enquadrado na unidade curricular de Prática de Ensino Supervisionada, numa escola da região centro de Portugal. Para este estudo foram selecionados os alunos de uma turma do 10 º ano do curso científico-humanístico de Ciência e Tecnologias, dessa escola. A turma selecionada é composta por 28 alunos, dos quais 19 são do sexo feminino e apenas 9 alunos, do sexo masculino. De acordo com as informações recolhidas pelas estagiárias, ao longo do ano letivo, que se encontram descritas no portefólio elaborado na unidade curricular de Prática de Ensino Supervisionada, a maioria dos alunos desta turma possui hábitos de estudo e de trabalho, bem como um enorme sentido de responsabilidade e autonomia. Também, por observação das aulas de matemática e por conversas informais com a professora titular desta turma, conclui-se que o seu rendimento é bom.

Para o desenvolvimento deste estudo, os discentes foram divididos em 15 pares de trabalho, durante as três aulas lecionadas pela investigadora. Estes pares de trabalho foram constituídos de forma a que os alunos trabalhassem com o colega com que trabalharam durante o ano letivo nas aulas de matemática.

Além destes 28 participantes, que são considerados nesta investigação como participantes diretos, também a investigadora é considerada uma participante direta, pois foi ela quem lecionou as aulas onde se procedeu à recolha de dados para este estudo. No entanto, tanto a docente titular da turma como as duas estagiárias do mesmo núcleo de estágio da investigadora são consideradas participantes indiretas na investigação, uma vez que estavam presentes nestas aulas e ajudaram a investigadora a preencher as grelhas de observação e também a auxiliaram no esclarecimento de dúvidas que iam surgindo, por parte dos grupos de trabalho, durante a realização das tarefas propostas.

3.3. Técnicas e Instrumentos de Recolha de Dados

Para dar reposta aos objetivos deste estudo, recorreu-se a três técnicas de recolha de dados: a recolha documental, a inquirição e a observação. Em seguida justifica-se o facto de se ter optado por estas três técnicas de recolha de dados.

3.3.1. Recolha Documental

A recolha documental foi feita sob a forma de recolha de produções escritas de 6 tarefas elaboradas pelos participantes diretos a pares. Estas 6 tarefas foram elaboradas pela investigadora e consistiam em três tarefas exploratórias e três fichas de trabalho. Com estes instrumentos de recolha de dados pretendia-se recolher evidências para verificar se os alunos mobilizam competências desenvolvidas através de tarefas com o *GeoGebra* (fichas exploratórias) e as aplicam em tarefas de "lápis e papel" (fichas de trabalho). Além disso, com estas produções escritas também se pretendia verificar eventuais dificuldades que surgissem na aprendizagem deste tópico.

Como já se referiu anteriormente, a recolha de dados para esta investigação foi feita em três aulas de 90 minutos, lecionadas pela investigadora. A realização destas tarefas foi dividida por estas aulas, sendo que em cada uma delas se resolvia primeiramente uma ficha exploratória e em seguida uma ficha de trabalho, como é possível verificar pelos planos de aula disponíveis em anexo (*Anexo 1.1, Anexo 2.1* e *Anexo 3.1*).

Para resolverem as 3 fichas exploratórias os alunos tinham à sua disposição um computador onde poderiam utilizar o *software GeoGebra*. Já para resolverem as fichas de trabalho os alunos não podiam recorrer ao *software*.

Na primeira aula, como se pode verificar pelo plano de aula (*Anexo 1.1*), os alunos resolveram uma ficha exploratória 1 (FE1), *Anexo 1.2*, que tinha como objetivo que eles entendessem que transformação geométrica estava envolvida na relação entre os gráficos das funções $f(x)$ e $f(x)+k$, e entre os gráficos das funções $f(x)$ e $f(x-k), k \in \mathbb{R}$. Nesta mesma aula, e logo depois de resolverem a FE1 era dado aos alunos a ficha de trabalho 1 (FT1), *Anexo 1.3*, onde aplicavam os conhecimentos sobre o assunto que potencialmente teriam adquirido na execução das tarefas propostas na FE1.

Na segunda aula, os alunos resolveram também duas fichas, a ficha exploratória 2 (FE2) e a ficha de trabalho 2 (FT2), disponíveis nos *Anexos 2.2* e *2.3*, respetivamente. Estas duas fichas seguiam os mesmos moldes das fichas resolvidas na primeira aula, no entanto com a FE2 pretendia-se que os alunos entendessem que transformação geométrica estava envolvida na relação entre os gráficos das funções $f(x)$ e $kf(x), k \in \mathbb{R}^+\backslash\{0\}$, e entre os gráficos das funções $f(x)$ e $-f(x)$.

Na terceira, e última aula, os alunos também resolveram duas fichas de trabalho, a ficha exploratória 3 (FE3) e a ficha de trabalho 3 (FT3), disponíveis nos *Anexos 3.2* e *3.3*, respetivamente. Com estas fichas pretendia-se que os alunos identificassem que transformação estava envolvida na relação entre os gráficos das funções $f(x)$ e $f(kx)$. Também se pretendia que os alunos reconhecessem a relação existente entre os gráficos das funções $f(x)$ e $f(-x)$.

3.3.2. Inquirição

Outra das técnicas de recolha de dados utilizada foi a inquirição, sob a forma de questionários, que foram aplicados aos participantes deste estudo no final da terceira aula. Os questionários, disponíveis no *Anexo 4*, foram elaborados pela investigadora com o objetivo de saber a opinião dos discentes sobre as três aulas que foram utilizadas para a recolha de dados para este estudo. Além disso, a investigadora pretendia saber a opinião dos alunos sobre a importância da utilização do *GeoGebra* para a aprendizagem deste tópico. Com este questionário também foi possível saber a opinião dos alunos quanto à dinâmica de trabalho desenvolvido pelo grupo de trabalho (par) durante as três aulas.

3.3.3. Observação

A última técnica de recolha de dados utilizada foi a observação. Durante as três aulas lecionadas pela investigadora, as participantes indiretas estiveram a observar os grupos de trabalho quanto à sua dinâmica de trabalho. As observações foram registadas em grelhas de observação (*Anexo 5*), *checklist*, construídas pela investigadora. Além disso, nestas grelhas de observação também se registaram alguns aspetos achados relevantes durante as aulas, como dúvidas e algumas observações feitas pelos alunos.

4. Apresentação e Análise dos Dados

Neste capítulo procede-se à análise dos dados obtidos a partir das produções escritas dos alunos e das suas respostas aos questionários, completando-as com as informações obtidas através das grelhas de observação.

Para esta análise de dados foram tidas em conta as produções escritas dos pares de trabalho nas seis tarefas realizadas (três delas exploratórias com o auxílio do *GeoGebra*, e as outras três apenas com recurso a lápis e papel). Para selecionar os casos de estudo foi feita uma análise prévia de todas as produções escritas e de todas as respostas individuais ao questionário. Posteriormente, foram selecionados quatro pares de trabalho, que nesta investigação constituem os casos de estudo. Esses casos são caracterizados na secção seguinte.

4.1.Casos de Estudo

Como já foi referido, selecionaram-se quatro casos de estudo, que correspondem a quatro grupos de trabalho. Os grupos de trabalho são constituídos por dois elementos, que serão caracterizados no quadro seguinte, de acordo com o género de cada elemento e a classificação obtida no final do 2º período, do ano letivo 2015/16, numa escala de 0 a 20 valores.

Casos em Estudo	**Elemento 1**		**Elemento 2**	
	Género	**Classificação**	**Género**	**Classificação**
Grupo 1	Feminino	10	Feminino	15
Grupo 2	Feminino	16	Feminino	16
Grupo 3	Masculino	9	Masculino	15
Grupo 4	Feminino	11	Masculino	11

Tabela 1 - Caracterização dos casos em estudo em relação ao seu género e classificação

Analisando a tabela acima, pode dizer-se que dos casos de estudo selecionados, o grupo 2 e o grupo 4 são mais homogéneos a nível de classificações do que os grupos 1 e 3. No entanto, estes casos não foram apenas selecionados pelas suas classificações e género.

Ao analisar as produções escritas do grupo 1, constatou-se que tinha sido o único grupo de trabalho em toda a turma a identificar duas das transformações geométricas presentes na relação entre dois gráficos de funções, e daí ter sido selecionado pela sua excecionalidade e positividade. O grupo 2 foi selecionado por ser o único grupo na turma a referir nos questionários que não sabiam se gostariam de repetir este tipo de aulas, pois achavam que tendo aulas com esta estrutura se perdia muito tempo. Já o grupo 3 foi selecionado por ser um grupo representativo de grande parte da turma, ao nível das suas respostas. O grupo 4 foi selecionado por ser constituído por dois elementos que não participam ativamente nas aulas, no entanto, durante estas três aulas estiveram muito participativos e as suas produções escritas estão bastante completas.

Depois desta seleção dos casos de estudo, procedeu-se então a uma análise exaustiva das produções escritas destes quatro grupos de trabalho e das suas respostas aos questionários, que se apresenta na secção a seguir.

4.2.Apresentação e Análise dos Dados

Como já foi referido anteriormente, os objetivos desta investigação passam por: (i) analisar se os alunos mobilizam competências desenvolvidas através de tarefas com o *GeoGebra* e as aplicam em tarefas de "lápis e papel"; (ii) verificar eventuais dificuldades no estabelecimento da relação entre a transformação geométrica operada no gráfico de uma função com a correspondente modificação algébrica operada na forma como está definida, sempre que ambas as funções estejam definidas; (iii) analisar se os alunos consideram o *Geogebra* um recurso auxiliador no processo de aprendizagem deste tópico.

Para dar resposta aos dois primeiros objetivos, foram analisadas as produções escritas relativas a algumas questões que constam nas fichas exploratórias e nas fichas de trabalho. Esta análise vai ser dividida de acordo com a relação entre gráficos a estabelecer:

- Relação entre o gráfico de uma função f e os gráficos das funções $f(x)+k, k \in \mathbb{R}$;
- Relação entre o gráfico de uma função f e os gráficos das funções $f(x-k), k \in \mathbb{R}$;
- Relação entre o gráfico de uma função f e o gráfico da função $-f(x)$;
- Relação entre o gráfico de uma função f e o gráfico da função $f(-x)$;
- Relação entre o gráfico de uma função f e os gráficos das funções $kf(x), k \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$;

- Relação entre o gráfico de uma função f e os gráficos das funções $f(kx), k \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

As questões que constam nas fichas exploratórias, não serão todas analisadas. Serão apenas aqui analisadas aquelas onde os alunos tinham de fazer conjeturas, visto que as restantes questões eram de resposta direta através da observação do gráfico e todos os casos em estudo responderam corretamente.

Para dar resposta ao terceiro, e último, objetivo serão analisadas as respostas individuais dos alunos aos questionários. Na análise de dados que se segue, não são feitas referências às grelhas de observação, visto que como já foi explicado no capítulo anterior, elas serviram para tentar perceber qual a dinâmica de trabalho entre os pares. Como a análise se baseia na análise das tarefas realizadas em pares e como a dinâmica de trabalho entre os grupos foi semelhante, como é possível ver no *Anexo 5.1*, não se achou relevante diferenciar os pares em relação ao seu ambiente de trabalho.

4.2.1. Análise das produções escritas dos alunos

Relação entre o gráfico de uma função f e os gráficos das funções $f(x)+k, k \in \mathbb{R}$

A relação entre estes dois tipos de funções foi estudada com o auxílio do primeiro par de fichas de trabalho, FE1 e FT1. Da FE1 faz-se a análise das produções escritas relativas às duas questões: 1.4 e 1.5, ver figura seguinte:

1. Abre no computador o software GeoGebra. Representa graficamente, nesse software a função $f(x) = -2x^3 + 4x^2$ definida em $[-1,2]$.

1.1. Determina o domínio e o contradomínio da função f.
1.2. Recorrendo ao software Geogebra representa o gráfico de cada uma das funções:
a) $f(x)+1$ **b)** $f(x)+3$ **c)** $f(x)-2$

Para cada uma das funções anteriores indica o domínio e o contradomínio.

1.3. Explica como construir o gráfico da função $f(x)+6$, a partir do gráfico de uma função f?
1.4. Faz as experiências que achares necessárias e indica o domínio e o contradomínio da função $f(x)+h, h \in \mathbb{R}$.
1.5. Explica como construir o gráfico da função $f(x)+h, h \in \mathbb{R}$, a partir do gráfico de uma função f.

Figura 14 - Partes relevantes da questão 1 da FE1

Com a questão 1.4, esperava-se que os alunos chegassem à conclusão que $D_{f+h} = D_f$ e que $D'_{f+h} = [a+h, b+h]$, sendo $D'_f = [a, b]$. Com a questão 1.5, pretendia-se que os alunos concluíssem que o gráfico da função $f(x) + h$ é imagem do gráfico da função f pela translação vertical de vetor $\vec{u}(0, h)$.

Em relação à primeira questão apresentada, três dos casos em estudo chegaram à conclusão esperada, como evidencia a figura a seguir:

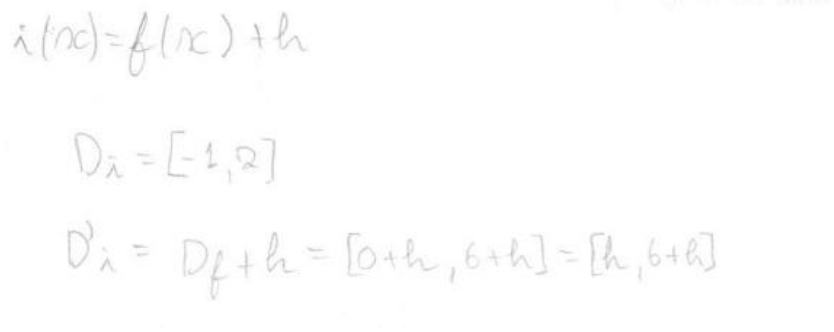


Figura 15 - Resposta do Grupo 4 à questão 1.4 da FE1

O outro caso em estudo, Grupo 2, como se pode analisar pela figura abaixo, não conseguiu determinar corretamente o contradomínio da função $f(x) + h$.

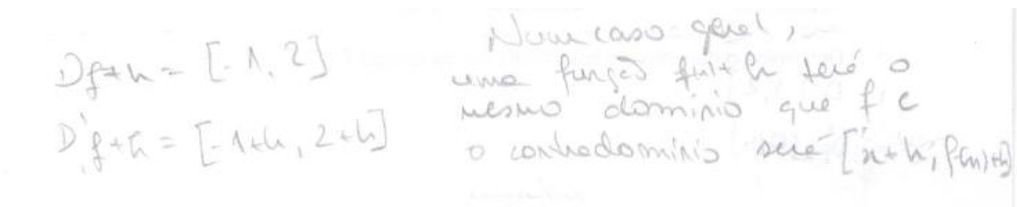


Figura 16 - Resposta do Grupo 2 à questão 1.4 da FE1

Note-se que as alunas, não consideram o contradomínio da função inicial para responderem a esta questão e, portanto, no caso deste grupo, Grupo 2, há evidências de que o grupo não conseguiu estabelecer a relação entre contradomínios.

Em relação à questão 1.5, todos os casos em estudo chegaram à conclusão esperada, no entanto apenas um caso, Grupo 1, conseguiu identificar essa relação como sendo uma translação vertical, apesar de haver alguma imprecisão de linguagem:

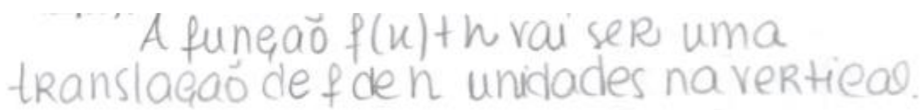


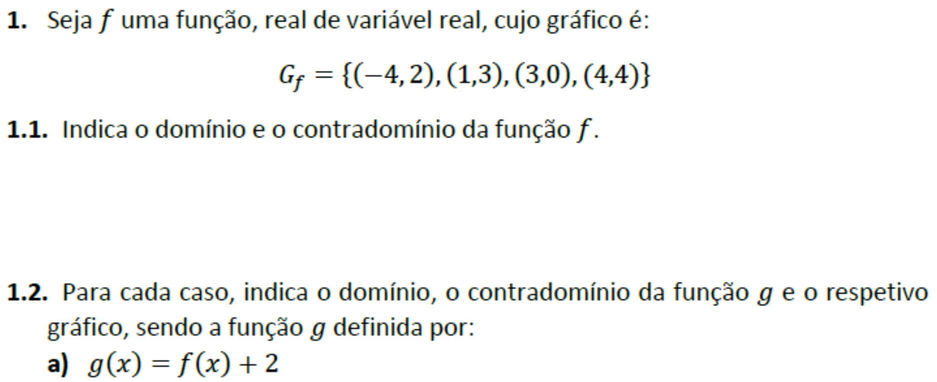
Figura 17- Resposta do Grupo 1 à questão 1.5 da FE1

Os restantes grupos, apesar de não identificarem essa relação como uma translação, entenderam o que se passava e conseguiram chegar a uma conjetura igualmente aceitável.


O gráfico da função $f(x)+h$ é igual ao gráfico da função f, mas as imagens aumentam h valores.

Figura 18 - Resposta do Grupo 4 à questão 1.5 da FE1

Procede-se agora à análise da questão 1.2, alínea a, da FT1, pois é a única, nessa ficha, que envolve apenas a relação entre as funções que está a ser analisada.


1. Seja f uma função, real de variável real, cujo gráfico é:

$$G_f = \{(-4,2),(1,3),(3,0),(4,4)\}$$

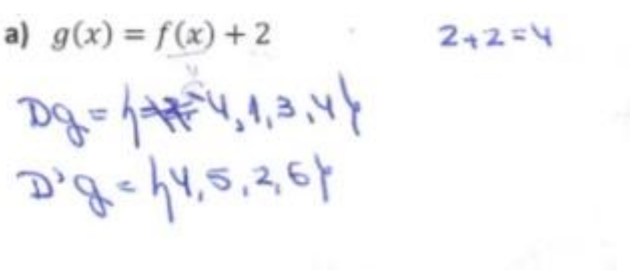
1.1. Indica o domínio e o contradomínio da função f.

1.2. Para cada caso, indica o domínio, o contradomínio da função g e o respetivo gráfico, sendo a função g definida por:

a) $g(x) = f(x) + 2$

Figura 19 – Partes relevantes da questão 1.2, alínea a), da FT1

Analisando as produções escritas relacionadas com estas questões, verifica-se que existem evidências de que os alunos perceberam a relação existente entre as funções $f(x)$ e $f(x)+k$, pois todos os grupos de trabalho conseguiram responder corretamente à questão. Repare-se que apesar de na FE1, o Grupo 2 não ter conseguido estabelecer a relação entre os contradomínios das funções, nesta ficha, consegue responder corretamente às questões propostas:


a) $g(x) = f(x) + 2$ $\quad 2+2=4$

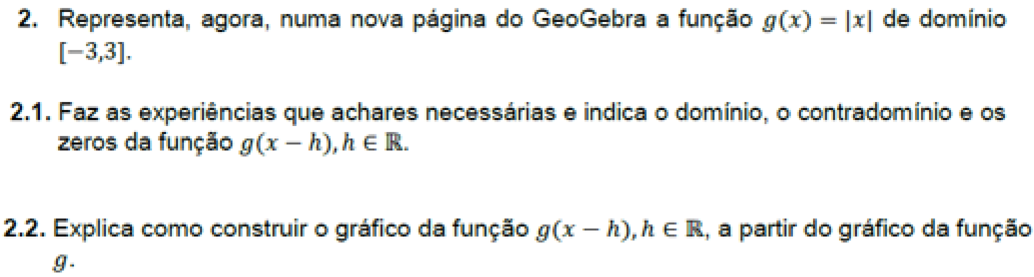
$D_g = \{-4,1,3,4\}$

$D'_g = \{4,5,2,6\}$

Figura 20 - Resposta do Grupo 2 à questão 1.2, alínea a), da FT1

Relação entre o gráfico de uma função f e os gráficos das funções $f(x-k), k \in \mathbb{R}$

Esta relação, tal e qual como a relação anterior, foi explorada pelos alunos com o auxílio do primeiro par de fichas, FE1 e FT1, mais concretamente com as questões 2.1 e 2.2.



2. Representa, agora, numa nova página do GeoGebra a função $g(x) = |x|$ de domínio $[-3,3]$.

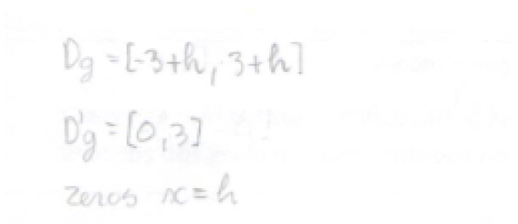
2.1. Faz as experiências que achares necessárias e indica o domínio, o contradomínio e os zeros da função $g(x-h), h \in \mathbb{R}$.

2.2. Explica como construir o gráfico da função $g(x-h), h \in \mathbb{R}$, a partir do gráfico da função g.

Figura 21 - Questão 2 da FE1

Com a questão 2.1, esperava-se que os discentes percebessem que $D'_g = D'_{g(x-h)} = [0,3]$ e que $D_{g(x-k)} = [-3+h, 3+h]$. Relativamente à relação entre os gráficos das funções $g(x)$ e $g(x-h)$, esperava-se que os alunos, através da questão 2.2. concluíssem que o gráfico da função $g(x-h)$ é imagem do gráfico de g por uma translação horizontal associada ao vetor $\vec{u}$(h,0).

Para verificar se existem evidências de os alunos terem conseguido chegar a estas conclusões analisa-se as produções escritas dos casos em estudo, relativamente a estas questões. Começa-se então pela análise da questão 2.1, onde existem evidências de três dos casos em estudo (Grupo 4, Grupo 1 e Grupo 3) terem entendido qual a relação entre o domínio e o contradomínio das duas funções estudadas, visto que responderam corretamente a esta questão.



$D_g = [-3+h, 3+h]$

$D'_g = [0,3]$

zeros $x = h$

Figura 22 - Resposta do Grupo 4 à questão 2.1 da FE1

O Grupo 2 consegue estabelecer a relação entre os contradomínios corretamente, mas a relação existente entre os domínios não parece ter sido atingida totalmente. O grupo é contraditório na sua resposta:

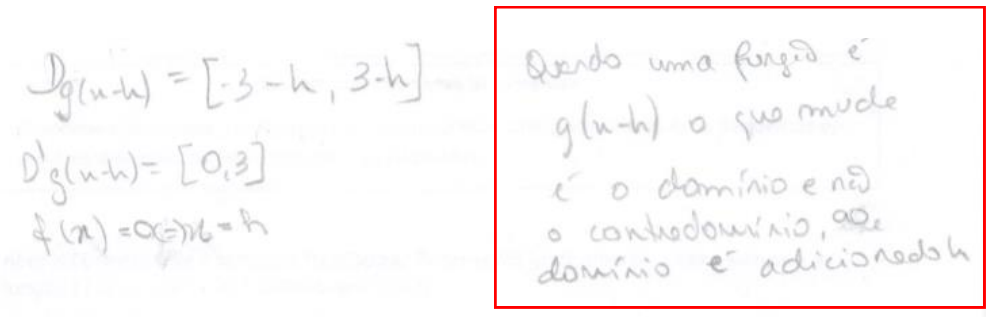


Figura 23 - Resposta do Grupo 2 à questão 2.1 da FE1

Como se pode constatar pela *Figura 23*, as alunas não indicaram corretamente qual o domínio da função $g(x-h)$. No entanto, no texto ao lado, salientado pelo caixilho, as alunas ressaltam o facto de que para calcular o domínio de uma função $g(x-h)$, tem de se adicionar ao domínio h unidades, o que não fizeram na sua resposta.

No que toca à questão 2.2, os discentes parecem entender que o gráfico de $g(x-h)$ se vai deslocar para a direita ou para a esquerda, consoante o valor de h, como se observava na figura 24.

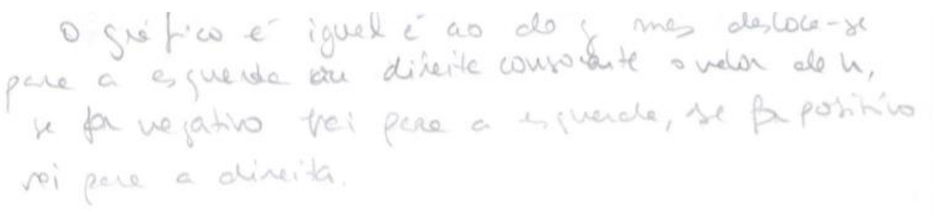


Figura 24 - Resposta do Grupo 2 à questão 2.2 da FE1

No entanto, apenas um dos casos em estudo, Grupo 1, conseguiu concluir que a transformação geométrica envolvida era uma translação:

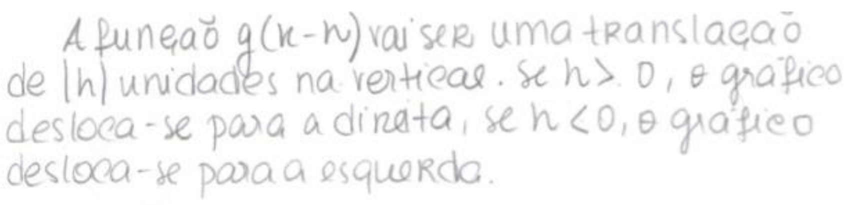


Figura 25 - Resposta do Grupo 1 à questão 2.2 da FE1

Como se pode verificar pela figura anterior, as alunas identificaram a transformação envolvida como sendo uma translação vertical e não uma translação horizontal, como seria correto. Mas em seguida, reconhecem que o gráfico da função se deslocará para a direita e para a esquerda, e portanto, o facto de terem identificado mal a translação parece ter sido um lapso de linguagem. Note-se também que, para que a translação estivesse correta e formalmente identificada, deveriam ter-lhe associado um vetor. Por isso a resposta das alunas, é também pouco rigorosa (matematicamente).

Analisa-se agora as questões 1.2, alíneas b e c, da FT1, pois são as únicas questões que envolvem apenas a relação entre estas funções.

1. Seja f uma função, real de variável real, cujo gráfico é:

$$G_f = \{(-4,2),(1,3),(3,0),(4,4)\}$$

1.2. Para cada caso, indica o domínio, o contradomínio da função g e o respetivo gráfico, sendo a função g definida por:

b) $g(x) = f(x+1)$

c) $g(x) = f(x-4)$

Figura 26 - Questão 1.2, alíneas b e c, da FT1

Os Grupos 1 e 3 responderam corretamente a estas duas alíneas. O Grupo 4, apesar de ter evidenciado na FE1 ter percebido a relação envolvida entre as funções, ver *Figura 21*, não conseguiu responder com conexão a esta questão.

b) $g(x) = f(x+1)$

$D_g = \{-3, 2, 4, 5\}$

$D'_g = \{0, 2, 3, 4\}$

$G_g = \{(-3,2), (2,3), (4,0), (5,4)\}$

c) $g(x) = f(x-4)$

$D_g = \{-8, -3, -1, 0\}$

$D'_g = \{0, 2, 3, 4\}$

$G_g = \{(-8,2), (-3,3), (-1,0), (0,4)\}$

Figura 27 - Resposta do Grupo 4 à questão 1.2 da FT1

Repare-se que na *Figura 21*, pode-se verificar que os alunos consideram que $D_{f(x-k)} = [a+k, b+k]$, sendo $D_f = [a,b]$, e consideram que $D'_{f(x-k)} = D'_f$. No entanto, não parecem ter tirado partido desse conhecimento prévio para o aplicarem, adaptando, à tarefa em causa. Na alínea c), em vez de adicionarem 4 unidades ao domínio da função f, os alunos subtraíram 4 unidades. Na alínea b), procederam de igual forma, somando uma unidade ao domínio, em vez de subtraírem. Em relação aos domínios das funções os alunos evidenciam terem percebido que estes se mantinham iguais. O Grupo 2, nesta questão, cometeu o mesmo tipo de erro do Grupo 4.

Relação entre o gráfico de uma função f e os gráficos das funções $kf(x), k \in \mathbb{R}^+$

Para estudarem a relação entre as funções referidas acima, os alunos resolveram o segundo par de tarefas (FE2 e FT2). Na ficha exploratória, pretendia-se que os alunos concluíssem que se $P(x, y)$ é um ponto do gráfico de f, então o ponto $P'(x, ky)$ é um ponto do gráfico de $kf(x)$. Analisa-se agora, as produções dos alunos relativas à questão 1.4 que se apresenta abaixo.

1. Considera a função real de variável real f, definida por $f(x) = x^2 - 4x$. Com o auxílio do software Geogebra, representa a função f graficamente.

1.1. Determina a(s) coordenada(s) do(s) zero(s) e do(s) extremo(s) da função f.

1.2. Representa, agora os gráficos das funções e determina as coordenadas do(s) extremo(s) e do(s) zero(s) de cada função.

a) $g(x) = 2f(x)$

b) $h(x) = 4f(x)$

c) $i(x) = \frac{1}{2}f(x)$

d) $s(x) = \frac{1}{4}f(x)$

1.3. Considera que $P(x, y)$ é um ponto do gráfico de f. Seja $g(x) = 2f(x)$. Qual é a ordenada do ponto de abcissa x no gráfico de g?

1.4. Considera que $P(x, y)$ é um ponto do gráfico de f. Seja $g(x) = kf(x), k > 0$. Qual é a ordenada do ponto de abcissa x no gráfico de g?

Sugestão: Para responderes a esta questão podes começar por particularizar as coordenadas do ponto P.

Figura 28 - Partes relevantes da questão 1 da FE2

Apenas se analisa esta questão, visto que é aquela onde os alunos concluíram qual a relação entre as ordenadas dos pontos de f e de $kf(x)$, para $k > 0$ arbitrário.

Todos os casos em estudo conseguiram concluir que a ordenada do ponto de abcissa x no gráfico de g era ky, como se evidencia na figura.

a ordenada irá ser sempre Ky, K>0

Figura 29 - Resposta do Grupo 3 à questão 1.4 da FE2

Com o objetivo de verificar se os alunos mobilizaram os conhecimentos adquiridos com a FE2, analisa-se as alíneas a) e b) da FT2.

1. Na figura está representada graficamente a função f, real de variável real, que admite:

- Domínio: $[2, 6]$
- Contradomínio: $[-3, 3]$
- Zeros: 3 e 5

Indica o domínio, o contradomínio e os zeros da função g definida por:

a) $g(x) = 2f(x)$

b) $g(x) = \frac{1}{2}f(x)$

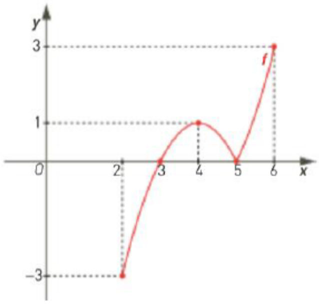
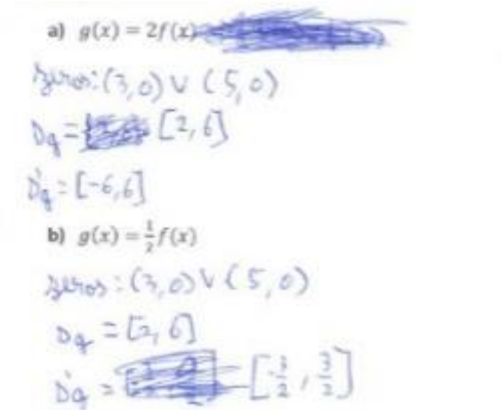


Figura 30 - Questão 1, alínea a) e b), da FT2

Por questões de falta de tempo, apenas dois dos casos analisados, Grupos 2 e 3, responderam a esta questão. Esses dois grupos responderam corretamente a estas questões. Na figura abaixo, pode-se encontrar a resposta do Grupo 3 a esta questão.



a) $g(x) = 2f(x)$

Zeros: $(3,0) \vee (5,0)$

$D_g = [2,6]$

$D'_g = [-6,6]$

b) $g(x) = \frac{1}{2}f(x)$

Zeros: $(3,0) \vee (5,0)$

$D_g = [2,6]$

$D'_g = [-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}]$

Figura 31 - Resposta do Grupo 3 à questão 1, alíneas a e b, da FT2

Relação entre o gráfico de uma função f e os gráficos das funções $-f(x)$

Para estudar esta relação os alunos tiveram o auxílio da FE2 e da FT2. Com a FE2, pretendia-se que os alunos chegassem à conclusão que o gráfico da função $-f(x)$ é imagem do gráfico de f pela reflexão de eixo Ox. Para ver se os alunos chegaram ou não a esta conclusão analisa-se a questão 1.6 da FE2.

1. Considera a função real de variável real f, definida por $f(x) = x^2 - 4x$. Com o auxílio do software Geogebra, representa a função f graficamente.

1.5. Ao longo desta tarefa temos vindo a estudar a relação entre o gráfico da função $f(x)$ e o gráfico da função $g(x) = kf(x), k \in \mathbb{R}_0^+$. Considera agora que $k = -1$.
Representa graficamente a função g e, determina as coordenadas do(s) zero(s) e do(s) extremo(s) da mesma.

1.6. Faz as experiências que achares necessárias e, explica como construir o gráfico da função $-f(x)$, a partir do gráfico de uma função f?

Figura 32 - Partes relevantes da questão 1 da FE2

Pelas respostas dadas pelos alunos a esta questão, parece que todos entenderam que de facto a função $-f(x)$ sofria uma reflexão de eixo Ox, em relação à função f. Os Grupos 1 e 4 identificaram a transformação geométrica envolvida corretamente, como é possível observar pela resposta de um dos grupos presente na figura abaixo.

Obtemos o gráfico $-f(x)$, com uma reflexão do gráfico de $f(x)$, segundo o eixo Ox.

Figura 33 - Resposta do Grupo 4 à questão 1.6 da FE2

O Grupo 2 apesar de dizer que “O gráfico terá concavidade oposta”, não identifica esta transformação como uma reflexão.

$D'_f = [-4, +\infty[$

$-f(x) = -[-4, +\infty[$
$=]-\infty, 4]$

O gráfico terá concavidade oposta ~~[illegible]~~ continuando com os mesmos zeros e o mínimo absoluto passa a máximo absoluto tendo a sua ordenada simétrica e o novo D'_f ~~[illegible]~~ $D'_{f_1} =]-\infty, 4]$.

Figura 34 - Resposta do Grupo 2 à questão 1.6 da FE2

Também o Grupo 3, não consegue identificar a transformação presente como é possível ver na imagem abaixo.

A função f irá inverter-se assim como os valores de y que são positivos em f passam a ser negativos em $-f(x)$

Figura 35 - Resposta do Grupo 3 à questão 1.6 da FE2

Para se verificar se os alunos conseguiram mobilizar estes conhecimentos aprendidos durante a execução da FT2, analisa-se agora a alínea c) da questão 1 da FT2.

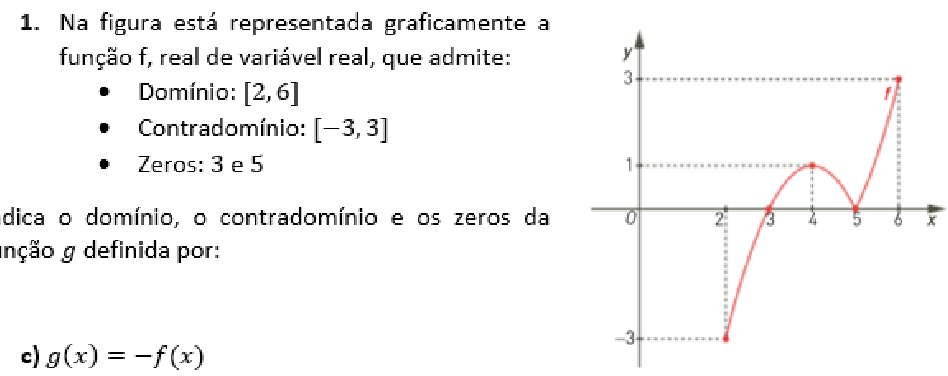


Figura 36 - Partes relevantes da questão 1 da FT2

Tal e qual como aconteceu nos itens analisados anteriormente, apenas dois grupos, Grupos 2 e 3, conseguiram responder a esta questão e ambos responderam corretamente. Na figura abaixo, está um exemplo da resposta de um dos grupos a esta questão:

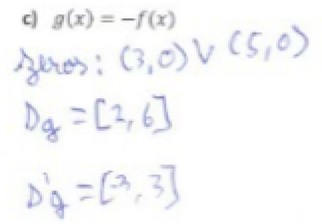


Figura 37 - Resposta do Grupo 3 à alínea c da FT2

De acordo com as respostas destes dois grupos, parecem existir evidências de que conseguiram mobilizar os conhecimentos aprendidos durante a execução da FE2 e aplica-los nesta alínea da FT2.

Relação entre o gráfico de uma função $\boldsymbol{f}$ e os gráficos das funções $\boldsymbol{f(kx)}, \boldsymbol{k} \in \mathbb{R}^+$

Para estudarem esta relação os alunos resolveram o terceiro, e último, par de tarefas (FE3 e FT3). A conclusão que se esperava a que os alunos chegassem era de que se $P(x, y)$ é um ponto do gráfico de f, então $P'\left(\frac{x}{k}, y\right)$ é um ponto do gráfico de $f(kx)$. Era pedido aos alunos que explicitassem esta conclusão na questão 1.6 da FT3.

1. Considera a função real de variável real f, definida por $f(x) = x^2 - 6x + 8$. Com o auxílio do software Geogebra, representa a função f graficamente.

   1.3. Representa, agora os gráficos das funções e determina as coordenadas do(s) ponto(s) onde a função g atinge extremo(s) e zero(s) .

   a) $g(x) = f(2x)$
   b) $h(x) = f(3x)$
   c) $i(x) = f\left(\frac{1}{2}x\right)$
   d) $s(x) = f\left(\frac{1}{3}x\right)$

   1.4. Considera que $P(x, y)$ é um ponto do gráfico de f. Seja $g(x) = f(3x)$. Qual é a abcissa do ponto de ordenada y no gráfico de g?

   1.5. Considera que $P(x, y)$ é um ponto do gráfico de f. Seja $g(x) = f\left(\frac{1}{2}x\right)$. Qual é a abcissa do ponto de ordenada y no gráfico de g?

   1.6. Considera que $P(x, y)$ é um ponto do gráfico de f. Seja $g(x) = f(kx), k > 0$. Qual é a abcissa do ponto de ordenada y no gráfico de g?

   Sugestão: Para responderes a esta questão podes começar por particularizar as coordenadas do ponto P.

Figura 38 - Partes relevantes da questão 1 da FE3

Assim, analisa-se agora as produções escritas dos casos em estudo relativamente a esta questão. O Grupo 3 não conseguiu responder corretamente a esta questão, pois segundo os alunos a abcissa do ponto iria ser multiplicada por k.

A abcissa será multiplicada por K,
K > 0.

Figura 39 - Resposta do Grupo 3 à questão 1.6 da FE3

O Grupo 1, dividiu a sua resposta em dois casos, o primeiro onde $k > 1$ e o segundo onde $0 < k < 1$. Para o caso de $k > 1$, a resposta dada está correta, como se pode verificar na figura abaixo. No entanto para o outro caso, a conclusão das alunas não é válida. Considera-se, portanto, que a resposta do Grupo 1, está parcialmente correta.

se $K>1 \longrightarrow P\left(\frac{x}{K}, y\right)$
se $0<K<1 \longrightarrow P(Kx, y)$

Figura 40 - Resposta do Grupo 1 à questão 1.6 da FE3

Quanto aos outros dois grupos, Grupos 2 e 4, conseguiram responder a esta questão corretamente, como se pode ver na Figura 41, onde está apresentada a resposta de um destes grupos.

$$g(x) = f(kx) \Leftrightarrow f(x) = g\left(\frac{x}{k}\right)$$

$$P\left(\frac{x}{k}, y\right), \; k > 0$$

Figura 41 - Resposta do Grupo 4 à questão 1.6 da FE3

Para se verificar se os alunos conseguiram mobilizar estes conhecimentos para a FT3, analisa-se as alíneas a) e b) da questão 1.1 dessa mesma ficha.

1. Dada uma função f sabe-se que:

$$G_f = \{(-4,-1),(-3,2),(1,3),(2,5)\}$$

1.1. Para cada caso, determina o gráfico da função g, definida por:

a) $g(x) = f\left(\frac{x}{2}\right)$

b) $g(x) = f(3x)$

Figura 42 - Questão 1.1, alíneas a) e b), da FT3

Curiosamente nesta questão, o Grupo 3, que não tinha chegado a uma conclusão correta da FE3, consegue responder corretamente às questões analisadas como mostra na figura.

a) $g(x) = f\left(\frac{x}{2}\right)$

$$G_g = \{(-8,-1),(-6,2),(2,3),(4,5)\}$$

b) $g(x) = f(3x)$

$$G_g = \{(-\tfrac{4}{3},-1),(-1,2),(\tfrac{1}{3},3),(\tfrac{2}{3},5)\}$$

Figura 43 - Resposta do Grupo 3 à questão 1.1. da FT3

Também o Grupo 2 responde corretamente a estas questões. No entanto, os Grupos 1 e 4, que tinham chegado a conclusões corretas na FE3 evidenciam não ter mobilizado os conhecimentos potencialmente adquiridos, pois não conseguiram responder corretamente a esta questão.

a) $g(x) = f\left(\frac{x}{2}\right)$

$G_f = \{(-4,-2),(-3,4),(1,6),(2,10)\}$

b) $g(x) = f(3x)$

$G_f = \{(-4,-\frac{4}{3}),(-3,\frac{2}{3}),(1,1),(2,\frac{5}{3})\}$

Figura 44 - Resposta do Grupo 1 à questão 1.1. da FT3

Repare-se que segundo, o que os Grupos 1 e 4, concluíram (ver *Figura 39*), no caso da alínea a) teriam de multiplicar todas as abcissas dos pontos por 2, no entanto estes grupos dividiram essas mesmas abcissas por 2.

Relação entre o gráfico de uma função f e os gráficos das funções $f(-x)$

Para estudarem esta última relação entre funções os alunos também resolveram a FE3 e FT3. Mas desta vez, na FE3 analisa-se apenas a questão 1.8, ver figura abaixo.

1. Considera a função real de variável real f, definida por $f(x) = x^2 - 6x + 8$. Com o auxílio do software Geogebra, representa a função f graficamente.

1.7. Ao longo desta tarefa temos vindo a estudar a relação entre o gráfico da função $f(x)$ e o gráfico da função $g(x) = f(kx), k \in \mathbb{R}_0^+$. Considera agora que $k = -1$.
Representa graficamente a função g e, determina as coordenadas do(s) ponto(s) onde a função atinge zero(s) e extremo(s).

1.8. Faz as experiências que achares necessárias e, explica como construir o gráfico da função $f(-x)$, a partir do gráfico de uma função f?

Figura 45 - Partes relevantes da questão 1 da FE3

Com a questão 1.8. pretendia-se que os alunos concluíssem que o gráfico da função $f(-x)$ é imagem do gráfico da função f por uma reflexão de eixo Oy. Analisando as produções escritas dos alunos observa-se que apenas o Grupo 3 não conseguiu identificar a transformação geométrica envolvida como sendo uma reflexão de eixo Oy.

Invertem-se as abcissas de todos os pontos.

Figura 46 - Resposta do Grupo 3 à questão 1.8 da FE3

Os alunos poderão ter percebido o que se passava com os gráficos das funções, no entanto a resposta dada não mostra evidências disso. Para completar a análise desta resposta dos alunos, analisa-se a resposta deles à questão 1.2, alínea b) da FT3, onde tinham de aplicar os conhecimentos potencialmente adquiridos na resposta à questão 1.8 da FE3.

1. Dada uma função f sabe-se que:

$$G_f = \{(-4,-1), (-3,2), (1,3), (2,5)\}$$

1.2. Esboça o gráfico da função h, definida por:

a) $h(x) = -f(x)$

Figura 47 - Partes relevantes da questão 1 da FT3

Todos os grupos de trabalho conseguiram responder corretamente a esta questão. Um exemplo de resposta dos alunos a esta questão encontra-se na figura abaixo:

Figura 48 - Resposta do Grupo 3 à questão 1.2, alínea b), da FT3

Pela observação da resposta dada, pode-se dizer que poderão existir evidências de que os alunos são capazes de esboçar o gráfico de $f(-x)$, a partir do conhecimento do gráfico de $f(x)$.

4.2.2. Análise dos Questionários

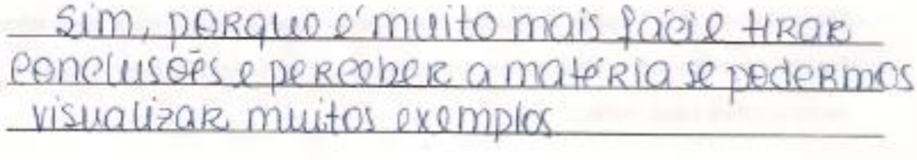
Como já foi referido anteriormente o objetivo principal de se ter elaborado os questionários foi saber a opinião dos discentes acerca do *software* utilizado. Mais concretamente, pretendia-se saber se o GeoGebra era um recurso auxiliador na aprendizagem deste tópico. Para se perceber qual a opinião dos alunos em relação a isto, analisa-se três das questões que constavam no questionário. Estas questões foram escolhidas, pois eram as únicas de resposta aberta onde os alunos podiam dar a sua opinião livremente e também porque eram as únicas focadas no objetivo principal referido acima. Passa-se à apresentação dessas três questões:

Questão 1: Consideras que as tarefas realizadas sem o auxílio do *GeoGebra* são mais difíceis de resolver do que as realizadas com o auxílio desse mesmo *software*? Porquê?
Questão 2: Consideras que a resolução de tarefas com o auxílio do *GeoGebra* foi essencial para a tua aprendizagem? Porquê?

Questão 3: Havendo oportunidade, gostarias de ter novamente aulas com esta estrutura? Indica os principais motivos.

Em seguida procede-se à análise das respostas a estas questões dividindo-as por grupos.

Começando pelo Grupo 1, pode-se dizer que os dois elementos consideram que as tarefas resolvidas sem o auxílio do *GeoGebra* são mais difíceis de resolver, pois não conseguem visualizar o gráfico das funções. Ambas consideram que o software utilizado foi essencial para a aprendizagem do tópico Transformações de Gráficos de Funções. A resposta de um dos elementos deste grupo à questão 2 encontra-se representada na figura abaixo:



Sim, porque é muito mais fácil tirar conclusões e perceber a matéria se podermos visualizar muitos exemplos

Figura 49 - Resposta de um elemento do Grupo 1 à questão 2

No que toca à terceira questão, os dois elementos do Grupo 1, gostariam de repetir esta experiência e apontam como principais motivos, o facto de serem "aulas mais divertidas", de se conseguirem “ajudar mutuamente” e consideram que com este tipo de aulas torna “mais fácil a aprendizagem”.

Em relação ao Grupo 2, um dos elementos, Elemento 1, acha que as tarefas sem o auxílio do *GeoGebra* não são mais difíceis de resolver do que as tarefas sem o auxílio do *software,* como se pode verificar pela resposta dada, apresentada em baixo:

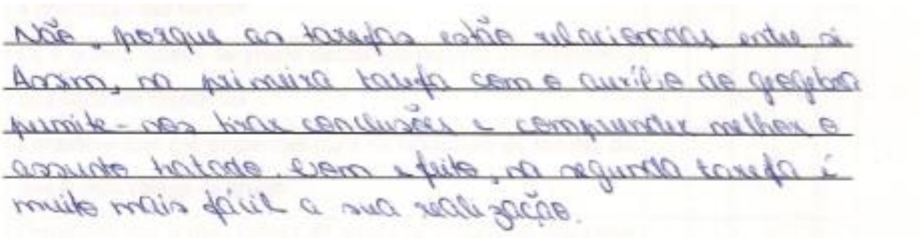

Não, porque as tarefas estão relacionadas entre si. Assim, na primeira tarefa com o auxílio do geogebra permite-nos tirar conclusões e compreender melhor o assunto tratado. Sendo efeito, na segunda tarefa é muito mais fácil a sua realização.

Figura 50 - Resposta do Elemento 1 do Grupo 2 à questão 1

O outro elemento do Grupo 2, tem uma opinião contrária pois “com o *GeoGebra* temos uma visão melhor da função, conseguindo completar as questões com mais precisão”. No que diz respeito à questão 2, os dois elementos deste grupo também apresentam opiniões contrárias. O Elemento 1, considera que a utilização do *GeoGebra* não foi essencial, no entanto a discente considera que o *software* a ajudou a perceber as transformações envolvidas na relação entre as funções. O outro elemento do grupo, considera que o *software* foi essencial, pois tornou a aprendizagem do tópico mais fácil. Apesar de terem opiniões diferentes em relação às duas primeiras questões, na terceira questão, ambas consideram que não sabem se gostariam de ter aulas com esta estrutura, pois segundo ambas, perde-se muito tempo, apesar de perceberem “bem a matéria”. Uma das respostas das alunas segue-se na figura abaixo:

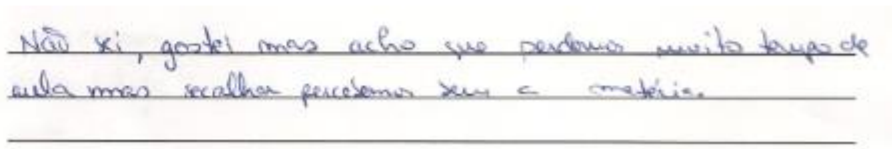

Não sei, gostei mas acho que perdemos muito tempo de aula mas se calhar percebemos bem a matéria.

Figura 51 - Resposta de um elemento do Grupo 2 à questão 3

Quanto às respostas do Grupo 3 ao questionário, pode-se dizer que os dois elementos deste grupo consideram que as tarefas resolvidas sem o auxílio do *GeoGebra* não são mais difíceis de resolver do que as realizadas com o auxílio do *software*. Uma das razões apontadas, é o facto de as tarefas previamente executadas com o *GeoGebra* lhes permitirem tirar conclusões, o que os vai auxiliar depois na resolução das fichas de trabalho sem o auxílio do *software*. No que diz respeito à questão 2, um dos elementos do grupo, Elemento 1, considera que o auxílio do *GeoGebra* "não foi essencial mas ajudou imenso". O Elemento 2 deste grupo, considera que o *software* foi essencial para a sua aprendizagem. Em relação à questão 3, ambos, gostariam de repetir este tipo de aulas. A resposta do Elemento 2 a esta questão apresenta-se na figura abaixo:

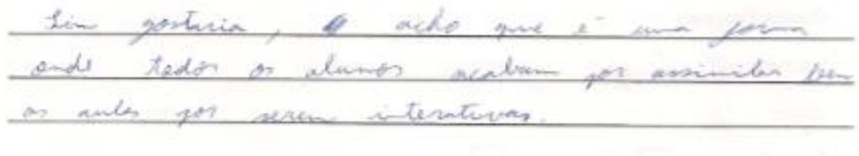

Sim gostaria, e acho que é uma forma onde todos os alunos acabam por assimilar bem as aulas por serem interativas.

Figura 52 - Resposta de um elemento do Grupo 3 à questão 3

Para finalizar esta análise das respostas dos alunos aos questionários, procede-se à análise das respostas do Grupo 4. Em relação à questão 1, os dois elementos do grupo, concordam que as tarefas sem o auxílio do *software* são mais difíceis de resolver do que as tarefas com o auxílio do mesmo. Apontam como principal fator, o facto de com o *software* terem a possibilidade de "visualizar os gráficos". A resposta de um dos elementos deste grupo encontra-se na figura abaixo:

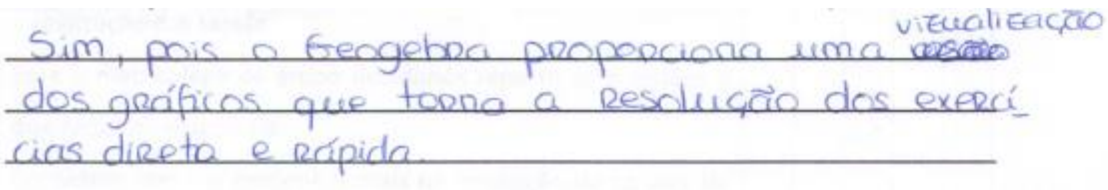

Sim, pois o Geogebra proporciona uma visualização dos gráficos que torna a resolução dos exercícios direta e rápida.

Figura 53 - Resposta de um elemento do Grupo 4 à questão 1

No que se refere à questão dois, ambos concordam que o auxílio do *GeoGebra* foi essencial para aprendizagem do tópico em estudo. Estes dois elementos, também gostariam de ter novamente aulas com a estrutura destas três aulas. Os alunos consideram que nestas têm uma autonomia de trabalho maior. A resposta de um dos elementos deste grupo apresenta-se abaixo:

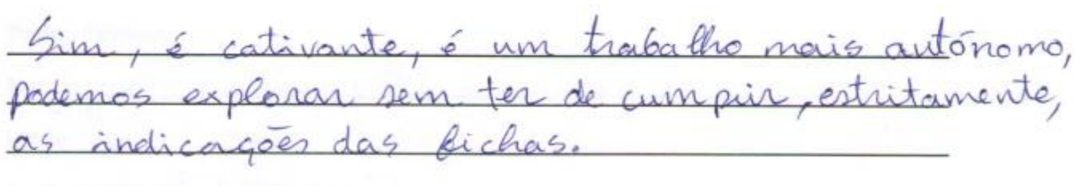

Sim, é cativante, é um trabalho mais autónomo, podemos explorar sem ter de cumpir, estritamente, as indicações das fichas.

Figura 54 - Resposta de um elemento do Grupo 4 à questão 3

4.3.Análise Sumária Global e por Grupo

Através da análise feita anteriormente, parecem haver evidências de que os alunos do Grupo 1 tenham conseguido entender a relação entre o gráfico da função $f(x)$ e os gráficos das funções $f(x)+k$, $f(x-k)$ e $f(-x)$. No estudo destas três relações os alunos parecem ter conseguido mobilizar os conhecimentos potencialmente adquiridos nas fichas exploratórias e aplica-los nas fichas de trabalho propostas. Este grupo parece ter conseguido entender qual a relação entre o gráfico da função $f(x)$ e os gráficos das funções $kf(x)$ e $-f(x)$. No entanto, nada se pode dizer acerca da mobilização e aplicação de conhecimentos potencialmente adquiridos, uma vez que este grupo não realizou a FT2. Os elementos deste grupo mostraram ter sentido mais dificuldades no estabelecimento da relação entre os gráficos das funções $f(x)$ e $f(kx)$.

Tendo em conta as respostas do Grupo 2, pode-se dizer que as alunas mostraram sentir mais dificuldades no estabelecimento da relação entre os gráficos das funções $f(x)$ e $f(x-k)$. Existem evidências de terem conseguido mobilizar os conhecimentos potencialmente adquiridos nas fichas exploratórias e aplicá-los nas fichas de trabalho que envolvem as relações entre o gráfico da função $f(x)$ e os gráficos das funções $kf(x)$, $f(kx)$ e $f(-x)$. No que toca às relações entre o gráfico da função da função $f(x)$ e os gráficos das funções $f(x)+k$ e $-f(x)$, apesar de as alunas não terem conseguido chegar a conclusões aceitáveis nas fichas exploratórias, responderam corretamente às questões das fichas de trabalho.

Os elementos do Grupo 3, parecem ter entendido qual a relação presente entre o gráfico da função $f(x)$ e os gráficos das funções $f(x)+k$, $f(x-k)$ e $kf(x)$. Os alunos chegaram a conclusões corretas nas fichas exploratórias, que envolvem estas relações, e parecem conseguir aplicar as conclusões a que chegaram nas fichas de trabalho. Estes alunos parecem ter sentido mais dificuldades no estabelecimento das relações entre o gráfico da função $f(x)$ e os gráficos das funções $-f(x)$, $f(-x)$ e $f(kx)$. Apesar de nas fichas exploratórias, para estas relações, não terem chegado a conclusões aceitáveis, nas fichas de trabalho os alunos responderam às questões corretamente.

Os alunos que constituem o Grupo 4 parecem ter conseguido mobilizar os conhecimentos potencialmente adquiridos nas fichas exploratórias e aplicá-los nas fichas de trabalho no que toca às relações entre o gráfico da função $f(x)$ e os gráficos das funções $f(x+k)$ e $f(-x)$. No que se refere às relações entre o gráfico da função $f(x)$ e os gráficos das funções $kf(x)$ e $-f(x)$, os discentes chegaram a conclusões válidas nas fichas exploratórias, no entanto não realizaram as fichas de trabalho, não se podendo dizer nada sobre a mobilização e aplicação dessas conclusões. Já nas relações entre o gráfico da função $f(x)$ e os gráficos das funções $f(x-k)$ e $f(kx)$, os alunos apesar de chegarem a conclusões válidas nas fichas exploratórias, com o auxílio do *GeoGebra*, não é visível que os tenham conseguido mobilizar e aplicar nas fichas de trabalho.

Em resumo, com a análise das produções escritas tanto das fichas exploratórias como das fichas de trabalho, pode-se dizer que os alunos no geral conseguiram mobilizar os conhecimentos potencialmente adquiridos nas fichas exploratórias e aplica-los nas fichas de trabalho. No entanto, parece que sentiram mais dificuldades nas relações entre funções $f(x)$ e $f(x-k)$, e também na relação entre $f(x)$ e $f(kx)$. Através da análise dos questionários conclui-se que a maior parte dos alunos, inquiridos, consideram as aulas com esta dinâmica uma mais-valia para a sua aprendizagem. No entanto, duas das alunas inquiridas acham que com este tipo de aulas se perde bastante tempo.

5. Conclusão

Neste capítulo, além de serem referidas as principais conclusões acerca deste estudo, também se faz uma reflexão sobre a implementação do mesmo.

5.1.Principais Conclusões

Com este estudo pretendia-se dar resposta à seguinte questão de investigação: Qual o contributo do *GeoGebra* para a construção e aplicação do conhecimento das Propriedades Geométricas de Gráficos de Funções?. Para isso, formularam-se três objetivos: (i) analisar se os alunos mobilizam competências desenvolvidas através de tarefas com o *GeoGebra* e as aplicam em tarefas de "lápis e papel"; (ii) verificar eventuais dificuldades no estabelecimento da relação entre a transformação geométrica operada no gráfico de uma função com a correspondente modificação algébrica operada na forma como está definida, sempre que ambas as funções estejam definidas; (iii) analisar se os alunos consideram o *Geogebra* um recurso auxiliador no processo de aprendizagem deste tópico.

Em relação ao primeiro objetivo de investigação, parece poder concluir-se que os alunos mobilizaram algumas competências desenvolvidas através de tarefas com o *GeoGebra* e depois as aplicaram em tarefas de "lápis e papel". Segundo os dados analisados no capítulo anterior, os casos em estudo, no geral, conseguiram perceber a relação entre os gráficos das diversas funções e depois aplicar as conjeturas criadas nas fichas de trabalho. Por exemplo, três dos quatro casos em estudo parecem ter mobilizado competências desenvolvidas nas tarefas com o auxílio do *GeoGebra*, no que toca às relações entre o gráfico da função $f(x)$ e os gráficos de $f(x+k)$ e $f(-x)$, e as aplicam em tarefas de lápis e papel, onde estão envolvidas essas relações. No que diz respeito à relação entre os gráficos das funções $f(x)$ e $f(x-k)$, três dos casos em estudo conseguiram formular conjeturas válidas na ficha exploratória, no entanto apenas 2 destes casos parecem ter conseguido mobilizar as competências desenvolvidas nessa ficha e aplicá-las na ficha de trabalho sem recurso ao *GeoGebra*. As relações entre o gráfico da função $f(x)$ e os gráficos das funções $kf(x)$ e $-f(x)$ são aquelas em que se pode retirar menos conclusões acerca da mobilização e aplicação das competências desenvolvidas, pois só dois dos casos em estudo resolveram a ficha de trabalho onde estas relações estavam envolvidas. No entanto, na ficha exploratória onde os alunos estudaram a relação entre o gráfico da função $f(x)$ e $kf(x)$, todos os casos em estudo conseguiram formular conjeturas válidas. No que concerne à relação entre os gráficos das funções $f(x)$ e $f(-x)$ parece poder dizer-se que 3 dos casos em estudo, além de chegar a conjeturas corretas acerca desta relação, mobilizam competências desenvolvidas na ficha com recurso ao *GeoGebra* e as aplicam em tarefas com recurso apenas ao lápis e papel. Para finalizar, pode concluir-se que apenas um dos casos em estudo parece ter mobilizado competências desenvolvidas nas tarefas com o auxílio do *GeoGebra*, no que toca à relação entre os gráficos das funções $f(x)$ e $f(kx)$, e as aplica em tarefas de lápis e papel.

Quanto ao segundo objetivo de investigação, e tendo em conta o que foi dito no parágrafo anterior, parece que os alunos sentiram mais dificuldades em estabelecer relações entre os gráficos das funções $f(x)$ e $f(x-k)$ e entre os das funções $f(x)$ e $f(kx)$. Ou seja, os alunos apresentam mais dificuldades no estabelecimento de relações entre os gráficos de funções que apresentam transformações ao nível das abcissas.

No que se refere ao terceiro e último objetivo de investigação, pelas respostas dos alunos aos questionários, conclui-se que a maior parte dos alunos achou que o *GeoGebra* foi um recurso auxiliador na aprendizagem do tópico *Transformações Geométricas de Gráficos de Funções*. Além disso, a maioria dos discentes revelou interesse em participar em mais aulas com recurso ao *GeoGebra*, pois consideram-nas mais dinâmicas e, segundo eles, conseguem aprender os conceitos sozinhos, tendo assim um papel ativo na aprendizagem. Além disso, alguns alunos referiram que estas aulas os motivam para a disciplina, o que corrobora com a opinião de Jesus (2008) e Trindade (2010). No entanto, duas alunas referiram que se gasta muito tempo com estas aulas. De facto, estas aulas de ensino-aprendizagem exploratória são mais "demoradas", visto que não existe a exposição tradicional de conhecimentos por parte do professor, seguida da aplicação desses mesmos conhecimentos em exercícios ou problemas. Em aulas de ensino-aprendizagem exploratória, os alunos têm de desenvolver, neste caso, uma tarefa exploratória, para tentarem chegar a conjeturas. Além disso, existem momentos de diálogo entre professor e alunos para tentar perceber o que os alunos concluíram com a tarefa exploratória, e portanto, o processo de aprendizagem torna-se mais moroso.

Em relação à resposta à questão de investigação parece poder dizer-se que de facto o *GeoGebra* é um recurso auxiliador na aprendizagem deste tópico. A análise dos dados recolhidos permite concluir que este *software* facilita a compreensão das relações em causa entre gráficos de funções. Além disso, pela análise dos questionários e das produções escritas, existem evidências de que este *software* ajudou os alunos no estabelecimento das relações supracitadas.

5.2.Reflexão

O desenvolvimento deste trabalho foi muito importante para o desenvolvimento pessoal e profissional da estagiária/ investigadora. Com este trabalho a estagiária teve a oportunidade de estudar e aprofundar os seus conhecimentos sobre um tema que sempre lhe despertou bastante interesse: as tecnologias na educação matemática. Também teve a hipótese de conceber e implementar estratégias de ensino, em matemática, onde o recurso tecnológico tem um papel central. No entanto, considera que este foi um trabalho bastante exigente, dada a sua inexperiência na execução de um estudo desta natureza.

Ao longo deste ano letivo, a unidade curricular de Prática de Ensino Supervisionada também foi muito importante para a estagiária tanto a nível pessoal como profissional. O facto de ter estado numa escola, em contacto com os alunos, a lecionar, a desenvolver atividades para a comunidade escolar, permitiu que a estagiária desenvolvesse a sua identidade profissional. Considera que ao longo deste período adquiriu bastantes ferramentas que lhe virão a ser úteis.

Em relação às dificuldades e constrangimentos sentidos ao longo da implementação do trabalho, a estagiária considera que apesar de a experiência de lecionação numa abordagem exploratória ter corrido positivamente, isso também se deveu ao facto de estarem quatro professoras na sala de aula, a professora titular e as três estagiárias. Esta experiência fez com que refletisse sobre a dificuldade que um professor (sozinho e com trinta alunos na sala) deverá sentir ao tentar implementar uma aula deste tipo. Para evitar que o professor seja tão solicitado, acha importante que os alunos tenham contacto prévio com o *software* a usar, dado que deste modo, se poupa tempo de aula para as tarefas nucleares.

Outra dificuldade sentida prendeu-se com a gestão do tempo, tanto para a planificação das três aulas, como na gestão do tempo durante as aulas. O Programa de Matemática A do 10º ano é muito extenso e as aulas reservadas para a lecionação deste tópico eram apenas três. Além disso, apesar da planificação das aulas ter sido preparada com bastante rigor, durante a primeira aula a estagiária deparou-se com alguns problemas nos comandos do *GeoGebra* na versão que estava instalada nos computadores da escola. Rapidamente se resolveu a situação pedindo aos alunos que utilizassem o *GeoGebra online*, em vez do *GeoGebra* que estava instalado no computador. Mesmo assim, isto levou a que houvesse atrasos em relação à planificação inicialmente prevista, o que fez com que se alterassem os restantes planos de aula. A gestão do tempo durante a aula revelou-se também uma dificuldade uma vez que os alunos precisaram de mais tempo do que o previsto para resolver as tarefas, o que fez com que por exemplo na aula 2, grande parte dos grupos de trabalho não resolvessem a FT2.

Bibliografia

Almeida, P., & César, M. (2007). Contributos da Interação entre pares, em aulas de ciências, para o desenvolvimento de competências de argumentação. *Interações, nº 6*, 163-196.

Armella, L.M., & Waldegg, G. (1992). Construtivismo e Educação Matemática. Educácion Matemática, 4(2), 7-15. Disponível em http://www.tabuleiro.faced.ufba.br/twiki/pub/LEG/WebArtigos/Construtivismo_e_Educacao_Matematica.pdf.

Bastos, R. (2007). Transformações Geométricas. *Educação e Matemática*, nº 94, 23-27.

Bivar, A., Grosso, C., Oliveira, F., & Timóteo, M.C. (2013). *Programa e Metas Curriculares, Matemática , Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação e Ciência. Disponível em http://www.dge.mec.pt/programas-e-metas-curriculares-0.

Bivar, A., Grosso, C., Oliveira, F., Timóteo, M.C., & Loura, L. (2013). *Programa e Metas Curriculares, Matemática A, Ensino Secundário*. Lisboa: Ministério da Educação e Ciência. Disponível em http://www.dge.mec.pt/sites/default/files/ficheiros/programa_metas_curriculares_matematica_a_secundario.pdf.

Bravo, F. J. B. (2005). Impacto da Utilização de um Ambiente de Geometria Dinâmica no Ensino-Aprendizagem da Geometria por Alunos do 4º ano do 1º Ciclo do Ensino Básico. (Tese de Mestrado, Universidade do Minho). Disponível em http://repositorium.sdum.uminho.pt/handle/1822/9101.

Breda, A., Serrazina, L., Menezes, L., Sousa, H., & Oliveira, P. (2011). Geometria e Medida no Ensino Básico. Lisboa: Ministério da Educação e dgidc. Disponível em www.esev.ipv.pt/mat1ciclo/temas%20matematicos/070_Brochura_**Geometria**.pdf.

Brolezzi, A.C. (2004). Matemática – Funções e Gráficos, 4º módulo, 1-14. Disponível em https://www.academia.edu/8078543/Nome_do_Aluno.

Calil, A.M., Veiga, J., & Carvalho, C.V.A. (2010). Aplicação do *software* GRAPHMATICA no Ensino de Funções Polinomiais do 1º grau no 9º ano do Ensino Fundamental. *Revista Práxis, nº 4*, 17-27.

Candeias, A.F.F. (2010). Aprendizagem das Funções no 8º ano com o auxílio do *software* Geogebra. (Dissertação de Mestrado, Universidade de Lisboa). Disponível em http://repositorio.ul.pt/handle/10451/2551.

Carvalho, L.T.N. (2013). Ambiente Virtual de Aprendizagem Matemática em contexto educativo. (Dissertação de Mestrado, Universidade de Lisboa). Disponível em http://repositorio.ul.pt/bitstream/10451/10336/1/ulfpie046329_tm.pdf.

D'Ambrosio, B.S. (1989). Como ensinar matemática hoje? *Temas e Debates*, *2*(2), 15-19. Disponível em http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/2010/artigos_teses/MATEMATICA/Artigo_Beatriz.pdf.

Domingos, A. (2014). O papel da tecnologia na aprendizagem da matemática. Um exemplo com recurso ao geogebra. *Educação e Matemática, nº 126*, 14-16.

Eisenberg, T. (1991). Functions and associated learning difficulties. *Advanced mathematical thinking*, 11, 140-152.

Fernandes, J. A. (1998). Tecnologia gráfica no estudo de classes de funções. *Educação e Matemática, nº 46*, 34-36.

Ferreira, E. M. B. (2005). Ensino e Aprendizagem de Geometria em Ambientes Geométricos Dinâmicos: O Tema de Geometria do Plano no 9º ano de escolaridade. (Dissertação de Mestrado, Universidade do Minho). Disponível em http://repositorium.sdum.uminho.pt/handle/1822/4920.

Gafanhoto, A. P. & Canavarro, A. P. (2008). Representações Múltiplas de Funções em Ambiente com GeoGebra: um estudo sobre o seu uso por alunos do 9º ano. *Projecto Práticas Professional dos Professores de Matemática*, com apoio da FCT. Disponível em https://dspace.uevora.pt/rdpc/handle/10174/4818 .

Jesus, S. M. (2008). Estratégias para motivar os alunos. *Educação*, 31 (1), 21-29. Disponível em revistaseletronicas.pucrs.br/ojs/index.php/faced/article/download/2753/2101.

Lopes, J. & Silva, H. S. (2009). *A aprendizagem cooperativa na sala de aula – Um guia prático para o professor*. Lisboa: LIDEL – Edições Técnicas, Lda.

Ludovino, P.N.B. (2012). A aprendizagem cooperativa: uma metodologia a aplicar nas disciplinas de História e Geografia. (Dissertação de Mestrado, Universidade do

Porto). Disponível em https://repositorio-aberto.up.pt/bitstream/10216/76211/2/69949.1.pdf.

Marques, V. L. (2009). Os Quadros Interativos no Ensino da Matemática. (Dissertação de Mestrado, Universidade Portucalense Infante D. Henrique). Disponível em http://repositorio.uportu.pt/bitstream/11328/550/2/TMMAT%20109.pdf.

Miranda, G.L. (2007). Limites e Possibilidades das TIC na educação. *Revista de Ciências da Educação, nº 7*, 41-50.

Monteiro, C. (1992). A educação matemática e os computadores. *Educação e Matemática, nº22*, 1-2.

Mortimer, E.F., (1996). Construtivismo, mudança conceitual e ensino de ciências: para onde vamos?. Investigações em Ensino de Ciências, 1(1), 20-39. Disponível em http://www.if.ufrgs.br/ienci/artigos/Artigo_ID8/v1_n1_a2.pdf.

Muruci, M.L., Giraldo, V.A., & Guimarães, L.C. (s. d.). *Funções Reais: possibilidades em um ambiente de geometria dinâmica.* Disponível em http://limc.ufrj.br/htem4/papers/69.pdf.

NCTM (2008). *Princípios e Normas para a Matemática Escolar*. 2º edição. Lisboa: APM.

Neves, R. A., & Damiani, M.F. (2006). Vygotski e as teorias da aprendizagem. UNIrevista, 1(2). Disponível em http://repositorio.furg.br/handle/1/3453.

Pereira, C., Cardoso, A.P., & Rocha, J. (2015). O trabalho de grupo como fator potenciador da integração curricular no 1º ciclo do Ensino Básico. *Saber & Educar*, nº 20, 224-233.

Ponte, J.P. (1995). Novas Tecnologias na aula de Matemática. *Educação e Matemática*, nº34, 2-7.

Ponte, J.P. (2005). Gestão curricular em Matemática. *O professor e o desenvolvimento curricular*, 11-34. Disponível em www.ie.ulisboa.pt/pls/portal/docs/1/334285.PDF.

Ponte, J. P. (2009). O novo programa de matemática como oportunidade de mudança para os professores do ensino básico. *Interacções*, 12, 96-114. Disponível em http://www1.esec.pt/pagina/fcmat/documentos/NPMatematicaoportunidademudanca.pdf.

Ponte, J.P. (2010). Explorar e Investigar em Matemática: Uma Actividade Fundamental no Ensino e na Aprendizagem. *Unión*, 21, 13-30. Disponível em repositorio.ul.pt/handle/10451/3043.

Ribeiro, C.P.F. (2013). O Trabalho de Grupo Cooperativo nas disciplinas de História e Geografia. (Dissertação de Mestrado, Universidade do Porto). Disponível em https://repositorio-aberto.up.pt/bitstream/10216/71239/2/72158.pdf.

Rosendo, A. I. (1987). Semelhanças no Plano. Departamento de Matemática, Faculdade de Ciências e Tecnologias da Universidade de Coimbra.

Sanchez, L. (2002). Iniciação ao estudo das funções reais de variável real, 10º ano. *Projeto REANIMAT, Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa e Fundação Calouste Gulbenkian*, *2º edição*, 61-71.

Santos, E. M. G. S. F., (2011). Discussão na aula de Matemática com recurso à tecnologia: O caso de uma turma do 7º ano. (Dissertação de Mestrado, Universidade do Minho). Disponível em http://repositorium.sdum.uminho.pt/handle/1822/19085.

Saraiva, M.J., Teixeira, A.M., & Andrade, J.M. (2010). Estudo das Funções no Programa de Matemática A com Problemas e Tarefas de Exploração - Tarefas para o 10.º e o 11.º Anos do Ensino Secundário, Materiais de Apoio ao Professor. Projeto IMLNA, Instituto de Educação da Universidade de Lisboa e Universidade da Beira Interior. Disponível em http://www.apm.pt/files/178672_Segment_001_4d3de4ed6e285.pdf.

Silva, J. S. (1975). *Compêndio de Matemática, Capítulo III – Transformações afins e aplicações lineares*. Volume 3. Edição GEP. Disponível em http://www.sebastiaoesilva100anos.org/Publicacoes/Compendios-e-Guias-de-Matemati/Ens-JSS/Compendio%20de%20Matematica%203%20volume%20Cap%20I%20-%20INTRODUCAO%20AO%20CALCULO%20VECTORIAL.pdf.

Silva, M.H.G.G. (2013). Tarefas com Recurso à Calculadora Gráfica no Ensino Secundário do 10º ao 12º ano de escolaridade. (Dissertação de Mestrado, Universidade Nova de Lisboa). Disponível em http://run.unl.pt/bitstream/10362/11310/1/Silva_2013.pdf.

Trindade, S.C.C.P. (2010). *Contributo dos ambientes de geometria dinâmica para o processo de ensino e aprendizagem da Matemática*. (Dissertação de Mestrado, Universidade Nova de Lisboa). Disponível em http://run.unl.pt/bitstream/10362/5088/1/Trindade_2010.pdf.

Anexos

Anexo 1: Materiais Aula 1

Anexo 1.1.: Planificação Aula 1

Planificação da Aula

Disciplina: Matemática A **Ano/Turma:** 10
Data: 15/04/2016 **Horário:** 11:50 – 13:20 **Sala:** 33

SUMÁRIO
• Gráficos de funções obtidos por translação: relação entre os gráficos das funções f e g, sendo $g(x) = f(x) + k, k \in \mathbb{R}$ e relação entre os gráficos das funções f e g, sendo $g(x) = f(x - k), k \in \mathbb{R}$.
DOMÍNIO/ SUBDOMÍNIO/ TEMA
• Funções Reais de Variável Real • Generalidades acerca de funções reais de variável real • Propriedades geométricas de gráficos de funções
CONTEÚDOS
• Relação entre os gráficos das funções f e g, sendo $g(x) = f(x) + k, k \in \mathbb{R}$ • Relação entre os gráficos das funções f e g, sendo $g(x) = f(x - k), k \in \mathbb{R}$.
OBJETIVOS
• Traçar o gráfico da função $f(x) + k, k \in \mathbb{R}$, conhecendo o gráfico da função f • Reconhecer que o gráfico da função $f(x) + k, k \in \mathbb{R}$ pode ser obtido através do gráfico da função f pela translação de vetor $\vec{u}(0, k)$ • Traçar o gráfico da função $f(x - k), k \in \mathbb{R}$, conhecendo o gráfico da função f • Reconhecer que o gráfico da função $f(x - k), k \in \mathbb{R}$ pode ser obtido através do gráfico da função f pela translação de vetor $\vec{u}(k, 0)$ • Trabalhar em pares • Utilizar o GeoGebra na resolução da tarefa proposta • Respeitar os colegas • Apreciar as tecnologias enquanto mediadoras da aprendizagem

DESCRITORES
FRVR10 - 2.9. Reconhecer, dados uma função real de variável real f, um número real c e um plano munido de um referencial cartesiano, que o gráfico cartesiano de uma função g definida em $D_g = D_f$ por $g(x) = f(x) + c$ é a imagem do gráfico cartesiano de f pela translação de vetor $\vec{u}(0, c)$.   **FRVR10 - 2.10.** Reconhecer, dados uma função real de variável real f, um número real c e um plano munido de um referencial cartesiano, que o gráfico cartesiano de uma função d definida por $g(x) = f(x - c)$ no conjunto $D_g = \{x + c: x \in D_f\}$ é a imagem do gráfico cartesiano de f pela translação de vetor $\vec{u}(c, 0)$.
MOMENTOS/ FASES DA AULA (Estratégias a Implementar)
- Registo do sumário no caderno diário.   - Resolução a pares da Tarefa Exploratória 1 com recurso ao software Geogebra;   - Resolução a pares da Ficha de Trabalho 1;   - Discussão com os alunos tendo como objetivo de perceber as conclusões que retiraram da resolução de ambas as tarefas;   - Correção das tarefas realizadas;   - Registo no caderno diário: ***<u>Gráficos de funções obtidos por translação vertical</u>*** ***- Relação entre os gráficos das funções f e g, sendo $\boldsymbol{g(x) = f(x) + k, k} \in \mathbb{R}$*** *Dada uma função real de variável real f, um número real k e um plano munido de um referencial cartesiano, o gráfico cartesiano da função g definida em $D_g = D_f$ por $g(x) = f(x) + k$ é a imagem do gráfico cartesiano de f pela translação de vetor $\vec{u}(0, k)$.* ***<u>Gráficos de funções obtidos por translação horizontal</u>*** ***- Relação entre os gráficos das funções f e g, sendo $\boldsymbol{g(x) = f(x - k), k} \in \mathbb{R}$*** *Dada uma função real de variável real f, um número real k e um plano munido de um referencial cartesiano, o gráfico cartesiano da função g definida em $D_g = \{x + k: x \in D_f\}$ por $g(x) = f(x - k)$ é a imagem do gráfico cartesiano de f pela translação de vetor $\vec{u}(k, 0)$.*

MATERIAIS/RECURSOS
• Computador que contenha o software Geogebra • Caderno diário • Ficha de Trabalho • Tarefa Exploratória
OBSERVAÇÕES
Tarefas extra: Exercícios 47 e 49, da página 46 do Manual adotado **Caso estas tarefas não sejam resolvidas na aula ficarão para Trabalho de Casa*
AVALIAÇÃO DOS ALUNOS
Grelha de avaliação de atitudes e valores dos alunos, de acordo com os critérios específicos da disciplina
BIBLIOGRAFIA
Bivar, A., Grosso, C., Oliveira, F. Timóteo, M.C., & Loura, L. (2013). Programa e Metas Curriculares, Matemática A, Ensino Secundário. Lisboa: Ministério da Educação e Ciência. Disponível em http://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Secundario/Documentos/Documentos_Disciplinas_novo/Curso_Ciencias_Tecnologias/Matematica_A/programa_metas_curriculares_matematica_a_secundario.pdf. Costa, B., & Rodrigues, E. (2015). *Novo Espaço – Parte 1 – Matemática A 10ºano*. Porto: Porto Editora. Neves, M. A. F., Guerreiro, L., & Silva, A. P. (2015). Máximo – Matemática A – 10º ano. Volume 1. Porto: Porto Editora. Disponível em http://www.escolavirtual.pt/e-manuais/html5-reader/index.html#/bookshelf?usertoken=MzI0NDE6MTo1ODY4MzRAcG9ydG8uY29tOjE6Y2xpZW50ODg0Ojg4NDoxNTM1MDk6MDoxNDU2MDk0NDI1NzQ3&bookID=13302. Teixeira, P., Precatado, A., Albuquerque, C., Antunes, C., & Nápoles, S. (1997). *Brochura de Matemática – Funções 10º ano de escolaridade*. Lisboa: Ministério da Educação.

Anexo 1.2.: Ficha Exploratória 1

PROPRIEDADES GEOMÉTRICAS DE GRÁFICOS DE FUNÇÕES – 10º ANO

Data:2016/ 04/15

NOME:_______________________________________ **Nº:**____ **Turma:10º**

NOME:_______________________________________ **Nº:**____ **Turma:10º**

Lê com atenção todas as questões.

Responde com clareza, justificando as tuas respostas utilizando textos e/ou esquemas e/ou esboços dos gráficos representados no GeoGebra.

TAREFA EXPLORATÓRIA 1 – 10º ANO

1. Abre no computador o software GeoGebra. Representa graficamente, nesse software a função $f(x) = -2x^3 + 4x^2$ definida em $[-1,2]$.

1.1. Determina o domínio e o contradomínio da função f.

Resolução:

$D_f = [-1,2]$

$D'_f = [0,6]$

1.2. Recorrendo ao software Geogebra representa o gráfico de cada uma das funções:

a) $f(x) + 1$ **b)** $f(x) + 3$ **c)** $f(x) - 2$

Para cada uma das funções anteriores indica o domínio e o contradomínio.

Resolução:

a) Seja $g(x) = f(x) + 1$
$D_g = [-1,2]$

$D'_g = [1,7]$

b) Seja $h(x) = f(x) + 3$
$D_h = [-1,2]$

$D'_h = [3,9]$

c) Seja $i(x) = f(x) - 2$
$D_i = [-1,2]$

$D'_i = [-2,4]$

1.3. Explica como construir o gráfico da função $f(x) + 6$, a partir do gráfico de uma função f?

Resolução:

O gráfico da função $f(x) + 6$, é a imagem do gráfico de uma função f, pela translação associada ao vetor $\vec{u}(0,6)$.

1.4. Faz as experiências que achares necessárias e indica o domínio e o contradomínio da função $f(x) + h, h \in \mathbb{R}$.

Resolução:

Depois de algumas experiências, espera-se que os alunos concluam que:

Seja $g(x) = f(x) + h, h \in \mathbb{R}$.

$D_g = [-1,2]$

$D'_g = [0 + h, 6 + h]$, ou seja $D'_g = [h, 6 + h]$

1.5. Explica como construir o gráfico da função $f(x) + h, h \in \mathbb{R}$, a partir do gráfico de uma função f.

Resolução:

O gráfico da função $f(x) + h, h \in \mathbb{R}$, é a imagem do gráfico de uma função f, pela translação associada ao vetor $\vec{u}(0, h)$.

2. Representa, agora, numa nova página do GeoGebra a função $g(x) = |x|$ de domínio $[-3,3]$.

2.1. Faz as experiências que achares necessárias e indica o domínio, o contradomínio e os zeros da função $g(x - h), h \in \mathbb{R}$.

Resolução:

Depois de algumas experiências espera-se que os alunos concluam que:

Seja $h(x) = g(x - h), h \in \mathbb{R}$.

$D_g = [-3 + h, 3 + h]$

$D'_h = [0,3]$

Zeros de h: $x = h$

2.2. Explica como construir o gráfico da função $g(x-h), h \in \mathbb{R}$, a partir do gráfico da função g.

<u>Resolução:</u>

O gráfico da função $g(x-h), h \in \mathbb{R}$, é a imagem do gráfico de uma função g, pela translação associada ao vetor $\vec{u}(h, 0)$.

Tarefa inspirada em Brochura de Funções 10º ano, ME (1998)

Anexo 1.3.: Ficha de Trabalho 1

FICHA DE TRABALHO 1 – 10º ANO		
		Data:2016/ 04/15
NOME:____	Nº:____	Turma:10ºC
NOME:____	Nº:____	Turma:10ºC

Propriedades Geométricas de Gráficos de Funções

1. Seja f uma função, real de variável real, cujo gráfico é:

$$G_f = \{(-4, 2), (1,3), (3,0), (4,4)\}$$

1.1. Indica o domínio e o contradomínio da função f.

Resolução:

$D_f = \{-4, 1,3,4\}$

$D'_f = \{2,3,0,4\}$

1.2. Para cada caso, indica o domínio, o contradomínio da função g e o respetivo gráfico, sendo a função g definida por:

a) $g(x) = f(x) + 2$

Resolução:

$D_g = \{-4,1,3,4\}$

$D'_g = \{4,5,2,6\}$

$G_g = \{(-4,4), (1,5), (3,2), (4,6)\}$

b) $g(x) = f(x+1)$

Resolução:

$D_g = \{-5,0,2,3\}$

$D'_g = \{2,3,0,4\}$

$G_g = \{(-5,2), (0,3), (2,0), (3,4)\}$

c) $g(x) = f(x - 4)$

Resolução:

$D_g = \{0,5,7,8\}$

$D'_g = \{2,3,0,4\}$

$G_g = \{(0,2),(5,3),(7,0),(8,4)\}$

d) $g(x) = f(x - 1) - 3$

Resolução:

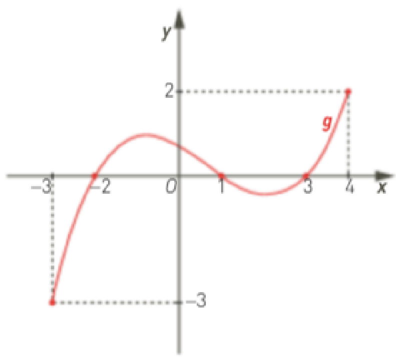
$D_g = \{-3,2,4,5\}$

$D'_g = \{-1,0,-3,1\}$

$G_g = \{(-3,-1),(2,0),(4,-3),(5,1)\}$

2. Na figura está representada em referencial cartesiano a função g.
Sabe-se que:

- Domínio de g é [-3, 4];
- Contradomínio de g é [-3, 2];
- Os zeros de g são: -2, 1 e 3
- $g(x) = f(x - 4)$



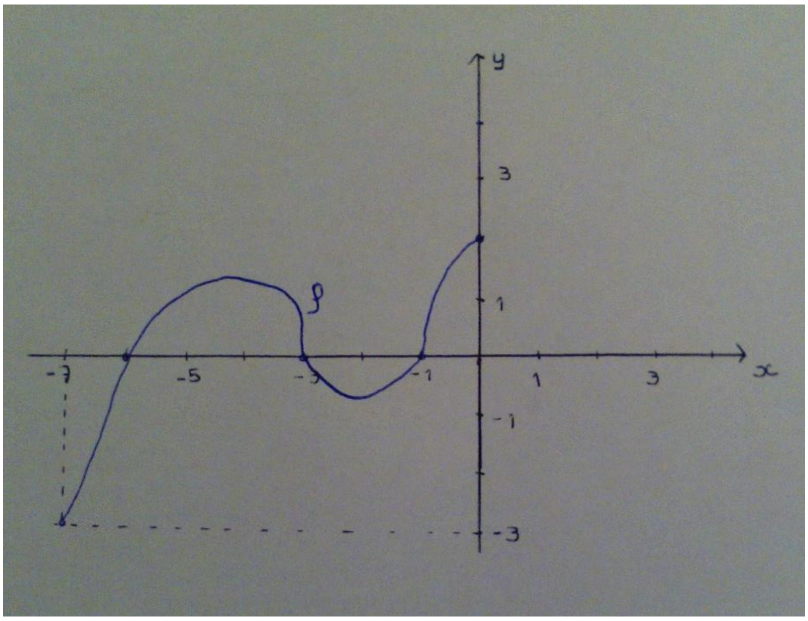
2.1. Resolve a equação $f(x) = 0$. Mostra como chegaste à tua resposta.

Resolução:

$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -6 \vee x = -3 \vee x = -1$

2.2. Esboça o gráfico da função f.

<u>Resolução:</u>



Adaptado de Novo Espaço 10 (2015)

Anexo 2: Materiais Aula 2

Anexo 2.1.: Planificação de Aula

Planificação de Aula

Disciplina: Matemática A **Ano/Turma:** 10º

Data: 18/04/2016 **Horário:** 08:25 – 09:55 **Sala:**33

SUMÁRIO
• Relação entre os gráficos das funções $f(x)$ e $g(x) = kf(x), k \in \mathbb{R}$. • Relação entre os gráficos das funções $f(x)$ e $g(x) = -f(x)$.
DOMÍNIO/SUBDOMÍNIO/TEMA
• Funções Reais de Variável Real • Generalidades acerca de funções reais de variável real • Propriedades geométricas de gráficos de funções
CONTEÚDOS
• Relação entre os gráficos das funções $f(x)$ e $g(x) = kf(x), k \in \mathbb{R}$ • Relação entre os gráficos das funções $f(x)$ e $g(x) = -f(x)$
OBJETIVOS
• Traçar o gráfico da função $kf(x), k \in \mathbb{R}$, conhecendo o gráfico da função f; • Reconhecer que o gráfico da função $kf(x)$ pode ser obtido através do gráfico da função f por uma contração horizontal de coeficiente k, se $0 < k < 1$; • Reconhecer que o gráfico da função $kf(x)$ pode ser obtido através do gráfico da função f por uma dilatação horizontal de coeficiente k, se $k > 1$; • Traçar o gráfico da função $-f(x)$, conhecendo o gráfico da função f • Reconhecer que o gráfico da função $-f(x)$ pode ser obtido através do gráfico da função f pela reflexão de eixo Ox. • Trabalhar em pares • Utilizar o GeoGebra na resolução da tarefa proposta • Respeitar os colegas • Apreciar as tecnologias enquanto mediadoras da aprendizagem

DESCRITORES

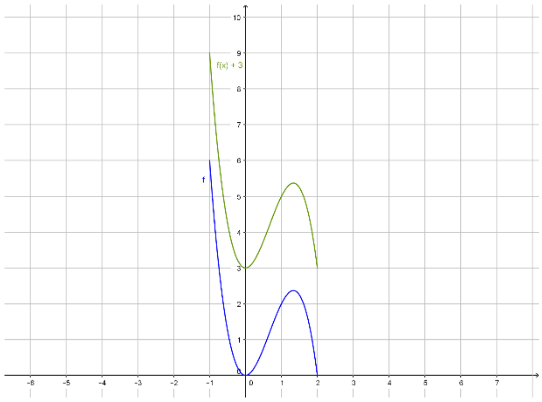
- **FRVR10 – 2.11.** Designar, dado um plano munido de um referencial ortogonal e um número $0 < a < 1$ (respetivamente $a > 1$) , por «contração vertical (respetivamente dilatação vertical) de coeficiente a» a transformação ϕ do plano que ao ponto $P(x, y)$ associa o ponto $\phi(P)$ de coordenadas (x, ay).

- **FRVR10 – 2.12.** Reconhecer, dados uma função real de variável real f, um número $0 < a < 1$ (respetivamente $a > 1$) e um plano munido de um referencial ortogonal, que o gráfico cartesiano de uma função g definida em D_f por $g(x) = af(x)$ é a imagem do gráfico cartesiano de f pela contração vertical (respetivamente pela dilatação vertical) de coeficiente a.

- **FRVR10 – 2.15.** Reconhecer, dada uma função real de variável real f e um plano munido de um referencial ortogonal, que o gráfico cartesiano de uma função g definida em $D_g = D_f$ por $g(x) = -f(x)$ é a imagem do gráfico cartesiano de f pela reflexão de eixo Ox.

MOMENTOS/FASES DA AULA (Estratégias a Implementar)

- Interação verbal com os alunos para tentar perceber o que eles aprenderam na última aula: gráficos obtidos por translação horizontal e vertical
- Projetar a imagem do gráfico representado ao lado e pedir aos alunos que expliquem como obtém o gráfico da função $f(x) + 3$ a partir do gráfico da função f.

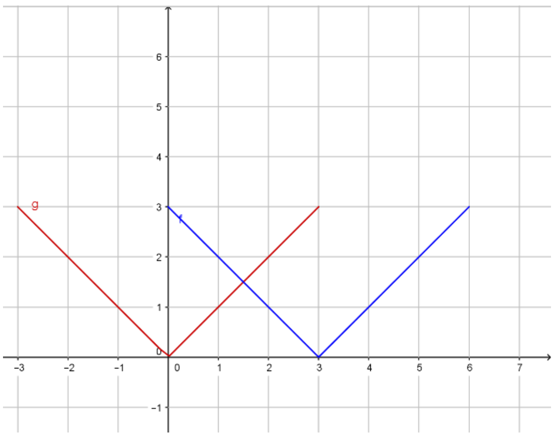


- Perguntar aos alunos como podiam obter o gráfico da função $f(x) + k, k \in \mathbb{R}$ a partir do gráfico de f.
- Registar no caderno diário:

<u>Gráficos de funções obtidos por translação vertical</u>

Dada uma função real de variável real f, um número real k e um plano munido de um referencial cartesiano, o gráfico cartesiano da função g definida em $D_g = D_f$ por $g(x) = f(x) + k$ é a imagem do gráfico cartesiano de f pela translação de vetor $\vec{u}(0, k)$.

- Projetar a imagem ao lado e pedir aos alunos que expliquem como obtém o gráfico da função $f(x-3)$ a partir do gráfico da função f.



- Perguntar aos alunos como podiam obter o gráfico da função $f(x-k), k \in \mathbb{R}$ a partir do gráfico de g.
- Registar no caderno diário:

<u>Gráficos de funções obtidos por translação horizontal</u>

- Relação entre os gráficos das funções f e g, sendo $g(x) = f(x-k), k \in \mathbb{R}$

Dada uma função real de variável real f, um número real k e um plano munido de um referencial cartesiano, o gráfico cartesiano da função g definida em $D_g = \{x + k : x \in D_f\}$ por $g(x) = f(x-k)$ é a imagem do gráfico cartesiano de f pela translação de vetor $\vec{u}(k, 0)$.

- Correção da Ficha de Trabalho 1.
- Registo do sumário no caderno diário.
- Resolução a pares da Tarefa Exploratória 2 com recurso ao software Geogebra;
- Resolução a pares da Ficha de Trabalho 2;

OBSERVAÇÕES

Tarefas extra: Exercícios 47 e 49, da página 46 do Manual adotado

**Caso estas tarefas não sejam resolvidas na aula ficarão para Trabalho de Casa*

AVALIAÇÃO DOS ALUNOS

Grelha de avaliação de atitudes e valores dos alunos, de acordo com os critérios específicos da disciplina

BIBLIOGRAFIA

Bivar, A., Grosso, C., Oliveira, F. Timóteo, M.C., & Loura, L. (2013). Programa e Metas Curriculares, Matemática A, Ensino Secundário. Lisboa: Ministério da Educação e Ciência. Disponível em http://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Secundario/Documentos/Documen tos_Disciplinas_novo/Curso_Ciencias_Tecnologias/Matematica_A/programa_metas_curriculares_matematica_a_secundario.pdf.

Costa, B., & Rodrigues, E. (2015). *Novo Espaço – Parte 1 – Matemática A 10ºano*. Porto: Porto Editora.

Neves, M. A. F., Guerreiro, L., & Silva, A. P. (2015). Máximo – Matemática A – 10º ano. Volume 1. Porto: Porto Editora. Disponível em http://www.escolavirtual.pt/e-manuais/html5-reader/index.html#/bookshelf?usertoken=MzI0NDE6MTo1ODY4MzRAcG9ydG8uY29tOjE6Y2xpZW50ODg0Ojg4NDoxNTM1MDk6MDoxNDU2MDk0NDI1NzQ3&bookID=13302.

Teixeira, P., Precatado, A., Albuquerque, C., Antunes, C., & Nápoles, S. (1997). *Brochura de Matemática – Funções 10º ano de escolaridade*. Lisboa: Ministério da Educação.

Anexo 2.2.: Ficha Exploratória 2

PROPRIEDADES GEOMÉTRICAS DE GRÁFICOS DE FUNÇÕES – 10º ANO		
		Data:2016/ 04/18
NOME:____	**Nº:**____	**Turma:**__
NOME:____	**Nº:**____	**Turma:**__

Lê com atenção todas as questões.

Responde com clareza, apresentando o raciocínio, os cálculos efetuados, esboços de gráficos e as justificações julgadas necessárias.

TAREFA EXPLORATÓRIA 2 – 10º ANO

1. Considera a função real de variável real f, definida por $f(x) = x^2 - 4x$. Com o auxílio do software Geogebra, representa a função f graficamente.

1.1. Determina a(s) coordenada(s) do(s) zero(s) e do(s) extremo(s) da função f.

Resolução:

Coordenadas dos zeros: $(0,0)$ e $(4,0)$
Coordenadas do extremo: $(2,-4)$

1.2. Representa, agora os gráficos das funções e determina as coordenadas do(s) extremo(s) e do(s) zero(s) de cada função.

a) $g(x) = 2f(x)$

Resolução:

Coordenadas dos zeros: $(0,0)$ e $(4,0)$
Coordenadas do extremo: $(2,-8)$

b) $h(x) = 4f(x)$
Resolução:

Coordenadas dos zeros: $(0,0)$ e $(4,0)$
Coordenadas do extremo: $(2,-16)$

c) $i(x) = \frac{1}{2}f(x)$

Resolução:

Coordenadas dos zeros: $(0,0)$ e $(4,0)$
Coordenadas do extremo: $(2,-2)$

d) $s(x) = \frac{1}{4}f(x)$

Resolução:

Coordenadas dos zeros: $(0,0)$ e $(4,0)$
Coordenadas do extremo: $(2,-1)$

1.3. Considera que $P(x,y)$ é um ponto do gráfico de f. Seja $g(x) = 2f(x)$. Qual é a ordenada do ponto de abcissa x no gráfico de g?

Sugestão: Para responderes a esta questão podes começar por particularizar as coordenadas do ponto P.

Resolução:

O ponto de abcissa x tem ordenada igual a $2y$, logo $P(x,2y)$.

1.4. Considera que $P(x,y)$ é um ponto do gráfico de f. Seja $g(x) = kf(x), k > 0$. Qual é a ordenada do ponto de abcissa x no gráfico de g?

Sugestão: Para responderes a esta questão podes começar por particularizar as coordenadas do ponto P.

Resolução:

O ponto de abcissa x tem ordenada igual a $ky, k > 0$, logo $P(x,ky)$.

1.5. Ao longo desta tarefa temos vindo a estudar a relação entre o gráfico da função $f(x)$ e o gráfico da função $g(x) = kf(x), k \in \mathbb{R}_0^+$. Considera agora que $k = -1$.

Representa graficamente a função g e, determina as coordenadas do(s) zero(s) e do(s) extremo(s) da mesma.

Resolução:

Coordenadas dos zeros: $(0,0)$ e $(4,0)$
Coordenadas do extremo: $(2,4)$

1.6. Faz as experiências que achares necessárias e, explica como construir o gráfico da função $-f(x)$, a partir do gráfico de uma função f?

Resolução:

O gráfico da função $-f(x)$ é imagem do gráfico de uma função f pela reflexão de eixo Ox.

1.7. Faz as experiências que achares necessárias e, explica como construir o gráfico da função $-2f(x)$, a partir do gráfico de uma função f?

Resolução:

Para construir o gráfico da função $-2f(x)$ tem-se que duplicar as imagens de todos os pontos da função e em seguida fazer a reflexão do gráfico obtido segundo o eixo Ox.

Anexo 2.3. Ficha de Trabalho 2

FICHA DE TRABALHO 2 – 10º ANO

Data:2016/ 04/18

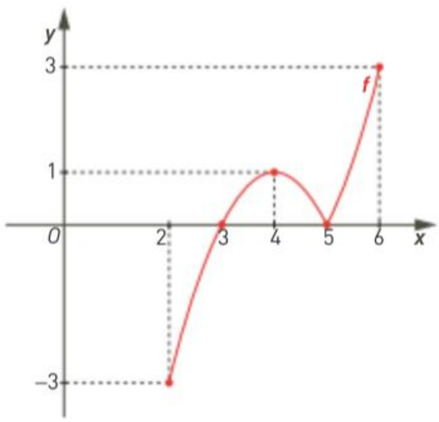
NOME:_______________________________________ **Nº:____** **Turma:10º**

NOME:_______________________________________ **Nº:____** **Turma:10º**

PROPRIEDADES GEOMÉTRICAS DE GRÁFICOS DE FUNÇÕES

Na figura está representada graficamente a função f, real de variável real, que admite:

- Domínio: $[2, 6]$
- Contradomínio: $[-3, 3]$
- Zeros: 3 e 5



Indica o domínio, o contradomínio, os zeros e os extremos da função g definida por:

a) $g(x) = 2f(x)$

Resolução:

$D_g = [2,6]$

$D'_g = [-6,6]$

Zeros: 3 e 5

Mínimo Absoluto: -6

Máximo Absoluto: 6

Máximo Relativo: 2

b) $g(x) = \frac{1}{2}f(x)$

Resolução:

$D_g = [2,6]$

$D'_g = [-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}]$

Zeros: 3 e 5

Mínimo Absoluto: $-\frac{3}{2}$

Máximo Absoluto: $\frac{3}{2}$

Máximo Relativo: $\frac{1}{2}$

c) $g(x) = -f(x)$

Resolução:

$D_g = [2,3]$

$D'_g = [-3,3]$

Zeros: 3 e 5

Mínimo Absoluto: -3

Máximo Absoluto: 3

Mínimo Relativo: -2

d) $g(x) = -2x$

Resolução:

$D_g = [2,6]$

$D'_g = [-6,6]$

Zeros: 3 e 5

Mínimo Absoluto: -6

Máximo Absoluto: 6

Mínimo Relativo: -2

e) $g(x) = -f(x-4)$

Resolução:

$D_g = [6,10]$

$D'_g = [-6,6]$

Zeros: 7 e 9

Mínimo Absoluto: -6

Máximo Absoluto: 6

Mínimo Relativo: -2

Adaptado de Novo Espaço 10, (2016)

Anexo 3: Materiais Aula 3

Anexo 3.1.: Planificação

Planificação de Aula

Disciplina: Matemática A — **Ano/Turma:** 10º

Data: 20/04/2016 — **Horário:** 08:25 – 09:55 — **Sala:**33

SUMÁRIO
• Relação entre os gráficos das funções $f(x)$ e $g(x) = f(kx), k \in \mathbb{R}$. • Relação entre os gráficos das funções $f(x)$ e $g(x) = f(-x)$.
DOMÍNIO/SUBDOMÍNIO/TEMA
• Funções Reais de Variável Real • Generalidades acerca de funções reais de variável real • Propriedades geométricas de gráficos de funções
CONTEÚDOS
• Relação entre os gráficos das funções $f(x)$ e $g(x) = f(kx), k \in \mathbb{R}$ • Relação entre os gráficos das funções $f(x)$ e $g(x) = f(-x)$
OBJETIVOS
• Traçar o gráfico da função $f(kx), k \in \mathbb{R}$, conhecendo o gráfico da função f • Reconhecer que o gráfico da função $f(kx)$ pode ser obtido através do gráfico da função f por uma contração horizontal de coeficiente $\frac{1}{k}$, se $k > 1$ • Reconhecer que o gráfico da função $f(kx)$ pode ser obtido através do gráfico da função f por uma dilatação horizontal de coeficiente $\frac{1}{k}$, se $0 < k < 1$ • Traçar o gráfico da função $f(-x)$, conhecendo o gráfico da função f • Reconhecer que o gráfico da função $f(-x)$ pode ser obtido através do gráfico da função f pela reflexão de eixo Oy • Trabalhar em pares • Utilizar o GeoGebra na resolução da tarefa proposta • Respeitar os colegas • Apreciar as tecnologias enquanto mediadoras da aprendizagem
DESCRITORES
• **FRVR10 – 2.13.** Designar, dado um plano munido de um referencial ortogonal e um número $0 < a < 1$ (respetivamente $a > 1$) , por «contração horizontal (respetivamente dilatação horizontal) de coeficiente a» a transformação ϕ do plano que ao ponto $P(x, y)$ associa o ponto $\phi(P)$ de coordenadas (ax, y).

- **FRVR10 – 2.14.** Reconhecer, dados uma função real de variável real f, um número $0 < a < 1$ (respetivamente $a > 1$) e um plano munido de um referencial ortogonal, que o gráfico cartesiano de uma função g definida em $D_g = \left\{\frac{x}{a} : x \in D_f\right\}$ por $g(x) = f(ax)$ é a imagem do gráfico cartesiano de f pela contração horizontal (respetivamente pela dilatação horizontal) de coeficiente $\frac{1}{a}$.

- **FRVR10 – 2.16.** Reconhecer, dada uma função real de variável real f e um plano munido de um referencial ortogonal, que o gráfico cartesiano de uma função g definida em $D_g = \{-x : x \in D_f\}$ por $g(x) = f(-x)$ é a imagem do gráfico cartesiano de f pela reflexão de eixo Oy.

MOMENTOS/FASES DA AULA (Estratégias a Implementar)

- Interação verbal com a turma com recurso ao Power Point para sistematizar o que aprenderam na última aula.
- Resolução a pares da Tarefa Exploratória 3 com recurso ao software Geogebra;
- Resolução a pares da Ficha de Trabalho 3;
- Preenchimento de um questionário;
- Interação verbal com a turma com recurso ao Power Point para sistematizar o que aprenderam tanto na Tarefa Exploratória como na Ficha de Trabalho;

OBSERVAÇÕES

Tarefas extra: Manual adotado, exercícios das páginas 50, 51, 53 e 55

**Caso estas tarefas não sejam resolvidas na aula ficarão para Trabalho de Casa*

AVALIAÇÃO DOS ALUNOS

Grelha de avaliação de atitudes e valores dos alunos, de acordo com os critérios específicos da disciplina

BIBLIOGRAFIA

Bivar, A., Grosso, C., Oliveira, F. Timóteo, M.C., & Loura, L. (2013). Programa e Metas Curriculares, Matemática A, Ensino Secundário. Lisboa: Ministério da Educação e Ciência. Disponível em http://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Secundario/Documentos/Documentos_Disciplinas_novo/Curso_Ciencias_Tecnologias/Matematica_A/programa_metas_curriculares_matematica_a_secundario.pdf.

Costa, B., & Rodrigues, E. (2015). *Novo Espaço – Parte 1 – Matemática A 10ºano*. Porto: Porto Editora.

Neves, M. A. F., Guerreiro, L., & Silva, A. P. (2015). Máximo – Matemática A – 10º ano. Volume 1. Porto: Porto Editora. Disponível em http://www.escolavirtual.pt/e-manuais/html5-reader/index.html#/bookshelf?usertoken=MzI0NDE6MTo1ODY4MzRAcG9ydG8uY29tOjE6Y2xpZW50ODg0Ojg4NDoxNTM1MDk6MDoxNDU2MDk0NDI1NzQ3&bookID=13302.

Teixeira, P., Precatado, A., Albuquerque, C., Antunes, C., & Nápoles, S. (1997). *Brochura de Matemática – Funções 10º ano de escolaridade*. Lisboa: Ministério da Educação.

Anexo 3.2.: Ficha Exploratória 3

PROPRIEDADES GEOMÉTRICAS DE GRÁFICOS DE FUNÇÕES – 10º ANO		
		Data:2016/ 04/20
NOME:____	**Nº:____**	**Turma:__**
NOME:____	**Nº:____**	**Turma:__**

Lê com atenção todas as questões.

Responde com clareza, apresentando o raciocínio, os cálculos efetuados, esboços de gráficos e as justificações julgadas necessárias.

TAREFA EXPLORATÓRIA 3 – 10ºANO

1. Considera a função real de variável real f, definida por $f(x) = x^2 - 6x + 8$. Com o auxílio do software Geogebra, representa a função f graficamente.

1.1. Determina a(s) coordenada(s) do(s) ponto(s) onde a função f atinge um extremo.

Resolução:

Coordenadas dos extremos: $(3, -1)$

1.2. Determina a(s) coordenada(s) do(s) ponto(s) onde a função f atinge um zero.

Resolução:

Coordenadas dos zeros: $(2,0)$ e $(4, 0)$

1.3. Representa, agora os gráficos das funções e determina as coordenadas do(s) ponto(s) onde a função g atinge extremo(s) e zero(s).

a) $g(x) = f(2x)$

Resolução:

Coordenadas dos pontos onde atinge um zero: $(1,0)$ e $(2, 0)$

Coordenadas dos pontos onde atinge um extremo: $(1{,}5;\ -1)$

b) $h(x) = f(3x)$

<u>Resolução:</u>

Coordenadas dos pontos onde atinge um zero: $\left(\frac{2}{3}, 0\right)$ e $\left(\frac{4}{3}, 0\right)$

Coordenadas dos pontos onde atinge um extremo: $(1;\ -1)$

c) $i(x) = f\left(\frac{1}{2}x\right)$

<u>Resolução:</u>

Coordenadas dos pontos onde atinge um zero: $(4, 0)$ e $(8,0)$

Coordenadas dos pontos onde atinge um extremo: $(6, -1)$

d) $s(x) = f\left(\frac{1}{3}x\right)$

<u>Resolução:</u>

Coordenadas dos pontos onde atinge um zero: $(6, 0)$ e $(12, 0)$

Coordenadas dos pontos onde atinge um extremo: $(9, -1)$

1.4. Considera que $P(x, y)$ é um ponto do gráfico de f. Seja $g(x) = f\left(\frac{1}{2}x\right)$. Qual é a abcissa do ponto de ordenada y no gráfico de g?

Sugestão: Para responderes a esta questão podes começar por particularizar as coordenadas do ponto P.

<u>Resolução:</u>

O ponto P de ordenada y, tem como abcissa $2x$. Logo $P(2x, y)$.

1.5. Considera que $P(x, y)$ é um ponto do gráfico de f. Seja $g(x) = f(2x)$. Qual é a abcissa do ponto de ordenada y no gráfico de g?

Sugestão: Para responderes a esta questão podes começar por particularizar as coordenadas do ponto P.

<u>Resolução:</u>

O ponto P de ordenada y, tem como abcissa $\frac{1}{2}x$. Logo $P\left(\frac{1}{2}x, y\right)$.

1.6. Considera que $P(x, y)$ é um ponto do gráfico de f. Seja $g(x) = f(kx), k > 0$. Qual é a abcissa do ponto de ordenada y no gráfico de g?
Sugestão: Para responderes a esta questão podes começar por particularizar as coordenadas do ponto P.

Resolução:

O ponto P de ordenada y, tem como abcissa $\frac{1}{k}x$. Logo $P\left(\frac{1}{k}x, y\right)$.

1.7. Ao longo desta tarefa temos vindo a estudar a relação entre o gráfico da função $f(x)$ e o gráfico da função $g(x) = f(kx), k \in \mathbb{R}_0^+$. Considera agora que $k = -1$.
Representa graficamente a função g e, determina as coordenadas do(s) ponto(s) onde a função atinge zero(s) e extremo(s).

Resolução:

Coordenadas dos pontos onde atinge um zero: $(-4{,}0)$ e $(-2, 0)$

Coordenadas dos pontos onde atinge um extremo: $(-3;\ -1)$

1.8. Faz as experiências que achares necessárias e, explica como construir o gráfico da função $f(-x)$, a partir do gráfico de uma função f?

Resolução:

O gráfico da função $f(-x)$ é imagem do gráfico de f pela reflexão de eixo Oy.

1.9. Faz as experiências que achares necessárias e, explica como construir o gráfico da função $f(-3x)$, a partir do gráfico de uma função f?

Resolução:

Para construir o gráfico da função $f(-3x)$ temos de dividir todas as abcissas dos pontos da função f por 3 e em seguida temos de fazer a reflexão de eixo Oy do gráfico obtido.

Anexo 3.3.: Ficha de Trabalho 3

FICHA DE TRABALHO 3 – 10º ANO		
		Data:2016/ 04/20
NOME:_________________________________	Nº:____	Turma:10ºC
NOME:_________________________________	Nº:____	Turma:10ºC

Propriedades Geométricas de Gráficos de Funções

1. Dada uma função f sabe-se que:

$$G_f = \{(-4,-1),(-3,2),(1,3),(2,5)\}$$

1.1. Para cada caso, determina o gráfico da função g, definida por:

a) $g(x) = f\left(\frac{x}{2}\right)$

Resolução:

$G_f = \{(-8,-1),(-6,2),(2,3),(4,5)\}$

b) $g(x) = f(3x)$

Resolução:

$G_f = \left\{\left(-\frac{4}{3},-1\right),(-1,2),\left(\frac{1}{3},3\right),\left(\frac{2}{3},5\right)\right\}$

c) $g(x) = 4f(x)$

Resolução:

$G_f = \{(-4,-4),(-3,4),(1,12),(2,20)\}$

d) $g(x) = f\left(-\frac{x}{2}\right)$

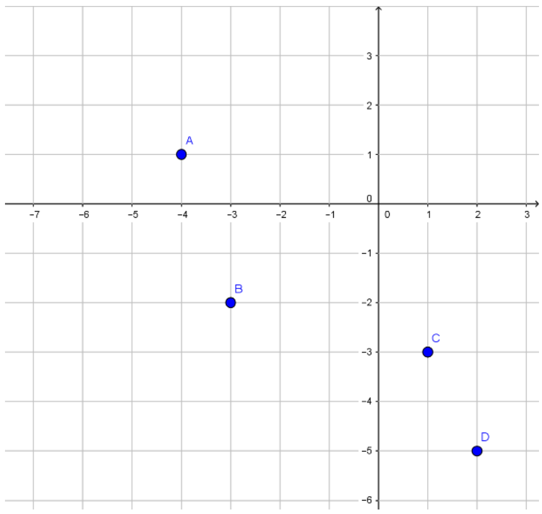
Resolução:

$G_f = \{(8,-1),(6,2),(-2,3),(-4,5)\}$

1.2. Esboça o gráfico da função h, definida por:

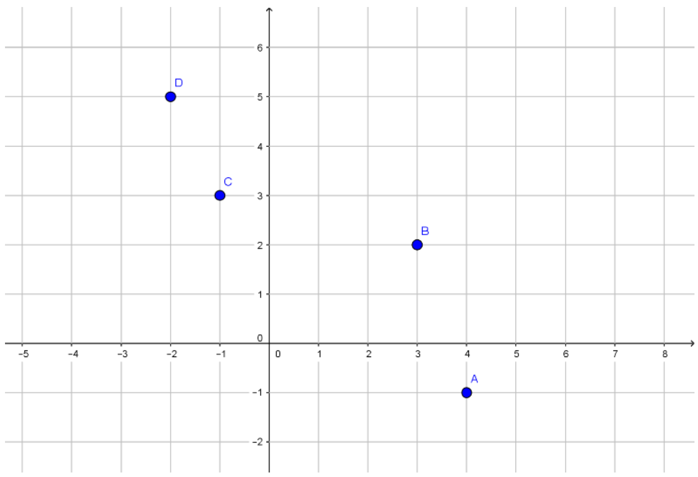
a) $h(x) = -f(x)$

Resolução:



b) $h(x) = f(-x)$

Resolução:



Anexo 4: Questionário

Questionário

Sou aluna do Mestrado em Ensino de Matemática no 3ºCEB e no Ensino Secundário da Universidade de Aveiro, e no âmbito da unidade curricular de Prática de Ensino encontro-me a desenvolver um projeto de investigação para o qual a tua participação é fundamental.

Focando-te apenas nas últimas três aulas de Matemática responde a este questionário com toda a sinceridade e da forma mais completa possível.

Dados Pessoais

Nome: ____

Idade: _____

Sexo: Feminino ☐ Masculino ☐

Nota de Matemática A no 2º Período: _____

Tarefas Realizadas

Ao longo das últimas três aulas foi-te proposto que resolvesses dois tipos de tarefas: uma delas onde tinhas o auxílio do *GeoGebra* para responder às questões e outra (Ficha de Trabalho) onde já não podias recorrer ao *software* referido.

Consideras que as tarefas realizadas sem o auxílio do *GeoGebra* são mais difíceis de resolver do que as realizadas com o auxílio desse mesmo *software*? Porquê?

____

____

____

____

Na tua opinião consideras que as fichas de trabalho foram acessíveis?

____

____

Consideras que a resolução de tarefas com o auxílio do *GeoGebra* foi essencial para a tua aprendizagem? Porquê?

____

____

____

Havendo oportunidade, gostarias de ter novamente aulas com esta estrutura? Indica os principais motivos.

____

____

____

Trabalho desenvolvido a pares

Tendo em conta o trabalho realizado durante as aulas em pares, preenche o quadro abaixo tendo em conta a seguinte escala:

1- Discordo Totalmente, 2- Discordo, 3- Sem opinião, 4- Concordo, 5- Concordo Totalmente

	1	2	3	4	5
Prefiro trabalhar individualmente					
Eu e o meu colega de grupo resolvemos todas as tarefas propostas individualmente					
Eu e o meu colega de grupo discutimos as nossas ideias durante a realização das tarefas					
Eu e o meu colega de grupo decidimos repartir as questões a que cada um respondia					
Considero que me empenhei mais na resolução de tarefas do que o meu colega de grupo					
Considero que o meu colega de grupo se empenhou mais que eu na resolução das tarefas.					

Obrigada pela colaboração e disponibilidade

Anexo 5: Grelhas de Observação

Grelha de Observação			10º ano
Observador:	**Data:**	**Hora:**	**Sala: __**

Grupos	Indicadores	Observado
Grupo Elemento 1: Elemento 2:	Os elementos do grupo resolvem as tarefas propostas individualmente	
	Os elementos do grupo resolvem as tarefas propostas em conjunto	
	Um dos elementos do grupo revela-se mais empenhado que o outro elemento a resolver as tarefas propostas	
	Os elementos do grupo mostram-se empenhados a resolver as tarefas propostas	
	Os elementos do grupo trocam ideias entre si	
	Os elementos do grupo respeitam as ideias do outro colega	
	Os elementos do grupo partilham as suas ideias com os restantes colegas da turma	
	O grupo revela-se persistente na resolução de tarefas	
Grupo Elemento 1: Elemento 2:	Os elementos do grupo resolvem as tarefas propostas individualmente	
	Os elementos do grupo resolvem as tarefas propostas em conjunto	
	Um dos elementos do grupo revela-se mais empenhado que o outro elemento a resolver as tarefas propostas	
	Os elementos do grupo mostram-se empenhados a resolver as tarefas propostas	
	Os elementos do grupo trocam ideias entre si	
	Os elementos do grupo respeitam as ideias do outro colega	
	Os elementos do grupo partilham as suas ideias com os restantes colegas da turma	
	O grupo revela-se persistente na resolução de tarefas	
	Os elementos do grupo resolvem as tarefas propostas individualmente	
	Os elementos do grupo resolvem as tarefas propostas em conjunto	

Grupo **Elemento 1:** **Elemento 2:**	Um dos elementos do grupo revela-se mais empenhado que o outro elemento a resolver as tarefas propostas	
	Os elementos do grupo mostram-se empenhados a resolver as tarefas propostas	
	Os elementos do grupo trocam ideias entre si	
	Os elementos do grupo respeitam as ideias do outro colega	

Anexo 5.1.: Grelha de Observação dos Casos em Estudo

Grelha de Observação

Grupos	Indicadores	Observado na Aula nº		
		1	2	3
Caso de Estudo 1	Os elementos do grupo resolvem as tarefas propostas individualmente			
	Os elementos do grupo resolvem as tarefas propostas em conjunto	✔	✔	✔
	Um dos elementos do grupo revela-se mais empenhado que o outro elemento a resolver as tarefas propostas			
	Os elementos do grupo mostram-se empenhados a resolver as tarefas propostas	✔	✔	✔
	Os elementos do grupo trocam ideias entre si	✔	✔	✔
	Os elementos do grupo respeitam as ideias do outro colega	✔	✔	✔
	Os elementos do grupo partilham as suas ideias com os restantes colegas da turma			
	O grupo revela-se persistente na resolução de tarefas	✔	✔	✔
Caso de Estudo 2	Os elementos do grupo resolvem as tarefas propostas individualmente			
	Os elementos do grupo resolvem as tarefas propostas em conjunto	✔	✔	✔
	Um dos elementos do grupo revela-se mais empenhado que o outro elemento a resolver as tarefas propostas			
	Os elementos do grupo mostram-se empenhados a resolver as tarefas propostas	✔	✔	✔
	Os elementos do grupo trocam ideias entre si	✔	✔	✔
	Os elementos do grupo respeitam as ideias do outro colega	✔	✔	✔
	Os elementos do grupo partilham as suas ideias com os restantes colegas da turma			
	O grupo revela-se persistente na resolução de tarefas	✔	✔	✔
	Os elementos do grupo resolvem as tarefas propostas individualmente			
	Os elementos do grupo resolvem as tarefas propostas em conjunto	✔	✔	✔

Caso de Estudo 3	Um dos elementos do grupo revela-se mais empenhado que o outro elemento a resolver as tarefas propostas			
	Os elementos do grupo mostram-se empenhados a resolver as tarefas propostas	✔	✔	✔
	Os elementos do grupo trocam ideias entre si	✔	✔	✔
	Os elementos do grupo respeitam as ideias do outro colega	✔	✔	✔

Anexo 6: Descritores para o tópico Transformações de Gráficos de Funções

No Programa e Metas Curriculares de Matemática A do Ensino Secundário, para o tópico de Transformações de Gráficos de Funções, lecionado no 10º ano de escolaridade, estão contemplados os seguinetes descritores:

FRVR10 - 2.9. Reconhecer, dados uma função real de variável real f, um número real c e um plano munido de um referencial cartesiano, que o gráfico cartesiano de uma função g definida em $D_g = D_f$ por $g(x) = f(x) + c$ é a imagem do gráfico cartesiano de f pela translação de vetor $\vec{u}(0, c)$.

FRVR10 - 2.10. Reconhecer, dados uma função real de variável real f, um número real c e um plano munido de um referencial cartesiano, que o gráfico cartesiano de uma função d definida por $g(x) = f(x - c)$ no conjunto $D_g = \{x + c : x \in D_f\}$ é a imagem do gráfico cartesiano de f pela translação de vetor $\vec{u}(c, 0)$.

FRVR10 – 2.11. Designar, dado um plano munido de um referencial ortogonal e um número $0 < a < 1$ (respetivamente $a > 1$) , por «contração vertical (respetivamente dilatação vertical) de coeficiente a» a transformação ϕ do plano que ao ponto $P(x, y)$ associa o ponto $\phi(P)$ de coordenadas (x, ay).

FRVR10 – 2.12. Reconhecer, dados uma função real de variável real f, um número $0 < a < 1$ (respetivamente $a > 1$) e um plano munido de um referencial ortogonal, que o gráfico cartesiano de uma função g definida em D_f por $g(x) = af(x)$ é a imagem do gráfico cartesiano de f pela contração vertical (respetivamente pela dilatação vertical) de coeficiente a.

FRVR10 – 2.13. Designar, dado um plano munido de um referencial ortogonal e um número $0 < a < 1$ (respetivamente $a > 1$) , por «contração horizontal (respetivamente dilatação horizontal) de coeficiente a» a transformação ϕ do plano que ao ponto $P(x, y)$ associa o ponto $\phi(P)$ de coordenadas (ax, y).

FRVR10 – 2.14. Reconhecer, dados uma função real de variável real f, um número $0 < a < 1$ (respetivamente $a > 1$) e um plano munido de um referencial ortogonal, que o gráfico cartesiano de uma função g definida em $D_g = \left\{\frac{x}{a} : x \in D_f\right\}$ por $g(x) = f(ax)$ é a imagem do gráfico cartesiano de f pela contração horizontal (respetivamente pela dilatação horizontal) de coeficiente $\frac{1}{a}$.

FRVR10 – 2.15. Reconhecer, dada uma função real de variável real f e um plano munido de um referencial ortogonal, que o gráfico cartesiano de uma função g definida em $D_g = D_f$ por $g(x) = -f(x)$ é a imagem do gráfico cartesiano de f pela reflexão de eixo Ox.

FRVR10 – 2.16. Reconhecer, dada uma função real de variável real f e um plano munido de um referencial ortogonal, que o gráfico cartesiano de uma função g definida em $D_g = \{-x : x \in D_f\}$ por $g(x) = f(-x)$ é a imagem do gráfico cartesiano de f pela reflexão de eixo Oy.