



SIMETRIA E ANTISSIMETRIA DE ROSÁCEAS E FRISOS

Andreia Hall

CIDMA – Centro de Investigação e Desenvolvimento
em Matemática e Aplicações, Departamento de Matemática
Universidade de Aveiro, Portugal
e-mail: andreia.hall@ua.pt

Resumo: Pretende-se com este curso aprender (ou recordar) a classificar rosáceas e frisos quanto ao seu grupo de simetria. Pretende-se também abordar o conceito de antissimetria e com ele identificar e criar figuras de diversos tipos. O conceito de antissimetria é um conceito simples e apelativo que pode ajudar os alunos a assimilar e consolidar o conceito de simetria. Estes conceitos são explorados durante o curso através de diversos exemplos com especial incidência em figuras construídas a partir dum módulo simples, um quadrado dividido por uma das suas diagonais em dois triângulos de cores diferentes, .

Abstract: In this course we classify rosettes and friezes as to their symmetry groups. We also address the concept of antisymmetry and identify and create figures with the various possible types. The concept of antisymmetry is a simple and appealing one that can help students to assimilate and consolidate the concept of symmetry. These concepts are explored during the course through several examples with special incidence in figures based on a simple module, a square divided by one of its diagonals into two triangles of different colors, .

palavras-chave: simetria; antissimetria; grupos de simetria de rosáceas e frisos; grupos de antissimetria de rosáceas e frisos; azulejos de Truchet.

keywords: symmetry; antisymmetry; rosette and frieze symmetry groups; rosette and frieze antissymmetry groups; Truchet tiles.

1 Introdução

Os seres humanos têm uma tendência natural para identificar simetrias à sua volta – faz parte da nossa maneira de perceber o mundo e de processar a informação que estamos constantemente a receber através dos olhos. Não é portanto surpreendente que ao longo da história as criações humanas contenham inúmeros elementos de simetria. O estudo da simetria de figuras no plano é feito ao longo do ensino básico e secundário, considerando-se os

quatro tipos de simetria possíveis: simetria de reflexão (explorada no 1.º ciclo), de rotação (explorada no 2.º ciclo), de translação e de reflexão deslizante (exploradas no 3.º ciclo). Um estudo mais completo das simetrias de uma figura passa por considerar os possíveis grupos (discretos) de simetria de figuras planas, reduzindo-se assim a apenas três classes de figuras: as rosáceas, os frisos e os padrões. Os grupos de simetria das rosáceas podem ser apenas de dois tipos: cíclicos, C_n , ou diedrais, D_n . Já os grupos de simetria dos frisos podem ser de sete tipos: p111, p112, p1a1, pm11, p1m1, pm12, pmm2. Para mais informações ver por exemplo o livro de George Martin (1982).

2 Primeira parte do curso – simetria

A primeira atividade realizada neste curso consistiu em solicitar aos formandos que construíssem livremente uma rosácea quadrada utilizando 16 “azulejos” de papel todos iguais. As rosáceas construídas encontram-se na Figura 1, sendo que existiram duas rosáceas iguais à apresentada no canto superior esquerdo, num total de 17 rosáceas.

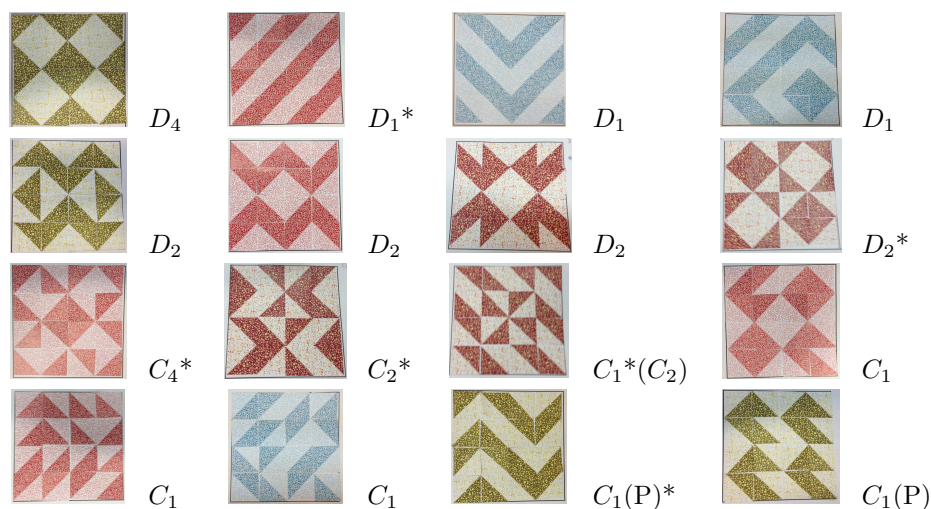


Figura 1: Rosáceas 4×4 construídas pelos formandos e respetivos grupos de simetria. (P) – sugere padrão; * – com antissimetria; (C_2) – sugere C_2 .

Em seguida apresentaram-se os grupos de simetria das rosáceas e foi pedido aos formandos que classificassem as rosáceas construídas. Após esta classificação construiu-se uma tabela de frequências contendo o número de

rosáceas de cada tipo e compararam-se as frequências observadas com as esperadas se as rosáceas tivessem sido escolhidas ao acaso entre todas as possíveis. A Tabela 1 contém os resultados.

Grupo	D_4	C_4	D_2	C_2	D_1	C_1
frequência absoluta	2	1	4	1	3	6
frequência relativa	0,118	0,059	0,235	0,059	0,176	0,353
frequência esperada	0,0078	0,0078	0,0156	0,0313	0,1875	0,75

Tabela 1: Tabela de frequências dos grupos de simetria das rosáceas construídas pelos formandos.

Como se pode ver na Figura 1 e na Tabela 1 houve uma tendência para produzir figuras com simetria (64,7% das figuras tinham simetria, contra 25% esperados). Esta diferença é ainda mais notória se atendermos a que das 6 rosáceas sem simetria, uma tem quase simetria de rotação, outra apresenta várias isometrias no seu interior e duas sugerem ser vistas como parte de padrões bidimensionais (apresentando repetição duma célula em duas direções) e não como rosáceas. Tendo isto em conta construiu-se uma nova tabela de frequências (Tabela 2) onde se excluiu da amostra as duas rosáceas que se enquadram melhor no contexto dos padrões e se tomou uma das rosáceas C_1 como sendo C_2 (considerando que houve uma gralha na sua construção). De acordo com a Tabela 2, a percentagem de rosáceas com simetria sobe para 80% (12/15). Na verdade o número de figuras com algum tipo de regularidade no conjunto inicial é superior a 88%.

Grupo	D_4	C_4	D_2	C_2	D_1	C_1
frequência absoluta	2	1	4	2	3	3
frequência relativa	0,133	0,067	0,267	0,133	0,2	0,2
frequência esperada	0,0078	0,0078	0,0156	0,0313	0,1875	0,75

Tabela 2: Tabela de frequências dos grupos de simetria das rosáceas construídas pelos formandos excluindo as duas rosáceas sem simetria que sugerem padrões e considerando uma rosácea C_1 como sendo C_2 por sugestão visual.

Estatisticamente, as percentagens de rosáceas com simetria em ambas as tabelas são consideradas significativamente superiores ao valor esperado, 25%, já que efetuando o teste binomial rejeita-se a hipótese nula em ambos os casos (valor-p=0.001 para a Tabela 1 e valor-p=0.000 para a Tabela 2).

Esta atividade serviu, entre outras coisas, para verificar a tendência que temos para procurar simetria naquilo que nos rodeia e que a simetria de reflexão surge mais naturalmente que a de rotação.

A segunda atividade consistiu em procurar encontrar todas as rosáceas quadradas 2×2 que se podem construir com o mesmo motivo utilizado na primeira atividade, um quadrado dividido por uma das suas diagonais, em dois triângulos de cores diferentes, \blacksquare – *azulejo de Truchet*. Ao todo são 43 possibilidades (figuras congruentes contam como uma só possibilidade) e constatou-se que as mais simétricas eram as mais fáceis de encontrar.

Foi distribuído a todos os presentes um texto de apoio contendo os conceitos explorados no curso bem como as 43 rosáceas 2×2 e todos os possíveis frisos com período e altura 2, que no total perfazem 38. Foi sugerido explorar com os alunos a procura destas configurações (rosáceas e frisos) bem como a análise das suas simetrias. A título de exemplo apresentamos na Figura 2 as 43 configurações de rosáceas 2×2 com as respetivas classificações quanto ao grupo de simetria e de antissimetria (conceito definido na secção seguinte).

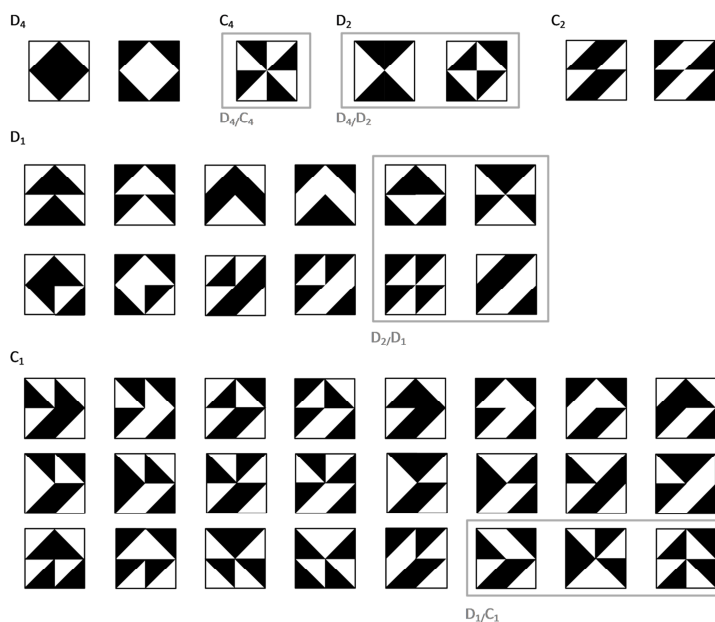


Figura 2: Rosáceas de Truchet 2×2 e respetiva classificação quanto ao grupo de simetria (a preto) e ao grupo de antissimetria (a cinzento).

Em seguida abordaram-se os possíveis grupos de simetria dos frisos e classificaram-se diversos exemplos de rosáceas e frisos quanto ao grupo de simetria.

3 Segunda parte do curso – antissimetria

Diz o ditado popular que *tudo o que é de mais faz mal*. Também a simetria em exagero pode perder o seu encanto, tornando-se monótona e pouco apelativa. Uma forma de quebrar a simetria consiste em recorrer à antissimetria (que destrói a simetria mantendo-a subjacente). Antissimetria é um conceito que surge associado ao conceito de simetria e que pode existir sempre que cada ponto de uma figura tiver associado uma característica dicotómica como por exemplo uma de duas cores ou uma de duas cargas elétricas. Uma antissimetria é simplesmente uma simetria acoplada a uma troca de cores (ou troca do valor da variável dicotómica) que deixa a figura invariante. Assim, no plano podemos ter antissimetria de reflexão, de rotação, de translação e de reflexão deslizante. Um exemplo bem conhecido de uma figura com antissimetria é o símbolo do *yin-yang*, ☯. Neste símbolo não existe simetria de rotação, mas sim antissimetria de rotação. A simetria de rotação mantém-se subjacente embora já não exista. Tal como a simetria, a antissimetria é também bastante natural. Por exemplo, nas rosáceas criadas livremente pelos formandos (Figura 1), seis (35%) apresentavam antissimetria.

Existem duas questões práticas que são úteis para compreender os grupos de antissimetria de uma figura ou até para gerar tais grupos.

1. As designações dos grupos de antissimetria obtêm-se analisando o grupo de simetria da figura sem coloração (só com contornos), G_s , e o grupo de simetria da figura com coloração, G_c . O nome do grupo de antissimetria é G_s/G_c . A Figura 3 ilustra este processo e simultaneamente mostra exemplos de figuras com antissimetria de rotação (em baixo segunda e terceira figuras) e com simetria de reflexão (em baixo primeira, terceira e quarta figuras).

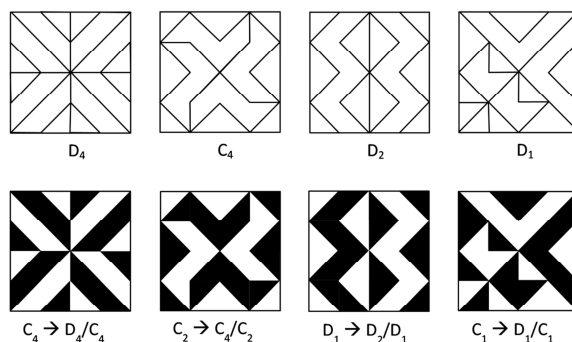


Figura 3: Exemplos de figuras com antissimetria e processo de classificação.

2. Para gerar um grupo de antissimetria podemos partir de um grupo de simetria e substituir um (ou mais) dos seus geradores pelo correspondente antissimétrico. Por exemplo, o grupo D_4 (grupo de simetria de um quadrado) pode ser gerado por uma rotação de 90 graus e uma reflexão. Se substituirmos um destes geradores pelo respetivo antissimétrico obtemos um grupo de antissimetria. Para mais informações ver por exemplo Radovic e Jablan (2001).

O número de grupos de antissimetria possíveis é superior ao dos grupos de simetria. Por exemplo, enquanto há apenas 7 tipos de frisos, o respetivo número para a antissimetria sobe para 17. Neste curso exploraram-se vários tipos de antissimetria tendo os formandos sido convidados a criar figuras (rosáceas e frisos) com antissimetria, tendo como motivo o azulejo de Truchet.

4 Atividade final

Para terminar os professores construíram uma espécie de desdobrável, semelhante a um hexaflexágono mas na forma de quadrado, que tem a característica de se poder desdobrar quatro vezes até retomar a posição inicial. Trata-se de um objeto construído apenas a partir de dois quadrados preenchidos na frente e no verso e que depois se cortam ao meio, em dois retângulos e finalmente se colam nos quatro cantos, tal como sugerido na Figura 4.

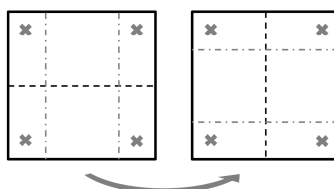


Figura 4: Construção do *desdobrável*. As linhas pretas tracejadas indicam linhas de corte e as linhas cinzentas traço-ponto indicam linhas de dobra. As cruzeiros são pontos de colagem.

Estes *desdobráveis* podem ser usados para contar histórias (como em Consuelo Digón e Martín, 2013) ou para criar desenhos que se transformam uns nos outros. No contexto do curso foi pedido aos professores que construíssem quatro rosáceas quadradas (com 16 azulejos de Truchet) para servir de base a um destes *desdobráveis*. Depois de terminado e à medida que se vai desdobrando surgem novas configurações, para além das quatro iniciais.

Agradecimentos: Este trabalho foi apoiado pela Fundação para a Ciência e a Tecnologia (FCT) através do projeto UID/MAT/04106/2013 do CIDMA – Centro de Investigação e Desenvolvimento em Matemática e Aplicações.

Referências

- [1] C. Consuelo Digón e C. Martín, *3 cuentos infinitos: En una cabeza; Érase un rey; La manzana*, Valladolid: Ediciones Tralari, 2013.
- [2] G. Martin, *Transformation Geometry: An Introduction to Symmetry*, Springer-Verlag, New York, 1982.
- [3] L. Radovic e S. Jablan, “Antisymmetry and Modularity in Ornamental Art”, *Bridges: Mathematical Connections in Art, Music and Science*, 2001, Eds. R. Sarhangi e S. Jablan, Proceedings, pp. 55–66.