

## 二次元対流拡散方程式に対する格子ボルツマン法の精度評価

## ACCURACY ANALYSIS OF LATTICE BOLTZMANN METHOD FOR ADVECTION-DIFFUSION EQUATION IN TWO DIMENSIONS

瀬田 剛<sup>1)</sup>

Takeshi SETA

1) 富山大学大学院理工学研究部 (〒 930-8555 富山市五福 3190, E-mail: seta@eng.u-toyama.ac.jp)

I analyze the accuracy of two-dimensional lattice Boltzmann method for advection-diffusion equation. The Chapman-Enskog expansion indicates that the lattice Boltzmann method has an error term in the diffusion process. To eliminate the error term, I introduce a parameter  $q$  which allows to control the propagation rate between neighboring sites. The advection and diffusion behavior of the lattice Boltzmann method is investigated by solving 2-D benchmark problem of a Gaussian hill in a uniform velocity field. The numerical solutions show that the schemes are indeed consistent with advection diffusion, and the error term performs as numerical diffusion. The von Neumann stability analysis method shows that the stability region of the present method shrinks by the influence of the elimination of the extra term.

**Key Words:** Lattice Boltzmann Method, Advection-Diffusion Equation, Accuracy Analysis, Numerical Stability

## 1. はじめに

格子ボルツマン法 (Lattice Boltzmann Method, LBM)<sup>(1)</sup> は、線形な対流過程からナビエ・ストークス方程式の非線形な対流過程が導出でき、ポアソン方程式の反復計算が不要であることなどから、非圧縮性流体解析のみならず、混相流<sup>(2)</sup>、非ニュートン流体<sup>(3)</sup>、圧縮性流体<sup>(4)</sup>、自然対流<sup>(5)</sup> など様々な流体解析に適用されている。熱流体モデルには、離散速度数を増やすことで、1つの分布関数から温度方程式の導出を可能にする LBM が多数提案され、比熱比の問題も解決されている<sup>(4, 6)</sup>。一方、連続の式とナビエ・ストークス方程式に対する分布関数とは別に、温度方程式のみを解析する分布関数を導入する手法も提案され、自然対流やポラス・プレート問題などの定常問題に対し、他の解析手法による参照解や厳密解とよく一致する解が得られている<sup>(7, 8)</sup>。また、稲室らは、レイリー・ベナル対流の計算が、 $u$  の 1 乗まで展開した平衡分布関数で十分行えることを示した<sup>(9)</sup>。大西<sup>(7)</sup>、Y. Peng<sup>(8)</sup>、稲室<sup>(9)</sup>らのモデルでは圧力項と粘性項とは独立に、温度に対する対流拡散方程式が解析されている<sup>(10)</sup>。そのため、対流拡散方程式に対する LBM に関する研究も重要である。対流拡散方程式に対する 2D5QLBM が、R. van der Sman らにより提案され、対流拡散方程式の計算において、Lax-Wendroff スキームと同等の数値拡散や数値

分散誤差が現れることが示された<sup>(11)</sup>。また、I. Rasin らは、静止粒子のない 2D4Q モデルに対し、多緩和時間モデルを適用することで、拡散係数に異方性を有する対流拡散方程式の導出に成功している<sup>(12)</sup>。

本論文では、大西のモデルや Y. Peng のモデルの対流拡散方程式に対する LBM<sup>(7, 8)</sup> に、数値拡散として作用する誤差項が存在することを示す。この誤差項は、H. W. Zheng らが、Phase Field モデルに対する LBM<sup>(13)</sup> で用いた、隣接格子点への分布関数の並進作用を制御するパラメータ  $q$  を運動学的方程式に導入することにより、除去可能である。ガウス分布を用いたベンチマーク問題により、空間精度、数値拡散、空間対称性について検証する。更に、フォン・ノイマンによる安定性解析法<sup>(14, 15)</sup>により、誤差項を除去したことによる数値的安定性に対する影響を調べる。

## 2. 対流拡散方程式に対する格子ボルツマン法

格子ボルツマン法では、分布関数  $f_k(\mathbf{x}, t)$  が、以下の運動学的方程式に従い発展する。

$$f_k(\mathbf{x} + \mathbf{c}_k \delta, t + \delta) - f_k(\mathbf{x}, t) = -\frac{f_k(\mathbf{x}, t) - f_k^{(0)}(\mathbf{x}, t)}{\tau}. \quad (1)$$

ここで、 $\mathbf{c}_k$  は離散速度ベクトル、 $k$  は離散速度の方向に対

するインデックス,  $\tau$  は緩和時間,  $f_k^{(0)}(\mathbf{x}, t)$  は平衡分布関数である.

式 (1) から対流拡散方程式,

$$\partial_t \phi + \nabla \cdot (\phi \mathbf{u}) = \chi \nabla^2 \phi, \quad (2)$$

が導出される<sup>(10)</sup>. ここで,  $u_\alpha$  は流速,  $\phi$  は温度等を表すパラメータである.

Y. Peng らは, 離散速度が,

$$\mathbf{c}_k = \begin{cases} (0, 0), & k = 0, \\ (\cos[\frac{(k-1)\pi}{2}], \sin[\frac{(k-1)\pi}{2}])c, & k = 1, 2, 3, 4, \\ \sqrt{2}(\cos[\frac{(2k-9)\pi}{4}], \sin[\frac{(2k-9)\pi}{4}])c, & k = 5, 6, 7, 8, \end{cases} \quad (3)$$

で定義される 2D9Q モデルに対し,

$$f_0^{(0)} = -\frac{2\phi u^2}{3c^2},$$

$$f_k^{(0)} = \frac{\phi}{9} \left[ \frac{3}{2} + \frac{3(\mathbf{c}_k \cdot \mathbf{u})}{2c^2} + \frac{9(\mathbf{c}_k \cdot \mathbf{u})^2}{2c^4} - \frac{2u^2}{3c^2} \right], k = 1, 2, 3, 4, \quad (4)$$

$$f_k^{(0)} = \frac{\phi}{36} \left[ 3 + 6\frac{(\mathbf{c}_k \cdot \mathbf{u})}{c^2} + \frac{9(\mathbf{c}_k \cdot \mathbf{u})^2}{2c^4} - \frac{2u^2}{3c^2} \right], k = 5, 6, 7, 8,$$

の平衡分布関数を導出し, 温度方程式の計算に用いた<sup>(8)</sup>.

一方, 稲室らは, 平衡分布関数を  $\mathbf{u}$  の 1 乗まで展開することで, 温度方程式を導出できることを示している<sup>(9)</sup>. 離散速度が,

$$\mathbf{c}_k = \begin{cases} (0, 0), & k = 0, \\ (\cos[\frac{(k-1)\pi}{2}], \sin[\frac{(k-1)\pi}{2}])c, & k = 1, 2, 3, 4, \end{cases} \quad (5)$$

で定義される 2D5Q モデルに対して, 大西らによって,

$$f_0^{(0)} = 0, \quad f_k^{(0)} = \frac{1}{4}\phi \left[ 1 + 2\frac{(\mathbf{c}_k \cdot \mathbf{u})}{c^2} \right], k = 1, 2, 3, 4, \quad (6)$$

の平衡分布関数が提案されている. この簡素化された分布関数でも, 自然対流の計算において, Y. Peng らのモデルと等しい空間 2 次精度の解が得られる<sup>(7)</sup>. なお, 式 (6) は, I. Rasin らの対流拡散方程式に対する 2D4Q モデルで用いられる平衡分布関数と同形である<sup>(12)</sup>.

Y. Peng と大西によって提案されたモデルから, 対流拡散方程式を導出する. 式 (1) に対し, テーラー展開を施すと,

$$\delta(\partial_t + \mathbf{c}_k \cdot \nabla)f_k + \frac{1}{2}\delta^2(\partial_t + \mathbf{c}_k \cdot \nabla)^2 f_k = -\frac{f_k(\mathbf{x}, t) - f_k^{(0)}(\mathbf{x}, t)}{\tau}, \quad (7)$$

が得られ, Chapman-Enskog 展開,

$$f_k \approx f_k^{(0)} + \varepsilon f_k^{(1)} + \varepsilon^2 f_k^{(2)},$$

$$\partial_t \approx \partial_{t0} + \varepsilon \partial_{t1}, \quad \partial_x \approx \varepsilon \partial_{x1}, \quad (8)$$

を行い, 式 (8) を式 (7) に代入すると,  $O(\varepsilon)$  のオーダーにおいて,

$$\varepsilon[\delta(\partial_{t0} + \mathbf{c}_k \cdot \nabla_1)f_k^{(0)}] = -\frac{\varepsilon}{\tau}f_k^{(1)}, \quad (9)$$

が,  $O(\varepsilon^2)$  のオーダーにおいて,

$$\varepsilon^2[\delta\delta\partial_{t1} + \delta^2\left(\frac{1}{2} - \tau\right)(\partial_{t0} + \mathbf{c}_k \cdot \nabla_1)^2]f_k^{(0)} = -\frac{\varepsilon^2}{\tau}f_k^{(2)}, \quad (10)$$

が, それぞれ, 得られる. ここで,  $\varepsilon$  は Knudsen 数に相当する微小量である. 保存則,

$$\sum_k f_k^{(0)} = \phi, \quad \sum_k f_k^{(0)} c_{k\alpha} = \phi u_\alpha,$$

$$\sum_k f_k^{(0)} c_{k\alpha} c_{k\beta} = \Xi_{\alpha\beta}, \quad (11)$$

を, 式 (9), (10) に代入すると,

$$\partial_t \phi + \nabla \cdot (\phi \mathbf{u}) = \delta\left(\tau - \frac{1}{2}\right)[\nabla \nabla : \Xi + \partial_t \nabla \cdot (\phi \mathbf{u})], \quad (12)$$

が得られる. ここで,  $\nabla \nabla : \Xi = \partial_\alpha \partial_\beta \Xi_{\alpha\beta}$  である.

Y. Peng が提案したモデルでは, 式 (4) の分布関数から,

$$\Xi_{\alpha\beta} = \sum_k f_k^{(0)} c_{k\alpha} c_{k\beta} = \phi \left( \frac{2c^2}{3} \delta_{\alpha\beta} + u_\alpha u_\beta \right), \quad (13)$$

となり, 式 (13) を式 (12) に代入すると,

$$\partial_t \phi + \nabla \cdot (\phi \mathbf{u}) = \frac{2c^2}{3} \left( \tau - \frac{1}{2} \right) \delta \nabla^2 \phi$$

$$+ \delta \left( \tau - \frac{1}{2} \right) [\nabla \nabla : (\phi \mathbf{u} \mathbf{u}) + \partial_t \nabla \cdot (\phi \mathbf{u})], \quad (14)$$

が得られる. つまり, Y. Peng のモデルでは, 拡散係数  $\chi$  は,

$$\chi = \frac{2c^2}{3} \left( \tau - \frac{1}{2} \right) \delta, \quad (15)$$

であり，誤差項として，

$$\delta\left(\tau - \frac{1}{2}\right)[\nabla\nabla : (\phi\mathbf{u}\mathbf{u}) + \partial_t\nabla \cdot (\phi\mathbf{u})], \quad (16)$$

が存在することが，式 (14) から分る．ただし，

$$\partial_t(\phi\mathbf{u}) + \nabla \cdot (\phi\mathbf{u}\mathbf{u}) = 0, \quad (17)$$

が成り立てば，

$$\partial_t\nabla \cdot (\phi\mathbf{u}) = -\nabla\nabla : (\phi\mathbf{u}\mathbf{u}), \quad (18)$$

となり，式 (16) の誤差項は消滅する．つまり，Y. Peng のモデルでは，式 (17) が成立する場合のみ，誤差が存在しないことになる．次に，大西のモデルについて考察する．2D5Q モデルにおける式 (6) の平衡分布関数から，

$$\Xi_{\alpha\beta} = \sum_k f_k^{(0)} c_{k\alpha} c_{k\beta} = \frac{c^2\phi}{2}\delta_{\alpha\beta}, \quad (19)$$

となり，式 (19) を式 (12) に代入すると，

$$\begin{aligned} \partial_t\phi + \nabla \cdot (\phi\mathbf{u}) &= \frac{c^2}{2}\left(\tau - \frac{1}{2}\right)\delta\nabla^2\phi \\ &+ \delta\left(\tau - \frac{1}{2}\right)[\partial_t\nabla \cdot (\phi\mathbf{u})], \end{aligned} \quad (20)$$

が得られる．大西のモデルでは，拡散係数  $\chi$  は，

$$\chi = \frac{c^2}{2}\left(\tau - \frac{1}{2}\right)\delta, \quad (21)$$

であり，誤差項，

$$\delta\left(\tau - \frac{1}{2}\right)[\partial_t\nabla \cdot (\phi\mathbf{u})], \quad (22)$$

が存在する．この誤差項には，時間に関する微分演算子が含まれており，自然対流等の定常問題に対しては  $\partial_t(\phi\mathbf{u}) \approx 0$  となり，問題にならないが，非定常問題においては，計算精度が低下する可能性がある．

この大西のモデルの誤差項は，H. W. Zheng らが，Phase Field モデルに対する LBM で用いた手法<sup>(13)</sup>を応用することより，除去可能である．まず，平衡分布関数を，

$$f_0^{(0)} = 0, \quad f_k^{(0)} = \frac{1}{4}\phi\left[1 + 2\frac{(\mathbf{c}_k \cdot \mathbf{u})}{c^2q}\right], k = 1, 2, 3, 4, \quad (23)$$

のように再定義する．次に，隣接する離散速度方向  $\mathbf{x} + \mathbf{c}_k\delta$  への  $f_k(\mathbf{x}, t)$  の並進を制御するパラメータ  $q$  を，運動学的方程式に導入する．

$$\begin{aligned} &f_k(\mathbf{x} + \mathbf{c}_k\delta, t + \delta) - f_k(\mathbf{x}, t) \\ &+ (q-1)[f_k(\mathbf{x} + \mathbf{c}_k\delta, t) - f_k(\mathbf{x}, t)] \\ &= -\frac{f_k(\mathbf{x}, t) - f_k^{(0)}(\mathbf{x}, t)}{\tau}. \end{aligned} \quad (24)$$

式 (24) に対し，テーラー展開を行うと，次式が得られる．

$$\begin{aligned} &\delta(\partial_t + \mathbf{c}_k \cdot \nabla)f_k + \frac{1}{2}\delta^2(\partial_t + \mathbf{c}_k \cdot \nabla)^2 f_k \\ &+ (q-1)[\delta(\mathbf{c}_k \cdot \nabla) + \frac{1}{2}\delta^2(\mathbf{c}_k \cdot \nabla)^2]f_k \\ &= -\frac{f_k(\mathbf{x}, t) - f_k^{(0)}(\mathbf{x}, t)}{\tau}. \end{aligned} \quad (25)$$

式 (8) を式 (25) に代入すると， $O(\varepsilon)$  のオーダーに対し，

$$\varepsilon[\delta(\partial_{t0} + q\mathbf{c}_k \cdot \nabla_1)f_k^{(0)}] = -\frac{\varepsilon}{\tau}f_k^{(1)}, \quad (26)$$

が， $O(\varepsilon^2)$  のオーダーに対し，

$$\begin{aligned} &\varepsilon^2\left[\delta\partial_{t1} + \delta^2\left(\frac{1}{2} - \tau\right)\partial_{t0}(\partial_{t0} + \mathbf{c}_k \cdot \nabla_1)\right. \\ &\quad \left.+ q\delta^2\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{2} - \tau\right)\partial_{t0}\mathbf{c}_k \cdot \nabla_1\right. \\ &\quad \left.+ q\delta^2\left(\frac{1}{2} - \tau q\right)(\mathbf{c}_k \cdot \nabla_1)^2\right]f_k^{(0)} = -\frac{\varepsilon^2}{\tau}f_k^{(2)}, \end{aligned} \quad (27)$$

が，それぞれ，得られる．ここで，再定義した平衡分布関数 (23) から得られる，

$$\begin{aligned} \sum_k f_k^{(0)} &= \phi, & \sum_k f_k^{(0)} c_{k\alpha} &= \frac{\phi u_\alpha}{q}, \\ \sum_k f_k^{(0)} c_{k\alpha} c_{k\beta} &= \frac{c^2\phi}{2}\delta_{\alpha\beta}, \end{aligned} \quad (28)$$

の関係を，式 (26)，(27) に代入すると，

$$\begin{aligned} \partial_t\phi + \nabla \cdot (\phi\mathbf{u}) &= \frac{c^2}{2}q\left(\tau q - \frac{1}{2}\right)\delta\nabla^2\phi \\ &+ \left(\frac{1}{2} + \tau - \frac{1}{q}\right)\delta[\partial_t\nabla \cdot (\phi\mathbf{u})], \end{aligned} \quad (29)$$

となる．

$$q = \frac{1}{\tau + 0.5}, \quad (30)$$

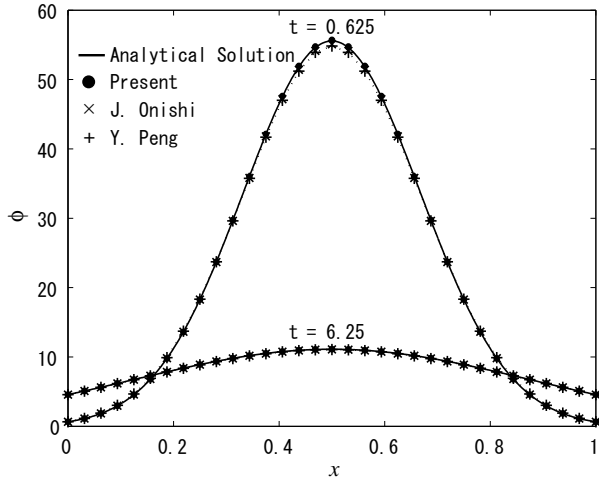


Fig. 1 Parameter profile at  $t = 0.625$  and  $t = 6.25$  ( $Pe = 0$ ).  $\chi = 0.01$ ,  $u_x=0$ ,  $\phi_0=100$ , and  $\sigma_0 = 0.125$ .

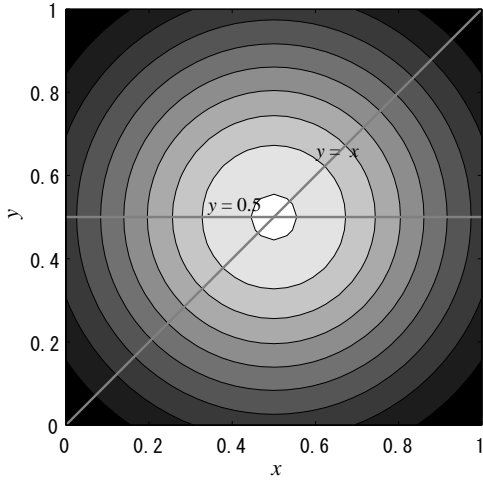


Fig. 2 Parameter distribution at  $t = 6.25$  ( $Pe = 0$ ).

とおけば、誤差項が除去され、拡散係数  $\chi$  は、

$$\chi = \frac{c^2}{2} q \left( \tau q - \frac{1}{2} \right) \delta = \frac{c^2}{(2\tau + 1)^2} \left( \tau - \frac{1}{2} \right) \delta, \quad (31)$$

となる。次節で、誤差項を除去したことによる、計算精度および、数値安定性に対する影響を検証する。

### 3. 数値計算

Y. Peng のモデル、大西のモデル、本論文で提案する大西のモデルの誤差項を除去したモデルの3つのモデルについて、空間精度と数値的安定性について比較検証する。パラメータ  $\phi$  の初期条件が、

$$\phi(\mathbf{x}, 0) = \phi_0 \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2\sigma_0^2}\right), \quad (32)$$

で与えられた場合、一様な対流速度  $(u_x, u_y)$  に対する対流拡散方程式の厳密解は、

$$\hat{\phi}(\mathbf{x}, t) = \frac{\phi_0 \sigma_0^2}{\sigma_0^2 + 2\chi t} \exp\left(-\frac{(x - u_x t)^2 + (y - u_y t)^2}{2(\sigma_0^2 + 2\chi t)}\right), \quad (33)$$

で与えられる。このベンチマーク問題を用い、対流拡散方程式に対する精度評価を行う。

本論文では、境界上の値  $\phi_{wall}$  を以下のように設定する。例えば、 $y = 0$  に存在する下壁に対し、2D5Qモデルでは  $f_0$ ,  $f_1$ ,  $f_3$  は壁内に滞留するが、 $f_4$  が流体側から壁に流入した時、壁から流体側に流出する分布関数  $f_2$  は、

$$f_2 = \phi_{wall} - f_0 - f_1 - f_3 - f_4, \quad (34)$$

で決定できる。2D9Qモデルに対しても、同様に、 $y = 0$  に存在する下壁に対し、 $f_0$ ,  $f_1$ ,  $f_3$  は壁内に滞留する。2D9Qモデルでは、 $f_4$ ,  $f_7$ ,  $f_8$  が流体側から壁に流入し、壁から流体側に流出する分布関数  $f_2$ ,  $f_5$ ,  $f_6$  は、

$$f_2 = \phi_{wall} - f_0 - f_1 - f_3 - f_4 - f_5 - f_6 - f_7 - f_8, \quad (35)$$

$$f_5 = f_5^{(0)}(\phi_{wall}, u_x, u_y), \quad f_6 = f_6^{(0)}(\phi_{wall}, u_x, u_y), \quad (36)$$

で与える。つまり、2D9Qモデルでは、分布関数  $f_5$ ,  $f_6$  に対しては、式(4)で定義される平衡分布関数を用いる。残りの3つの壁面に対しても同様の方法で境界条件を設定する。

初期条件を式(32)で与え、 $\chi = 0.01$ ,  $\sigma_0 = 0.125$ ,  $u_x = 0$ ,  $u_y = 0$  とし、ペクレ数  $Pe = u_x L / \chi = 0$  とした場合の計算結果をFig.1に示す。以下に示すFig.1-4の計算では、全て、空間刻み幅  $\Delta x = 1/32$ , 代表長さ  $L = 1$ ,  $\phi_0 = 100$  とした。本モデルの計算結果を(●)で、大西のモデルを(×)で、Y. Pengのモデルを(+)で、厳密解を実線で示す。大西や、Y. Pengのモデルでは、式(16), (22)で示された誤差項の影響により、厳密解と比較して拡散の効果が強くなっているが、誤差項を除去した本モデルでは、厳密解とほぼ一致する解が得られている。Fig.1で示された  $t = 6.25$  における、本モデルの  $\phi$  の  $xy$  平面上の空間分布を、Fig.2に示す。相対誤差、

$$E = \left( \frac{\sum_{\mathbf{x}} |\phi(\mathbf{x}) - \hat{\phi}(\mathbf{x})|^2}{\sum_{\mathbf{x}} |\hat{\phi}(\mathbf{x})|^2} \right)^{1/2}, \quad (37)$$

を、Fig.2に示す  $y = 0.5$  の直線上に存在する  $\phi(x, 0.5)$  の値について計算したところ、 $E = 0.0011$ であった。Fig.2に示す斜め方向の  $y = x$  の直線上では  $E = 0.0099$  となり、方向によって誤差が約9倍になった。一方、Y. Pengの2D9Qモデルでは、 $y = 0.5$  で  $E = 0.0036$ ,  $y = x$  の直線上で  $E = 0.0203$  であり、方向による誤差の違いは約6倍であった。I. Rasinらが指摘したように<sup>(12)</sup>、衝突則に単一緩和時間を用いる限り、3階テンソルまで等方である2D4Qモデルより、5階テ

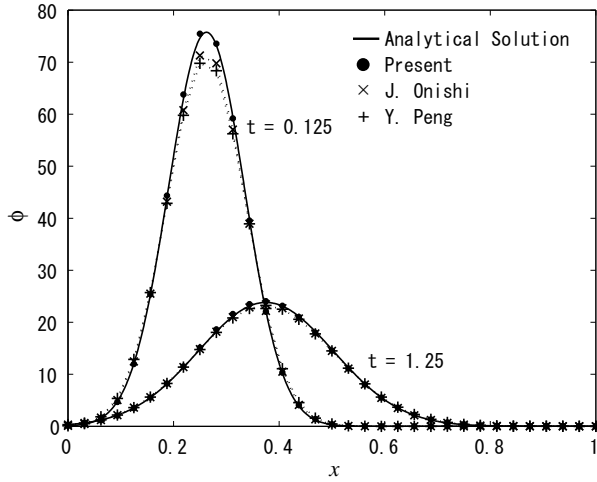


Fig. 3 Parameter profile at  $t = 0.125$  and  $t = 1.25$  ( $Pe = 20$ ).  $\chi = 0.005$ ,  $u_x = 0.1$ ,  $\phi_0 = 100$ , and  $\sigma_0 = 0.0625$ .

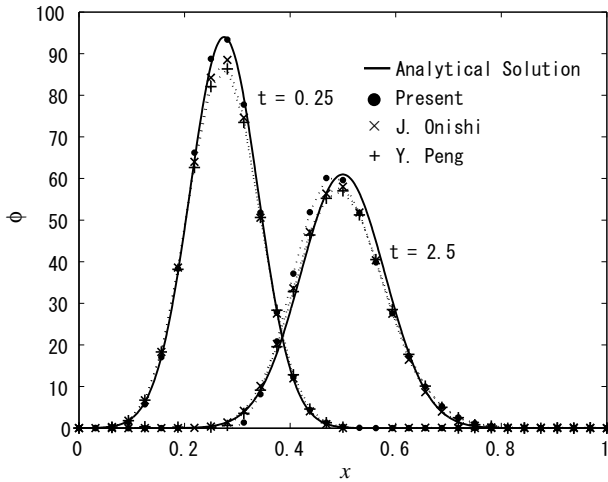


Fig. 4 Parameter profile at  $t = 0.25$  and  $t = 2.5$  ( $Pe = 200$ ).  $\chi = 0.0005$ ,  $u_x = 0.1$ ,  $\phi_0 = 100$ , and  $\sigma_0 = 0.0625$ .

ソルまで等方な 2D9Q モデルの方が拡散係数の等方性が高い。本計算でも同様に、Y. Peng の 2D9Q モデルと比較すると、2D5Q モデルの空間対称性は劣るが、本モデルの拡散に対する空間対称性は許容可能な範囲に保たれている。ペクレ数を  $Pe = 20$ ,  $Pe = 200$  とした場合の計算結果を、それぞれ、Fig.3 と Fig.4 に示す。ペクレ数を大きくした場合でも、Fig.3 の  $t = 0.125$  や Fig.4 の  $t = 0.25$  等の初期の状態において、本手法のプロファイルが厳密解に最も近いことが分る。

次に、Fig.1, Fig.3, Fig.4 の計算条件を用い、格子点数を  $N = 16, 32, 64, 128, 256$  と変更することで、式 (37) から、解像度と空間精度との関係を求める。 $Pe = 0, 20, 200$  に対する相対誤差  $E$  と解像度との関係を、それぞれ、実線、破線、点線で Fig.5 に示す。ここで、 $Pe = 0, 20, 200$  に対し、それぞれ、 $t = 6.25, 1.25, 2.5$  における計算結果を用いて、式 (37) から相対誤差  $E$  を算出した。Fig.5 より、対流過程が考慮されない  $Pe = 0$  では、本モデルの相対誤差が最小であることが分る。Pe 数が増加するにつれ、各モデルの計算精度の差はほとんどなくなり、 $Pe = 200$  において、本モデル

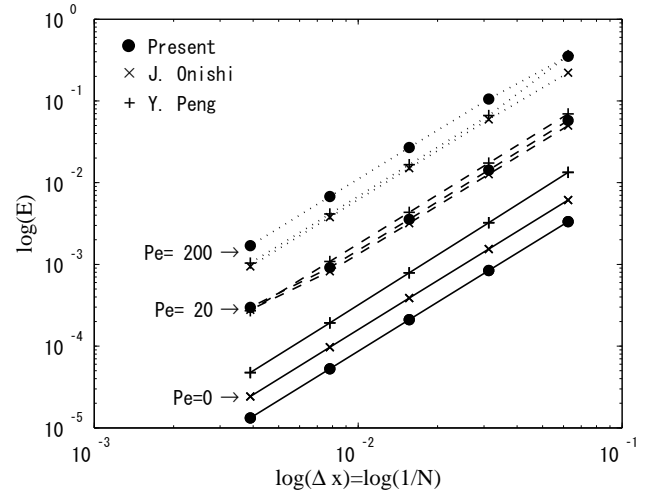


Fig. 5 Relative error as function of the resolution.

Table 1 The spatial convergence rates for present model at  $Pe = 0$

Lattice size ( $N \times N$ )	$E$	$L_2$
$16 \times 16$	$3.338 \times 10^{-3}$	
$32 \times 32$	$8.402 \times 10^{-4}$	1.990
$64 \times 64$	$2.108 \times 10^{-4}$	1.995
$128 \times 128$	$5.282 \times 10^{-5}$	1.997
$256 \times 256$	$1.322 \times 10^{-6}$	1.999

の相対誤差が最大になる。Pe 数が高くなると、対流効果が拡散効果より優位になるが、大西や Y. Peng のモデルに存在する誤差項が数値拡散として作用することで解を安定化させ、本モデルよりも計算精度を向上させたと考えられる。つまり、Fig.4 に示される  $t = 2.5$  の計算結果において、 $x = 0.3$  近傍で本モデルでは数値振動によるアンダーシュートが観察されるが、大西や Y. Peng のモデルでは、このような振動が数値拡散によって抑制されている。一方、 $Pe = 0$  における拡散方程式を解析する場合は、数値拡散として作用する誤差項がない本モデルの精度が最も良くなる。

ここで、次式で定義される  $L_2$  ノルムを用い計算モデルの空間精度を算出する。

$$L_2 = \log_2 \frac{E(N)}{E(2N)}. \quad (38)$$

Fig.5 で示された  $Pe = 0$  における本モデルの計算結果から得られた  $L_2$  ノルムを Table 1 に示す。Table 1 の結果から、本モデルが空間 2 次精度を有していることが分る。また、Fig.5 において、本モデルと勾配が等しいことから、大西、Y. Peng のモデルも空間 2 次精度を有していることが分る。

最後に、フォン・ノイマンの方法を用い、数値的安定性について調べる<sup>(14)</sup>。式 (1) または式 (24) で表される運動学的方程式を空間と時間に依存しない、 $\phi$  と  $u$  だけの関数である分布関数  $f_k^{(0)}$  周りに、

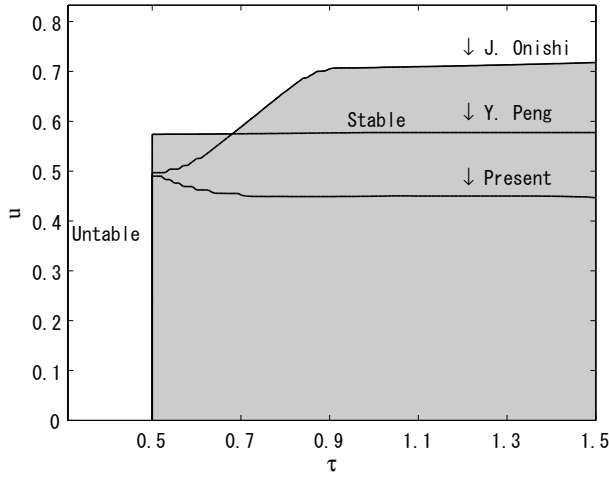


Fig. 6 Stability region as function of relaxation time and the velocity.

$$f_k(\mathbf{x}, t) = \bar{f}_k^{(0)} + \hat{f}_k(\mathbf{x}, t), \quad (39)$$

のように展開し,

$$\hat{f}_k(\mathbf{x} + \mathbf{c}_k \delta, t + \delta) = V_k^{n+1} \exp(i\kappa \cdot \mathbf{c}_k \delta i), \quad (40)$$

とおくことにより, 時間  $n + 1$  における振幅関数  $V_k^{n+1}$  と, 時間  $n$  における振幅関数  $V_k^n$  との関係を, 増幅行列  $G_{k,m}$  によって表すことができる.

$$V_k^{n+1} = G_{k,m} V_k^n. \quad (41)$$

ここで,  $i$  は虚数単位,  $\kappa$  は波数である. この増幅行列  $G_{k,m}$  の固有値の最大値が 1 より小さければ, 数値的に安定と判断される<sup>(15)</sup>. Fig.6 に, 流速  $u$  と緩和時間  $\tau$  に対する, 各モデルの安定領域を網掛けで示す. 本モデルは, 他のモデルと比較し, 流速に対して安定領域が小さくなっている. これは, 数値拡散項が除去された影響と考えられる. なお, 全てのモデルに対して,  $\tau > 0.5$  が安定条件であった.

#### 4. おわりに

Chapman-Enskog 展開により, 対流拡散方程式に対する LBM には, 誤差項が存在することが明らかにされた. この誤差項は, 隣接格子点への分布関数の並進作用を制御することにより除去された. 初期条件をガウス分布として与えるベンチマーク問題から, 対流拡散方程式に対する LBM は全て空間 2 次精度を有し, 誤差項が数値拡散として作用することが示された. フォン・ノイマンの安定性解析により, 誤差項を除去したことで, 安定領域が縮小することが示された.

#### 参考文献

- (1) Chen, S. and Doolen, G. D.: Lattice Boltzmann Method for Fluid FLOws, Annu. Rev. Fluid Mech., **30**(1998), pp. 329–364.
- (2) Takada, N., Tomiyama, A., and Hosokawa, S.: Numerical Simulation of Drops in a Shear Flow by a Lattice-Boltzmann Binary Fluid Model, Comput. Fluid Dyn. J., **12**(2003), pp. 475–481.
- (3) Yoshino, M., Hotta, Y., Hirozane, T., and Endo, M.: A Numerical Method for Incompressible Non-Newtonian Fluid Flows Based on the Lattice Boltzmann Method, J. Non-Newtonian Fluid Mech., **147**(2007), pp. 69–78.
- (4) Watari, M.: Finite difference lattice Boltzmann method with arbitrary specific heat ratio applicable to supersonic flow simulations, Physica A, **382**(2007), pp. 502–522.
- (5) He, X., Chen, S., and Doolen, G. D.: A novel thermal model for the lattice Boltzmann method in incompressible limit, J. Comput. Phys., **146**(1998), pp. 282–300.
- (6) Kataoka, T. and Tsutahara, M.: Lattice Boltzmann model for the compressible Navier-Stokes equations with flexible specific-heat ratio, Phys. Rev. E, **69**(2004), pp. 035701(R).
- (7) Onishi, J., Chen, Y., and Ohashi, H.: Lattice Boltzmann simulation of natural convection in a square cavity, JSME Int. J. Ser. B, **44**(2001), pp. 53–62.
- (8) Peng, Y., Shu, C., and Chew, Y. T.: Simplified thermal lattice Boltzmann model for incompressible thermal flows, Phys. Rev. E, **68**(2003), pp. 026701.
- (9) Inamuro, T., Yoshino, M., Inoue, H., Mizuno, R., and Ogino, F.: A Lattice Boltzmann Method for a Binary Miscible Fluid Mixture and Its Application to a Heat-Transfer Problem, J. Comput. Phys., **179**(2002), pp. 201–215.
- (10) Suga, S.: Numerical schemes obtained from lattice boltzmann equations for advection diffusion equations, Int. J. Mod. Phys. C, **17**(2006), pp. 1563–1577.
- (11) van der Sman, R. G. M. and Ernst, M. H.: Convection-diffusion lattice Boltzmann scheme for irregular lattices, J. Stat. Phys., **160**(2000), pp. 766–782.
- (12) Rasin, I., Succi S., and Miller, W.: A multi-relaxation lattice kinetic method for passive scalar diffusion, J. Comput. Phys., **206**(2005), pp. 453–462.
- (13) Zheng, H. W., Shu, C., and Chew, Y. T.: Lattice Boltzmann interface capturing method for incompressible flows, Phys. Rev. E, **72**(2005), pp. 056705.
- (14) Seta, T. and Ryoichi, T.: Numerical Stability Analysis of FDLBM, J. Stat. Phys., **107**(2002), pp. 557–572.
- (15) Sterling, J. D. and Chen, S.: Stability Analysis of Lattice Boltzmann Methods, J. Comput. Phys., **123**(1996), pp. 196–206.