格子ボルツマン法による異方性を有する多孔質体内流動解析

Fluid Flow Analysis in Anisotropic Porous Media by Lattice Boltzmann Method

○瀬田　剛，富大院, 930-8555 富山市五福 3190, E-mail:seta@eng.u-toyama.ac.jp
Takeshi SETA, Graduate School of Science and Engineering for Research, University of Toyama, 3190 Gofuku, Toyama-shi, Toyama 930-8555, Japan

The lattice Boltzmann method (LBM) is applied to simulation of natural convection in anisotropic porous media using Brinkman equation. The Brinkman equation is recovered from a kinetic equation for the density distribution function with a forcing term. The temperature equation is calculated by a kinetic equation for thermal energy distribution function. The velocity profiles of the LBM shows good agreement with those of the analytical solutions for the Poiseuille flow and for the Couette flow filled with anisotropic porous media. For various values of Darcy and Rayleigh numbers, the solutions of the LBM are compared with those of earlier studies in natural convection. This paper leads to the conclusion that the LBM can simulate natural convection in anisotropic porous media for the non-Darcy model.

1．はじめに

格子ボルツマン法[1]（Lattice Boltzmann Method, LBM）は，線形な対流過程からナビエ・ストークス方程式の非線形な対流過程が導出でき，時間と空間に対し２次精度を有し，ポアソン方程式の反復計算が不要であることなどから，非圧縮性流体解析だけでなく，熱流体や混相流など様々な流体解析に適用された[1-3]．また，LBM は境界条件の設定が容易であるため，多孔質体内の微細な流動現象を詳細に再現でき，ミクロスケールによる解析手法として注目された[1]．一方，透過係数や気孔率を用いるフォルクハイマー・ダルシー・モデルに基づく，巨視的な方程式系に対する LBM も Z. Guo らにより提案された[4]．著者らはエネルギー方程式に対応する分布関数を付加した２成分系 LBM[3]を，多孔質体 LB モデル[4]に適応し，多孔質体内自然対流解析を行い他の計算手法と同等の計算精度でより高速に解析結果が得られることを示した[5, 6]．本研究では，多孔質体の異方性を考慮したブリンクマン・ダルシー・モデルに対する LBM を提案し，ポアズイユ流れとクエット流れの計算により，モデルの有効性を検証する．また，ブジネスク近似を用いることにより，異方性多孔質体内の自然対流解析を行い，ヌセルト数について，他の数値計算結果と比較検証する．

2．格子ボルツマン法

ブリンクマン方程式において，多孔質体の異方性を考慮した場合の支配方程式は，連続の式，

$$\nabla\cdot\boldsymbol{u}=0, \tag{1}$$

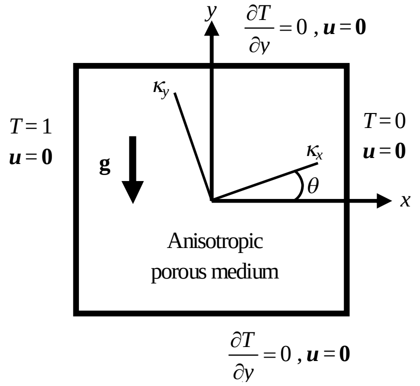


Fig.1　Schematic of an anisotropic porous medium.

ナビエ・ストークス方程式，

$$\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial t}+\boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{u}=-\frac{1}{\rho}\nabla P+\nu\nabla^2\boldsymbol{u}+\boldsymbol{F}, \tag{2}$$

エネルギー方程式，

$$\frac{\partial e}{\partial t}+\nabla\cdot(e\boldsymbol{u})=\chi\nabla^2T, \tag{3}$$

で表される．式(2)の外力項は，

$$\begin{bmatrix}F_x\\F_y\end{bmatrix}=-\nu\begin{bmatrix}K_{11}&K_{12}\\K_{21}&K_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_x\\u_y\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}g_x\\g_y\end{bmatrix}, \tag{4}$$

$$\begin{bmatrix}K_{11}&K_{12}\\K_{21}&K_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{\cos^2\theta}{\kappa_x}+\dfrac{\sin^2\theta}{k_y}&\left(\dfrac{1}{\kappa_x}-\dfrac{1}{\kappa_y}\right)\sin\theta\cos\theta\\\left(\dfrac{1}{\kappa_x}-\dfrac{1}{\kappa_y}\right)\sin\theta\cos\theta&\dfrac{\sin^2\theta}{k_x}+\dfrac{\cos^2\theta}{k_y}\end{bmatrix}, \tag{5}$$

である．図１に示されるように，κ_x，κ_yは，それぞれ，x軸，y軸方向に対する透過係数，$\theta(0\le\theta\le\pi/2)$は$\kappa_x$の x 軸からの傾き，g_x，g_y は重力を表す．本研究では，浮力に対して，ブジネスク近似 $g_y=g\beta(T-T_m)$ を用いる．式(1)-(5)の方程式系を，２種類の分布関数 f_i，g_i に対する格子ボルツマン方程式によって解析する．

$$f_i(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{c}_i\delta_t,t+\delta_t)-f_i(\boldsymbol{x},t)=-\frac{f_i(\boldsymbol{x},t)-f_i^{eq}(\boldsymbol{x},t)}{\tau_v}+\delta_tF_i, \tag{6}$$

$$g_i(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{c}_i\delta_t,t+\delta_t)-g_i(\boldsymbol{x},t)=-\frac{g_i(\boldsymbol{x},t)-g_i^{eq}(\boldsymbol{x},t)}{\tau_c}. \tag{7}$$

密度ρと流速$\boldsymbol{u}$は，粒子速度分布関数f_i により，

$$\rho=\sum_if_i,\quad\rho\boldsymbol{u}=\sum_i\boldsymbol{c}_if_i+\frac{\delta_t}{2}\rho\boldsymbol{F}, \tag{8}$$

のように求められ，内部エネルギーeは，g_i により，

$$\rho e=\sum_ig_i. \tag{9}$$

のように求まる．チャップマン・エンスコーグ展開により，式(6)から式(1)，(2)が，式(7)から式(3)が導出される．ここで，動粘性係数νと熱拡散率χ は，それぞれ，

$$\nu = \frac{1}{3}\left(\tau_\nu - \frac{1}{2}\right)c^2\delta_t,\ \chi = \frac{2}{3}\left(\tau_c - \frac{1}{2}\right)c^2\delta_t, \tag{10}$$

のように緩和時間τ_ν，τ_cによって定められる．式(6)の外力項 F_iには，Z. Guo によって提案されたモデル[4]を用いる．なお，式(4)より，式(8)の両辺に速度が含まれるため，次式のように展開することにより，速度 $\boldsymbol{u}$ を求めることにする．

$$\begin{bmatrix} 1+\frac{\delta_t \nu K_{11}}{2} & \frac{\delta_t \nu K_{12}}{2} \\ \frac{\delta_t \nu K_{21}}{2} & 1+\frac{\delta_t \nu K_{22}}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix} = \frac{1}{\rho}\sum_i \begin{bmatrix} c_{ix} f_i \\ c_{iy} f_i \end{bmatrix} + \frac{\delta_t}{2}\begin{bmatrix} g_x \\ g_y \end{bmatrix}. \tag{11}$$

３．計算結果

ポアズイユ流れの計算により，厳密解と解析結果との比較を行う．x 軸方向に静止壁を，y 軸方向に周期境界条件を設定し，外力 g_yを加えた場合，式(2)に対する厳密解は，

$$u_y = \frac{g_y \kappa_{22}}{\nu}\left(1 - \frac{\cosh\left(\sqrt{1/\kappa_{22}}\,(x - W/2)\right)}{\cosh\left(\sqrt{1/\kappa_{22}}\,W/2\right)}\right), \tag{12}$$

で与えられる．W はチャネル幅である．境界条件には，Q. Zou らによって提案された非平衡分布関数に対するバウンスバック・スキームを用いる[7]．ダルシー数($Da = \kappa_y/W^2$)を 10^{-2}，$\theta = \pi/4$ とし，透過係数の比率 $k^* = \kappa_y/\kappa_x$ を変化させた場合の速度分布について，LBM による計算結果を(×)で，式(12)の厳密解を実線で図 2 に示す．LBM による計算結果が厳密解とよく一致している．次に，クエット流れの計算を行う．x 軸方向の上部壁を u_0 の一定速度で動かし，y 軸方向に周期境界条件を設定した場合，厳密解は，

$$u_y = u_0 \frac{\sinh\left(\sqrt{1/\kappa_{22}}\,x\right)}{\sinh\left(\sqrt{1/\kappa_{22}}\,W\right)}, \tag{13}$$

で与えられる．透過係数の比率 $k^* = 0.1$，$\theta = \pi/4$ とし，ダルシー数 Da を変化させた場合の速度分布を図 3 に示す．図 3 から，移動境界条件に対しても，本 LBM により，異方性多孔質体内の流速が適切に計算されることが分る．最後に，異方性多孔質体内の自然対流解析を行う．流れ関数と温度の分布を，それぞれ，図 4, 5 に示す．図 4, 図 5 とも，実線は LBM による計算結果であり，破線は差分法による計算結果である．Ra 数と Da 数を等しくしても，異方性の影響により，自然対流の流動様式が異なっている．また, LBM の計算結果が差分法の結果とよく一致していることも分る．$Da = 10^2$ において，傾きθ，透過係数の比率 k*，レイリー数 Ra を変えた場合の平均ヌセルト数 Nu の結果を表 1 に示す．P. Nithiarasu らによって得られた FEM の結果[8]とほぼ等しい値が，本 LBM によって得られている．

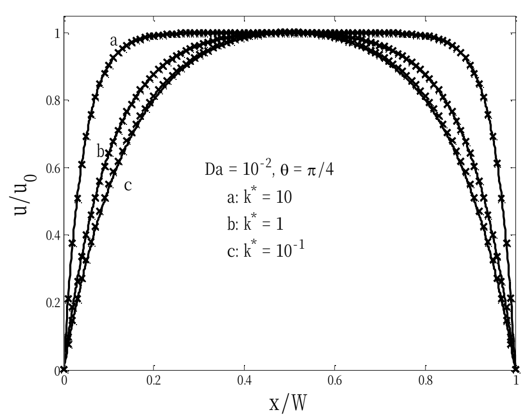


Fig.2　Numerical and theoretical results of Poiseuille Flow.

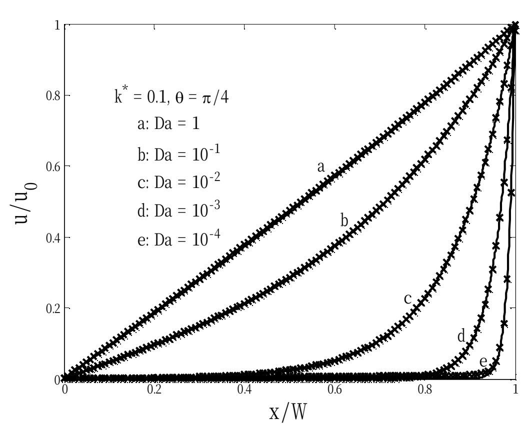


Fig.3　Numerical and theoretical results of Couette flow.

４．おわりに

異方性多孔質体内流動解析が可能な格子ボルツマンモデルを提案した．ポアズイユ流れとクエット流れの計算により，本 LBM による計算結果が厳密解と一致することが示され，多孔質体による速度分布への影響が適切に計算されることが示された．異方性多孔質体内自然対流解析において，本 LBM によって計算されたヌセルト数と参照解とが一致した．また，PC (CPU：3.0GHz)で計算したところ，自然対流の定常解が得られるまで，差分法では 575,468s (6 日 15 時間) かかったが，LBM では 12,999s (3.5 時間)であり，LBM は高速に解を得ることができることも分った. 以上から，本 LBM は，異方性多孔質体内熱流動解析に有効であることが示された. なお，本研究は，科学研究費（No.20560150）の支援のもと行われた．ここに謝意を表する．

Table 1 Comparison of average Nusselt number ($Da = 10^{-2}$)

No.	θ	k*	Ra	Nu	
				FEM[8]	Present
1	0°	0.1	10^4	1.892	1.905
2	45°	0.1	10^4	1.870	1.885
3	90°	0.1	10^4	1.891	1.905
4	0°	10	10^4	1.140	1.137
5	45°	10	10^4	1.153	1.171
6	90°	10	10^4	1.141	1.137
7	0°	0.1	10^5	4.393	4.338
8	45°	0.1	10^5	4.425	4.366
9	90°	0.1	10^5	4.491	4.425
10	0°	10	10^5	3.203	3.213
11	45°	10	10^5	3.191	3.192
12	90°	10	10^5	2.951	2.954

参考文献

(1) Chen, S. and Doolen, G. D., “Lattice Boltzmann Method for Fluid FLows,” Annu. Rev. Fluid Mech., 30 (1998), pp.329-364.

(2) Seta, T. and Ryoichi, T., “Numerical Stability Analysis of FDLBM,” Journal of Statistical Physics, 107 (2002), pp.557-572.

(3) Peng, Y., Shu, C., Chew, Y., T. “Simplified Thermal Lattice Boltzmann Model for Incompressible Thermal Flows,” Physical Review E, 68 (2003), 026701.

(4) Guo. Z. L. and Zhao, T. S., “Lattice Boltzmann Model. for Incompressible Flows Through Porous Media,” Physical Review E, 65 (2002), 046308.

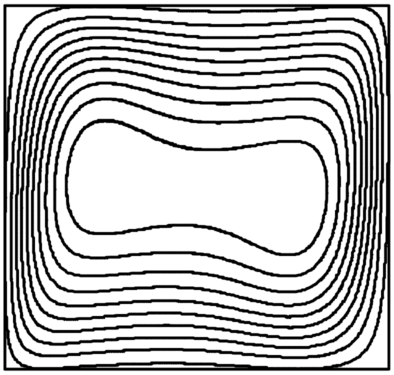
(5) Seta, T., Takegoshi, E., and Okui, K., “Lattice Boltzmann simulation

of natural convection in porous media," Mathematics and Computers in Simulation, l.72 (2006), pp.195-200.

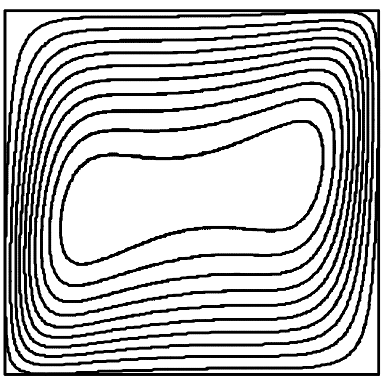
(6) Seta, T., Takegoshi, E., Kitano, K., and Okui, K., "Thermal Lattice Boltzmann Model for Incompressible Flows through Porous Media," Journal of Thermal Science and Technology, 1 (2006), pp.90-100.

(7) Zou, Q. and He, X. "On Pressure and Velocity. Boundary Conditions for the Lattice Boltzmann BGK. Model," Phys. Fluids, 9 (1997), pp.1591-1598.

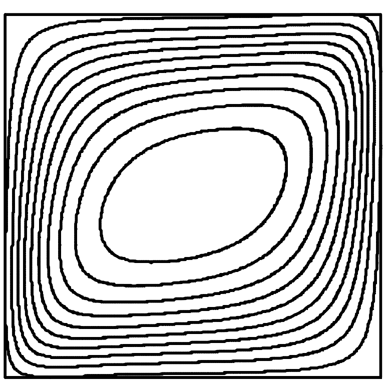
(8) Nithiarasu, P., Sujatha, K. S., Ravindran, K., Sundararajan, T., and Seetharamu, K. N., "Non-Darcy Convection in a Hydrodynamically and Thermally Anisotropic Porous Medium," Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 188 (2000), pp.413-430.



(a) $\theta = 90°$ k* = 0.1

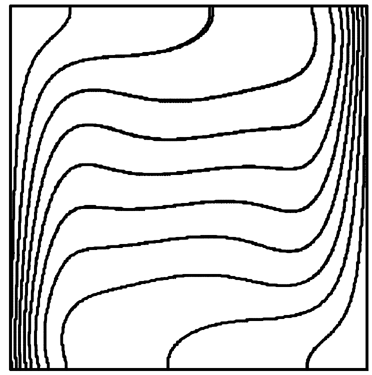


(b) $\theta = 0°$ k*= 10

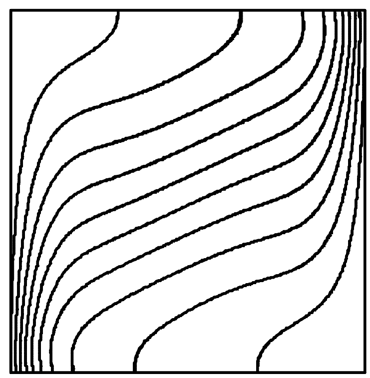


(c) $\theta = 90°$ k* = 10

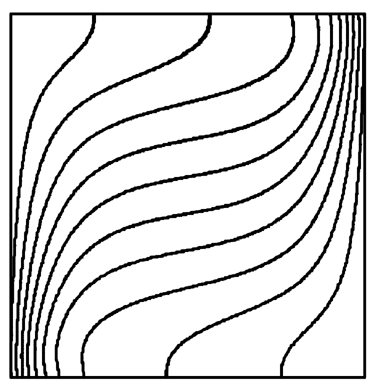
Fig.4 Stream function (Da = 10^{-2}, Ra = 10^{5}).



(a) $\theta = 90°$ k* = 0.1



(b) $\theta = 0°$ k*= 10



(c) $\theta = 90°$ k* = 10

Fig.5 Isotherm patterns (Da = 10^{-2}, Ra = 10^{5}).