

# **Congreso Internacional: Tecnologías Computacionales en el Currículo de Matemáticas**

---

*E: Como el uno se cierra y el otro se abre, lo que le resto a uno se lo sumo al otro, por eso se mantiene la suma; todo esto significa que en la construcción se debe compartir un lado y además un vértice en común.*

Es el momento de introducir la definición de par lineal.

## **Conclusiones**

La posibilidad de hacer exploraciones en el programa Cabri ha permitido a los alumnos adquirir confianza y seguridad para enfrentarse a la resolución de problemas, intervenir con propiedad, explicar y convencer a los compañeros, evolucionar en sus estrategias de trabajo, identificar un abanico de posibilidades para el tratamiento del tema, reconocer las propiedades invariantes de una figura y acceder al conocimiento geométrico. Los estudiantes se sienten contentos, orgullosos e importantes. Les gusta lo que hacen, exigen la clase y fuera de ella se discuten los problemas.

## **Referencias**

**Balacheff, N y Kaput, J .** (1996). *Computer – Based Learning Environments in Mathematics*.

---

*Papel mediador de CABRI en la construcción de rectángulos*

**Mario Cardona Castaño**

Normal Superior del Quindío

**Efrain Alberto Hoyos Salcedo & Julián Marín González**

Universidad del Quindío

**Adela Escobar Ceballos**

Instituto Técnico Industrial de Armenia

**Nestor Castro Granados**

Ciudadela Educativa de Circasia

**Edgar Antonio López Henao**

Colegio Fundadores de Montenegro

**Resumen.** En este reporte presentamos trabajos de alumnos de secundaria que participaron en actividades de construcción de paralelogramos, específicamente de rectángulos, los cuales muestran el apoyo que ofrece el uso de software de geometría dinámica (Cabri) para abordar estos problemas de construcción y las estrategias de exploración y en la realización de las construcciones propuestas, al igual que la comunicación de procedimientos y hallazgos.

## **Introducción**

## **Congreso Internacional: Tecnologías Computacionales en el Currículo de Matemáticas**

---

Este trabajo se desarrolló, en el marco del proyecto de *Incorporación de Nuevas Tecnologías al Currículo de Matemáticas* que adelanta el Ministerio de Educación Nacional, con estudiantes de básica secundaria de cuatro colegios del departamento del Quindío en el año 2001. El proyecto asume *"el papel decisivo que pueden tener las nuevas tecnologías en la transformación de las estructuras curriculares. Así mismo, reconoce las potencialidades para transformar las prácticas escolares y la función catalizadora de dichas transformaciones"* (MEN 2001). Reconocer la posibilidad de que los estudiantes puedan usar un software o calculadora que les permita realizar diferentes representaciones, modificarlas, explorar diferentes alternativas, someterlas a prueba, observar patrones, detectar invariantes, compromete el diseño de las actividades o situaciones de aprendizaje.

¿Qué tipo de actividades de aprendizaje proponer a los estudiantes?, ¿En qué momento los estudiantes hacen uso eficiente o significativo de las tecnologías?, ¿Qué herramientas matemáticas necesitan los estudiantes para abordar las actividades y los problemas propuestos?, ¿Cómo los recursos expresivos de un medio computacional estructuran la exploración y favorecen la sistematización?, son preguntas que se tuvieron presentes al momento de diseñar actividades de construcción de paralelogramos con la mediación del software de geometría dinámica CABRI, lo cual implicó revisar los procesos de enseñanza y de aprendizaje tradicionales.

En el ambiente CABRI, un objeto geométrico debe guardar las propiedades asignadas y las relaciones entre sus componentes al ser sometido al "arrastre"; es decir, el objeto geométrico debe resistir todas las posibilidades de desplazamiento (giros, rotaciones, traslaciones, estiramientos) de sus elementos, sin modificar sus propiedades. Esto diferencia la representación de un objeto geométrico en CABRI de su dibujo con lápiz y papel. *"En un dibujo no están presentes las relaciones de dependencia entre los elementos de la figura (objeto) que la caracterizan, a pesar de que perceptualmente parezcan estar"* (Ministerio de Educación 1999).

# Congreso Internacional: Tecnologías Computacionales en el Currículo de Matemáticas

En este trabajo se reseña el papel mediador de las tecnologías informáticas mostrando las estrategias utilizadas por los estudiantes en el proceso de construcción de rectángulos, la estructuración de la exploración, la comunicación de los procedimientos y la conceptualización del objeto rectángulo apoyados en CABRI. La actividad consistió en construir diferentes clases de paralelogramos de tal manera que al someter sus componentes a traslaciones, giros y estiramientos, se conservaran sus características.

## Estrategias con lápiz y papel

Se consideró importante conocer las estrategias que los estudiantes emplean para trazar rectángulos, valiéndose de lápiz y papel y de herramientas de dibujo.

La mayoría trazan los rectángulos usando rectas horizontales y verticales sin hacerlo explícito al comunicar los procedimientos y hacen énfasis en dos lados largos iguales y dos lados cortos iguales dándoles seguridad de que es un rectángulo. Utilizan escuadras y reglas para trazar segmentos y en algunos casos para medir. No utilizan el compás, ni la escuadra para trazar perpendiculares. La construcción en la mayoría de los casos no es exacta, se hace a ojo de manera aproximada. Unos pocos estudiantes relacionan el rectángulo con ángulos rectos o con ángulos de  $90^\circ$ .

Estas estrategias de construcción se trasladaron al ambiente CABRI cuando se intentó construir el rectángulo, con la única condición que pudiese ser sometido a estiramientos, rotaciones y desplazamiento de sus componentes y siguiese siendo rectángulo.

## Primeros ensayos con CABRI

El problema de construir un rectángulo que conserve sus características al ser sometido al arrastre, parece inicialmente un ejercicio sencillo para los estudiantes. Hacen el primer rectángulo, siguiendo una estrategia similar a la que emplean con lápiz y papel: ¡y tenemos el dibujo de un rectángulo!

Trazan un segmento horizontal.

Trazan segmentos verticales a partir de los extremos del segmento inicial.

Trazan un segmento horizontal por los extremos libres de los segmentos verticales

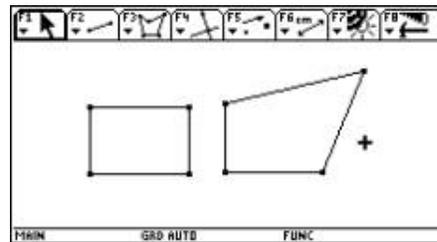


Figura 1

En este intento, la configuración de la pantalla ayuda a reconocer líneas verticales y horizontales. Pocos estudiantes hacen uso del paralelismo y la perpendicularidad, así hayan empleado estas herramientas previamente y tengan alguna familiaridad con dichas relaciones. Pronto encuentran que esta construcción no resiste el desplazamiento o giro de uno o varios de sus componentes y descubren que mediante estos tanteos no es posible hacer la construcción pedida (Figura 1)

Empiezan la búsqueda de soluciones, se ensayan diversas alternativas que son sometidas a prueba, se incluye el uso de la opción polígono y/o de rectas horizontales y verticales trazadas por ensayo y error. Aquí la intervención del docente es mínima: es el propio alumno quien con la ayuda de la calculadora somete a prueba su construcción y cuando está convencido de su solución, desafían al docente a desbaratar su construcción. Se logran construcciones que

# Congreso Internacional: Tecnologías Computacionales en el Currículo de Matemáticas

conservan sus características al ser desplazados algunos de los puntos libres de la construcción y esto genera emoción.

## Una construcción muy particular

Un alumno decía: "Ya veo: se puede trasladar, se puede estirar, pero no se puede girar, pero tengo una solución, no se desbarata" La construcción a la que hacía referencia es muy particular y se presenta en la figura 2.

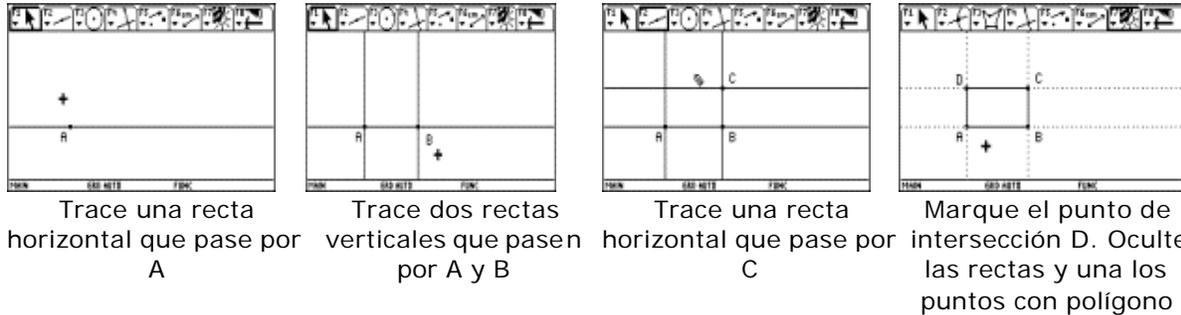


Figura 2

Se obtiene un rectángulo que puede ser trasladado moviendo el punto A, se pueden desplazar los puntos B y C, conservando su posición estándar. Esta construcción, realizada por ensayo y error, no obliga al alumno a hacer explícita la relación de perpendicularidad entre lados contiguos. Varios alumnos ensayaron soluciones similares.

Se acepta la propuesta, sin someter a prueba la construcción base. Pero se le pide a este grupo en particular, que trate de hacer la construcción de tal manera que el rectángulo se pueda girar sin que pierda su condición de rectángulo. Solo uno de 20 alumnos lo logró; pero en la puesta en común se estableció que los alumnos no hacían un uso adecuado de los comandos para construir perpendiculares y paralelas y no establecían relaciones de perpendicularidad o paralelismo entre rectas o segmentos. Se realizaron algunas actividades para familiarizarlos con el uso de los comandos y con una idea de perpendicularidad y paralelismo, lo cual permitió realizar la construcción del rectángulo con las condiciones establecidas.

## Nuevas aproximaciones a la solución del problema. Paso al objeto geométrico

Los esfuerzos iniciales orientaron a los alumnos a intuir que las construcciones eran defectuosas o se "desbarataban", no porque se separaran las líneas, sino porque las "esquinas" se deformaban. Empezaron intuitivamente a reconocer la importancia de los ángulos rectos en la construcción del rectángulo y rápidamente se hizo uso de perpendiculares y paralelas.

### Solución uno

1. trace una recta
2. trace una recta paralela a la recta inicial
3. trace rectas perpendiculares a la recta inicial
4. marque los puntos de intersección de las rectas trazadas
5. Oculte las rectas y una los puntos con segmentos o polígono

La mayoría explicaron que el objeto construido era un rectángulo porque tenía ángulos de  $90^\circ$  o ángulos rectos. Algunos además enfatizaron que tenía dos lados largos iguales y dos lados

## Congreso Internacional: Tecnologías Computacionales en el Currículo de Matemáticas

---

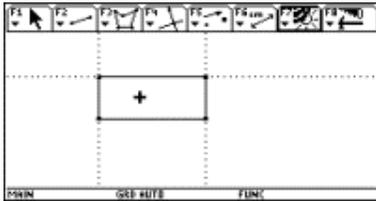
cortos iguales. En esta etapa aún no hacían explícita en sus explicaciones el uso de las rectas perpendiculares y su relación con los ángulos rectos.

El comportamiento final de la construcción varía, según si se traza una de las perpendiculares por el punto base usado para construir la primera recta. En este caso, el comportamiento es similar al de la construcción anterior, pero en cualquier caso no es posible girar el rectángulo. Una diferencia clave con el procedimiento reseñado en el apartado anterior, es la construcción base. La primera no resiste desplazamientos, esta última sí, los puntos siguen siendo los vértices de un rectángulo.

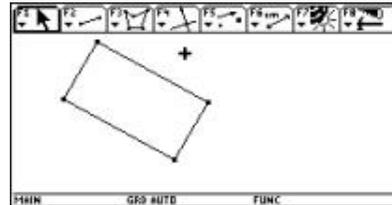
Los estudiantes rápidamente establecen que si la construcción parte de un segmento se podrá girar el rectángulo, trasladarlo y ampliarlo o reducirlo.

*Solución dos: Un rectángulo que se puede girar, trasladar y modificar su tamaño*

1. trace un segmento, 2. trace una recta paralela al segmento, 3. trace rectas perpendiculares al segmento por sus puntos extremos, 4. marque los puntos de intersección de las rectas trazadas, 5. oculte las rectas y una los puntos con segmentos.



Construcción inicial



Construcción modificada

Figura 2

Ya en este momento del trabajo los alumnos reconocen que el objeto construido es un rectángulo porque tiene los ángulos rectos o de  $90^\circ$ ; algunos incluso los miden.

Finalmente en la puesta en común y ante la pregunta por qué esos ángulos siempre son rectos, o de  $90^\circ$ , se reconoce su relación con rectas perpendiculares, ya que las rectas perpendiculares forman ángulos rectos. La gran mayoría empieza a abandonar la idea de un rectángulo como un objeto de lados largos iguales y los lados cortos iguales.

Finalmente, para consolidar la conceptualización del objeto rectángulo se proponen a los estudiantes los dos ejercicios siguientes. En cada caso, construir si es posible un rectángulo que resista los desplazamientos de sus componentes: a) haciendo uso sólo de segmentos y rectas perpendiculares, b) haciendo uso sólo de segmentos y rectas paralelas.

En el primer caso, la mayoría realiza un ejercicio mental primero, e incluso gesticulan. Cuando creen tener la solución, proceden a construirlo. Para algunos, la idea inicial sobre las rectas perpendiculares como líneas verticales, es un obstáculo; sin embargo rápidamente lo superan. En el segundo caso también realizan un análisis y dudan. Unos pocos manifiestan que

## **Congreso Internacional: Tecnologías Computacionales en el Currículo de Matemáticas**

---

no se puede hacer la construcción. La mayoría decide verificar. Construyen el rectángulo valiéndose de paralelas y cuando desplazan algunos de sus componentes les aparece un paralelogramo no rectángulo. *"Hice un rectángulo pero al moverlo me resultó un paralelogramo"*. Intuitivamente se empiezan a relacionar los rectángulos y los paralelogramos y concluyen que en este caso requieren al menos trazar una recta perpendicular al segmento inicial. Finalmente, los alumnos establecen que hay diferentes formas de construir un rectángulo en el entorno CABRI.

Los alumnos finalmente plantean que un rectángulo es: un cuadrilátero con cuatro ángulos rectos, una figura de cuatro lados con ángulos de  $90^\circ$ , o un paralelogramo con lados contiguos perpendiculares. Adicionalmente reconocen que los lados opuestos son paralelos y de igual medida.

### **Observaciones y conclusiones .**

§ Ante el problema de construir un rectángulo que conserve sus características al desplazar alguno de sus componentes, la estrategia inicial de ensayo y error asociada a las ideas iniciales que poseen los alumnos, se ve facilitada por la amigabilidad del software y la resolución de la pantalla. Pero es ese mismo software quien invalida estas estrategias de ensayo y error o de construcciones a ojo; esto no sería posible con lápiz y papel. El software permite hacer, modificar y rehacer rápidamente las construcciones.

§ Los estudiantes no hicieron uso del compás en CABRI, ni de las medidas; solo algunos las utilizaron para verificar que los ángulos medían  $90^\circ$ .

§ En el proceso de exploración, se encontró que existen diferentes formas de construir rectángulos e igualmente se establecieron relaciones entre el rectángulo y sus elementos y entre los elementos mismos. Lados consecutivos, lados opuestos, lados consecutivos y ángulos. E incluso, se establecieron unas primeras relaciones de manera muy informal con los paralelogramos y los cuadrados, las cuales fueron dejadas como interrogantes para futuras sesiones.

§ Las estrategias exitosas, en la mayoría de los casos, se asociaron con una discriminación inicial de algunas de las características del rectángulo, básicamente de los ángulos rectos (esquinas) y su relación con las rectas perpendiculares.

§ La puesta en común resultó de vital importancia para poner de manifiesto las dificultades presentadas, confrontar diferentes puntos de vista y someter a análisis diferentes alternativas; esto favoreció a los alumnos rezagados, quienes recibieron una retroalimentación oportuna, poniendo a prueba, con ayuda de la calculadora, sus propuestas y las de sus compañeros.

§ La comunicación de procedimientos y resultados por parte de los estudiantes evidenció avances ya que en el ámbito del aula de clase, el alumno es motivado a comunicar a otros los procedimientos y los resultados obtenidos

§ El empleo del software, permite realizar un diseño de actividades que se orienten hacia la exploración, predicción, establecimiento de invariantes y verificación de propiedades y relaciones entre los elementos de los objetos geométricos, destacando los aspectos que son relevantes de los que no lo son. Nos encontramos ante un entorno para el aprendizaje.

### **Referencias**

# Congreso Internacional: Tecnologías Computacionales en el Currículo de Matemáticas

---

**Moreno L & Waldegg G. ( 2002)** *Fundamentación cognitiva del currículo de matemáticas* .  
Memorias del Seminario Nacional- Formación de docentes sobre el uso de nuevas tecnologías  
en el aula de matemáticas, Ministerio de Educación Nacional, Serie Memorias, pp. 40-66

**Ministerio de Educación Nacional.** (2001) *Proyecto: Incorporación de Nuevas Tecnologías al  
Currículo de Matemáticas de la Educación Media de Colombia*. II fase: profundización y  
expansión, p. 6.

**Ministerio de Educación Nacional.** (1999) *Nuevas tecnologías y currículo de matemáticas.*,  
pp.24 -37, 52-54.

---

*¿Qué característica deben tener tres segmentos  
para que con ellos se pueda construir un triángulo?*

**Rubén Darío Guevara González**

*Universidad del Tolima*

**Carlos Arturo Mirquez Núñez**

*Escuela Normal Superior de Ibagué*

**Ivonne López Rincón**

*Universidad del Tolima*

**Carlos Julio Vargas Rodríguez**

*Colegio Nacional San Simón*

**Alexander Castro Riaño**

*Instituto Técnico Industrial Jorge Eliécer Gaitán Ayala del Líbano*

**Carlos Eduardo Baquero Feria**

*Colegio Nuestra Señora de las Mercedes de Icononzo*

**Resumen.** En este reporte se presentan las conjeturas planteadas por los estudiantes de 7° y 8° grado de educación básica a la situación problemática *¿qué característica deben tener tres segmentos para que con ellos se pueda construir un triángulo?*, alcanzadas mediante la exploración en Cabri como una aproximación a la propiedad geométrica "un lado del triángulo es menor que la suma de los otros dos y mayor que su diferencia". Además se presentan algunos resultados encontrados por los profesores y a los cuales pueden llegar los estudiantes, cuando se utilizan circunferencias en la situación problemática planteada.

**Introducción**