Aprender del problema y de las formas de interacción. La construcción de conocimientos relativos al porcentaje en clases de secundaria

Learning from the Problem and from the Forms of Interaction: Construction of Knowledge Related to Percentages in High School Classrooms

Aprender do problema e das formas de interação. A construção de conhecimentos relativos à porcentagem em aulas de secundária

Tatiana Mendoza-von der Borch* orcid.org/0000-0001-9720-5907

Artículo de investigación
Revista Colombiana de Educación, N.° 74. Primer semestre de 2018, Bogotá, Colombia.

Para citar este artículo: Mendoza, T. (2018). Aprender del problema y de las formas de interacción. La construcción de conocimientos relativos al porcentaje en clases de secundaria. *Revista Colombiana de Educación*, (74), 133-154.

Recibido: 19/12/2016
Evaluado: 19/04/2017

* Maestra en Ciencias con especialidad en Investigaciones Educativas. Estudiante de doctorado en el Departamento de Investigaciones Educativas, Cinvestav-IPN.
Correo electrónico: tatumendoza1@gmail.com

Resumen

La elaboración de conocimiento en la clase de matemáticas se entreteje con las características de los problemas que resuelven los alumnos, con los conocimientos de los que ellos ya disponen y con las formas de interacción social. Este artículo se centra en la última de dichas relaciones, es decir, en el componente social del proceso de aprendizaje en el aula. Se problematiza el conocimiento matemático, el cual es considerado como la producción de un grupo, y por lo tanto se inserta en el entramado de relaciones sociales que se configuran en el aula. A partir del análisis de la implementación de una secuencia de clases experimentales a propósito del porcentaje en una secundaria pública de la Ciudad de México, se discute la manera en que la circulación del conocimiento está imbricada con el posicionamiento de los estudiantes y con la valoración social de los procedimientos y las herramientas matemáticas. Finalmente, se puntualiza en la necesidad de acercar la noción de Contrato Didáctico, herramienta de la Teoría de las Situaciones Didácticas, a otras perspectivas socioculturales que permitan enriquecer la comprensión del papel de las interacciones entre los distintos actores en el aprendizaje.

Palabras clave

porcentaje; secundaria; interacciones; contrato didáctico

Abstract

The elaboration of knowledge in math class is interwoven with the characteristics of the problems solved by students, their prior knowledge, and the forms of social interaction. This article focuses on the last one of these relations—that is, on the social component of the learning process in the classroom. Thus, we problematize mathematical knowledge, which is considered as the production of a group, and is therefore inserted in the framework of social relations created inside the classroom. Based on the analysis of the implementation of a sequence of experimental classes about percentages in a public high school in Mexico City, we discuss the way in which the circulation of knowledge is intertwined with the students' position and with the social evaluation of the procedures and mathematical tools. Finally, we detail the need to bring the idea of Didactic Contract, a tool from the Theory of Didactical Situations, closer to other sociocultural perspectives enriching the understanding of the role of the interactions between different actors in the learning process.

Keywords

percentages; high school; interactions; didactic contract

Resumo

A elaboração de conhecimento na aula de matemáticas se articula com as características dos problemas que resolvem os alunos, com os conhecimentos que eles possuem e com as formas de interação social. Este artigo centra-se na última dessas relações, ou seja, no componente social do processo de aprendizagem na sala de aula. Problematiza-se o conhecimento matemático, que é considerado como a produção de um grupo, e se insere, portanto, no esquema de relações sociais configuradas na sala de aula. A partir da análise da implementação de uma sequência de aulas experimentais a propósito da porcentagem em uma escola pública secundária na Cidade do México, é debatida a forma em que a circulação do conhecimento está interligada com o posicionamento dos estudantes e com a valoração social dos procedimentos e as ferramentas matemáticas. Finalmente, é especificada a necessidade de abordar a noção de Contrato Didático, ferramenta da Teoria das Situações Didáticas, desde outras perspectivas socioculturais que possam enriquecer a compreensão do papel das interações entre os diversos atores na aprendizagem.

Palavras-chave

porcentagem; secundária; interações; contato didático

Introducción

Durante la actividad matemática en el aula los alumnos construyen numerosos conocimientos. Este proceso pasa por la interacción con sus pares y con el maestro a propósito de diversas situaciones didácticas. En dichas interacciones los estudiantes se encuentran con procedimientos, conjeturas, formas de validarlas, contraejemplos formulados por otros, y en el grado de aceptación de esas producciones influye la opinión sobre quién los produce –además de los propios conocimientos y las características de la situación didáctica.

Por otro lado, los alumnos y el maestro también construyen una serie de creencias –cambiante, contradictoria, heterogénea– sobre los objetos matemáticos, es decir, procedimientos, herramientas y la propia actividad matemática; por ejemplo, creencias acerca de lo que es un "buen" procedimiento o una argumentación "correcta".

Tanto las maneras en que los alumnos y el maestro se posicionan como las creencias sobre los objetos matemáticos afectan profundamente los conocimientos adquiridos por los estudiantes. En este artículo abordo las dos cuestiones.

Metodología

El análisis que presento proviene de los resultados de una investigación sobre la enseñanza y aprendizaje de la noción de porcentaje (Mendoza, 2007), realizado con estudiantes de 11 a 14 años que cursan primero o segundo de secundaria. La decisión de trabajar con alumnos de este nivel escolar obedeció, principalmente, al interés por conocer lo que lograron aprender sobre la noción de porcentaje a lo largo de su educación básica[1]. Para identificar estos conocimientos, diseñé una secuencia de cuatro sesiones con la metodología de la ingeniería didáctica (Artigue, 1995), propia de la teoría de las situaciones didácticas (Brousseau, 1986), que constituyó también la principal herramienta de análisis de los resultados.

Dicho análisis, además de aportar información sobre el funcionamiento de las situaciones didácticas, dejó ver que la manifestación y la propia construcción de los conocimientos de los alumnos están entrelazadas con las formas de interacción entre ellos y con el maestro a propósito de una situación didáctica. Así, me centraré en las siguientes preguntas: ¿De quiénes y a raíz de qué asuntos provienen las producciones que se discuten en el plano público? ¿Quién tiene qué posibilidades de reelaborar

1 En el 2007, año en que concluyó la investigación, la educación obligatoria en México incluía el nivel preescolar (3-5 años), primaria (6-11 años) y secundaria (12-14 años).

qué intervenciones a partir de lo que circula en las discusiones colectivas o en equipos? ¿Qué tipo de conocimientos se consideran legítimos, reconocidos, públicos y cuáles más bien se dejan de lado o se utilizan de manera íntima? Y específicamente, ¿qué posibilidades ofrece la clase a los alumnos menos aventajados desde algún punto de vista (menos rápidos, más reservados, entre otros)? ¿Cuál es el medio con el que ellos interactúan durante la clase?[2]

En un primer apartado describo brevemente algunas herramientas teóricas que permiten analizar el papel de las interacciones entre los estudiantes y con el maestro a propósito de una situación didáctica específica en la construcción de conocimientos. En el segundo apartado analizo algunos fragmentos de clase que muestran que el valor atribuido por los estudiantes a una formulación varía según la opinión sobre el portador y que hay distintas maneras de incorporar dichas formulaciones en el propio repertorio de conocimientos. Finalmente, en el tercer apartado muestro las diversas valoraciones que los alumnos hacen sobre los objetos matemáticos y cómo esas valoraciones afectan la actividad matemática.

El contrato didáctico y otras herramientas teóricas

La teoría de las situaciones didácticas, fértil para analizar fenómenos relativos al estudio de las matemáticas, explica que la clase funciona como si existiera un *contrato didáctico*, es decir, una serie de expectativas entre estudiantes y maestro que regulan la relación de los primeros con cierto conocimiento. En la actividad matemática se construyen significados, algunas veces explícitos y justificados, pero la mayoría implícitos y naturalizados, que contribuyen a definir, por ejemplo, lo que se considera una buena argumentación, cuestiones que son interesantes o no, modos de hacer autorizados o no. Algunas de estas reglas son generales, como "no se pueden aceptar como válidas dos afirmaciones contradictorias en matemáticas", "cualquier afirmación debe demostrarse" o "los problemas siempre tienen solución", y otras son específicas de un conocimiento determinado, como "las funciones siempre se definen a través de fórmulas", "las relaciones crecientes son de proporcionalidad directa" o "los

2 Brousseau (1986) plantea que "el alumno aprende adaptándose a un medio que es factor de contradicciones, de dificultades, de desequilibrios", es decir, aprende cuando "entra en interacción con una problemática, poniendo en juego sus propios conocimientos, pero también modificándolos, rechazándolos o produciendo otros nuevos, a partir de las interpretaciones que hace sobre los resultados de sus acciones" (Sadovsky, 2005, p. 3). Así, en la última pregunta supongo que el medio no es el mismo para todos, y planteo que vale la pena tratar de entender, en algunos casos, cuál es realmente la problemática con la que están interactuando, los conocimientos que pueden poner en juego y las interpretaciones que pueden hacer a partir de los resultados de sus acciones (Margolinas, 1995).

números siempre expresan cantidades absolutas"[3]. En ambos casos se trata de significados que se activan y funcionan cuando se está estudiando determinado conocimiento pero no otro, o en una situación didáctica pero no en otras. Así el contrato didáctico cambia constantemente, está sujeto a continuas rupturas y renegociaciones, aun en el mismo grupo y con el maestro (Brousseau, 1986; Sadovsky, 2005)

Una de las riquezas de la noción de contrato didáctico radica en esta centración en un conocimiento matemático específico y en la situación didáctica. Esto permite ver, por ejemplo, si al plantear una consigna el maestro también comunica implícitamente un modo de resolución, o cómo se va diluyendo un problema cuando el maestro modifica las preguntas al ver que los estudiantes no utilizan el procedimiento que espera, hasta que realmente él se encarga de la resolución, o las diferencias entre lo que los estudiantes ponen en juego al resolver un problema y lo que maestro "observa" que ponen en juego, o el efecto que sufre una consigna cuando al planteamiento inicial se le agregan peticiones poco a poco, volviendo la tarea más compleja.

Desde otras perspectivas también se puede mirar cómo las interacciones inciden en la construcción de conocimientos, con distintos matices y maneras de entender dicha imbricación. Una noción cercana a la de contrato didáctico, pero acuñada desde otra línea de investigación, es la de *normas sociomatemáticas* (Partanen y Kaasila, 2015; Yackel y Cobb, 1996), es decir, significados respecto a los objetos matemáticos y las formas de estudiarlos que estudiantes y maestro construyen durante su actividad matemática. Lerman (2002), desde una perspectiva sociocultural, critica fuertemente la idea de que el sujeto aprende solo al interactuar con el medio[4], como si una situación problemática bien diseñada pudiera desdibujar los conflictos de género, clase, raza, es decir, de identidad. Para Lerman, el aprendizaje se *recibe*, es un proceso de aculturación. El papel del sujeto en la construcción de ese proceso poco se toma en cuenta.

Para Voigt (1995, p. 169) "un participante de una interacción monitorea su acción de acuerdo con lo que asume que son las expectativas y comprensión de los otros", y también en función de su opinión sobre los otros y su relación con ellos.

> Al mismo tiempo, los otros participantes dotan de sentido a la acción al adoptar lo que consideran que son las intenciones y comprensiones del actor. Las acciones subsecuentes de los otros participantes son interpretadas por el primer actor en relación a sus expectativas y pueden someterse a reconsideración, y así sucesivamente.

3 Es decir, no son razones.

4 Es decir, Lerman se opone al modelo piagetiano de aprendizaje por adaptación.

Así, hay una diversidad de significados relacionados con la actividad y los contenidos matemáticos que circulan en la clase. Estos significados no siempre se comparten, pero algunos pueden ser "tomados como compartidos", es decir, se pueden evocar, se puede hablar de ellos aunque no todos los asuman igualmente. En sus trabajos habla de negociación como mediador entre cultura y sujeto.

Estas otras perspectivas permiten enriquecer la manera de entender la componente social del aprendizaje, aunque a veces dejan un poco de lado la especificidad del contenido matemático. Este aspecto, desde la teoría de las situaciones didácticas, se ha mostrado fundamental en la trama de acontecimientos que ocurren en la clase.

A continuación muestro algunas maneras en que, durante el curso de mi investigación, se manifestó el papel de las interacciones entre los estudiantes y el maestro en la construcción de conocimientos.

El encuentro en clase con las producciones de otros

Durante las discusiones en parejas, entre parejas o en grupo, se ponen a consideración ciertas formulaciones, y la manera de asumirlas está mediada por los roles que cada uno desempeña en el grupo. A continuación analizo dos ejemplos, uno en el que se plantea la posibilidad de obtener el 50 % de una cantidad calculando la mitad de esa cantidad y otro en el que emerge una tensión entre quienes asumen que el 100 % designa al total y quienes no.

Las aportaciones se reciben en función de quién las produce

Un problema que resuelven por parejas consiste en que una bandera –la mediana de tres– de 400 m^2 de superficie se debe pintar, el 50% de color rojo, el 25 % de azul, el 20 % de verde y el 5 % de amarillo. Los alumnos deben determinar el área por pintar de cada color. Mario y Fabián utilizan un procedimiento que llamo "operador decimal", el cual consiste en multiplicar la cantidad inicial por la expresión decimal del porcentaje. Por ejemplo, para el primer caso, Fabián propone: "¿no será cin…, punto cincuenta por cuatrocientos? Sí, ¿no?".

Más adelante, descartan la propuesta de varios compañeros de usar las fracciones como otra alternativa para resolver el problema. En particular, cuando Claudia plantea en la discusión grupal que "el cincuenta por ciento es la mitad", Mario y Fabián rechazan inmediatamente esa manera de resolver: "¡Ay! ¿Cómo, cómo dividir?".

La dificultad para admitir este segundo procedimiento se debe en parte a que el uso de la fracción implica establecer relaciones entre los datos esencialmente distintas de las que se ponen en juego cuando se recurre al operador decimal (Mendoza y Block, 2010). La reacción de los dos alumnos frente a la sugerencia de Claudia se debe también a que proviene de ella. Prácticamente cada vez que interviene en discusiones grupales, Mario y Fabián hacen comentarios en voz baja: "bien inteligente, ¿no?", "ni siquiera sabe", "se quiere hacer la inteligente", "se pasa", "ni sabe la Claudia, ¿verdá?". También ella da señales de asumir ese papel, pues con frecuencia repite las frases de otros compañeros o hace formulaciones incompletas, que parecieran carentes de contenido o que en ocasiones ella misma desdice. Así, cuando hace una participación valiosa, algunos poco la toman en cuenta.

Más adelante muestro que cuando el maestro, o sus compañeros Guillermo y Josué, reconocen que el 50 % de una cantidad es la mitad de esa cantidad, Mario y Fabián incorporan esa relación a su repertorio de procedimientos. Esto tiene que ver con la legitimidad del maestro y de esos dos compañeros. En algunas puestas en común el grupo da el problema por resuelto una vez que Josué y Guillermo han elaborado una explicación que parece satisfacer al maestro, aunque la mayoría no la entienda. Cuando otros estudiantes tienen una idea pertinente pero les cuesta trabajo formularla, estos dos alumnos acaban de precisarla. Con cierta frecuencia hay en las sesiones momentos en los cuales solamente Josué y Guillermo participan. Es común que cuando hay desacuerdo ellos tengan la última palabra. El maestro, en ocasiones les da más visibilidad a las participaciones de ellos que a las de otros estudiantes[5]. No obstante, en otras ocasiones, cuando algunos alumnos plantean argumentos opuestos a los de Guillermo y Josué, pero después se retraen de la discusión, el maestro se encarga de mantener la presencia de esos argumentos, aun siendo erróneos, quizás porque sospecha que son más compartidos de lo que parece. Es decir, el papel que desempeñan estos dos estudiantes en el grupo no significa que sus compañeros renuncien a la actividad matemática en clase, ni que absolutamente todas sus elaboraciones sean admitidas por el grupo sin más, sino que la distancia entre los conocimientos de los que disponen Guillermo y Josué respecto a los de los demás alumnos es lo suficientemente grande para que sean ellos los que mayoritariamente aporten las producciones que se discuten, reelaboran y legitiman en la clase, conocimientos que después son considerados como punto de partida. Cabe preguntarse si esto genera un mecanismo opuesto: lo que pasa al plano de lo público proviene de ellos, ¿entonces son ellos los que tienen más posibilidades de incorporarlo para enriquecer sus conocimientos?

5 Más adelante muestro un ejemplo de esto.

A partir de lo anterior no quiero argumentar que el grupo tiene, en su totalidad, una única manera permanente de posicionar a Claudia, Josué o Guillermo, sino más bien, que una producción no tiene siempre el mismo valor, la posibilidad de recibirla está mediada por la opinión sobre el portador. Así, para Mario y Fabián, si Claudia dice "el 50 % es la mitad" es que quiere llamar la atención. Si el maestro dice la misma frase, está reconociendo un procedimiento y quiere instalarlo. Si la dicen Guillermo y Josué, es una técnica valiosa y práctica. Si la dicen ellos mismos, están valorando una manera de resolver distinta a la suya, más fácil.

En este apartado mostré mediante algunos ejemplos que la forma como se asumen las producciones de otros depende de la opinión sobre el productor. Ahora mostraré que también depende de los conocimientos que se tienen a disposición.

Las aportaciones se reciben en función de la producción propia

Ante el mismo problema del apartado anterior, Margarita y Montserrat se dedican a buscar, entre los cuatro algoritmos básicos, una combinación que arroje un resultado que parezca pertinente para el 50 % de 400:

Margarita: Lo vamos a sumar, ¿no? […] Vamos a multiplicar cuarenta, cuarenta por ciento, cuatrocientos por ciento [A la observadora.] ¿Podemos multiplicar acá? […] Sería, cuatrocientos por cincuenta […]

[Hacen la multiplicación y les da como resultado 20,000].

Margarita: Es que da mucho, sobre dos, da mucho, mira.

[…]

Margarita: Yo le voy a hacer la cinco, por veinticinco […] Veinticinco por… cuatrocientos. ¡A lo mejor cuatrocientos por veint… cuatrocientos entre veinticinco! Yo le voy a hacer así. Cua-tro-cien-tos por…

[…]

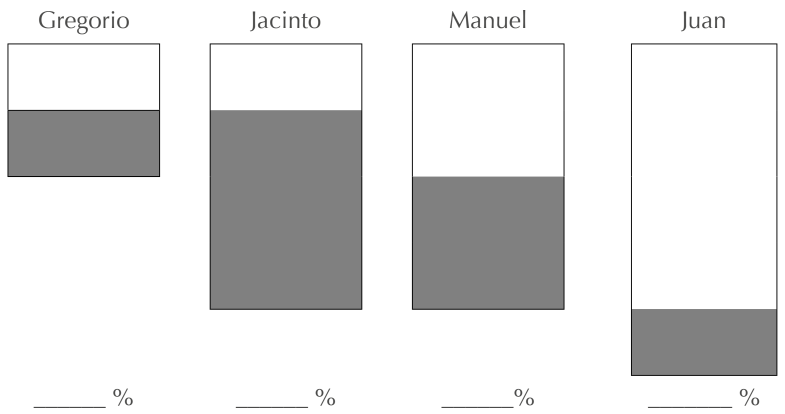
Montserrat: Es… si le ponemos punto acá, ¿no? Punto acá [señala dos lugares después del punto decimal tanto en el 50 como en el resultado], y ya da doscientos.

Margarita y Montserrat realizan una búsqueda de la operación que resuelve, dan por hecho que alguno de los algoritmos que conocen debe funcionar. Proponen sumar, multiplicar, dividir los dos datos conocidos, cambiando de una operación a otra con cierta facilidad, como si estuvieran buscando dar en el blanco, hasta que Montserrat logra descartar operaciones no pertinentes y recuperar el algoritmo del operador decimal.

Así, ante una situación que exige disponer de ciertos conocimientos sobre el porcentaje, las dos alumnas tienen pocas herramientas para abordarla: prácticamente solo les queda el recurso de "adivinar", de una manera incierta y volátil, el procedimiento, echando mano de una cierta capacidad de estimación que las hace dudar de algunos resultados por parecer muy grandes.

Esto hace que ambas se encuentren débilmente asidas a su producción, lo que las vuelve receptivas a los aportes de sus compañeros, como explico a continuación. El problema es el siguiente:

> Varios agricultores decidieron usar una parte de sus terrenos para sembrar una nueva variedad de maíz, la variedad A. Los siguientes rectángulos representan los terrenos de cuatro de ellos y la parte gris en cada uno representa lo sembrado con maíz A. Anota debajo de cada rectángulo el porcentaje de su terreno que sembró cada uno con el maíz A.



En el terreno de Jacinto, Margarita y Montserrat estiman de manera gruesa:

Margarita: ¿Este será el no-ven-ta y… cinco por ciento?

Montserrat: Setenta, ¿no? Porque aquí sobra [inaudible].

[...]

Margarita: Yo dije que... son aquí todos cien... cien metros de terreno.

[...]

Montserrat: Es que aquí, porque..., o sea, aquí le pusimos cincuenta..., aquí tiene que ser el cincuenta, precisamente, esto vale el cincuenta [señala aproximadamente la mitad del terreno], entonces tiene que ser aquí menos, por eso... yo digo que todo esto [la región gris] son setenta y esto [la región blanca] vale el treinta por ciento.

Aprender del problema y de las formas de interacción. La construcción de conocimientos relativos al porcentaje en clases de secundaria
Tatiana Mendoza-von der Borch /
pp. 133-154
N.º 74

Las alumnas utilizan la correspondencia del 100 % con el total y del 50 % con la mitad. Es interesante que pongan en funcionamiento estas relaciones, pues ellas utilizaban únicamente el operador decimal. Es a partir de una puesta en común que empiezan a incorporar estas aportaciones, nuevas para ellas. Más adelante, recuperan también de sus pares la asociación del 25 % con la cuarta parte, y una manera de verificar la aplicación del 50 %, 25 %, 20 % y 5 % a una cantidad que consiste en ver si la suma de los cuatro resultados coincide con el total. Llama la atención la relativa facilidad con la que asumen los aportes de sus compañeros –en el apartado anterior, por ejemplo, se muestra la dificultad que tienen Mario y Fabián para aceptar procedimientos distintos al propio.

Y esas aportaciones, ante un problema cuya resolución queda fuera del alcance de su única técnica disponible (el operador decimal) se convierten en punto de partida para elaborar procedimientos a los que quizás no podrían acceder por cuenta propia: Margarita y Montserrat establecen una relación entre el porcentaje y 100, similar a la que perciben entre la superficie sombreada y la total para hacer estimaciones.

Este ejemplo se puede vincular con una reflexión de Sadovsky y Sessa (2005): cuando un alumno no ha producido un procedimiento –o bien ha formulado una respuesta a la que no se siente muy adherido– tiene más posibilidades de retomar las aportaciones de sus compañeros que alguien que se encuentra demasiado comprometido con su propio procedimiento.

No obstante, lo anterior sucede con algunas dificultades. Cuando en la discusión grupal surge un desacuerdo en torno al terreno de Manuel –Guillermo y Josué opinan que la parte sombreada corresponde al 50 % pues "lo medimos y sale casi exactamente la mitad", mientras que Gabriela considera que la región gris es designada por el 40 %, pues en el terreno de Juan está sembrado el 20 %, y la franja sembrada de Manuel mide el doble– Margarita se despega de las relaciones que ya había sugerido para plantear a Montserrat:

> […] yo digo que sí está bien lo que dice Gaby […] porque... aquí mide dos y aquí mide uno, y por eso... aquí [la región gris del terreno de Manuel] es cuarenta y aquí [la región blanca del mismo terreno] es sesenta[6].

6 Margarita salta con frecuencia de la interpretación del porcentaje como una medida absoluta (50 % son 50 metros) a la interpretación como una relación (50 % es la mitad). Desde su punto de vista, su planteamiento es pertinente, dada la sistemática incoherencia que ella parece interpretar en las situaciones de porcentaje: si es posible asignar una misma medida (100 m) a terrenos de distintos tamaños, también es lógico asociar distintos porcentajes –asumidos como medidas– a franjas del mismo tamaño. No hay que olvidar que esto sería correcto si dichas franjas fueran tomadas de terrenos de distinto tamaño.

Anteriormente mencioné un problema en el que aparece una bandera de 400 m² en la que se debe pintar el 50 % de rojo, el 25 % de azul, el 20 % de verde y el 5 % de amarillo, y los estudiantes debían calcular el área por pintar de cada color. Más adelante, se les preguntó qué porcentaje de cada color se debe pintar en una bandera de 800 m² para que tenga la misma forma. A partir de esta pregunta, surge de nuevo una tensión –alrededor de la cual se discute largamente– entre el porcentaje entendido como medida y como razón en la discusión grupal: Romina considera que de azul

> […] es el cincuenta […] Porque arriba dice que… que la bandera mediana, el azul por ciento es de veinticinco […] entonces yo me basé que si es el veinticinco por ciento de la mediana, sería el cincuenta por ciento de la grande.

Para Guillermo y Josué, en cambio, los porcentajes se conservan en las tres banderas, pues la suma de los cuatro debe dar el 100%:

> Guillermo: Entonces, a ver, que ponga las otras cantidades, supuestamente del por ciento y va a ser más.
> […]
> Guillermo: Ya se pasaría del cien por ciento.
> […]
> Josué: Se pasaría del porcentaje que debe de ser
> Guillermo: Ya serían doscientos por ciento.
> […]
> Josué: Siempre va a ser lo mismo, aunque sea más grande o más chico.

La discusión afecta las elaboraciones de Montserrat, quien se pregunta si "así como ahorita están diciendo, así, porcentajes muy grandes, ¿tiene que dar cuatrocientos?". Al parecer, intenta conciliar las dos propuestas, que en la clase se plantean como opuestas: si no asocia el total al 100 % sino a 400 m² (el área de la bandera mediana)[7], entonces los porcentajes pueden aumentar entre una bandera y otra, como afirma Romina, manteniendo la coincidencia entre la suma y el total, como sostienen Guillermo y Josué. Solo que Montserrat no se percata de que la intención de desdibujar la contradicción entre las dos propuestas la lleva a una nueva contradicción: mezcla medidas con porcentajes.

Los ejemplos anteriores muestran que si bien la disponibilidad de las dos alumnas para recibir las aportaciones de sus compañeros les permite hacer elaboraciones más amplias que las que pueden hacer por cuenta propia –la adaptación social tiene efectos sobre la adaptación cognitiva–, también es frecuente que desechen sus propias respuestas con relativa

7 En este momento, no se les ha dicho cuánto mide la superficie de las otras dos banderas.

facilidad, que recuperen aportaciones erróneas de sus compañeros, que ciertas formulaciones sean inaccesibles para ellas, o bien, que les cueste trabajo posicionarse cuando en el grupo se generan conflictos. En resumen, la manera en que un alumno logra integrar las producciones de otros tiene que ver con sus propios conocimientos.

El encuentro en clase con distintos objetos matemáticos

Durante la actividad matemática, los estudiantes construyen representaciones sobre los objetos que están estudiando o que fungen como herramientas, y también sobre la manera de hacer matemáticas –lo que es elegante o no, válido o no, interesante o no–. A su vez, estas representaciones afectan las decisiones que toman sobre qué procedimiento conviene usar y en qué momento, en qué registros apoyarse, cuáles producciones plantear en las discusiones colectivas y cuáles no. En este apartado muestro algunos ejemplos.

Una norma del contrato didáctico que no es compartida

A continuación analizo una discusión entre dos equipos sentados en mesas contiguas a propósito del problema que implica calcular el 50%, 25%, 20% y 5% de 400. La primera pareja, Alan y Jonathan, lo resuelve utilizando fracciones: el 50% es la mitad, el 25% la cuarta parte, y estiman para calcular el 20%. La segunda pareja, Mario y Fabián, utiliza el operador decimal: multiplican 400 por 50, 25, 20 y 5 y al final colocan un punto lugar dos lugares a la izquierda de cada resultado. Cuando las dos parejas terminan, se muestran una a la otra sus respuestas:

> Fabián: Nosotros lo hicimos así […] Nosotros estamos bien.
>
> Alan: No es cierto. ¿Cuánto vas a que no?
>
> Fabián: ¿Cuánto vas?
>
> Alan: Ése no está bien.
>
> Mario: Sí está bien.
>
> Fabián: Doscientos más cien, más ochenta, tres(cientos) ochenta, más veinte, cuatrocientos. Mira, ustedes lo hicieron mal, pero éste sí está bien. Ustedes lo tienen mal.

Ninguno de los cuatro intenta revisar si ambas técnicas producen o no los mismos resultados, la discusión está sobre el uso mismo de las técnicas: solo una de ellas puede ser correcta, no ambas. Así, la comprobación de Fabián automáticamente descarta la respuesta de los otros, desde su punto de vista: si “nosotros estamos bien”, entonces “ustedes lo hicieron mal”.

No obstante, en la puesta en común se comunica una idea distinta. Para el primer porcentaje, Montserrat propone usar el operador decimal y Claudia la fracción ½. Mario y Fabián descartan en privado la sugerencia de Claudia, pero el maestro hace explícito que de las dos formas se obtiene el mismo resultado:

Maestro: Entre dos, y es cierto, también sale doscientos, ¿de acuerdo? Éste, si hago la multiplicación (escribe en el pizarrón la multiplicación de 400 por 0,50), ¿qué me va a salir?

Alonso: ¡Doscientos!

Maestro: Doscientos también, ¿no? […] OK ¿Alguien tiene otra manera de encontrar el cincuenta por ciento? ¿Alguien conoce una manera diferente de ésta?

Fabián: (A Mario, en voz baja:) Cuatrocientos menos doscientos, ¿no?

[Mario ríe]

El profesor, al hacer un esfuerzo porque se hagan públicas las distintas maneras de resolver, comunica implícitamente que puede haber más de una técnica correcta para resolver una tarea: si dos caminos diferentes conducen a la misma respuesta, ambos deben ser válidos.

No obstante, esta coincidencia se ha constatado solo en un caso particular, 50% de 400, y quizás por ello después Fabián propone restar 200 a 400, invirtiendo el mecanismo: no se trata ahora de buscar una manera de encontrar un resultado desconocido para después poder compararla con otras, sino, conociendo el resultado, hay que ver qué combinaciones de los datos permiten obtenerlo.

En resumen, lo que me interesa destacar es que hay una regla del contrato didáctico, "puede haber distintos procedimientos para un mismo problema" que no es compartida por todos y no repercute de la misma manera en la actividad de los alumnos. Y la negociación de dicha norma, que se da a partir de la constatación de la coincidencia de resultados, está fuertemente mediada por la legitimación del maestro.

La estimación: una técnica privada y poco legítima

En el problema de las banderas descrito, al tratar de aplicar los cuatro porcentajes a 800, la superficie de la bandera grande, Alan y Jonathan obtienen que el 50% es "la mitad de ochocientos", el 25% "la mitad de la mitad, bueno, la cuarta parte", y para el 20% estiman:

Observadora:	¿Y el amarillo[8]?
Alan:	Y el amarillo… es… [Silencio].
Observadora:	¿Cuánto te salió?
Alan:	Ciento cincuenta.
Observadora:	Ciento cincuenta.
Alan:	Bueno, ¡calculé!
[…]	
Jonathan:	[…] ve que es ochocientos acá, es la mitad, cincuenta por ciento, después, este, acá, dice el veinticinco por ciento, y ya, la mitad de cuatrocientos, ya después nada más, este, acá [señalando el amarillo] igual le hicimos, así, ciento cincuenta, doscientos, [inaudible] doscientos, y ya de aquí, este,… [Silencio].
Alan:	No… es que los pusimos, los números cerrados.

Jonathan no encuentra cómo decirle directamente a la observadora –o no se atreve a hacerlo– de qué medios se valieron para obtener el 20%: "ya después nada más, este, acá, igual le hicimos así". Alan sí lo admite por un momento cuando utiliza la palabra "¡calculé!", que evoca una estimación. No obstante, no dice más. Da la sensación de que Alan vive esta manera de resolver como algo útil, pero íntimo, difícil de reconocer y explicar abiertamente. Después justifica: "es que los pusimos, los números cerrados", como si esa restricción minimizara la sensación de arbitrariedad. El fragmento anterior sugiere entonces que los dos alumnos consideran que la estimación es un procedimiento sin legitimidad, al menos en esta situación; recurren a él porque no tienen otro remedio –la fracción asociada al 20% no es evidente para ellos–, pero no pueden admitirlo abiertamente, quizás porque saben que de hecho la estimación no permite encontrar el resultado exacto que se está pidiendo.

La tendencia de los alumnos a no mostrar los conocimientos en los cuales no son expertos es más generalizada. En una experiencia de diseño y aplicación de clases inscrita en un proyecto de formación docente, los autores encuentran que

> […] pareciera que algunos alumnos no quieren mostrar su producción, la rompen o la borran y sólo presentan los resultados […] si un alumno produce un recurso de solución que dista de la expectativa del docente, pocas veces dicho trabajo adquiere legitimidad en el aula y no se constituye en objeto de debate, de transformaciones y avances. (Sadovsky, Quaranta, Itzcovich, Becerril, García, 2015, p. 15)

8 Alan y Jonathan intercambian el amarillo y el verde: pintan de amarillo el 20% y de verde el 5%.

El operador decimal: un procedimiento valorado por su precisión y generalidad

En el apartado anterior mostré un momento de trabajo en parejas a propósito del problema de las banderas, que implica calcular el 50 %, 25 %, 20 % y 5 % de 800. Durante la puesta en común, para el caso del tercer porcentaje, se proponen procedimientos que son desechados por distintas razones: uno no es suficientemente preciso, otro tiene un uso restringido y debe ser trabajado para ampliar su dominio, y otro no se formula con claridad. En este momento Guillermo propone otra técnica que se aparece ante los estudiantes como muy sencilla:

> Guillermo: Sería multiplicar el ochocientos por punto veinte, ¿no?
>
> Maestro: Hay que multiplicar el ochocientos por punto veinte, a ver, alguien que me diga cuánto es ochocientos por punto veinte. ¿Por qué por punto veinte?
>
> Guillermo: ¿Porque es el porcentaje?
>
> Maestro: ¿Porque es el veinte por ciento? ¿Y entonces, para hacer éste (el 50 %) cuánto sería?
>
> Guillermo: Serían ochocientos por punto cincuenta.
>
> Maestro: Ochocientos por punto cincuenta. ¿Y para éste? (el 25 %)
>
> Alumnos: Ochocientos por punto veinticinco.
>
> Maestro: Ochocientos por punto veinticinco. Si lo hacen así, sí sale, ¿no? Ochocientos por punto cincuenta, sí da cuatrocientos, ochocientos por punto veinticinco, sí da doscientos[9].
>
> […]
>
> Maestro: ¿Sí? Bueno, ya estamos conformes en que esto (el 20 %) es…
>
> Claudia: Ciento sesenta.

Para Guillermo hay una asociación muy directa entre 20 % y “por 0.20”. Esta naturalidad contrasta con las dificultades en la elaboración y comunicación de otras técnicas: el algoritmo se admite rápidamente, no porque tenga un sentido accesible, ni por la facilidad en la ejecución de los cálculos, ni porque arroje en suficientes casos los mismos resultados que otros procedimientos, sino por la aparente regularidad en la identificación de la operación necesaria. En pocas palabras, se valora por encima de los demás procedimientos gracias a su generalidad, quedando la cuestión del

9 Antes habían establecido que multiplicar 800 por 0,50 o por 0,25 equivalen a aplicar la mitad y la cuarta parte de 800, respectivamente.

sentido en segundo término[10]. Esto tiene que ver con el diseño de las situaciones que se plantearon a los alumnos: al no haber dedicado un tiempo y dispositivos suficientes para trabajar sobre los distintos procedimientos y para hacerlos visibles al grupo, se acepta un algoritmo que parece evidente, aunque se comprenda poco y pueda dar origen a errores[11].

Dicho algoritmo es un procedimiento al que todos pueden hacer referencia, y todos saben que tiene fuerte reconocimiento en el grupo. No obstante, no se valora de manera uniforme, y por lo tanto no afecta de la misma manera la actividad de los estudiantes. Por ejemplo, al hacer los cálculos de la bandera pequeña (el 50 % de 300), Mario inmediatamente se dispone a utilizar el operador decimal, pero Fabián insiste dos veces en que el resultado es 150 –resultado que al parecer encontró más rápida y fácilmente: la mitad de 300–. Mario responde: "Si ya, ya lo sé, a pus sí verdá, bueno, vamos a hacerle [la multiplicación de 300 por 0,50] para que digan que así lo hicimos".

Así, aunque reconoce la respuesta de Fabián, Mario insiste en usar la multiplicación por 0,50, con el argumento de que conviene mostrarla a los demás. Ya sea porque piensa que el operador tiene mayor reconocimiento y entonces quiere hacer ver que lo sabe utilizar, o bien porque aún no se siente convencido del recurso a la fracción, Mario apela a la superioridad que, según él, le conceden los demás al operador decimal frente a otros procedimientos.

En resumen, el operador decimal es el procedimiento que más se explicita y se discute en la puesta en común. Aunque no todos lo utilizan de la misma manera, sí lo reconocen como valorado. Me parece que esto se explica en parte por tratarse de un algoritmo eficiente y global, y en parte también porque quien lo "trae" a la puesta en común y lo vuelve público es precisamente uno de los alumnos que gozan de mayor legitimidad en el grupo respecto a sus conocimientos matemáticos.

El registro gráfico: un recurso subvalorado frente al registro numérico

El problema, que implica calcular el 50 %, 25 %, 20 % y 5 % de cantidades numéricas, incluye una segunda parte en la que se pide aplicar esos cuatro porcentajes a un rectángulo, es decir a una cantidad de superficie, que representa una bandera.

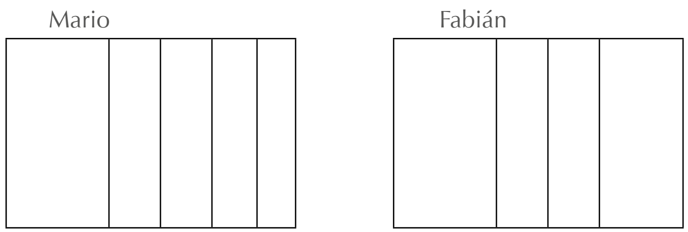
10 Por supuesto, no descarto que la técnica del operador decimal sea muy útil y deba ser enseñada. Lo que quiero destacar aquí es, nuevamente, que esta técnica suele no ser portadora del sentido del porcentaje como razón, lo cual implica, si es la única en valorarse y usarse, un sacrificio nada desdeñable: el del significado.

11 Más adelante muestro un ejemplo en el que algunos alumnos multiplican por 0,5 para calcular el 5 %.

Mario y Fabián parecen tomarse esa tarea con ligereza. Ellos hacen la aplicación numérica de los porcentajes a partir del operador decimal, y en la aplicación gráfica marcan cuatro líneas al azar, de manera rápida, tomando medidas con una regla:

> Con una regla miden el largo del rectángulo, son 4,5 centímetros
>
> Mario: ¡Saca la regla! ¡Ah! ¡Yo traigo regla!
>
> [Los dos buscan en sus mochilas, Fabián saca dos reglas y ambos miden el largo del rectángulo].
>
> Fabián: A ver, ¿cuántos son? ¿Cuatro (colores)?
>
> Mario: Son cuatro. No, mira (tiene la regla sobre el largo del rectángulo y va marcando diferentes puntos) éste es el doscientos por ciento, ha de ser como punto, uno punto cinco, y después el otro por aquí de dos puntooo y el otro por aquí, y el otro.
>
> […]
>
> Mario: A ver, aquí, a lo mejor sería aquí [chifla], por el dos, éste aquí, éste aquí.
>
> […]
>
> Mario: A ver, a ver, ponle, pon la regla.
>
> […]
>
> [Mario] Uno punto cinco, dos punto cinco.
>
> Fabián: ¡No! Uno punto seis.
>
> […]

Dibujan lo siguiente:



[Las franjas que dibuja Mario miden de ancho 1,6, 0,8, 0,8, 0,7 y 0,6 cm. Y las de Fabián miden 1,6, 0,8, 0,8 y 1,3 cm.]

A pesar de asignar al azar el ancho de las franjas, los dos estudiantes le conceden cierta importancia al uso de la regla y obtienen medidas muy precisas. Fabián incluso corrige por un milímetro una respuesta de Mario. ¿Acaso el uso de la regla borra para ellos el carácter azaroso de su manera de resolver, al regresar la tarea al ámbito numérico?

La facilidad con la que se toman el problema tiene que ver con que la técnica que utilizan para aplicar porcentajes, el operador decimal, solo funciona en el registro numérico[12]. Relaciones como "el 50 % es la mitad" y "el 25 % es la cuarta parte", que sí permiten a otros alumnos resolver en ambos registros, no son en este momento visibles para Mario y Fabián. El hecho mismo de que tengan pocas herramientas para resolver tareas en el registro gráfico sugiere que su experiencia frente a ellas ha sido escasa. El carácter subvalorado que se le confiere al registro gráfico respecto a otros se ha encontrado en varios estudios. Bosch y Chevallard (Bosch, 1994; Chevallard, 1996; Bosch y Chevallard, 1999; citados en Sadovsky, 2003) y Artigue (1995) señalan que suele establecerse una jerarquía entre los diferentes registros: a los objetos que pertenecen al registro de lo escrito y numérico se les otorga un estatuto de instrumentos, es decir, son tratados como herramientas que permiten llevar a cabo cierto trabajo, construir técnicas para resolver tareas, mientras que los objetos que pertenecen a los registros gráfico y oral, si bien son movilizados en la actividad matemática, se consideran más bien como "acompañantes".

Poner ceros, mover puntos: la actividad matemática puede regularse mediante algunos "trucos"

Anteriormente mostré fragmentos en los que Margarita y Montserrat realizan una búsqueda incierta de un algoritmo que permita aplicar porcentajes. En esos episodios se puede ver también el papel que ellas hacen desempeñar a la división entre dos y al uso del punto decimal, que son vistos como "reguladores" de los resultados:

> Se debe pintar una bandera de 400 m^2 de superficie de la siguiente manera: el 50 % de rojo, el 25 % de azul, el 20 % de verde y el 5 % de amarillo. ¿Qué área tendrá cada color? Margarita y Montserrat, para aplicar el primer porcentaje, multiplican cuatrocientos por cincuenta y obtienen 20 000.
>
> Margarita: Es que da mucho, sobre dos, da mucho, mira.
>
> Montserrat: [Ríe.] Da mucho, ¿verdad?
>
> Margarita: ¿Sobre dos?
>
> Montserrat: Mejor, lo que te dé entre dos, y ya sería…
>
> Margarita: El resultado.
>
> […]

12 Utilizo el término registro en el sentido de Duval (1995). Es decir, considero que lo numérico y lo geométrico constituyen efectivamente dos formas de expresión del porcentaje, cada una de las cuales apela o favorece tratamientos distintos, a la vez que es posible establecer ciertas relaciones entre ambas.

Al encontrar que el resultado es demasiado grande, buscan regularlo aplicando otra operación: dividir entre dos. En este momento no se ha establecido todavía que el 50% de una cantidad es la mitad, y Margarita y Montserrat no ponen en juego este procedimiento. Así, me parece que el recurso de sacar la mitad es más bien una especie de truco que les sirve para reducir el resultado.

Más adelante, Montserrat intenta otro ajuste que le permite recuperar un algoritmo: "Es… si le ponemos punto acá, ¿no? Punto acá [señala dos lugares después del punto decimal tanto en el 50 como en el resultado], y ya da doscientos".

Incluso después, cuando surge una duda sobre la cantidad de pintura amarilla (para obtener el 5% de 400, multiplican 400 por 0,5 y también les da como resultado 200, entonces con la superficie roja y la amarilla agotarían la bandera), Margarita piensa si "será dos", es decir, en volver a quitar ceros, o bien, en dividir nuevamente entre dos, lo que provoca la risa de ambas.

Parece entonces que dividir entre dos y colocar un punto son vistos como reguladores de los cuatro algoritmos básicos para adaptarlos a diferentes tareas. Sus risas parecen mostrar que para ellas se hace evidente que hay una manera, en cierta medida "tramposa", poco inteligible, de actuar.

Finalmente, Montserrat insiste en que el error estuvo en que "faltó poner el punto, el punto se recorre" dos lugares en el resultado, lo que muestra que ella pretende encontrar cierta lógica en la manera de obtenerlo. Por otro lado, sigue afirmando que el 5% de 400 se obtiene multiplicando 400 por 0,5, con lo que refleja un grado de incomprensión en relación con los números decimales: el punto está recorrido un lugar en el multiplicador, pero dos en el resultado, además se hace la misma operación para calcular el 50% que el 5%, ¿o para ella 0,50 es distinto de 0,5?

Cabe destacar que, después de todo, estas manipulaciones casi mágicas se hacen también en la escuela. Basta con recordar la manera de utilizar el punto decimal en el algoritmo de la división[13] o la división entre dos implicada en las fórmulas del área del triángulo, trapecio y rombo. Así, parece que ellas han incorporado estos usos de manera generalizada.

13 El punto se puede recorrer el mismo número de lugares en el dividendo y el divisor, o bien compensar cada lugar que se recorre el punto en el divisor se agrega un cero en el dividendo, una vez puesto un punto decimal se autoriza aumentar ceros a la derecha.

Conclusiones

A lo largo de este texto mostré ejemplos en los que Mario y Fabián incorporan producciones de otros pero en función de quién las produce. Margarita y Montserrat, al saber poco y actuar a tientas, hacen esfuerzos por incorporar todo lo que dicen todos aunque sea contradictorio, pero a partir de ahí logran hacer elaboraciones propias. El grupo delega en Guillermo y Josué las puestas en común. Cuando hay un debate a propósito de dos maneras contradictorias de entender el porcentaje es el maestro quien se encarga de sostenerlo. También los procedimientos se valoran de manera diferenciada: un algoritmo, por ser universal, es altamente valorado, aunque no se entienda y no se domine; en cambio, la estimación es íntima, privada, se usa para controlar resultados pero no se discute públicamente. En resumen, la manera en que circula el conocimiento en clase, las producciones que los alumnos reciben de otros para incorporarlas a las propias, es decir, las posibilidades de aprender a partir de la interacción con los demás, dependen de las características de la situación didáctica, de la forma en que alumnos y maestro se miran entre ellos, y del estatuto que les confieren a los propios objetos matemáticos.

La noción de *contrato didáctico* –brevemente descrita en la introducción–, resulta muy útil para mirar que a partir de las interacciones en el aula se construyen significados respecto a la actividad y los objetos matemáticos, pero tiene la dificultad de considerar al "alumno" en singular: aun cuando el contrato cambia, durante el tiempo que funciona pareciera ser un conjunto coherente de reglas, compartido de manera homogénea por el grupo. Y ello no permite analizar las posibilidades fuertemente diferenciadas que una misma clase ofrece a los distintos estudiantes: las reglas del contrato no son compartidas por todos, y cuando lo son, no se asumen homogéneamente. Cada estudiante se posiciona frente a ellas y las interpreta de una manera propia; por eso, circulan en la clase significados contradictorios. Para analizar las interacciones entre alumnos, maestro y situación didáctica a propósito de un conocimiento específico, es necesario considerar a "los alumnos" en plural, y mirar el carácter diversificado con el que ellos asumen las reglas del contrato didáctico.

En pocas palabras, me parece fundamental la posibilidad que ofrece la teoría de las situaciones didácticas de analizar a profundidad el papel del contenido y la situación didáctica en los acontecimientos que ocurren en el aula. Por otro lado, también es relevante acercar esta teoría a otras perspectivas (Erickson, 1993, 2015; Gutiérrez, Sengupta-Irving y Dieckmann, 2010; Lave, 2015; Lerman, 2002; Voigt, 1995) que muestran que aun la situación didáctica más pertinente para la enseñanza de cierto contenido cobra materialidad en un grupo específico que ha construido complejas y diversas formas de interacción a partir de su historia como estudiantes y maestro. Estas formas de interacción afectan las posibilidades de aprendizaje generadas por la situación didáctica.

Referencias

Artigue, M. (1995). Ingeniería didáctica. En Gómez, P. (ed.) *Ingeniería didáctica en educación matemática*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Brousseau, G. (1986). Fundamentos y métodos de la didáctica de la matemática. *Recherches en Didactique des Mathematiques*, *7*(2), 33-115.

Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine*. Bern: Lang.

Erickson, F. (1993). El discurso en el aula como improvisación: las relaciones entre la estructura de la tarea académica y la estructura de la participación social en clase. En H. Velasco, J. García, A. Díaz (eds.). *Lecturas de antropología para educadores. El ámbito de la antropología de la educación y de la etnografía escolar* (pp. 315-354). España: Trotta.

Erickson, F. (2015). Oral discourse as a semiotic ecology. The co-construction and mutual influence of speaking, listening, and looking. *The Handbook of Discourse Analysis*, *2,* 422-446.

Gutiérrez, K. D.; Sengupta-Irving, T. y Dieckmann, J. (2010). Developing a mathematical vision. En J.N. Moschkovich (eds.). *Language and mathematics education: Multiple perspectives and directions for research* (pp. 29-71). Charlotte, NC: Information Age.

Lave, J. (2015). Learning as/in practice. *Horizontes Antropológicos, 21*(44), 37-47.

Lerman, S. (2002). Cultural, discursive psychology: A sociocultural approach to studying the teaching and learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 46,* 87-113.

Margolinas, C. (1995). La structuration du milieu et SES apports dans l'analyse a posteriori des situations. En C. Margolinas (ed.). *Les débats de didactique des mathématiques* (pp. 89-102). Francia: La Pensée Sauvage.

Mendoza, T. (2007). *Estudio didáctico de la noción de porcentaje* (tesis de maestría). México: Departamento de Investigaciones Educativas, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados.

Mendoza, T. y Block, D. (2010). El porcentaje: lugar de encuentro de las razones, fracciones y decimales en las matemáticas escolares. *Relime, 13*(4), 129-158.

Partanen, A. M. y Kaasila, R. (2015). Sociomathematical norms negotiated in the discussions of two small groups investigating calculus. *International Journal of Science and Mathematics Education, 13*(4), 927-946.

Sadovsky, P. (2003). *Condiciones didácticas para un espacio de articulación entre prácticas aritméticas y prácticas algebraicas* (tesis de doctorado). Argentina: Universidad de Buenos Aires, Facultad de Filosofía y Letras.

Sadovsky, P. (2005). La teoría de las situaciones didácticas: un marco para pensar y actuar la enseñanza de la matemática. En H. Alagia, A. M. Bressan y P. Sadovski (eds.). *Reflexiones teóricas para la educación matemática, 5* (pp. 13-66). Argentina: Libros del Zorzal.

Sadovsky, P.; Quaranta, M. E., Itzcovich, H., Becerril, M. M. y García, P. (2015). La noción de relaciones entre cálculos y la producción de explicaciones en la clase de matemática como objetos de enseñanza. Su configuración en el marco de un trabajo colaborativo entre investigadores y docentes. *Educación Matemática, 27*(1), 7-36.

Sadovsky, P. y Sessa, C. (2005). The adidactic interaction with the procedures of peers in the transition from arithmetic to algebra: A *milieu* for the emergence of new questions. *Educational Studies in Mathematics, 59*(1-3), 85-112.

Voigt, J. (1995). Thematic patterns of interaction and sociomathematical norms. En P. Cobb, y H. Bauersfeld (eds.). *The emergence of mathematical meaning: Interaction in classroom cultures* (pp. 163-201). Nueva York: Psychology Press.

Yackel, E. y Cobb, P. (1996). sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, *27*(4), 458-477.