Argumentación matemática y demostración en Cabri: el problema de la colinealidad

Hugo Martín Cuéllar García

Instituto Técnico Industrial de Tocancipá, Cundinamarca [3]

Resumen. El trabajo con Cabri ha mostrado ser muy efectivo al permitir, mediante exploraciones sistemáticas, el estudio de las regularidades de las construcciones geométricas generando una forma de presentar la geometría escolar basada en la búsqueda de invariantes de las figuras geométricas diferente a la presentación tradicional a partir de demostraciones, en ocasiones, sin sentido. Sin embargo, un pensamiento matemático genuino necesita, además de la experimentación para obtener conclusiones y dar significado a las mismas, desarrollar esquemas de argumentación que admitan llegar a estas conclusiones a partir de hechos conocidos. Cabri permite el juego en ambos sentidos, es decir, además de ser muy útil en la búsqueda de regularidades, también ofrece la posibilidad de generar esquemas válidos de argumentación matemática.

Introducción

El razonamiento matemático se puede entender como la *acción de ordenar ideas en la mente para llegar a una conclusión* y se caracteriza, entre otras, por acciones como: *dar cuenta del cómo y por qué de los procesos, justificar las estrategias y los procedimientos, formular hipótesis, hacer conjeturas y predicciones, encontrar contra-ejemplos, y, usar hechos conocidos, propiedades y relaciones para explicar otros hechos* (MEN, 1998). Estas acciones también caracterizan las funciones que se observan en el proceso de demostración matemática: descubrimiento, verificación/convicción, explicación, sistematización y comunicación (De Villiers, 1993).

Un software de geometría dinámica como Cabri presenta un ambiente en el cual las acciones de explorar, formular hipótesis, hacer conjeturas y encontrar contraejemplos, se hacen explícitas por el dinamismo que adquieren los objetos geométricos –básicamente por la acción agarre/arrastre – y estas se pueden entender como un fuerte apoyo hacia las funciones de explicar y descubrir del proceso de demostración. Sin embargo, como se pretende ilustrar en el presente artículo, el ambiente Cabri también se presta para vivenciar las funciones de sistematización y de verificación/convicción señaladas por De Villiers.

Marco conceptual

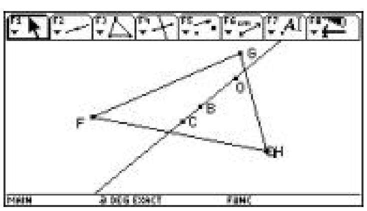
En una construcción geométrica con Cabri tanto el juego de manipulación de los objetos independientes para inferir resultados, como la consecuente comprobación "visual" que se hace de los mismos, inciden en la interiorización de las conclusiones que se elaboran para que de esta manera comiencen a formar parte de una gama de conocimientos que se dan por hechos. Por ejemplo, cuando se construye un triángulo y se trazan las tres medianas, se obtiene un solo punto en su intersección (baricentro). La manipulación, con la acción agarre/arrastre, que lleva a convencer sobre la validez de este resultado se basa en el *Principio de Experiencia*, es decir, se llega al convencimiento que es cierto puesto que cada vez que se experimenta bajo las mismas condiciones los resultados son los mismos (GONZÁLEZ, 2001). La experiencia muestra que el baricentro es único sin importar el triángulo que se tome para hacer la construcción y sin importar las modificaciones que se realicen sobre el mismo.

Otra herramienta útil de Cabri cuando se pretende verificar y convencer es la herramienta Check Property que permite comprobar la validez de algunas condiciones como paralelismo, perpendicularidad y colinealidad, entre otras. En este caso el proceso de convencimiento se da por el *Principio de Autoridad,* caracterizado por el hecho de que como hay alguien (o algo) que es el depositario del saber, se recurre a él para resolver las dudas sobre conclusiones obtenidas (GONZÁLEZ, 2001). En este caso el depositario del saber es Cabri, y la verificación que hace funciona de tal manera que ni el profesor ni los estudiantes saben a ciencia cierta el proceso que ha seguido para dar su respuesta. La condición se cumple porque Cabri dice que se cumple.

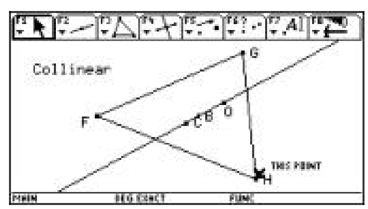
Estas dos vías hacen parte del trabajo normal con Cabri para convencer sobre la validez de los resultados, pero no son las únicas de las cuales se puede sacar provecho a la hora desarrollar pensamiento matemático. En este artículo se pretende mostrar que con Cabri es posible adelantar procedimientos de argumentación basados en el principio de usar hechos conocidos, propiedades y relaciones para explicar otros hechos –precepto utilizado en la construcción de un sistema axiomático –. De esta forma, el proceso que se sigue para convencer se basa en el *Principio de Argumentación Matemática* y para emplearlo es necesario construir un sistema que lo sustente, de tal manera que a partir de ciertas definiciones iniciales y de unos primeros principios –llamados postulados– se generen nuevos hechos que a su vez se puedan utilizar para obtener conclusiones cada vez más elaboradas. En el contexto Cabri los elementos que se consideran como básicos en la argumentación dependen del entorno tecnológico en el cual se está trabajando, es decir, del software incorporado en las calculadoras algebraicas.

El sentido de la argumentación en Cabri

Al considerar un problema como el de verificar que el ortocentro, el baricentro y el incentro de todo triángulo no equilátero están alineados (recta de Euler), es posible recurrir a explicaciones de carácter visual puesto que basta con construir la recta que pase por dos de ellos y notar que, al manipular los vértices del triángulo original, dicha recta contiene al tercero (convencimiento por el *Principio de Experiencia*). Ahora bien, si esta manipulación aún no convence, se puede verificar la condición de colinealidad de los tres puntos con la herramienta Check Property de tal manera que Cabri informe (convencimiento por el *Principio de Autoridad*) si están alineados o no lo están (Figura 1).



Principio de Experiencia: Al manipular cualquiera de los vértices F, G o H se nota que el resultado de la colinealidad es "visualmente obvio".



Principio de Autoridad: Cabri comprueba –sin explicitar cómo– que los tres puntos son colineales.

Figura 1

Sin embargo, si se trata de desarrollar esquemas de razonamiento matemático que lleven a la verificación y al convencimiento utilizando el *Principio de Argumentación Matemática* es primordial establecer de antemano normas de acuerdo al interior de la comunidad en la que se esté discutiendo el problema. En el ambiente Cabri, estos principios pueden variar teniendo en cuenta el grado de rigurosidad que se quiera establecer. En algunos casos se puede acordar el aceptar como principio de verificación la medición, usando las herramientas que para ello tiene incorporadas el programa y en otros casos, será necesario crear herramientas –que no recurran a la medición– para justificar las afirmaciones matemáticas que se realicen.

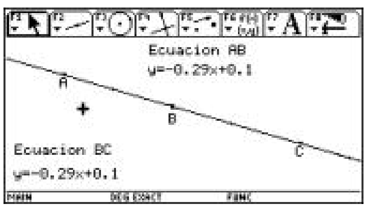
A continuación se ilustran estos tipos de argumentación matemática y los problemas que pueden surgir al considerar como norma de verificación la medición.

Argumentos que recurren a la medición

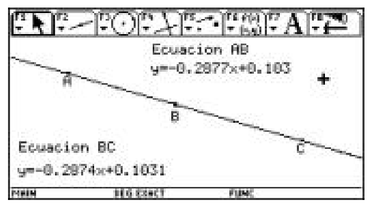
Tomando como referencia la idea intuitiva de colinealidad de tres puntos dados y aceptando la medición que hace Cabri como norma de verificación, es posible recurrir a diversas argumentaciones. En todas ellas entra en juego el problema de la aproximación puesto que, dependiendo del número de cifras significativas que se tomen, las conclusiones serán verdaderas o no. Algunos ejemplos de este tipo de argumentación, para probar que tres puntos dados A, B y C son colineales, son los siguientes:

Argumento 1. Se trazan dos rectas, una a partir de A y B, y otra a partir de B y C. Se pide la ecuación de cada una de estas rectas. Si las dos ecuaciones son iguales entonces los tres puntos son colineales.

En este caso, los coeficientes de las ecuaciones son tan solo aproximaciones y es posible que, dependiendo del número de cifras significativas que se tomen, los tres puntos no se consideren colineales. La Figura 2 ilustra un ejemplo en el cual se observan las diferencias al considerar dos o cuatro cifras significativas: con dos cifras significativas la afirmación es válida, con más cifras ya no lo es.



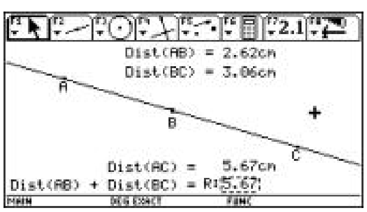
Argumento 1 con dos cifras significativas.



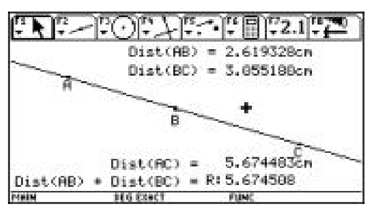
Argumento 1 con cuatro cifras significativas.

Figura 2

Argumento 2. Se toman las distancias AB, BC y AC –dist(AB), dist(BC) y dist(AC) respectivamente–. Si dist(AB) + dist(BC) = dist(AC) entonces los tres puntos son colineales. La Figura 3 muestra un ejemplo de respuestas que se pueden obtener al considerar dos o seis cifras significativas, en donde se observa que ocurre lo mismo que en el caso anterior.



Argumento 2 con dos cifras significativas.



Argumento 2 con seis cifras significativas.

Figura 3

Argumento 3. Se trazan las rectas BA y BC. Se mide el ángulo ABC. Si el ángulo medido es de 180°, entonces los tres puntos son colineales.

Argumento 4. Se construye el triángulo ABC y se mide su área. Si la medida de esta área es cero (0), entonces los tres puntos son colineales.

Argumento 5. Se construye el triángulo ABC. Se mide las distancias AB y BC –dist(AB) y dist(BC) respectivamente–. Se mide el perímetro del triángulo. Si el perímetro del triángulo es el doble de la suma dist(AB) + dist(BC), entonces los tres puntos son colineales.

Construcción de herramientas de verificación que no recurren a la medida

Si no se acepta la medición como un mecanismo de argumentación, es necesario construir herramientas de verificación que, en el contexto de un sistema, permitan hacer la comprobación de proposiciones. Antes de construir dichas herramientas se describen los componentes del sistema Cabri que se quiere edificar.

Definiciones básicas. Para el caso de la colinealidad, se consideran como definiciones básicas las construcciones Cabri de*: punto, segmento, punto sobre objeto, recta, punto de intersección y circunferencia*. Se toman como definición de estos objetos lo que Cabri dibuja con la herramienta correspondiente *(Point, Segment, Point on object, Line, Intersection Point, Circle)*.

Postulado: Rectas en el mundo Cabri. Dadas dos rectas se pueden dar tres casos:

1. No se cortan (*rectas paralelas*)

2. Se cortan en un punto (*rectas intersecantes*), en cuyo caso este punto recibe el nombre de *Punto de Intersección*.

3. Una recta está ubicada exactamente sobre la otra (*rectas equivalentes*), en este caso no existe punto de intersección –Cabri no dibuja "el punto de intersección" entre dos rectas equivalentes–.

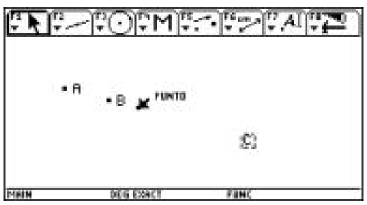
Definición: Rectas equivalentes. En Cabri ocurre que es posible que dos o más rectas ocupen el mismo "espacio", de tal manera que, aunque visualmente no se diferencien, se trata de objetos (rectas en este caso) diferentes. De esta forma, al contrario de lo establecido en los postulados de la Geometría Euclidiana, por dos puntos Cabri pueden pasar muchas rectas y, por lo tanto, se pueden caracterizar (definir) como rectas equivalentes aquellas que tienen por lo menos dos puntos en común.

Proposiciones Iniciales. Aunque el término proposición se refiere a una frase completa con sujeto y predicado, en el contexto de este artículo se toma como *proposición* cualquier construcción de Cabri que se caracterice por el hecho de poder ser elaborada únicamente a partir de los elementos tomados como definiciones básicas: *punto, segmento, punto sobre objeto, recta, punto de intersección* y *circunferencia*. En este caso las siguientes herramientas de construcción que utiliza Cabri: *Perpendicular Line, Parallel Line, Midpoint, Perpendicular Bisector* y *Angle Bisector*, son consideradas como *proposiciones iniciales* puesto que para cada una de ellas es posible crear una *Macro Construcción* que genere la construcción deseada a partir, únicamente, de los elementos básicos. Pero dado que Cabri ya tiene incorporadas estas construcciones se pueden aceptar en el mismo sentido en que se aceptan las definiciones básicas, es decir, en este sistema una recta perpendicular es lo que Cabri dibuja con la herramienta (Macro) *Perpendicular Line*, y de igual manera se pueden establecer definiciones análogas con las otras cuatro construcciones mencionadas.

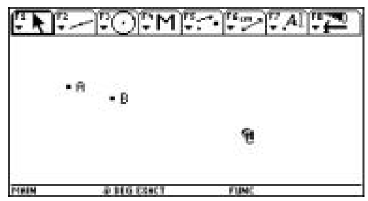
Herramientas de verificación. Se pretende desarrollar una argumentación que permita establecer la condición de colinealidad a partir de las definiciones básicas, los postulados y las proposiciones iniciales, y para ello se van a construir las herramientas (*Macro Construcciones*) que verifiquen esta condición. Desarrollar una argumentación significa, en este sentido y para este sistema, construir las proposiciones para aquello que se quiere verificar.

Definición 1 de colinealidad . Dados tres puntos libres A, B y C, se construyen los puntos medios de los segmentos AB y BC. Se nombran estos puntos G y H respectivamente. Se trazan las rectas AH y CG, y se llama P al punto de intersección de las mismas. La manipulación de los puntos libres permite construir el criterio de validación al observar lo s casos en que aparece el punto P y los casos en que desaparece. Se define como condición de colinealidad el caso en que el punto P desaparece (Figura 4).

Para construir la macro, se ocultan los puntos medios y las rectas. Se toman como objetos iniciales los puntos A, B y C, y como objeto final el punto P. Esta herramienta (Macro Construcción) permite verificar la colinealidad puesto que al aplicarla sobre tres puntos dados, es posible que no estén alineados, en cuyo caso se forma el punto P objeto final, o, si están alineados no se forma este punto.



Los tres puntos no son colineales y por tal razón aparece un nuevo punto (PUNTO)



Los tres puntos son colineales. Al mover el punto C, o cualquiera de los otros, el nuevo punto desaparece en el momento de la colinealidad.

Figura 4

Definición 2 de colinealidad. Dados tres puntos libres A, B y C, se construyen las mediatrices (*Perpendicular Bisector*) de los segmentos AB y BC. Se encuentra el punto de intersección (P) de estas mediatrices y se traza el segmento PB. La manipulación de los puntos libres permite construir el criterio de validación al observar los casos en que aparece el segmento PB y los casos en que no aparece. Se define como condición de colinealidad el caso en que el segmento desaparece (Figura 5).

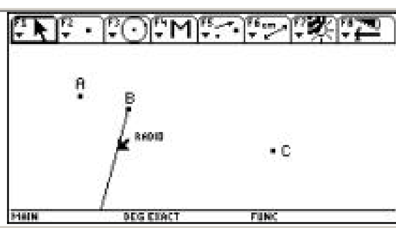
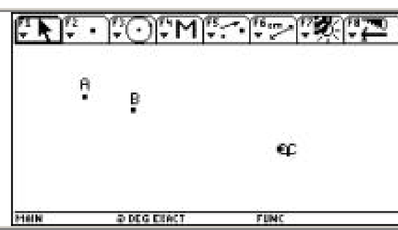
	
Los tres puntos no son colineales y por tal razón aparece la recta PB.	Los tres puntos son colineales. Al mover el punto C la recta PB desaparece en el momento de la colinealidad.

Figura 5

Para construir la macro se ocultan los segmentos, las mediatrices y el punto P. Se definen como objetos iniciales los puntos A, B y C y como objeto final el segmento PB(RADIO). Esta herramienta (Macro) permite verificar la colinealidad puesto que al aplicarla sobre tres puntos dados se puede observar que si son colineales no se crea el segmento objeto final (RADIO), y, si no son colineales el segmento objeto final si se genera.

Antes de continuar, es conveniente realizar una corta observación metodológica. Se estableció anteriormente como *proposición Cabri* aquella construcción que puede realizarse mediante una Macro a partir de los elementos básicos y, por tal razón, si se realiza una Macro para construir la recta de Euler se le da el status de *proposición* a dicha recta, es decir que ahora se puede aceptar como *recta de Euler Cabri* aquella recta que Cabri dibuja con la macro correspondiente. Esto es cierto, pero de ninguna manera garantiza que los tres puntos implicados sean colineales puesto que al construir la recta, como objeto final de la macro, solo se consideran dos puntos, y el que contenga al tercero sólo se verifica, como ya se observó, experimentalmente por manipulación o recurriendo al principio de autoridad.

Ahora si, aceptando cualquiera de los argumentos que utilizan la medición o alguna de las definiciones anteriores como criterios de verificación para la colinealidad de tres puntos dados, al considerar la construcción de la recta de Euler se puede afirmar que el ortocentro, el baricentro y circuncentro son colineales, no solamente por la manipulación de los vértices del triángulo del cual se parte, ni porque Cabri diga que si lo son, sino porque se ha creado un procedimiento, a partir de las definiciones básicas, que verifica que efectivamente estos puntos son colineales *(Principio de Argumentación Matemática).*

Aplicación: el Teorema de Varignon

Un ejercicio revelador, tanto de la exploración Cabri como del potencial de las herramientas de prueba construidas, consiste en determinar las características del cuadrilátero que se genera al unir los puntos medios de los lados de otro cuadrilátero dado. La manipulación permite observar que se trata de un paralelogramo (*Principio de Experiencia*) y Cabri puede chequear esta condición (*Principio de Autoridad*) al tomar lados opuestos del cuadrilátero formado (Figura 6).

Ahora se busca una herramienta de prueba que permita concluir que efectivamente los lados opuestos del cuadrilátero obtenido son paralelos recurriendo al *Principio de Argumentación Matemática.*

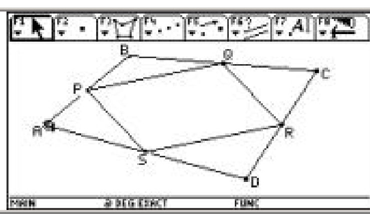
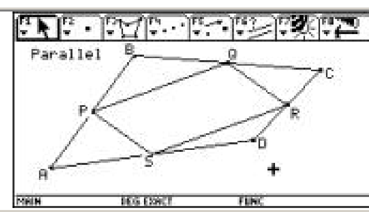
	
Principio de Experiencia: La manipulación de los vértices del cuadrilátero original permite observar que siempre se genera un paralelogramo.	***Principio de Autoridad:*** Cabri verifica la condición de paralelismo entre dos lados opuestos del cuadrilátero obtenido.

Figura 6

La argumentación puede seguir el siguiente esquema:

· Se considera un segmento del cuadrilátero obtenido, por ejemplo el segmento SR.

· Se traza una paralela *(Parallel Line)* a este segmento por uno de los otros dos puntos medios.

· Se ubica un punto M sobre la paralela construida en el paso anterior (*Point on object*). Este punto se define sobre la paralela pero no sobre el segmento.

· Se utiliza algún argumento de medición o herramienta de prueba.

¿Qué ocurre cuando se aplica uno de los argumentos o macros, construidos anteriormente, a los puntos M, P y Q? (Figura 7)

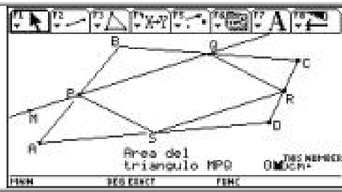
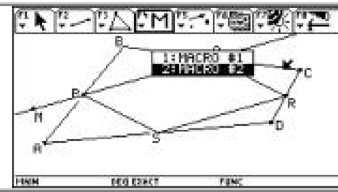
	
Argumento 4. Al construir el triángulo MPQ y medir su área, esta es 0 cm^2.	***Definición 2 de colinealidad.*** No se genera el segmento RADIO, objeto final de la macro.

Figura 7

· Se afirma que los tres puntos M, P y Q son colineales, es decir, que existe una recta (I) que los contiene.

· Si ahora se toma otro punto N sobre la paralela de la construcción y se verifica la colinealidad de N, M y P con el método descrito, se observa que también cumplen la condición. Es decir que existe otra recta (recta II) que contiene a los puntos N, M y P. Igualmente se puede verificar la colinealidad para M, N y Q, para P, Q y N, etc., concluyendo, por lo tanto, que todas estas rectas son equivalentes. Es decir el segmento PQ está sobre una recta paralela al segmento SR y en consecuencia PQ y SR son segmentos paralelos.

El mismo tipo de argumentación se emplea para verificar el paralelismo entre PS y QR.

Observaciones finales

· Estas macros que verifican la colinealidad pueden convertirse en un instrumento de gran poder cuando se quiere convencer, por *argumentación matemática*, de otros resultados obtenidos por la *experimentación* o por el *principio de autoridad*. Por ejemplo se puede crear un argumento para convencer que efectivamente el corte de las medianas de un triangulo (baricentro) es único y extender el mismo tipo de argumentación para el ortocentro, el circuncentro y el incentro. Además también se pueden verificar, como ya se vio, condiciones de paralelismo y crear argumentos para verificar condiciones de perpendicularidad y de pertenencia a una recta.

· Los razonamientos descritos en este artículo son de argumentación en el mundo Cabri y por lo tanto tienen que ser explorados en este ambiente ya que no es posible extenderlos, por ejemplo, a la geometría euclidia de papel y lápiz.

· El esquema de argumentación que se ha trabajado recurre a un argumento visual, como lo hace Cabri por el *Principio de Experiencia* o por el *Principio de Autoridad*, pero con la diferencia de que ahora el proceso de creación de las herramientas de verificación se hace explícito.

· La exposición presentada muestra una forma de entender, en especial con sentido didáctico, la demostración matemática. Hecho que se puede resumir en los siguientes términos:

> Se tiene una teoría –en este caso, el sistema formado por las definiciones básicas, los postulados y las proposiciones en el ambiente Cabri y se tiene un "hecho matemático" – la colinealidad de tres puntos–. Demostrar este hecho significa incorporarlo a la teoría, de tal manera que sea consecuencia de la teoría. Y es eso lo que se ha mostrado.

Referencias

De villiers M. (1993) *El papel y la función de la Demostración en Matemáticas*. Epsilon No 26. p.15-30.

González, M. J. (2001) *Reflexiones en torno a la demostración* (recopilación de textos preparados por el Grupo de Aprendizaje de la Geometría). Documento en línea ver http://uv.es/~didmat/angel/seiembid.html#textos

Ministerio De Educación Nacional (1998) *Matemáticas, Lineamientos curriculares*. Cooperativa Editorial Magisterio. Bogotá.

Moreno, L. (1996) *La demostración en perspectiva*. Revista Mexicana de Investigación Educativa, Vol. 1.

Herramientas computacionales en el desarrollo de procesos de interpretación y argumentación en la clase de matemáticas

Gilberto Obando, Fabián Posada, Alexander Jiménez & John Mario Sepúlveda

Universidad de Antioquia, Medellín

Gloria Galvis Vingues

Normal Superior María Auxiliadora, Medellín

John Jairo Múnera Córdoba

Liceo Comercial Pacho Luis Álvarez, Medellín

Carlos Mario Cárdenas

Colegio Santa Teresa, Medellín

Francisco Osuna Martínez

Escuela Normal Superior, Envigado