Moreno L . (1999) *Acerca del Conocimiento y sus mediaciones en la Educación Matemática*. Revista EMA, vol. 4 # 2, p. 103 - 1 16

Moreno L., Waldegg G (s.f.*). Fundamentación Cognitiva del Currículo de Matemáticas* . En RICO L (eds.) *Didáctica de las Matem áticas*, Capítulo 3, editorial Síntesis, Madrid.

Una experiencia de "descubrimiento" en clase de geometría

Leonor Camargo Uribe

Incorporación Nuevas tecnologías al Currículo de Matemáticas, MEN

Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá

Resumen. En este artículo se presenta una alternativa para aprovechar el papel protagónico del software Cabri como instrumento de reorganización de las actividades en clase en geometría. A partir de una dinámica de resolución de problemas en la que se propone la exploración de la relación pitagórica, se da lugar a la generación de conjeturas que permite a los alumnos poner en juego sus conocimientos informales y avanzar hacia la construcción del conocimiento geométrico genuino. Bajo la orientación del profesor, se re visan aquellas ideas que se creían interiorizadas y se construyen lo que hemos denominado reglas de procedimiento, que permiten a los alumnos el acercamiento conceptual a nuevas propiedades geométricas.

Introducción

El proyecto de *Incorporación de Nuevas Tecnologías en el Currículo de Matemáticas de la Educación Media de Colombia* que desarrolla el Ministerio de Educación en coordinación con universidades y colegios públicos, está basado en la premisa según la cual, los computadores y las calculadoras a lgebraicas que incorporan paquetes de geometría dinámica tienen gran potencial para cambiar las prácticas de aula en matemáticas. En particular, en geometría, el proyecto considera que el software Cabri Géomètre se convierte en una fuente de exploración que modifica la forma de concebir los objetos geométricos y las estrategias de resolución de problemas, contribuyendo a construir el puente entre la geometría de los dibujos y la geometría de los objetos geométricos (Moreno, 2002a).

A raíz de nuestra participación en el proyecto, hemos venido buscando alternativas para construir ambientes de aprendizaje de la geometría, con tecnología, que respondan a las expectativas antes mencionadas, pues la sola presencia de los recursos no garantiza el cambio curricular. En este sentido intentamos aprovechar el papel protagónico del software como instrumento de reorganización de las actividades en clase para generar una dinámica de resolución de problemas que de lugar al desarrollo de un conocimiento geométrico genuino.

La experiencia que vamos a relatar muestra de qué manera la posibilidad de explorar relaciones alrededor de una idea geométrica, por sencilla que sea, genera un clima de "elaboración de conjeturas" que permite a los alumnos experimentar la actividad de "hacer matemáticas". Alrededor de una propuesta de indagación con la calculadora, los alumnos ponen en juego sus conocimientos y comienzan a utilizarlos para resolver una tarea. Es allí donde, bajo la orientación del profesor, se revisan aquellas ideas que se creen interiorizadas y se construyen, lo que hemos denominado reglas de procedimiento, que permiten el acercamiento conceptual a nuevas propiedades geométricas.

Inicialmente presentamos algunas ideas que sirven de marco teórico al trabajo del proyecto y nos han servido de guía para orientar el trabajo con los alumnos e interpretar aquello que experimentan cuando hacen uso de la tecnología. Posteriormente narramos una experiencia en el aula alrededor de una tarea de construcción geométrica diseñada para verificar si los estudiantes tenían incorporada la relación pitagórica como una regla de procedimiento. Finalmente analizamos los logros de los estudiantes.

Marco Teórico

El marco conceptual que sustenta nuestro trabajo se centra en el reto de la didáctica de buscar hacer significativo el conocimiento matemático que en esencia es abstracto y descontextualizado (Moreno, s.f.). Si se busca un mecanismo para lograr movilizar la cognición del estudiante hacia la interpretación de una idea, la búsqueda de estrategias para la solución de un problema, la producción de una conjetura y el deseo de validarla para comunicarla, se van creando las condiciones para ir elevando el nivel de organización del que parte el conocimiento informal del estudiante y se generan las condiciones para comenzar el proceso de descontextualización y sistematización, que da origen al conocimiento matemático. A este último se llega cuando se produce la cristalización de una idea en una regla de procedimiento o "esquema de uso" (Moreno, 2002b; 2002c) que le permite al estudiante usarla, por decisión personal, para proceder a explicar nuevos resultados, hacer inferencias y trabajar en propiedades o relaciones geométricas.

Este reto de la didáctica se puede lograr, según Noss y Hoyles (1996), mediante la construcción de escenarios en donde los estudiantes puedan coordinar sus ideas informales con ideas más formalizadas, escenarios denominados por ellos como *dominios de abstracción*. Un ejemplo de dichos dominios son los ambientes computacionales y en particular los programas que han surgido para trabajar geometría dinámica (Cabri Géométre; Geometre Stketch Pad; Cinderella; etc.). A partir de unos objetos geométricos iniciales y de la construcción de otros que se "comportan" de acuerdo a ciertas relaciones estructurales que dieron lugar a su construcción, estos programas proporcionan una fuente inagotable de experiencias visuales que exteriorizan las relaciones geométricas en juego posibilitando la construcción del sentido de las mismas y su uso en la formulación de conjeturas. Los dibujos se constituyen en el hábitat de propiedades generales que dan la posibilidad de generalización y posterior construcción de reglas de procedimiento (Moreno, s.f.).

Un medio como Cabri Géomètre brinda las posibilidades de exploración de relaciones geométricas. El *software* se convierte en un socio cognitivo que acompaña al estudiante en sus indagaciones sobre los objetos matemáticos, se convierte en un inspirador de ideas sobre cómo manipular las representaciones de los objetos geométricos en juego y contribuye a darles sentido. El conocimiento matemático se sitúa en el mundo Cabri y en él se sientan bases sólidas para comenzar el proceso de descontextualización de las ideas geométricas para generalizarlas en invariantes que se incorporan en la red conceptual (Moreno, s.f.); de esta manera se da lugar a la construcción de reglas de procedimiento con las cuales enfrentarse a la resolución de problemas.

Sin embargo, este proceso no se da únicamente por la presencia de la tecnología informática. El esfuerzo del profesor por orientar el trabajo cognitivo del estudiante hacia la exploración y posterior construcción de reglas de procedimiento es fundamental para garantizar el éxito del proceso. El diseño de una actividad que interese a los alumnos, que los impulse al trabajo colectivo, que los lleve a formular conjeturas y querer validarlas, acompañado de la formulación de preguntas oportunas que dirijan la atención a los aspectos relevantes de la situación, a la búsqueda de patrones de generalización y formalización y a la construcción de invariantes, están bajo su responsabilidad. En un ambiente de interacción social y sin tener la presión por abarcar demasiados contenidos en una sola clase, el docente cambia de función, convirtiéndose en un orientador de las exploraciones de los estudiantes e impulsador de la construcción de dichas reglas.

Diseño de la experiencia

Contexto de la experiencia: **La experiencia se realizó con un grupo de estudiantes de grado séptimo del colegio Distrital Benjamín Herrera (jornada de la mañana). Los estudiantes habían trabajado con el software Cabri Géomètre incorporado a la**

calculadora algebraica una hora a la semana, en la clase de geometría, alrededor de 3 meses. Inicialmente el trabajo se centró en el conocimiento del comportamiento de los objetos geométricos básicos del software como puntos, rectas y circunferencias. Posteriormente, dentro de la situación problema, se trabajaron algunas relaciones geométricas como la congruencia de ángulos, la relación "ser par lineal" y el paralelismo y perpendicularidad entre rectas. Finalmente, al momento de presentar la situación que se describe, estaban trabajando algunas relaciones entre las partes constitutivas de los triángulos.

Situación problema : **la situación se desarrolló alrededor de la siguiente propuesta de construcción:**

Construir un triángulo en el que se cumpla que el cuadrado de la medida de un lado sea igual a la suma de los cuadrados de las medidas de los otros dos lados.

Proponer este tipo de actividades sólo es factible si se cuenta con programas de geometría dinámica caracterizados por la posibilidad de "arrastre" de los objetos, aspecto que permite poner en evidencia la invarianza de las relaciones geométricas involucradas en las construcciones. Consideramos que para el grupo de estudiantes con los que se trabajó la actividad se constituyó en una situación problema pues los motivó a trabajar, les permitió partir de lo que sabían y los invitó a tomar decisiones frente a las estrategias a seguir. Aunque el trabajo con la calculadora ya era familiar para este grupo de alumnos, no así las relaciones geométricas presentes en un triángulo rectángulo. Por lo tanto, presuponíamos que tenían cierta información acerca de la relación pitagórica pero queríamos explorar si ya la habían incorporado como una regla de procedimiento.

Momentos de la intervención. En el diseño de la actividad se tienen en cuenta tres momentos que pretenden crear un ambiente de interacción que permita a los estudiantes partir de algunas hipótesis para enfrentarse a la tarea, socializarlas en un grupo pequeño y luego defender sus ideas ante el grupo en general. Inicialmente se sucede una etapa de exploración por parejas con intervenciones cortas del profesor para cuestionar aquello que los alumnos están haciendo o sugerir algún camino. A continuación los estudiantes pasan a exponer sus producciones siendo fundamental en este momento el *view screen*, o pantalla líquida, que al poder conectarse a cualquier calculadora permite presentar en pantalla grande el trabajo de cada grupo. En esta actividad de presentación es donde se da lugar la discusión pues cada grupo trata de defender sus construcciones o afirmaciones ante los demás. Finalmente, se realiza una institucionalización dirigida por el profesor en donde se destacan las conclusiones obtenidas y se avanza en la formalización al presentar en forma sistemática las relaciones estudiadas, la notación correspondiente y aquellos aspectos que el profesor desee destacar.

Evaluación. Para la evaluación del desempeño de los alumnos así como de la pertinencia de la tarea, dirigimos la atención hacia los procesos que los alumnos realizaron, más que hacia los productos del aprendizaje. En ese sentido daremos cuenta de por qué decimos que Cabri Géomètre se convierte en un dominio de abstracción que permite construir reglas de procedimiento, si el profesor aprovecha su potencialidad. Hemos establecido las siguientes categorías de análisis:

Procesos Cognitivos: Con la evaluación queremos dar cuenta de cómo el escenario propuesto favorece estrategias cognitivas de los estudiantes dirigiendo especial atención a (i) la posibilidad de partir de su conocimiento informal en el lenguaje natural e irlo adecuando para expresar sus ideas correctamente y comenzar a formalizar, (ii) el uso de la ejecutabilidad de las representaciones para construir conjeturas y hacer exploraciones en diversos contextos geométricos y (iii) las posibilidades que brinda el escenario para argumentar, construir invariantes y formular reglas de procedimiento. En síntesis, se trata de documentar los patrones de generalización y formalización que salen a la superficie en la actividad de solución del problema.

Procesos actitudinales: También queremos dar cuenta de cómo el dominio de abstracción que proporciona Cabri, al constituirse en fuente de generación de significados a partir del potencial visual que brinda, desarrolla una sensación de confianza en los alumnos que los motiva a hacer exploraciones más allá de las solicitadas, enrumbarse por caminos insospechados y querer comunicar los resultados de sus exploraciones al grupo. Queremos mostrar de qué manera el software se convierte en un socio cognitivo del estudiante y le permite mejorar sus relaciones con la matemática convirtiéndose en laboratorio experimental con el cual poner en juego conjeturas, experimentarlas y validarlas para construir después reglas de procedimiento.

Resultados

Más que dar cifras para mostrar el éxito del ejercicio lo que pretendemos es narrar algunas situaciones vividas con nuestros alumnos que ejemplifican el ambiente experimentado.

El primer acercamiento a la tarea consistió en interpretar lo que se pedía en el enunciado del problema, en términos de identificar qué tipo de triángulo debía construirse. Inicialmente algunas parejas de alumnos se aventuraron a conjeturar que la relación pedida se verificaba en los triángulos donde la suma de las medidas de los ángulos interiores fuera 180º. Dicha conjetura fue rebatida en la socialización casi de inmediato a su presentación, por un alumno que mostró, usando la herramienta del *arrastre*, que era factible tener triángulos en donde se verificaba la invarianza pero en los cuales no se tenía la relación pedida. (ver Figura 1).

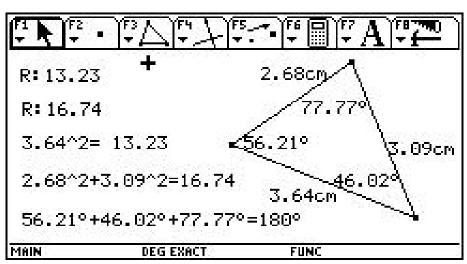

Figura 1

Al dirigir la atención sobre la suma de los ángulos interiores de un triángulo un alumno comentó que esto era siempre así porque al hacer variar los ángulos del triángulo *lo que se aumentaba en un ángulo se disminuía en el otro* (Mario). En respuesta a este comentario, otro estudiante manifestó que *la suma de los ángulos interiores de un triángulo es siempre 180°,* *eso no lo tenemos que medir* (Juan). Para este alumno, esta propiedad era ya una regla de procedimiento.

A continuación se generó un ambiente de exploración, nuevamente por parejas, que llevó a algunos alumnos a conjeturar que uno de los ángulos del triángulo debía ser recto, es decir, de 90º. Para verificar dicha conjetura, unos grupos se dedicaron a encontrar un triángulo rectángulo en el cual esto no sucediera. Como utilizaron la estrategia de alargar o acortar los lados, procurando mantener constante la medida del ángulo de 90°, generalizaron la propiedad a todos los triángulos rectángulos obtenidos a partir del alargue de los lados del ángulo recto en el original. Adicionalmente observaron que el lado más largo siempre era el lado opuesto al ángulo recto, generalizando otra propiedad de los triángulos rectángulos. Aprovechamos esta última generalización para introducir los nombres “oficiales” hipotenusa-cateto para hacer referencia a los lados de un triángulo rectángulo.

Como la búsqueda del contraejemplo fue infructuosa les sugerimos aprovechar el dinamismo del recurso computacional para validar la propiedad por un camino diferente al seguido, tratando de construir un triángulo rectángulo que soportara cualquier tipo de arrastre y en donde se verificara la propiedad. Esta pregunta generó dos estrategias de trabajo que condujeron por dos caminos de indagación diferentes, a la búsqueda de un mecanismo para asegurar que el triángulo siempre fuera rectángulo y estudiar la relación:

a) hacer uso de rectas perpendiculares:

El uso de esta estrategia condujo a los estudiantes a relacionar dos hechos geométricos que conocían desde primaria pero que no habían conectado: *como dos rectas perpendiculares forman ángulos rectos, entonces dos lados de un triángulo rectángulo están formados por segmentos perpendiculares.* Al estudiar esta conjetura, los estudiantes reconocieron los segmentos perpendiculares en cualquier posición del triángulo lo que los llevó a identificar que la perpendicularidad no dependía de la posición vertical u horizontal del ángulo (figura 2).

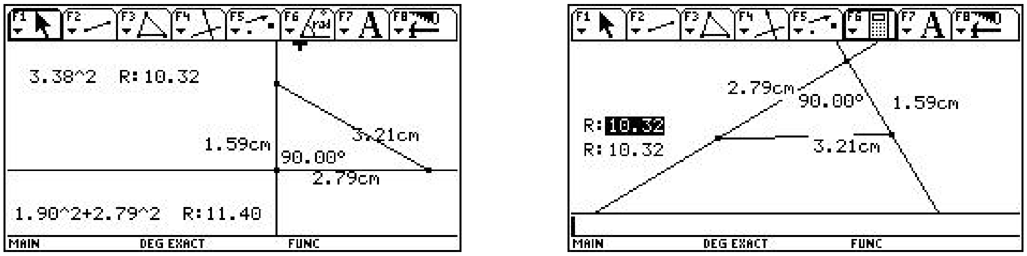

Figura 2

b) aprovechar las propiedades de los polígonos regulares:

Un estudiante recordó que en una clase anterior habían estudiado que los ángulos de un cuadrado eran rectos. Esto lo llevó a usar un cuadrado (figura 3), afirmando que *al hacer una diagonal, se forman dos triángulos como los que me piden* (Andrés).

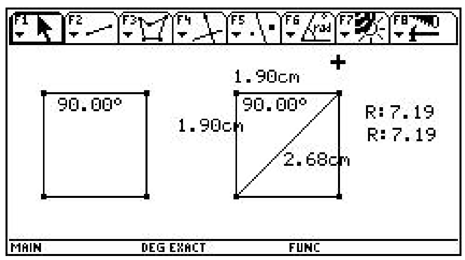

Figura 3

Como esta solución le pareció muy sencilla decidió explorar otros polígonos regulares en los que pudiese encontrar ángulos rectos. Encontró que en los polígonos regulares con un número par de lados siempre era posible encontrar un ángulo recto si tomaba como hipotenusa el diámetro de la circunferencia circunscrita (figura 4).

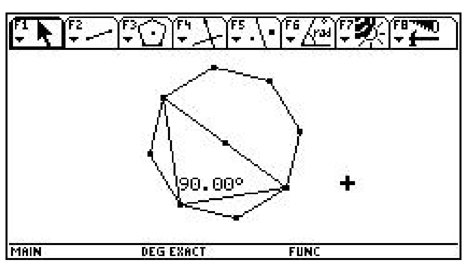

Figura 4

Le sugerimos estudiar cómo eran los triángulos semi - inscritos en circunferencias. De allí llegó a concluir que dichos triángulos siempre eran rectángulos porque *"era la mitad de la circunferencia que mide 360º"* (Andrés).

Una vez identificadas dos formas de construir triángulos rectángulos que soportaran la prueba del *"arrastre"* nos concentramos en la relación a estudiar y les explicamos a los estudiantes que este era un teorema conocido, llamado el Teorema de Pitágoras.

Algunas conclusiones consignadas por los estudiantes en sus cuadernos de trabajo al solicitarles explicar el Teorema de Pitágoras, reflejan la comprensión de la relación estudiada, y las reglas de procedimiento que generaron:

Se traza una recta y por cualquier parte una perpendicular. Sobre la perpendicular se traza una recta oblicua que llegue hasta la primera recta. Se mide el ángulo que forman las perpendiculares que es de 90º para probar que el triángulo es rectángulo y luego vemos que si sumo un lado elevado al cuadrado con el otro lado también elevado al cuadrado, este resultado es igual a la hipotenusa elevada al cuadrado (Camilo).

El Teorema de Pitágoras nos dice que la suma de los catetos al cuadrado nos da como resultado la hipotenusa al cuadrado, pero se tiene que tener un triángulo rectángulo (Diego).

No hay triángulos en donde la suma de los ángulos interiores sea distinto a 180º (Juan).

Gracias a un cuadrado podemos construir dos triángulos rectángulos que cumplen el Teorema de Pitágoras (Andrés).

Para construir un ángulo recto dentro de un polígono regular siempre tiene que pasar la hipotenusa por el centro del polígono (Andrés).

Conclusiones

El dominio de abstracción de Cabri generó la posibilidad de crear un contexto de exploración que permitió a los estudiantes vincular la noción informal de ángulo recto: *aquel que mide 90º* con la propiedad geométrica de la *perpendicularidad*. Decimos que el conocimiento del ángulo recto como de 90º es informal por que inicialmente para los alumnos justamente esa medida no era indicativo de ninguna propiedad geométrica en particular. En el dominio de abstracción los estudiantes vinculan dos hechos geométricos conocidos pero no necesariamente significativos.

La posibilidad de ejecutar las representaciones permite a los alumnos explorar los invariantes de las construcciones y hacer uso de las herramientas de verificación que proporciona el programa para validar sus conjeturas. El cálculo inmediato de las medidas de los ángulos, al tiempo que de la relación pitagórica lleva a los estudiantes a re -conocer propiedades importantes de los triángulos en general (como que la suma de las medidas de los ángulos es 180º) y de los triángulos rectángulos (el lado más largo es la hipotenusa; teorema de Pitágoras). Además, el aprovechar las propiedades geométricas que salen a relucir en los procesos de construcción, lleva a la formulación de inferencias que se convierten en el fundamento de las reglas de procedimiento, con las cuales se enfrentarán a futuras tareas. Sus reflexiones ascienden del nivel perceptual que se pondría probablemente en juego al hacer el ejercicio con lápiz y papel, hacia discusiones donde se explicitan propiedades geométricas.

La introducción del lenguaje formal de la geometría se hace poco a poco y sobre la necesidad de ponernos de acuerdo en la comunicación. Al comienzo los estudiantes utilizan el lenguaje natural para hablar de sus producciones, pero en el momento en que el profesor orienta el lenguaje y comienza a referirse al lenguaje especializado, este último se va contagiando y se comienza a usar con naturalidad, permitiendo a los niños reconocer la necesidad de usarlo para hablar con mayor precisión y claridad.

Del punto de vista de las nuevas metas acerca de la enseñanza de las matemáticas, esta experiencia permite adquirir confianza en la capacidad de hacer matemáticas, valorar el trabajo en grupo, la comunicación, etc. (NCTM, 1991) rescatando así la geometría, como un espacio de aprendizaje que contribuye al desarrollo cognitivo.

Referencias

Moreno L. (2002a). *Ideas Geométricas del Currículo presentadas mediante el Cabri Géomètre*. En MEN (2002) *Memorias del Seminario Nacional de Formación de Docentes en el uso de Nuevas Tecnologías en el aula del Matemáticas*. Serie Memorias.

Moreno L. (2002b) *Instrumentos matemáticos computacionales*. En MEN (2002) *Memorias del Seminario Nacional de Formación de Docentes en el uso de Nuevas Tecnologías en el aula del Matemáticas*. Serie Memorias.

Moreno L. (2002c) *Nueva matemática Experimental*. En MEN (2002) *Memorias del Seminario Nacional de Formación de Docentes en el uso de Nuevas Tecnologías en el aula del Matemáticas* . Serie Memorias.

Moreno L; Waldegg G (s.f.*) Fundamentación Cognitiva del Currículo de Matemáticas* . En RICO L (ed) *Didáctica de las Matemáticas* , Capítulo 3, Editorial Síntesis, Madrid.

Noss R ; Hoyles C (1996) *Windows on mathematical meaning, learning cultures and computer.* En MORENO L; WALDEGG G (s.f.*) Fundamentación cognitiva del currículo de Matemáticas* . En RICO (ed) *Didáctica de las Matemáticas,* Capítulo 3 del libro, Editorial Síntesis, Madrid.

NCTM (1991). Estándares curriculares y de Evaluación para la Educación Matemática. Editorial: Grupo Thales, Sociedad Andaluza de Educación Matemática, Madrid.

Exploración, construcción, argumentación y demostración en la solución de un problema [1]

Ernesto Acosta Gempeler

Escuela Colombiana de Ingeniería, Bogotá

Universidad Nacional de Colombia, Bogotá

Fabiola Rodríguez García

Instituto Pedagógico Nacional, Bogotá

Leonor Camargo Uribe

Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá **[2]**

Resumen . En este artículo mostramos cómo la interacción de un individuo con el programa de geometría dinámica Cabri al enfrentarse con la solución de un problema, permite el reconocimiento de relaciones implícitas en el enunciado que le ayudarán a construir la solución y a argumentar sobre su validez. Una vez más se ejemplifica la idea de que la geometría dinámica se constituye en un dominio de abstracción que permite al aprendiz utilizar la calculadora (o el computador), como socia cognitiva, facilitando su participación en la construcción del conocimiento.

Introducción

En diversos trabajos se ha presentado el potencial didáctico del software de geometría dinámica. Se muestran sus bondades en la construcción de ambientes de aprendizaje que favorecen actividades de exploración de propiedades y relaciones geométricas, seguidas de la verificación de las mismas, con el uso de mecanismos de control que vienen incorporados al programa. Sin desconocer estas actividades como esenciales en el aprendizaje escolar, algunos críticos han manifestado su preocupación por la pertinencia de éstas como actividades