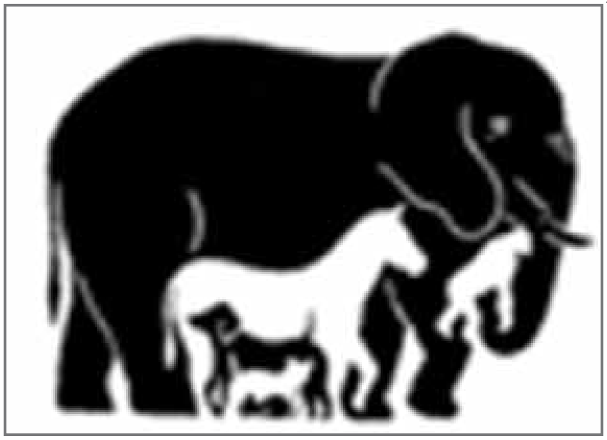
Revista EJES

Diversidad de situaciones para el estímulo del pensamiento matemático

Miguel Ernesto Villarraga Rico[1]

[2]



1. Introducción

Creer que los niños y niñas llegan a nuestra clase de matemáticas sin conocimientos previos es un error casi general de los docentes de matemáticas. Pues, es común observar a niños y niñas abordar actividades manipulativas o digitales sin haber sido preparados para su abordaje y, sin embargo, quedamos asombrados cuando ellos(as) encuentran soluciones inesperadas a los problemas, juegos, retos, y demás. La creencia de que los estudiantes de básica primaria y secundaria solo aprenden matemáticas en el aula de clase es otro error que conduce a prácticas pedagógicas limitadas y formales con visiones absolutistas de las matemáticas. Al contrario, el ser humano aprende en todo espacio y tiempo lo que le posibilita el aprendizaje de las matemáticas en diversos contextos.

En la gráfica la posibilidad de reconocimiento de un caballo se sucede porque tenemos construido el esquema del caballo, de no ser así, no sería posible reconocerlo.

2. Aprendiendo en contextos naturales (usando sus esquemas)

Los estudiantes emplean sus concepciones para abordar cualquier clase de situaciones o tareas, en consecuencia emplean sus "esquemas" mentales (Vergnaud, 1983; Marshall, 1995; Villarraga, 2002; Benavides, 2006) para abordar, ejecutar y resolver una situación problemática o un problema.

Asumiendo que un esquema mental es una forma de actuación (con contenido) invariante pero dinámica, empleada por un sujeto en la resolución de una clase particular de problemas (en sentido amplio) y que parte de su contenido son los conocimientos previos (redes conceptuales dinámicas); entonces los niños y niñas llegan a nuestras clases de matemáticas con un amplio repertorio de esquemas mentales. Además, el estudiante emplea sus esquemas en la resolución de todo tipo de situaciones y problemas de su vida cotidiana, de otras ciencias y de las mismas matemáticas. Los

[1] Profesor Tiempo Completo del programa Licenciatura en Matematicas Universidad del Tolima, Ibague miguelvillarraga@hotmail.com

[2] Imagen obtenida de: https://www.google.es/url?sa=i&rct=j&q=&esrc=s&source=images&cd=&cad=rja&docid=cfWN-YybSBQ5gM&tbnid=80gDZblSpJjs5M:&ved=0CAUQjRw&url=http%3A%2F%2Fsites.google.com%2Fsite%2Fgraficante1%2Filustraci%25C3%25B3ntridimensional1-04&ei=dSumUoyLB8fIkAeSr4HABQ&psig=AFQjCNF7haEvjEWQYvCr3VChZf3Cf1QTcw&ust=1386708111754135

niños, niñas y jóvenes en general construyen, evocan y usan sus esquemas mentales en cualquier momento y en cualquier sitio dentro y fuera del aula de clase; hacen uso libre del aprendizaje A como función de su espacio (e) y tiempo (t) particulares; simbólicamente Ai (ti, ei) para el estudiante i. Desde las situaciones o tareas, observadas a través de unas "gafas matemáticas" surgen problemas matemáticos y modelos matemáticos; alguno en particular puede ser asimilado, por parte del sujeto que aprende, a algún (os) de sus esquemas previos.

Si la asimilación no puede llevarse a cabo por algún motivo, entonces ha surgido un desequilibrio conceptual, lo que produce en el sujeto movilidad de otros esquemas y además que intente adaptar sus esquemas cognitivos a la nueva situación, logrando resolverla; llegando así a un nuevo estado de equilibrio, y es entonces cuando decimos que ha surgido un nuevo conocimiento en el sujeto (Piaget, 1967; 1973; Piaget y Beth, 1980; Vergnaud, 1990) porque ha ensanchado o modificado sus esquemas previos, siendo ahora aplicables a nuevas situaciones o a conjuntos más amplios de situaciones o problemas. Por consiguiente el ser humano está preparado para aprender en cualquier espacio y momento de su vida lo que, entre otras cosas, lo hace más humano (Savater, 1995); en particular está preparado para aprender matemáticas en cualquier momento y situación de su vida (Vigotski, 1978; Krutettskii, 1976; Vergnaud, 1998; Villarraga et. al. 2004; Villarraga et. al. 2007).

3. Aprendiendo matemáticas desde actividades y contextos diversos

El proceso de aprendizaje de las matemáticas puede fomentarse a partir de la construcción de una cultura del pensamiento matemático, en la cual los humanos estén inmersos en una vida de cultura matemática diseminada por el entorno y mantenida como una opción de visualizar los fenómenos de la vida cotidiana, de las otras ciencias y por supuesto de las mismas matemáticas, con "gafas matemáticas". Esto estimularía el desarrollo paulatino de una visión matemática permanente y continuada, constituyendo posiblemente niños y niñas, jóvenes de ambos sexos y hombres y mujeres con personalidades críticas y activas democráticamente (Skovsmose y Valero, 2012). Desde luego que esta visión de aprendizaje de las matemáticas tiene implícita una concepción del conocimiento matemático: el conocimiento matemático no es absoluto, es decir no viene dado por un conjunto de verdades en forma de proposiciones con sus respectivas pruebas, no es un conocimiento terminado; esto es, el conocimiento matemático es falible y corregible, y siempre puede someterse a revisión y corrección (Ernest, 1991); además el conocimiento matemático es una construcción hecha por seres humanos para humanos.

En consecuencia, resulta factible pensar que los seres humanos puedan aprender matemáticas a partir de los fenómenos que estén presentes en sus contextos (Castro y Villarraga, 2001), a través de identificación y búsqueda de regularidades y patrones mediante una abstracción progresiva.

Freudenthal (1983) ha considerado que "los conceptos, estructuras e ideas matemáticas sirven para organizar los fenómenos –fenómenos tanto del mundo real como de las matemáticas"; él considera que la fenomenología de una idea matemática hace referencia a describir el objeto de pensamiento (noumena: primero objetos mentales y después objeto matemático) en relación con los fenómenos para los cuales es el medio de organización, indicando cuáles son los fenómenos para cuya organización fue creado y a cuáles puede ser extendido, de qué manera actúa sobre esos fenómenos como medio de organización y de qué poder nos dota sobre esos fenómenos (Freudenthal, 1983; 2001). La fenomenología hace referencia a los fenómenos de los cuales se puede predicar el objeto matemático.

Algunos ejemplos dados por Freudenthal (1983, 2001) son los siguientes:

- Fenómeno número se organiza mediante el sistema decimal.
- Fenómeno de los contornos se organiza mediante las figuras geométricas.
- Fenómenos cerca, lejos, medio, en medio, etc., se organizan mediante longitud.
- Fenómenos de aplaudir tres veces, apartar las fichas con tres objetos, jugar a los dados y encontrar tres puntos, dominar la palabra tres se organizan mediante el concepto numérico“tres”.
- Fenómenos de dirigirse en línea recta hacia su objetivo, apartar las fichas con líneas rectas dibujadas, dominar la palabra recto se organizan mediante el concepto “recta”.

Para no intentar dar cuerpo a los conceptos pre-existentes, la Fenomenología didáctica (de Freudenthal) intenta empezar por los fenómenos que “solicitan ser organizados”, y desde ahí, enseñar al estudiante a manipular esos medios de organización. Por ejemplo: Para enseñar el concepto de “grupo”, en determinada edad, no se debería empezar por el concepto de “grupo” buscando los materiales y actividades que den cuerpo (hacer concreto) al concepto de “grupo”, sino que se deberían buscar primero fenómenos que pudieran compelir (estimular, impulsar, incitar, orientar) activa y comprensivamente al estudiante a constituir el “objeto mental” que está siendo matematizado y que llega al concepto de “grupo” (usar método inductivo de búsqueda de regularidades y patrones y no el método deductivo).

“Constituir objetos mentales” precede a la “adquisición de conceptos” y puede ser efectivo aunque no se llegue a la adquisición del concepto. Los objetos mentales (realizables o no geométrica o analíticamente) no dependen del concepto.

Para cada concepto o conjunto de conceptos se debería intentar establecer criterios a satisfacer para considerarlo constituido como objeto mental. Por ejemplo para la “longitud” tales condiciones podrían ser:

- Integrar y diferenciar mutuamente adjetivos que indiquen longitud, como “corto”, “largo”, etc.,
- Comparar longitudes mediante aplicaciones de congruencia y flexiones, medir longitudes mediante múltiplos y fracciones simples de una unidad de medida,
- Aplicar orden y aditividad a los resultados de medir, y
- Aplicar la transitividad de comparar longitudes. (Freudenthal, 1983). En la fenomenología didáctica, el material que sirve para la constitución de un particular objeto mental, tiene un valor duradero y definitivo, es decir el contexto hace parte de la construcción del concepto.

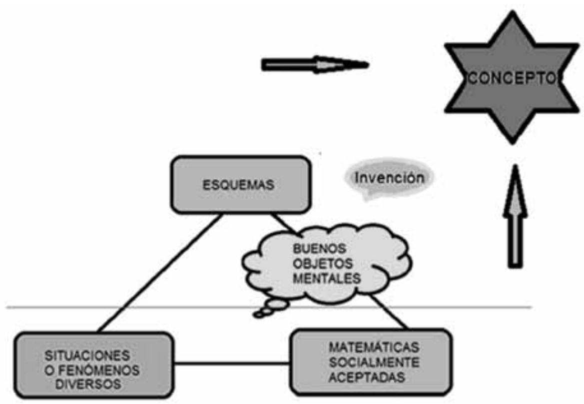


Figura 1. Contextos y aprendizaje de las matemáticas
Fuente: el autor

En la Figura 1 se ilustra el proceso por medio del cual el niño construye buenos objetos mentales. Entre el contexto y el concepto está la constitución de “buenos objetos mentales” (Freudenthal, 1983; Fernández, 2001). La formulación Kantiana de esquema trascendental hace referencia al objeto intermedio o representación mediadora entre lo sensorial (apariencia o fenómeno) y lo conceptual o mental (la categoría a-priori). (Ferrater, 1988); sin embargo sin tener en cuenta las categorías a priori kantianas, la psicología ha hecho uso de este concepto en los procesos de aprendizaje.

Psicólogos han adoptado parte de la formulación kantiana, especialmente la conexión entre concepto y percepto (interpretar información sensorial dándole un significado). Actualmente el esquema bosqueja una aplicación del conocimiento de la persona encontrado en la memoria para construir sentido de alguna experiencia o evento que tiene lugar en su mundo (no se admiten los esquemas innatos) (Marshall, 1995). En consonancia con la fenomenología de Freudenthal, en el esquema de la Figura 2 es donde se hallan los "objetos mentales" de proporcionalidad directa en este caso.

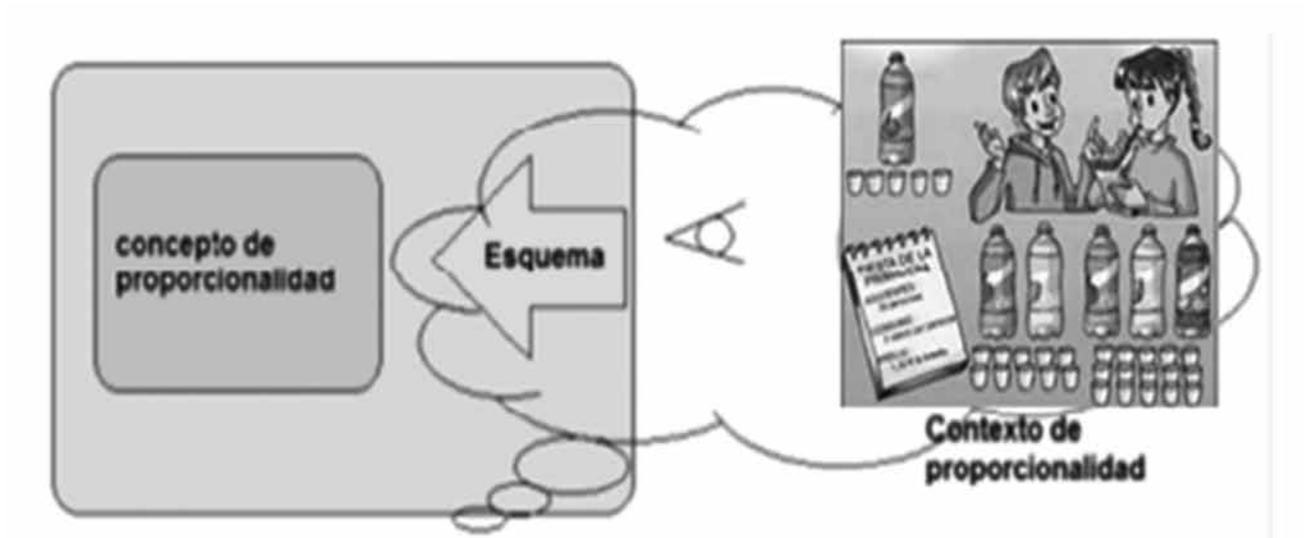


Figura 2. Contextos y aprendizaje de las matemáticas
Fuente: el autor

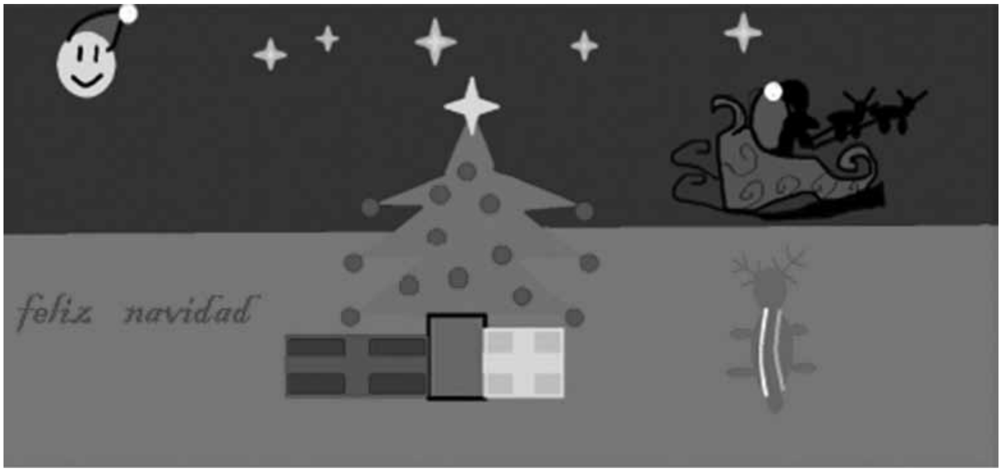
4. Fenómenos que esperan ansiosamente ser organizados matemáticamente

Puede decirse, entonces, que los fenómenos de la vida cotidiana, de las otras ciencias y de las matemáticas mismas están esperando ansiosamente a que algún ser humano se apiade de ellos y los mire con "gafas matemáticas" para que los identifique, los compare, los clasifique, les encuentre elementos invariantes (regularidades y patrones) y así les dé un significado conceptual mediante tres aspectos (Vergnaud, 1990):

- Conjunto de situaciones que dan sentido al concepto
- Conjunto de invariantes (propiedades y teoremas implícitos y/o explícitos)
- Conjunto de formas lingüísticas y no lingüísticas que permiten representar simbólicamente el concepto sus propiedades, las situaciones y procedimientos de tratamiento.

A continuación se ilustran lagunas situaciones en fotos y se relaciona un posible objeto con el cual se puede establecer relación, vía la conformación de objetos mentales matemáticos.

Biyección
Fuente: El Tiempo Digital Abril de 2013

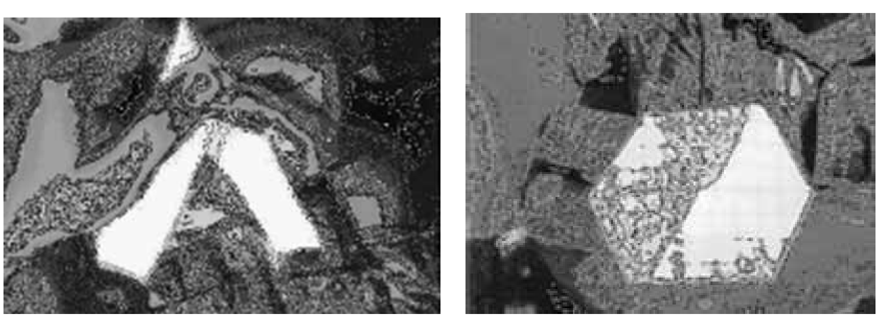


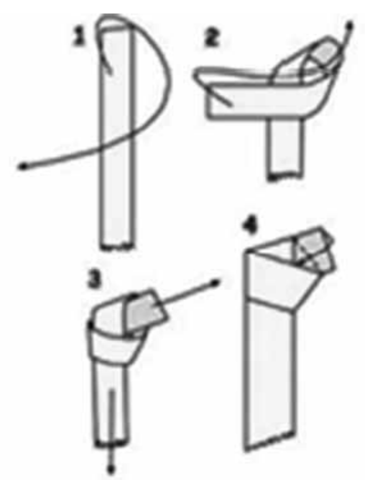
Conteo, Polígonos, Recta, etc.
Fuente: Diseño Paola Villarraga

Relación de Equivalencia
Fuente: Diseño Estefanía Villarraga

Ángulo, Fuerza
Fuente: Foto de Alejandra Patiño

Sistema Binario
Fuente: Foto de Addy Guzmán



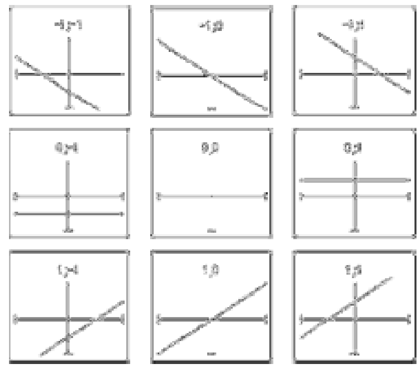


Polígonos Regulares
Fuente: Foto de Adrián Muñoz

a	b	Pendiente (y_2-y_1/x_2-x_1)	Punto de corte X	Punto de corte Y
-2	0	-2-0/1-0=-2	0	0
-1	0	-1-0/1-0=-1	0	0
-1/2	0	(-1/2-0)/1-0=-1/2	0	0
-1/4	0	(-1/4-0)/1-0=-1/4	0	0
1/4	0	1/4-0/1-0=1/4	0	0
1/2	0	1/2-0/1-0=1/2	0	0
1	0	1-0/1-0=1	0	0
2	0	2-0/1-0=2	0	0

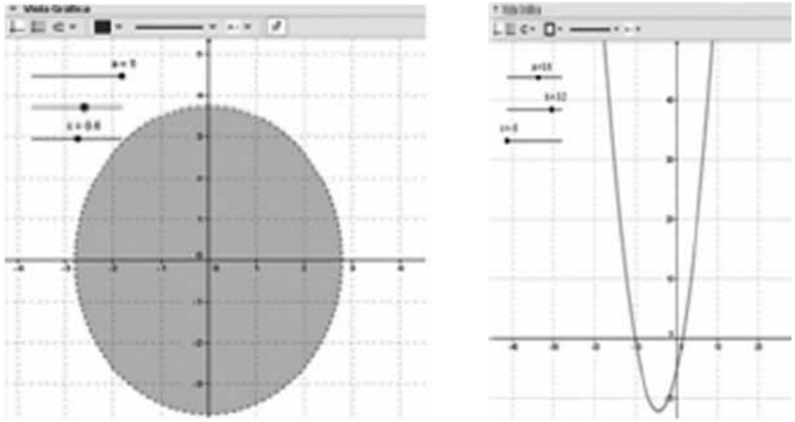
a	b	Pendiente (y_2-y_1/x_2-x_1)	Punto de corte X	Punto de corte Y
-2	-2	-2-0/1-0=-2	-1	-2
-1	-1	-1-0/1-0=-1	-1	-1
-1/2	-1/2	(-1/2-0)/1-0=-1/2	-1	-1/2
-1/4	-1/4	(-1/4-0)/1-0=-1/4	-1	-1/4
1/4	1/4	1/4-0/1-0=1/4	-1	1/4
1/2	1/2	1/2-0/1-0=1/2	-1	1/2
1	1	1-0/1-0=1	-1	1
2	2	2-0/1-0=2	-1	2

a	b	Pendiente (y_2-y_1/x_2-x_1)	Punto de corte X	Punto de corte Y
0	-2	0	No existe	-2
0	-1	0	No existe	-1
0	-1/2	0	No existe	-1/2
0	-1/4	0	No existe	-1/4
0	1/4	0	No existe	1/4
0	1/2	0	No existe	1/2
0	1	0	No existe	1
0	2	0	No existe	2



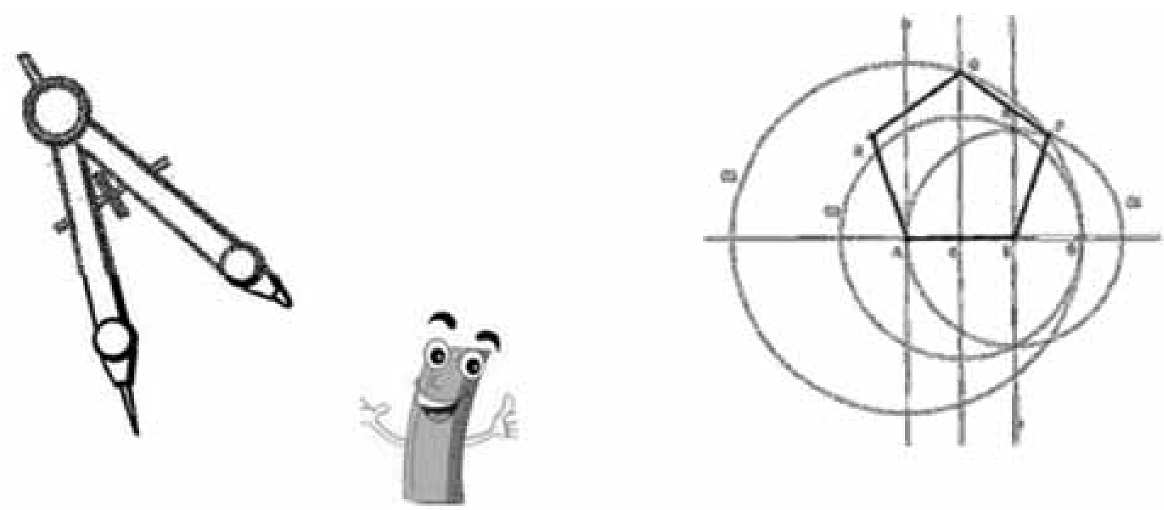
Función Lineal
Fuente: Foto de Alexis Iriarte

Áreas de superficies
Fuente: Foto de Alexis Iriarte

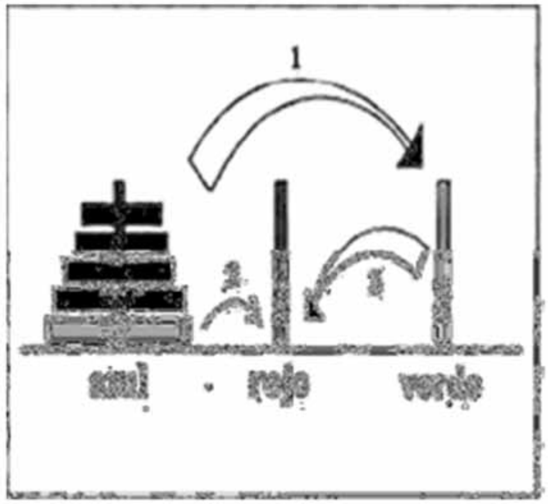


Círculo y Parábola
Fuente: Foto de Bonie Hernández

Permutaciones
Fuente: Foto de Michael Reina

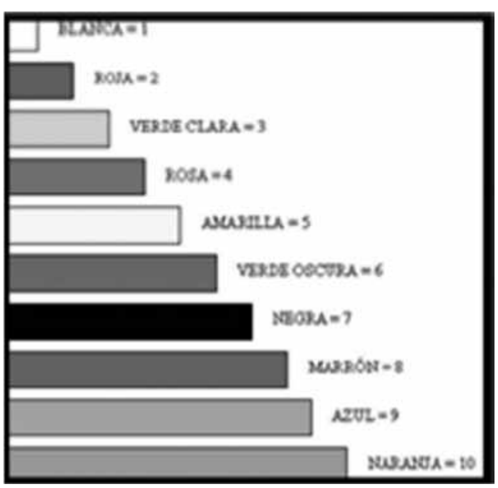


Polígonos con Regla y Compás
Fuente: Alejandra Patiño



Función
Fuente: Foto de Yuli Milena Rocha

Funciones Pares e Impares
Fuente: Foto Tahiry Rodríguez

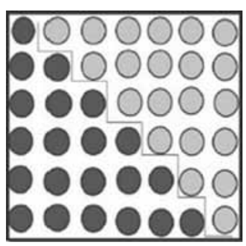


Número, Medida, Operaciones
Fuente: Foto de Rafael Reina

Recursividad y Auto-Semejanza. Fractales.
Fuente: Foto de David Andrés Benítez

```
To ARBOL: LONGITUD: ORDEN
If: ORDEN=0 Then [STOP]
ltd. 45
fe: LONGITUD
ARBOL :LONGITUD/2 :ORDEN-1
pu
bk :LONGITUD
rt 90
pd
fd :LONGITUD
ARBOR :LONGITUD/2 :ORDEN-1
pu
bk :LONGITUD
Lt 45
Pd
End
```

Variable, función, composición de funciones, recursividad, auto-semejanza con LOGO



$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{1}{2}n(n+1)$$

Fuente: Foto de Elizabeth Jiménez

Conclusiones temporales

• Ponerse las «gafas matemáticas» permite observar regularidades y patrones posibilitando la abstracción progresiva.
• El juego permite explorar regularidades y funciones matemáticas.
• Los fenómenos observados con «gafas matemáticas» permiten la construcción de conceptos matemáticos.
• El juego potencializa la construcción de objetos mentales matemáticos con el placer de la lúdica.
• Las matemáticas pueden ser reconocidas con toda su belleza desde las representaciones fractales de la naturaleza hasta las organizaciones demostrativas de los teoremas.
• La diversidad de actividades posibilita construcciones diversas de los objetos matemáticos
• La necesidad de la construcción de una cultura matemática es un imperativo regional y nacional, con el objeto de constituir hombres y mujeres críticos y demócratas además de matemáticamente habilitados.

Referencias

Castro, E. y Villarraga, M. (2001). Resolución de problemas matemáticos y detección de la diversidad en una unidad conceptual. En J. Cardeñoso, A. Moreno, J. Navas y F. Ruiz. *Investigación en el aula de matemáticas. Atención a la diversidad*. Granada: Universidad de Granada SAEM THALES.

Ernest, P. (1991). *The Philosophy of Mathematics Education.* Bristol: The Falmer Press.

Freudenthal, H. (1978). *Weedeng and Sowing: A preface to a Science of Mathematical Education*. Dordrecht: D. Rediel.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Dordrecht: D. Rediel.

Freudenthal, H. (2001). *Fenomenología Didáctica de las Estructuras Matemáticas*. Textos Seleccionados. Traducción, notas e introducción de Luis Puig. México: Departamento de Matemática Educativa Cinvestav I. P. N.

Krutetskii, V. A. (1976). *The psychology of mathematical abilities in school children*. Chicago: University of Chicago Press.

Piaget, J. (1967). *La Psychologie de L´Intelligence*. Paris: Librairie Armand Colin. [Versión en castellano de Foix, J. C. (1999) *La psicología de la inteligencia*. Barcelona: Crítica].

Piaget, J. (1973). *Epistemología Genética*. Barcelona: Ariel.

Piaget, J. y Beth, E. (1980). *Epistemología matemática y psicología.* Barcelona: Crítica.

Piaget, J., Grize, J., Szeminska, A. & Bang, B. (1968). *Épistémologie et psychologie de la function*. Paris: Presses Universitaires de France.

Savater, F. (1997). *El valor de educar*. Ariel: Barcelona

Skovsmose, O. y Valero, P. (Compiladores) (2012). Educación Matemática crítica. Una visión sociopolítica del aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas.

Vergnaud, G. (1990a). La théorie des Champs Conceptuales. *Recherche en Didactique de Mathématiques, 10, (2-3)*, 133-170.

Vergnaud, G. (1998). A Comprehensive Theory of representation for mathematics education. *Journal of Mathematical Behavior, 17* (2), 167-181.

Vergnaud, G. (1990). Teoría de los campos conceptuales. *Recherches en didactique desmatématiques 10(2,3*), 133-170.

Vigotsky, L. (1978). *Mind in society: the development of higer psychological processes*. Cambridge, MA: Harvard University Press.

Villarraga, M., Castro, E. y Benavides, M. (2007). Tipologías de sujetos con talento en resolución de problemas de proporcionalidad simple. En: E. Castro y J. Lupiañez (Eds.) *Investigaciones en Educación Matemática: Pensamiento Numérico. Libro homenaje a Jorge Cáceres Solórzano,* (pp. 259-281). Granada: Universidad de Granada.

Villarraga, M., Maz, A. y Torralbo, M. (2004). La educación de niños con talento en Colombia. En: M. Benavides, A. Maz, E. Castro, y R. Blanco, R. (Eds.). *La Educación de niños con talento en Iberoamérica,* (pp. 93-103). Santiago, Chile: OREAL-Unesco.