ARTÍCULOS DE INVESTIGACIÓN

Incógnitas con valores cambiantes y múltiples referentes en el álgebra de alumnos.

Fecha de recepción: Diciembre, 1997

Educación Matemática
Vol. 12 No. 3 diciembre 2000
pp.30-40

Mollie MacGregor y Kaye Stacey
Universidad de Melbourne
m.macgregor@edfac.unimelb.edu.au

Resumen: *La interpretación de "la incógnita" con múltiples referentes o valores cambiantes es evidente en el pensamiento de una muestra de alumnos australianos. Los significados imprecisos y variables de la incógnita afectaron sus razonamientos cuando estaban resolviendo problemas. Durante las entrevistas con alumnos pudimos identificar tres maneras de usar las variables: para referirse a diferentes cantidades en una ecuación; para referirse a diferentes cantidades en diversas etapas de un proceso de solución, y a manera de etiqueta general para una cantidad desconocida o combinación de incógnitas.*

Abstract: *An interpretation of «the unknown» as having multiple referents or shifting values is evident in the thinking of a sample of Australian students.*
Imprecise and varying meanings for the unknown affected their reasoning as they worked on problems. In interviews with students we identified three modes of use of variables: to refer to different quantities in the one equation; to refer to different quantities at different stages of a solution; and as a general label for any unknown quantity or combination of unknown.

Cuando los alumnos comienzan a estudiar álgebra formal, se les enseña a usar letras para representar incógnitas específicas o conjuntos de posibles valores de las variables. Hay alumnos que aprenden rápida y fácilmente y tienen éxito con el álgebra escolar, mientras que otros se sienten perdidos. A lo largo de seis años, 1991-6, investigamos la comprensión de los chicos respecto a los fundamentos de la notación algebraica y al uso de métodos algebraicos para resolver problemas. En el presente artículo, mostramos que las dificultades de resolución por medio del álgebra radican tal vez en que no se asigna a la letra una incógnita específica sino múltiples referentes o valores cambiantes.

Obtuvimos los datos a partir de pruebas de lápiz y papel que se aplicaron a una muestra grande representativa de 2000 alumnos entre el 7° y 10° año escolar (11-15 años de edad) en 24 secundarias australianas. También entrevistamos a alumnos que estaban trabajando sobre temas escogidos y grabamos las discusiones para discutirlas más adelante. Lo que los alumnos respondieron en los temas de la prueba –combinado con explicaciones vertidas en las entrevistas- nos permitieron vislumbrar el pensamiento de los alumnos y la causa de sus dificultades.

Interpretación de las letras algebraicas por parte de los alumnos.

En escuelas autralianas, los chicos se inician en álgebra en el séptimo y octavo grados escolares, a los 11-13 años de edad. El primer año se les enseña a usar letras para representar números desconocidos o generalizados, con frecuencia para escribir fórmulas que describen relaciones funcionales siguiendo un patrón numérico o geométrico. Se les brinda la oportunidad de aprender a escribir expresiones sencillas y ecuaciones con letras, números, signos de operaciones y paréntesis. La literatura describe dos comportamientos observados frecuentemente, tanto en Australia como en otros lugares:

- La letra es percibida como una palabra abreviada (i.e., 3c podría representar "tres gatos").
- Se ignora la letra o se le asigna un valor numérico que sería razonable en el contexto.

En nuestra investigación (MacGregor y Stacey, 1996,1997) hemos encontrado tres interpretaciones equivocadas más:

- Se le asigna a la letra un valor numérico relacionado con su posición en el alfabeto.
- La letra tiene el valor de 1 a menos que se especifique otro.
- La misma letra se usa para representar diferentes cantidades en una expresión o ecuación.

Las cinco interpretaciones equivocadas se encontraron en respuestas a temas que requerían de los alumnos que escribieran expresiones sencillas. Por ejemplo, se le preguntó a los alumnos cómo escribirían la estatura de David, siendo que David es 10 cm más alto que Con y Con mide h. cm. Las respuestas más comunes que reflejan las interpretaciones arriba mencionadas fueron:

- hD (como "estatura* de David")
- 110 cm (10 cm más alto que 100 cm)
- r cm o 18 (h es la 8ª letra del alfabeto, $8 + 10 = 18$, y la 18ª letra del alfabeto es la r)
- 11 ($h = 1$, por lo tanto $10 + h = 10 + 1$)
- $h = h + 10$ (h puede representar dos cantidades diferentes)

Para nuestra sorpresa, algunos alumnos que habían estado aprendiendo álgebra durante dos o más años usaron letras algebraicas de estas maneras, en determinados contextos. El uso de letras como palabras abreviadas (i.e. hD representando "estatura de

* Estatura en inglés se escribe height [nota del T.]

David") fue particularmente recurrente. Tal interpretación errónea es continuamente reforzada en matemáticas y física, donde se refieren a los conceptos cuantitativos mediante la letra inicial de sus nombres (i.e, *A* significa área, *m* representa masa, *t* se refiere a tiempo, etc.) Desafortunadamente, algunos libros de texto de matemáticas y profesores usan letras de manera inconsistente e incorrecta, como lo ilustra el siguiente ejemplo de solución a un problema de área:

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}[b \times h] \\ &= \frac{1}{2} \times 4 \times 7 \\ A &= 14cm^2 \end{aligned}$$

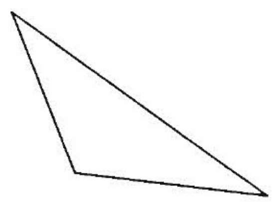
En primer lugar, las letras A, b y h denotan números no especificados de variables en la fórmula. En la última línea, se introduce la unidad de medida de suerte que A ya no es un número. Ahora la A parece denotar "área", y la afirmación A = 14 cm^2 se lee como «El área es 14 centímetros cuadrados». Dado que los alumnos son testigos del uso inconsistente de las letras, no es de sorprender que crean que aquéllas tienen significados ambivalentes, dependiendo del contexto en el que se interpretan.

Usando el álgebra para resolver problemas

Al investigar la forma en que los alumnos usan las letras, introdujimos preguntas de examen en que el alumno tenía que escribir expresiones algebraicas simples para representar información dada, como escribir la estatura de David como (h + 10) cm. Según los alumnos, la única razón para usar álgebra en sus respuestas era la de aprobar el examen. Como parte del subsecuente programa de investigación, quisimos observar si los alumnos usarían más las letras como incógnitas de modo convencional, en caso de asignarles tareas en las que el uso de la notación algebraica tuviese un propósito claro. Los alumnos aprenden que un propósito importante del álgebra es resolver problemas y se les enseña a usarla para resolver cierto tipo de problemas de enunciado. Esperábamos que en un contexto familiar de solución de problemas, los chicos que intentasen recurrir a un método algebraico usarían letras para representar incógnitas. Era generalmente el caso. Sin embargo, como se muestra en este artículo, algunos estudiantes usaron *x* para representar "algo desconocido" y admitían que podía haber múltiples referentes o una serie de referentes para la *x*, a medida que resolvían el problema. Habíamos encontrado algunas indicaciones de esta interpretación –una letra que representa diferentes cantidades- en nuestro trabajo anterior (arriba mencionado). Fujii (1993) observó esto en una muestra de estudiantes japoneses, y sugirió que ello representa su comprensión emergente de lo que es la naturaleza no específica de las variables: *x* puede ser cualquier número. En el estudio de Fujii, los alumnos admitían que si $x + x + x = 12$, entonces la primera *x* podía ser *2* y las otras *x* podrían ser *5*. La literatura hace poca mención de esta creencia en referentes múltiples, a pesar de que el equívoco relacionado a ella (dos letras diferentes no pueden tener el mismo valor) está ampliamente reconocida.

Tres de los problemas que usamos se muestran en la figura 1. Para elaborar los problemas utilizamos el conjunto más sencillo de posibles relaciones (Ver Bednarz y Janvier, 1966, para variantes y su complejidad).

1. El perímetro de este triángulo es 44 cm. Escribe una ecuación algebraica y despeja la x.



2. Mark y Jan se reparten un dinero de manera que a Mark le toquen \$5 más que Jan. Jan obtiene \$$x$. Usa el álgebra para escribir la cantidad de Mark __________. Si el dinero repartido son \$47, ¿cuánto le tocaría a Jan? ¿Cuánto a Mark?

3. Unos estudiantes hicieron un paseo en autobús. La distancia que recorrieron en el segundo día fue 85 km mayor que en el primer día. La distancia recorrida el tercer día fue 125 km mayor que el primer día. La distancia total fue de 1410 km. Sea x la cantidad de kilómetros recorridos el primer día. Usa el álgebra para indicar la distancia que se recorrió cada día.

Figura 1. Tres problemas llamados TRIÁNGULO, MARK Y AUTOBUS en el presente artículo.

Janvier (1996, p. 235) ha señalado que hay al menos tres formas de interpretar las letras en el álgebra escolar –como iniciales en identidades, como incógnitas específicas en problemas y como variables en funciones- dando lugar a diferentes patrones de razonamiento. En el problema de la figura 1, sólo una de estas interpretaciones es requerida –la letra que está en lugar de una incógnita específica-. Aunque estos problemas no son buenos ejemplos para ilustrar la utilidad del álgebra, son representativos de los tipos de problemas que se aplican a quienes se inician en el álgebra. Dado que las ecuaciones asociadas tienen la incógnita de un solo lado resultan fáciles de resolver.

Interpretaciones de x en problemas

Ningún estudiante le asignó un valor arbitrario a x ni hizo una interpretación alfabética, como lo hicieron algunos estudiantes cuando se les pidió que usaran una expresión. Como lo habíamos supuesto, interpretaron la x como incógnita del problema que debían resolver.

En TRIANGULO, donde la x aparece dos veces, algunos estudiantes parecen haber ignorado la letra en $2x$ y asumieron que el ancho de ese lado eran 2 cm. Sin embargo, durante las entrevistas descubrimos otra explicación para interpretar $2x$ cm como 2 cm (Ver la entrevista con Justin, más adelante).

En MARK, algunos estudiantes reemplazaron x por J (dado que x es la cantidad de Jan) y escribieron M = J + 5 para representar la cantidad de Mark. Esto no es un error si el alumno se da cuenta de que las letras J y M representan números, y que podrían haberse usado otras letras por igual. Como ilustra la figura 2, hubo varios tipos de respuesta que revelan una comprensión muy equivocada de lo que es x. Ejemplo (iii) tiene su paralelo en una ecuación que varios estudiantes escribieron en el problema del AUTOBUS. Escribieron x + 85 + 125 = 1410, donde parece que la x representa tres cantidades idénticas, pero desconocidas.

(i) $x = J + 5$ [x representa ahora la cantidad de Mark en lugar de o al igual que la cantidad de Jan]

(ii) $x = x + 5$ [x representa ambas: la cantidad de Jan y la de Mark]

(iii) $x + 5 = 47$ [x es la cantidad total, desconocida]

(iv) $M = \frac{x}{5} + 5$ [x es la cantidad que se compartirá por igual]

Figura 2. Interpretaciones que los alumnos hacen de x en su intento de representar la cantidad de Mark, en el problema MARK.

La tabla 1 muestra el porcentaje de alumnos que escribieron una ecuación correcta (la hayan usado subsecuentemente o no) y el de aquellos que obtuvieron una respuesta correcta en el problema, con cualquier método. Los métodos incluyeron: el ensayo y error, razonamiento lógico aritmético y resolver una ecuación algebraica. Muchos estudiantes que comenzaron con álgebra cambiaron a otro método para obtener la respuesta.

Tabla 1. Porcentajes de ecuación correcta y respuesta correcta, cualquier método.

		1. Triángulo	2. Mark	3. Autobús
Grado	**N**	**Respuesta de la ecuación**	**Repuesta de la ecuación**	**Respuesta de la ecuación**
9°	249		15% 76%	24% 70%
10°	700	38% 63%	30% 73%	32% 60%

Nota. La muestra del 9° grado, usó una versión de la prueba que no incluyó TRIANGULO.

Como muestra la tabla 1, aproximadamente un tercio de los alumnos del 10° año pudieron escribir ecuaciones correctas en todos los problemas. Sin embargo, muchos no las usaron para obtener sus respuestas; otros aún escribieron las ecuaciones después de obtener la respuesta. La obtuvieron por diversos métodos –a menudo no algebraicos- 60% o más obtuvieron una respuesta correcta, en ambos grados.

En dos escuelas se había enseñado a los alumnos la rutina algebraica para resolver problemas: escoger y nombrar una incógnita, generar una expresión y formular una ecuación. Casi todos los alumnos pudieron escribir soluciones algebraicas concisas y correctas. En otra escuela, los profesores querían saber si el girar instrucciones específicas para formular ecuaciones resultaría útil. Un grupo recibió demostraciones de pizarrón y practicaron con 12 problemas, antes de responder la prueba. Sus resultados tanto para escribir ecuaciones como para resolver problemas fueron mucho mejores que los de un grupo paralelo que siguió el programa normal. El puntaje de éxito para AUTOBUS, por ejemplo, fue de 78% y 27% para cada grupo, respectivamente. El resultado sugiere que con adecuada enseñanza y suficiente práctica, la mayoría de los alumnos podrían aprender métodos algebraicos para resolver problemas.

El uso de letras en la resolución de problemas, por parte de los estudiantes.

Gran cantidad de alumnos no escribieron ecuaciones y resolvieron los problemas por métodos no algebraicos. Otros trataron de escribir ecuaciones pero luego cambiaron a un método no algebraico y elaboraron su respuesta. Claramente, algunos alumnos que iniciaron la vía algebraica acabaron dudando de qué cantidad o cantidades debían tomarse como incógnitas. Otros escogieron una incógnita y la simbolizaron durante la resolución. Tras perder confianza en las cantidades a las que se estaban refiriendo, algunos estudiantes abandonaron el álgebra y volvieron a la seguridad de la solución aritmética. A continuación presentamos extractos de entrevistas con estudiantes (14-15 años) para mostrar cómo el diferente uso que le dieron a las letras para simbolizar "la incógnita" afectaron sus intentos de usar un método algebraico. Los diferentes usos fueron:

- x puede referirse a diferentes cantidades en una ecuación.
- x se refiere a diferentes cantidades en distintas etapas de la resolución.
- x es una etiqueta general para cualquier cantidad desconocida o combinación de ellas.

1. Marianne, en su intento de encontrarle sentido a TRIANGULO, ve la x como una etiqueta para dos diferentes cantidades. Escribe la ecuación correcta $2x + x + 14 = 44$, pero dice que no la puede resolver a menos que sepa el valor de x para calcular 2x. Si supiera el valor de x, podría dar con el valor de "la otra x". Ella ve dos incógnitas en su ecuación, ambas llamadas x (ver 4° renglón) y sabe que una ecuación con dos incógnitas no puede ser resuelta.

1	M: No puedes resolver eso a menos que sepas qué es x. Si
2	supiera lo que es la x aquí [señala el lado etiquetado como 2x], podría.
3	No hay manera de resolver a partir de estas dos cosas [indica 2x y 14]. Lo
4	que tratamos de hacer es descubrir lo que significan estas x's, y no podre-
5	mos resolverlo a menos que sepamos lo que x [señala 2x]
6	significa.

2. Justin ve como único objetivo de la tarea encontrar el largo del lado etiquetado como x. Al igual que Marianne, no parece pensar que el valor que encuentre para x será el mismo de 2x. Supone que el lado etiquetado como 2x mide 2 cm de largo. Así que el valor de x es $44 - (14 + 2)$, que es 28 (esta respuesta fue bastante común en la muestra principal). El entrevistador empieza por preguntarle a Justin cómo obtuvo $x = 28$.

1	J: [señalando los lados etiquetados como 14 y 2x] Eso es 16 obviamente.
2	I: ¿Por qué? ¿ Viste la x ahí? [Señala 2x]
4	J: Si, la noté, pero pensé no, es obvio que necesitas saber qué es
5	la x [señala la x sola]
6	I: ¿Puedes escribir la ecuación?
7	J: Sí [escribe 2_x + x + 14 = 44]

El entrevistador le pide a Justin que resuelva su ecuación. Dice que no puede y vuelve a mirar su diagrama, expresando su inquietud por no conocer el valor de x en 2x (líneas 8 y 9). Intenta resolver el dilema diciendo que x debe de valer 1 (error arriba mencionado), pero rechaza la idea más adelante (línea 13) porque ve que el triángulo no puede tener lados 1 cm, 2 cm y 14 cm porque 1 + 2 + 14 da 17 y no 44.

8	J: Eso es lo que no entiendo, tienes 2 por x y no sabes
9	cuánto vale x, conoces el 14, así que al ver que [señala lado x] eso sólo
10	es x, sería 1. Y eso es 2 por 1 [señala lado 2x] así que sigue siendo 2
11	I: ¿Por qué x es igual a 1?
12	J: Porque ahí no hay un número ahí [a la izquierda de la x], entonces x
13	es 1 nada más... pero no es correcto.

3. Dean piensa que x significa el total de las incógnitas. En TRIANGULO, trabaja con la x con valor de 10 pero escribe su solución como x = 30. Entonces dice que está mal y escribe x = 10 x 3 como la solución definitiva. Entonces explica que "Es Tres cantidades 10". Parece pensar que la x debería representar todo lo que no se da explícitamente en los datos, aunque ya sabe que el lado etiquetado como x cm tiene 10 cm de largo y el lado etiquetado como 2x cm mide 20 cm de largo.

4. Joel tiene en mente referentes de x múltiples y cambiantes en el problema de MARK. Escribe correctamente la expresión x + 5 para la cantidad de Mark. Entonces escribe x + 5 = 47 y el entrevistador lo cuestiona:

1	I: ¿Qué dice?
2	J: De inicio tienes un número al que agregas 5 y obtienes 47.
3	I: Esto [señalando el 47] es la cantidad total, esto [señala el 5] son los
4	5 extra, entonces ¿qué será la x? [Señala la x en la ecuación x+5 = 47]
5	J: La cantidad que ambos obtienen. La cantidad que obtiene Jan. Sólo me quiero quedar con 6 de los tres, 47 dólares, x , y 5 dólares más,
7	y hacer algo con esto.

Aunque Joel escribió la expresión correcta del dinero de Mark en términos de x, después ve la x como "la cantidad que obtienen ambos" (línea 5). También la ve como la cantidad de Jan (línea 5). Cuando se le pide explicar su ecuación, no la relaciona con la situación del problema sino que interpreta lo que escribió como una narrativa de números -una secuencia de eventos- (línea 2). Dice que sólo necesita una x en su ecuación (líneas 6, 7). Su ecuación establece una relación entre los números 5 y 47 dados en el problema, y una cantidad desconocida. Sin embargo, lo escribe para el entrevistador pues Joel no le ve utilidad en la solución del problema. Cuando lo resuelve y obtiene x = 42, afirma que la cantidad de Jan es \$42. Perdió el hilo del problema, que inicialmente tuvo. Su primer abordaje espontáneo del problema (interrumpido por el entrevistador, que le pidió una ecuación) fue dividir 47 entre 2. Su razonamiento fluctúa entre tomar x como la cantidad que se compartirá por igual (\$42) y x como el valor final de cada parte (\$21 y \$26).

5. Les también usa la x para referirse a diferentes cantidades en MARK. Usa la notación matemática informalmente para seguir el hilo de su pensamiento. Su primera ecuación para el inciso 2 tiene una x, esto es lo primero que desea trabajar ("lo que queda", líneas 1 y 7 abajo), pero luego habla de "compartir" 2 x's (línea 3). Les sabe cómo trabajar la solución, manteniendo contacto con la situación, pero no sabe cómo escribir su procedimiento. Finalmente escribe una descripción de los pasos que sigue su cálculo, tratando de que parezca álgebra (línea 11). Para empezar, Les escribe la ecuación 5 + x = 47 y explica lo que significa:

1 L: x es lo que queda de \$47 si le quitas 5.

2 I: ¿Qué puede ser la x?

3 L: Pongamos que ella obtiene \$22 y él \$27. Comparten dos x's.

4 I: ¿Qué son las dos x's?

5 L: Incógnitas... son dos números diferentes: 22 y 27

6 I: ¿Entonces qué es x? [señala la ecuación 5 + x = 47]

7 L: Pensé que era lo que quedaba de \$47, así que es \$42.

El entrevistador señala que tiene tres significados de x, lo que hace difícil resolver la ecuación. Les decide usar x y y para las cantidades de Jan y de Mark, respectivamente. Escribe x + 5 + y = 47, y explica lo que va a hacer:

8 L: El tiene 5 más que ella, así que le quitas 5. ¿Sustraerías 47

9 de 5 más x más y?

Parece que quiere sustraer 47 de ambos lados de su nueva ecuación, recordando un método que le enseñaron. El entrevistador quiere ver cómo hará esto (línea 10), pero vuelve al pensamiento aritmético (líneas 11 y 12).

10 I: Bueno, inténtalo

11 L: [escribe 47 - 5 + x + y] Ya no estorba el 5, así que

12 lo divides a la mitad. Si quitas el 5, sólo tienes dos

13 incógnitas, 21 y 26

El razonamiento de Les es sensato, pero no logra expresarlo claramente ni escribir el procedimiento de la solución. Al igual que Joel, tomó la x como 42, 21 y 26, esto es, por cualquier cantidad desconocida y requerida para trabajar.

6. Tim escribe x + 5 para la cantidad de Mark, pero la extiende a x + 5 = x, aduciendo que la x después del signo = es "la x de Jan". El entrevistador lo cuestiona acerca del significado de la otra x.

1	I: ¿Entonces qué es esta x? [señala la primera x en x + 5 = x]
2	T: ¿Es la x de Mark
3	I: ¿Y por qué le agregamos 5?
4	T: ¿Porque Mark tiene 5 dólares más que Jan. No, no es cierto, debe
5	ser la x de Jan más 5 que es igual a la x de Mark.
6	I: ¿Puedes escribir una ecuación que indique que Mark y Jan tienen $47 en total?

El entrevistador explica que para escribir una ecuación no necesitas tener una respuesta numérica primero. Ahora Tim piensa que debe escribir lo que haría para trabajar la solución (línea 7).

7	T. x dividida a la mitad es igual a x [escribe $x \div \frac{1}{2} = x$]

Aquí Tim escribe x para decir "alguna cantidad total de dinero", y otra vez x para decir "la mitad del dinero". Para él, $x \div \frac{1}{2} = x$ tiene sentido porque sabe, al menos momentáneamente, qué es cada x y él interpreta: $x \div \frac{1}{2}$ como "mitad de x". Primero desea dividir los $47 por igual

8	I: Entonces divides el dinero a la mitad. ¿Eso quieres decir?
9	T: Sí

Durante la entrevista, usó x para referirse a la "cantidad de Jan" (línea 5), "el total" (línea 7) y "la mitad del total" (línea 7). Aunque reconoce que Jan tiene $x y entonces Mark tiene $ (x + 5), no está seguro si x en (x + 5) es "la x de Jan" o "la de Mark". Dado que (x + 5) representa el dinero de Mark, lo primero que piensa -no carente de razón- es que la x ahí es "la de Mark" (línea 2). Más adelante usa la x para referirse a toda cantidad desconocida.

Las entrevistas aquí reportadas indican tres diferentes maneras de usar las letras para simbolizar "la incógnita" (o, como hemos visto, "las incógnitas". Algunos estudiantes pensaron que x puede representar más de una incógnita (incluyendo el total de incógnitas) simultáneamente. Algunos cambiaron su referente en distintas etapas del proceso, y algunos tomaron la incógnita como toda o cualquier cantidad que desconocieran del problema.

Modalidad 1. Las entrevistas con Mariana y Justin ilustran la primera modalidad. Estos estudiantes usaron la x para referirse a dos cantidades diferentes en una misma ecuación. Ambos explicaron por qué no pudieron resolver el inciso 1: Tomaron las dos x's -la del diagrama y la de la ecuación, que ambos escribieron correctamente- como cantidades distintas. Parece que Justin creyó que el problema solamente preguntaba sobre el lado etiquetado justamente como x.

Modalidad 2. La entrevista de Dean muestra que tomó la x como representación del total de cantidades desconocidas. Esta idea puede haber originado que algunos estudiantes de la muestra principal propusieran la ecuación $x + 85 + 125 = 1410$ en el problema AUTOBUS.

Modalidad 3. Joel, Les y Tim cambiaron el referente de x en distintas etapas de su proceso mental. Tanto Joel como Les usaron al menos tres referentes distintos en menos de un minuto. A medida que avanzaba el procedimiento, usaron una letra para representar diversas cantidades desconocidas, que aparecen en las más simples situaciones presentadas en un problema. Esto nos muestra que la enseñanza tradicional en la que los profesores proponen una letra para representar "la incógnita" parecería particularmente inadecuada y pone de relieve la forma arbitraria en que los profesores automáticamente clasifican los problemas por su número de incógnitas.

El uso de variables de Tim muestra todas las modalidades. Sus ecuaciones ($x \div \frac{1}{2} = x$ y $x + 5 = x$) son afirmaciones de acción acerca de cómo ir de una cantidad desconocida a la otra. "Ecuaciones como éstas", que muchos alumnos escribieron, representaban pasos de su razonamiento pero no resultaron útiles excepto como recordatorio informal de la idea más reciente que tenían en mente.

A muchos de los chicos entrevistados les sorprendió nuestra consigna de que escribieran una ecuación, pues no veían como esto pudiera ayudarlos a resolver los problemas. De hecho, muchos estudiantes en la muestra grande primero resolvieron aritméticamente y después escribieron fórmulas para explicar su razonamiento, por ejemplo.

$$\textit{Jan} \quad x = \frac{47 - 5}{2} \qquad \textit{Mark} \quad x = \frac{47 - 5}{2} + 5$$

Discusión

Los educadores matemáticos y psicólogos continúan preguntándose por qué alumnos que han hecho tres o cuatro años de álgebra no logran usar el álgebra para resolver problemas. Es ampliamente aceptado que estos chicos no aprendieron a "pensar algebraicamente", lo que no se ha explicado satisfactoriamente es cómo es que no lo aprendieron.

Nuestro trabajo muestra que muchos alumnos incurren en pensamiento lógico y a menudo complejo para resolver problemas, sin apoyo del álgebra. Con todo, cuando se les pide escribir una ecuación o cuando llevan su razonamiento al límite en problemas más difíciles, no saben cómo usar la notación algebraica como una herramienta para organizar, escribir y expandir ideas. Registran ideas y cálculos con símbolos usados de manera informal e inconsistente. Sus estrategias para resolver problemas se restringen a una serie de cálculos independientes, donde buscan la respuesta partiendo de lo conocido. Esta fuerte tendencia de pensar y operar con números específicos es el principal obstáculo para los aprendices de álgebra. Como Filloy y Rojano (1989) señalan, la transición de la aritmética al álgebra requiere "profundos cambios en los hábitos y conceptos aritméticos" (p. 19).

Gran parte de la investigación en el aprendizaje del álgebra se ha centrado en la falta de habilidad del alumno para operar con una incógnita como objeto matemático. Para operar con una incógnita, de manera confiable y comprensible, es preciso reconocer un referente particular y un valor fijo. Nuestros datos muestran que los alumnos desconocen qué cantidad del problema podrían o deberían simbolizar como la incógnita, o a qué cantidad se refiere determinado símbolo. Si x representa una cantidad que no está claramente definida (algo con valores múltiples o cambiantes) o más de una incógnita, entonces los alumnos son incapaces de comprender la lógica del álgebra. Necesitan saber que la incógnita es un objeto matemático, con un referente fijo a lo largo de un procedimiento de solución.

Bibliografía

Bednarz, N., & Janvier, B. (1996). Emergence and development of algebra as a problem-solving tool: continuities and discontinuities with arithmetic. En N. Bednarz, C. Kieran, & L. Lee (Eds.), Approaches to algebra. Perspectives for research and teaching (pp. 115-136). Dordrecht: Kluwer.

Filloy, E., & Rojano, T. (1989). Solving equations: the transition from arithmetic to algebra. For the Learning of Mathematics, 9(2), 19-25.

Fujii, T. (1993). A clinical interview on children's understanding and misconceptions of literal symbols in school mathematics. En I. Hirabayashi, N. Nohda, K. Shigematsu, & Fou-Lai Lin (Eds.), Proceedings of the Seventeenth International Conference for the Psychology of Mathematics Education (pp. 173-180). Tsukuba, Japan: PME.

Janvier, C. (1996). Modeling and the initiation into algebra. En N. Bednarz, C. Kieran, & L. Lee (Eds.), Approaches to algebra. Perspectives for research and teaching (pp. 225-236). Dordrecht: Kluwer.

MacGregor, M., & Stacey, K. (1996). Origins of students' interpretations of algebraic notation. En L. Puig & A. Gutiérrez (Eds.), Proceedings of the Twentieth International Conference for the Psychology of Mathematics Education (Vol. 3, pp. 297-304). Valencia: PME.

MacGregor, M., & Stacey, K. (1997). Students' understanding of algebraic notation: 11-15. Educational Studies in Mathematics, 33, 1-19.

Nota. El artículo se basa en datos previamente reportados por Stacey & MacGregor (1997) en E. Pehkonen (Ed.), Proceedings of the 21st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (Vol. 4, pp. 190-197). Lahti, Finland: PME.