Esquemas conceptuales e incoherencias de en relación con el infinito actual[1]

Fecha de recepción: Marzo, 1999

ARTÍCULOS DE INVESTIGACIÓN

Educación Matemática
Vol. 12 No. 3 diciembre 2000
pp. 5-18

Sabrina Garbin y Carmen Azcárate
Departamento de Didáctica de la Matemática y de las Ciencias Experimentales
Universidad Autónoma de Barcelona
Carmen.Azcárate@uab.es

Resumen. *Este artículo describe una investigación cualitativa cuyo interés se centró principalmente en dos puntos:*

a) Acercarse a los esquemas conceptuales de los estudiantes, asociados al concepto de infinito actual, mediante problemas expresados en lenguajes matemáticos diferentes: verbal, geométrico, gráfico, algebraico y numérico.

b) Diseñar un instrumento que permita analizar la coherencia en las respuestas de los estudiantes a los problemas planteados en el cuestionario.

A partir de las respuestas de los estudiantes y del análisis cualitativo se establecieron tres líneas de coherencia que hemos llamado: finitista, actual y potencial, las cuales permiten identificar a aquellos alumnos que no mantienen respuestas coherentes en los problemas planteados en el estudio y categorizar posteriormente las inconsistencias que se presentan.

Abstract. *This paper describes a research focused on two main points:*

a) To recognise the students concept images associated to the concept of actual infinity by means of exercises formulated in different mathematical languages: verbal, geometrical, graphical, algebraic and numeric.

b) To design a research tool in order to analyse the coherence of the students responses to the problems of the questionnaire.

From the students responses and the qualitative analysis we established three coherence paths we named finitist, actualist and potentialist, allowing to pinpoint those students who's responses are not consistent and mainly to categorise the inconsistencies which appear.

[1] Este artículo es un resumen de la tesis de maestría, "*Esquemas conceptuales e incoherencias de estudiantes de Bachillerato en relación con el concepto de infinito actual contextualizado en problemas expresados en diferentes lenguajes matemáticos: verbal, geométrico, gráfico, algebraico y numérico. Estudio exploratorio.*", realizado por Sabrina Garbin bajo la dirección de la Dra. Carmen Azcárate, en el marco del programa de doctorado del Departamento de Didáctica de la Matemática y las Ciencias Experimentales de la Universidad Autónoma de Barcelona y presentada en Noviembre del 1998.

Introducción

La preocupación por las dificultades del aprendizaje y de la enseñanza de los matemáticos en el bachillerato, en los cursos preuniversitarios y en los primeros de Universidad, nos hizo escoger la investigación que presentamos, que desde el punto de vista de las concepciones de los alumnos y alumnas, indague y examine los motivos que hacen de la problemática de un concepto matemático, un tema para comprender. En nuestro caso, la problemática del infinito matemático.

Nuestra mirada se dirige hacia el trinomio:infinito-lenguaje matemático-incoherencias, del cual inferimos el problema de investigación.

Los matemáticos, con el fin de lograr algún tipo de control o dominio sobre el concepto de infinito, hacen "uso" (Zippin, 1996) de éste como objeto. Enfocado de esta manera, está vinculado a muchos conceptos matemáticos en todos los niveles de enseñanza, tanto de forma explícita como implícita, y también es parte de muchos procedimientos matemáticos. Ahora bien, si en matemática el infinito es considerado un concepto consistente, en la realidad psicológica es complejo, contradictorio y fuertemente intuitivo (Fishbein, Tirosh y Hess, 1979). Estos autores prueban que la intuición del infinito es muy sensible al concepto figural y conceptual del problema en que aparece el infinito.

Por otra parte, Dreyfus (1991), en el marco del "pensamiento matemático avanzado", señala la importancia de las conexiones cognitivas entre lo visual, analítico, gráfico y algebraico. Tsamir y Tirosh (1997) escriben: "(...) dos estudiantes afirmaron que una situación de contradicción entre dos respuestas es aceptable en matemática cuando cada una de estas respuestas está considerada en un ámbito matemático separado, independiente. Estos estudiantes afirmaron que la primera actividad estaba referida a números, la segunda a geometría, y tal diversidad ha influenciado los resultados". Vinner (1990b), expresa que la compartimentación y las inconsistencias son temas que la Didáctica de las Matemáticas debería analizar.

Considerando lo expresado en los párrafos anteriores, se nos plantea el interrogante de cuál es la posible influencia de los lenguajes matemáticos en la concepción del infinito actual y en las inconsistencias que manifiestan los alumnos.

En orden a dirigirnos hacia esta meta en una investigación que actualmente estamos llevando a cabo, hemos realizado una investigación de carácter exploratorio, cuyo interés se centró principalmente en dos puntos:

- Acercarse a los esquemas conceptuales de los estudiantes, asociados al concepto de infinito actual, mediante problemas expresados en lenguajes matemáticos diferentes: verbal, geométrico, gráfico, algebraico y numérico.
- Diseñar un instrumento que permita analizar la coherencia en las respuestas de los estudiantes a los problemas planteados en el cuestionario.

Marco Teórico

En una primera parte nos hemos centrado en la teoría cognitiva desarrollada por Tall y Dreyfus en relación con el desarrollo y crecimiento del pensamiento matemático avanzado. Decidimos enfatizar aquellos aspectos que hemos considerado importantes para fundamentar nuestra investigación.

El concepto de infinito matemático actual está vinculado a muchos otros, tratados tanto en el pensamiento matemático elemental como en el pensamiento matemático avanzado. El estudio que realizamos en esta investigación es cualitativo y hacemos uso de un cuestionario (además de entrevistas) como instrumento de recogida de datos. Los problemas que aparecen en el cuestionario son problemas matemáticos, en los cuales está involucrado el mismo concepto, el de infinito actual, vinculado a otros conceptos, como el de función o de suma infinita. Por otra parte, los procesos cognitivos que intervienen en la resolución de dichas cuestiones son procesos como el de representación, translación y abstracción, entre otros. Tales consideraciones nos hicieron enmarcar la investigación en el dominio del llamado pensamiento matemático avanzado y en los procesos del pensamiento matemático avanzado.

Los conceptos tratados fueron, de manera particular, el "*concept image*" y el "*concept definition*" (Tall y Vinner, 1981), los cuales traducimos como *esquema conceptual* y *definición del concepto* (Azcárate, 1990); la noción de procepto (Gray y Tall,1994) en torno a la dualidad del proceso y concepto; y, otras nociones como las de inconsistencia (Vinner, 1990a) (Tall, 1990) (Tirosh, 1990). En cuanto a procesos, nos ocupamos de los implicados en la representación y en la abstracción.

Dreyfus (1990) afirma que los procesos de representar, transladar y abstraer, así como los de analizar, categorizar, conjeturar, definir, demostrar, formalizar y generalizar no son exclusivos y característicos del pensamiento matemático avanzado, aunque destaca la abstracción como la más característica. Afirma que lo que varía de la etapa elemental a la avanzada, es la complejidad y frecuencia de uso de estos procesos. Nos hemos detenido también a describir los procesos de pensamiento del crecimiento cognitivo en la etapa de transición hacia la matemática avanzada desde la elemental, considerando que "el lugar donde el pensamiento matemático elemental se convierte en avanzado no se ha definido todavía con precisión" (Tall, 1995).

En una segunda parte dimos un breve paseo por la historia del infinito matemático, con especial interés hacia el infinito actual. En este paseo se puede notar la complejidad que ha tenido en la historia y su desarrollo en ella: es un concepto que comienza como pensamiento y termina como objeto (Moreno y Waldegg, 1991).

Por último, presentamos algunas de las investigaciones de interés didáctico realizadas sobre el infinito. Escogimos algunas, que consideramos piloto y pilares en el tema y que reseñamos a continuación:

Fishbein, Tirosh y Hess (1979) enfocan la investigación sobre la intuición del infinito, en la cual concluyen que este concepto es intuitivamente contradictorio y que ni la edad, ni el proceso de enseñanza influyen de manera significativa en la naturaleza de las respuestas genuinamente intuitivas.

Tall (1980) formula otra noción del infinito actual: los números de medición infinita. Los números de medición infinita vienen siendo una parte de un sistema que extiende a los números reales. Con este enfoque, por ejemplo, el hecho que un segmento de línea largo tiene más puntos que otro más corto, es verdad en un esquema de medición, pero falso en un esquema cardinal.

Tirosh (1991) se interesó en determinar el criterio intuitivo de los estudiantes comparando cantidades infinitas.

Nuñez (1994) realiza una investigación desde un interés psicológico y hace uso de una versión de una paradoja de Zenón para ofrecer un acercamiento a cómo la mente construye la idea del infinito.

Tsamir y Tirosh (1997) introducen un juego sobre conjuntos infinitos y un primer intento para explorar su eficiencia en hacer conscientes a los estudiantes sobre sus opiniones del infinito y para examinar las reacciones cuando éstos se dan cuenta de las incoherencias presentes en sus respuestas.

El trabajo realizado: recogida de datos

- El estudio se realizó con 58 estudiantes de 3¼ de B.U.P. de dos Institutos de Barcelona: Joanot Martorell y Manuel Blancafort, 31 del primer Instituto y 27 del segundo. No hubo intervención didáctica por parte de la investigadora.
- Se aplicó un cuestionario escrito a cada grupo que consta de 5 preguntas. El concepto matemático presente es el mismo en todas ellas, el infinito actual, y los problemas son de divisibilidad infinita. Los lenguajes matemáticos usados son distintos: geométrico, verbal, gráfico, numérico y algebraico.

  El cuestionario ha sido diseñado de forma que cada pregunta, con su respectivo espacio de respuesta, puede ser transformada en una ficha y utilizarse posteriormente en las entrevistas.
- Se optó por el uso de las redes sistémicas como sistema de representación de los datos cualitativos obtenidos a partir de las respuestas dadas por los alumnos en el cuestionario escrito.

  El análisis de estos datos permitió un acercamiento a los esquemas conceptuales de los estudiantes, asociados al concepto de infinito.
- A partir de las redes sistémicas se construyeron unas tablas resumen. Con estas tablas y el análisis de los datos se diseñó un instrumento que permite identificar a aquellos alumnos que no mantienen respuestas coherentes entre las cinco preguntas del cuestionario.
- Las entrevistas fueron individuales y tuvieron una duración de entre 30 y 45 minutos; se grabaron con cinta de audio y con previa autorización de los entrevistados. Se entrevistaron nueve de los alumnos encuestados, los cuales fueron elegidos según el tipo de incoherencias que sus respuestas dejaron en evidencia.

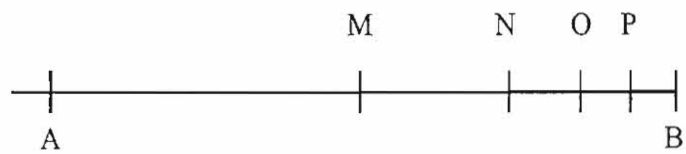
La entrevistadora había diseñado previamente un guión abierto y personal para cada alumno. Este guión tiene como único objetivo el ser usado como guía durante la entrevista y contiene preguntas que representan el tipo de información que se espera conocer.

El cuestionario

Los problemas plantedos en el cuestionario fueron literalmente los siguientes:

1.- Observa la siguiente figura.

Nos muestra un esquema en el que se biseca cada vez el segmento de la derecha, es decir los puntos M, N, 0, P, son los puntos medios de los segmentos AB, Nm, NB yOB respectivamente.



Si se siguen haciendo más y más bisecciones.

¿Crees que es posible llegar a una situación en la que un punto de la bisección coincide con el punto B?.

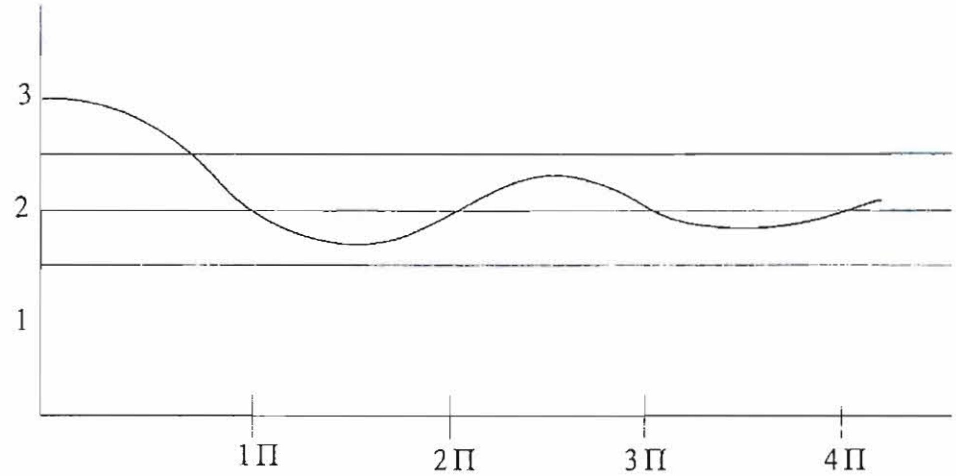
Explica tu respuesta.

2.- Se deja caer una pelota desde 2 metros de altura sobre una superficie horizontal.Cada vez que la pelota llega al suelo, tras caer desde una altura h, rebota hasta una altura h/2.

¿Podrías calcular la distancia total recorrida por la pelota?. Explica tu respuesta.

¿Podrías decir cuantos rebotes hará la pelota?. Explica tu respuesta.

3.- La siguiente figura representa la gráfica de una función.



¿Crees que se llegará a la situación en la que para algún valor de x la función tome el valor de 2?. Explica tu respuesta.

¿Hacia qué valor tendría que tender x para que la función sea infinita?., Explica tu respuesta.

4.- Considera la siguiente suma

$$1 + 1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 + \ldots +$$

¿Cuál crees que es el valor de esta suma?. Explica tu respuesta.

5.- Dada la siguiente función

$$f(x) = 2 + \frac{\text{sen}\, x}{x}$$

¿Crees que se llegará a la situación en la que para algún valor de x la función tome elvalor de 2?. Explica tu respuesta.

¿Hacia qué valor tendría que tender x para que la función sea infinita?. Explica tu respuesta.

Tres de los problemas (1, 2 y 4) del cuestionario, pueden ser considerados como una versión (diferenciada por el contexto) de la famosa paradoja de la dicotomía y de la tortuga de Zenón. Utilizando un símil moderno, se podría explicar afirmando la imposibilidad de salir de una habitación; en efecto, para llegar a la puerta deberíamos hacer la mitad del recorrido que nos separa de la misma y, hecho esto, hacer la mitad del recorrido que nos separa de la puerta y así sucesivamente. Procediendo de esta manera permanecemos dentro de la habitación ya que siempre nos faltaría una cierta distancia para llegar a la salida.

Geométricamente, esta paradoja deriva de la consideración que entre dos puntos cualesquiera de una recta siempre hay otro punto, y entonces, un segmento cualquiera contiene una sucesión de puntos descendente (1ª pregunta). Numéricamente, sería la sucesión infinita, 1, 1/2, 1/4, ... , que son los términos de la serie de la 4ª pregunta.

Expresado verbalmente, el problema de la pregunta 2, igual que la paradoja antes mencionada enfrenta al estudiante a una situación que "no es verdadera en la vida cotidiana" (matemáticamente la pelota hará un número infinito de rebotes).

Las dos preguntas restantes, expresadas en lenguaje gráfico y algebraico, requieren el mismo proceso de divisibilidad infinita, pero con la diferencia que la divisibilidad no implica mitades. De la misma forma que en los otros problemas del cuestionario, está presente de manera implícita una sucesión de puntos descendentes y convergentes que puede producir el mismo conflicto que la paradoja a la que nos estamos refiriendo.

Las entrevistas

Al comenzar la entrevista se le presentó al alumno su propio cuestionario transformado en 5 fichas, una para cada pregunta. La instrucción para el alumno fue la de leer nuevamente las preguntas y sus propias respuestas escritas el día de la aplicación del cuestionario.

Se pretendía que el estudiante recordara y se situara nuevamente ante los problemas, y tomara posición ante sus respuestas.

La entrevista fue semiestructurada, lo cual permitió que a medida que ésta progresara, la entrevistadora podía matizar con otras preguntas surgidas en el diálogo, redirigir la información requerida o replantear preguntas en caso de necesidad.

En la primera parte de las preguntas se pretendía aclarar algunos aspectos de las respuestas escritas por los entrevistados que habían quedado poco claros, eran dudosos o no habían sido explicitados.

Al ser aclaradas las cinco respuestas, una siguiente cuestión fue dirigida a que el alumno las relacionara y encontrara alguna similitud entre los 5 problemas del cuestionario.

Por último, la entrevista se dirigió de manera que el alumno puediera detectar sus respuestas contradictorias y expusiera su parecer sobre la posible causa de dichas incoherencias.

El trabajo realizado: análisis de datos

Redes sistémicas

Se optó por el uso de las redes sistémicas (Bliss, Monk y Ogborn, 1983) como sistema de clasificación y representación de los datos cualitativos obtenidos a partir de las respuestas dadas por los alumnos en el cuestionario escrito.

Red sistémica de la Pregunta 1
grupo A.

- ¿El punto de la bisección coincide con el punto B?
  - Responde afirmativamente
    - Por la finitud del segmento.
      - Justifica que el punto de bisección se va acercando a la letra B y llega un momento que no podrá dividir más el segmento. | (1) (10)°
    - Por la infinitud de las bisecciones.
      - Hace explícito que coincidirá con el punto haciendo infinitas bisecciones. | (3)
      - No explicita que sean infinitas bisecciones. | (2)°
  - Responde negativamente
    - Por no poder ser B un punto de bisección (B es pto. extremo del segmento)
      - No explicita si el proceso de división es finito o infinito, argumenta por la definición de pto. medio de un segmento. | (4)(8)*(14) (11)(16)* (22)*(25)* (27)(31)*
      - Considera el proceso infinito de bisección.
        - Explicita (5)(7)(9)
        - No explicita. (2)°
      - No explicita si el proceso de división es finito o infinito; posibilidad de finitud de bisecciones. | (18)°(29)°
    - Por la infinitud del proceso de bisección se aproxima, tiende a B.
      - Justifica: *los números pueden tener infinitos decimales.* | (12)*
      - Considera que hay infinitos puntos en el segmento entre el punto de bisección y B. | (15)°(28)°
        - Queda implícito que son infinitas bisecciones. | (17)(23) (30)
        - Quedas explícitas las infinitas bisecciones. | (19)(24)(26)
      - Considera que la distancia se puede hacer cada vez más pequeña y cuanto se quiera. | (6)* (13)*
    - No contesta. | (21)

Gráfico 1

Las redes sistémicas consisten en una determinada configuración de los datos que permite mirar de manera efectiva todas las respuestas de los alumnos encuestados. Estos datos nos interesaron para acercarnos a los esquemas conceptuales asociados al concepto de infinito.

Se elaboró una red sistémica para cada una de las preguntas del cuestionario y para cada grupo de alumnos; en el gráfico 1 se puede observar la red sistémica correspondiente a las respuestas de los estudiantes del grupo A a la primera pregunta. Allí se pone de manifiesto que los estudiantes no siempre responden a las preguntas del cuestionario tomando en cuenta la infinitud del proceso.

En investigaciones como las de Fishbein, Tirosh y Hess (1979) y Nuñez (1994), se han obtenido cuatro categorías de respuestas a partir de problemas de divisibilidad infinita: el proceso termina; el proceso es infinito; el proceso termina pero en la teoría no; y los que no contestan. En nuestro estudio, después del análisis de la 1ª pregunta, establecimos una nueva categoría, la cual está formada por las respuestas de un grupo de alumnos que no consideran el proceso de división para fundamentarlas. Para estos alumnos, el punto B no puede ser un punto de la bisección ya que consideran que por ser extremo del segmento no puede ser un punto medio de ningún segmento. Hemos llamado a la nueva categoría: "el proceso de división finito o infinito no determina la respuesta del alumno".

Pensamos que el haber usado la palabra "bisecciones" y que B sea un punto extremo del segmento, ha provocado este grupo de respuestas en que el proceso de infinitud o finitud no es determinante para los alumnos.

Debemos destacar que el uso de las redes sistémicas como representación de los datos del cuestionario, ha sido de gran utilidad para nuestra investigación, ya que nuestro interés, era hacer un análisis de datos cualitativos. Las redes sistémicas permitieron una determinada configuración que facilitó mirar de manera efectiva todas las respuestas de los sujetos encuestados; con éstas nos hemos acercado a los esquemas conceptuales de los estudiantes, asociados al concepto de infinito actual.

Tablas resumen

A partir de las redes sistémicas diseñadas se construyeron unas tablas resumen, con dos objetivos principales: la visualización de la información de manera resumida y la obtención de un nuevo instrumento que ayude a mostrar aquellos alumnos que mantienen respuestas coherentes o incoherentes en el cuestionario. Para la construcción de estas tablas resumen se ha considerado prácticamente la misma organización establecida en las redes.

Líneas de coherencia

Podemos preguntarnos qué líneas coherentes se pueden establecer desde las respuestas de los alumnos dadas en el cuestionario. El análisis descriptivo de los datos y el acercamiento a los esquemas conceptuales asociados al concepto infinito actual de los alumnos, ha permitido, en nuestro caso, la construcción de las «líneas de coherencia».

Hablar de coherencia entre las respuestas de estas cinco preguntas no es tan fácil como por ejemplo afirmar que si un alumno se ha mostrado finitista en la primera, éste será coherente si se muestra finitista también en las demás preguntas. El lenguaje matemático utilizado hace un tanto más compleja la situación. Por ejemplo, en la 1ª pregunta un alumno se muestra finitista si contesta que el punto de bisección alcanza al punto B con un número finito de bisecciones. Sin embargo, en la cuarta pregunta, donde la infinitud está explícita, se presenta con un lenguaje numérico: una suma infinita; no cabe la posibilidad de hablar de finitud. El alumno puede entonces mostrarse potencialista, dejándose llevar por la expresión numérica que no acaba, o por otra parte, puede reconocer que cada sumando representa la mitad del anterior, y que esa propiedad le permite la convergencia de la suma. Nos preguntamos qué tipo de respuesta, dada en esta pregunta, puede considerarse coherente con la dada por un alumno que se muestra finitista en la primera pregunta.

Se construyeron las líneas de coherencia, teniendo en cuenta el concepto involucrado, las respuestas de los alumnos representadas en las tablas resumen y el contexto de las mismas.

Tomamos en cuenta los procesos explicitados en Nuñez (1994) en el concepto involucrado en las cinco preguntas, donde están presentes dos tipos de iteraciones, la divergente y la convergente. Es decir, si observamos por ejemplo la pregunta 1 del cuestionario, el número de bisecciones crece mientras que la distancia que cubre cada división disminuye, cada segmento resultante es la mitad del anterior. Por otra parte, lo que llama Nuñez naturaleza del contenido tiene dos tipos de atributos: el número de bisecciones referida a cardinalidad y cada segmento referida a espacio.

Construimos tres líneas de coherencia representadas por el instrumento que hemos llamado *finitista, actual y potencial*; la finitista, a modo de ejemplo, se puede observar en el gráfico 2. Estos gráficos están formados por tablas conectadas entre sí, las cuales han sido diseñadas a partir de las tablas resumen. Si se sigue el orden dado por estas conexiones, se puede identificar a aquellos alumnos que no mantienen respuestas coherentes entre las cinco preguntas del cuestionario.

Los cuestionarios de los alumnos habían sido enumerados al azar del 1 al 58, entonces los números que aparecen en la línea de coherencia del gráfico 2 representan los alumnos que, dependiendo de sus respuestas, han sido ubicados en cada una de las categorías.

Resultados y conclusiones

- En nuestros problemas de divisibilidad infinita, los alumnos mostraron poder mantener respuestas incoherentes y aceptarlas sin problemas. Son capaces de asumir las respuestas diferenciando los lenguajes; la diferencia de los contextos que surgen de estos lenguajes justifica la diferencia de las respuestas. Creemos que la casi nula influencia mutua entre los contextos determinados por los diferentes lenguajes, es una evidencia de la compartimentación del conocimiento matemático y de la enseñanza de la matemática. Creemos que los esfuerzos docentes deberían ir enfocados a crear relaciones coherentes que eviten la compartimentación.

- Las respuestas de los estudiantes no sólo han sido influenciadas por los lenguajes matemáticos usados en el cuestionario, sino también por los esquemas conceptuales asociados a otros conceptos. Estos conceptos estaban implicados en las preguntas, como por ejemplo, el concepto de función o de límite. Podemos decir entonces que no sólo la intuición del infinito es "sensible" al "contexto figural" (Fischbein, Tirosh y Hess, 1979), y en particular, el infinito actual, sino también lo es a los esquemas conceptuales asociadas a otros conceptos implicados en las cuestiones.

- El infinito, como hemos dicho en la introducción, es un concepto cognitivamente contradictorio. En particular, el infinito actual implicado en problemas de divisibilidad infinita es paradójico. En nuestra investigación podemos resaltar que el conflicto interno que genera la paradoja se evidencia en las entrevistas de los estudiantes y en las respuestas al cuestionario, interpretadas estas últimas como genuinas contradicciones en el mismo sentido de Fischbein, Tirosh y Hess (1979).

El conflicto interno que genera esta paradoja, lo hemos evidenciado básicamente en las respuestas de la segunda pregunta, expresada con un lenguaje verbal que genera un contexto muy cercano al mundo real del estudiante. Aparentemente el resto de lenguajes, que marcan un contexto matemático y teórico no representativo de manera directa de la realidad, no son detonantes de la misma. En el cuestionario, sólo 3 alumnos hicieron la distinción entre una respuesta *teórica* y *práctica* a una misma pregunta. Estos expresaron las respuestas sin conflicto aparente y sin que queden afectadas mutuamente.

Con los esquemas conceptuales de los estudiantes y la caracterización de las respuestas, pudimos concluir y matizar que el lenguaje verbal, en un primer lugar, el lenguaje geométrico, en segundo, y el numérico, en un tercer lugar, activan en los alumnos respuestas paradójicas. Hemos llamado respuestas paradójicas, aquellas que evidencian la paradoja aunque el alumno no sea consciente de ello en el momento que las escribe, ó, aquellas en las que el alumno explicita la posibilidad de dos respuestas: la que es dada con un planteamiento teórico matemático que no corresponde con su experiencia de la vida cotidiana o con lo que observa en una figura o gráfico, y, la que se da desde un planteamiento que los alumnos llaman *práctico*, que sí corresponde a la experiencia cotidiana o a lo que se observa en una figura o gráfico.

Por otro lado, la paradoja puede surgir en la mente del estudiante y no ser expresada, optando éste por una de las dos respuestas. Interpretamos que se hace más sencillo optar por una sola de las respuestas obviando la paradoja, y esto se da en un tipo de lenguaje matemático más que en otros. Es importante seguir investigando este aspecto para determinar en qué grado influye cada uno de los lenguajes matemáticos.

- La conexión matemática-mundo real, resulta paradójica, en cuanto queremos conectar infinitud (matemática)- finitud (mundo real). El lenguaje verbal usado con objetos reales, produce un contexto aparentemente real y concreto, y desde este contexto el estudiante entra en contradicción.

La enseñanza se ha visto favorecida por el uso de ejemplos y problemas de la vida real y también del aprendizaje de los conceptos matemáticos, con el debido cuidado de generar problemas reales y creibles más motivadores para los estudiantes.

Nos podemos preguntar si la paradoja de Zenón, o el problema de la tortuga de Aquiles o nuestro problema de la pelota, son de verdad problemas del mundo real o sólo son problemas que hacen uso de un lenguaje verbal narrativo que involucra objetos reales pero que se mantiene en un marco teórico matemático. Nuestra respuesta a esta pregunta es afirmativa y es importante que el docente vaya introduciendo este tipo de distinciones en los alumnos, si no ¿por qué un alumno puede creer que un punto de la bisección llega a coincidir con el punto extremo B, en la pregunta 1 del cuestionario, con un proceso infinito de bisecciones y, sin embargo, tácitamente no acepta la infinitud del proceso en la pregunta 2, de la pelota?. Aparentemente, está demasiado arraigada en el alumno la consciencia de que el problema trata con un objeto real, la pelota. Esto nos plantea considerar que si bien es importante acercar la matemática al mundo real, también es importante que el docente sea

PREGUNTA 1

Responde afirmativamente
El proceso de bisección es finito
1,10,36,45,46,47,48,52,53,55 56,57

PREGUNTA 4.

Tiende a infinito.	El valor de la suma es infinito.	Es indefinida. No tiene solución por no acabar.	No indica valor alguno debido a la infinitud de la suma.
18,30,31,46	2,20,25,26 27,28,32,55 56	16,42	37,47

PREGUNTA 2(a)

Responde afirmativamente	Se considera la necesidad de conocer el nº de rebotes tanto para afirmar como para negar.	Se considera que no hay datos suficientes para afirmar o negar.	Responde negativamente
Indica una diatancia. El proceso es finito.			No se tiene la función que describe el fenómeno.
1,24,34,55,56 58	3,4,6,7,8,18 25,27,32,38 46,48,50,57	5,19,29,30 43,44,49	23,31

PREGUNTA 2(b)

Responde afirmativamente			Responde afirmativamente	Responde negativamente	No justifica.
No indica una cantidad				No hay datos suficientes. No se tiene la función que describe el recorrido. No se sabe cuando h=0.	
Usando *métodos científicos*	Sabiendo cuando h=0 o la distancia total	Depende de la gravedad o de la energía que la impulsa.	Considera finitos rebotes.		
19	37,46,48,57	43,54	1,6,24,32,34,36 49,55,56,58	7,10,12,14,23,29	2,20,25

PREGUNTA 3

La función llegará a ser una recta. El valor de f es 2.		Se consideran los valores puntuales n , n N
Explicita la finitud del proceso.	No explicita la finitud ni la infinitud.	
3	1,3,4,32,34,35,36,37,44,50 52,55,56,57	5,8,11,20

PREGUNTA 5

El valor de la función será 2.				El valor de la función no se puede determinar. Depende del valor de x.
(senx)/x=0 ya que senx no se puede calcular para valores grandes de x.	Cuando senx = 0.	En los valores n , n N.	Para x = 0.	
44,50	20,23,28	3,4,5,9,11,16 18,31	2,22,25 29,30	32

Gráfico 2

consciente de la relevancia de hacer caer en cuenta al estudiante, del uso del lenguaje verbal y de objetos reales para expresar situaciones que son idealizaciones de ciertos fenómenos que no son necesariamente "verdaderos" en el mundo real.

- Desde un punto de vista metodológico queremos añadir que las entrevistas han sido importantes, como complementarias al cuestionario de los alumnos entrevistados, para evitar posibles errores de interpretación por alguna simbología o palabra usada por los alumnos, y también, como instrumento necesario para detectar nueva información. De esta manera se ha extraido de las entrevistas la relación que hacen los estudiantes entre las cinco preguntas del cuestionario aplicado, la similitud o diferencia existente en ellas, y las posibles causas de incoherencias en las cinco respuestas. La entrevista además, resultó útil para reubicar a los estudiantes entrevistados en las líneas de coherencia.
- Por último se nos ha planteado un problema teórico. Recordamos, en palabras de Tall y Vinner (1981), que el esquema conceptual asociado a un concepto, es la estructura cognitiva "total", que incluye todas las imágenes mentales, las propiedades que lo caracterizan, las expresiones asociadas, los procesos, etc..

Hemos observado, que el esquema conceptual asociado al concepto de infinito actual no siempre se mantiene coherente, que se pueden evocar imágenes conflictivas dependiendo del lenguaje matemático usado en los problemas planteados en el cuestionario. Por otro lado, se podría decir que algunas de las imágenes mentales, propiedades, relaciones, representaciones, procesos etc. están asociadas tanto al concepto como al lenguaje. ¿Qué lugar ocupa el lenguaje matemático en el modelo de los esquemas conceptuales?.

REFERENCIAS

Azcárate, C. (1990). *La velocidad: introducción al concepto de derivada*. Tesis Doctoral. Universitat Autónoma de Barcelona.

Bliss, J., Monk, M. y Ogborn, J. (1983). *Qualitative Data Analysis for Educational Research*. Croom Helm. London.

Dreyfus, T. (1990). Advanced Mathematical Thinking Processes. En Tall, D. (ed.), *Advanced Mathematical Thinking*. Kluwer Academic Publisher. Dordrecht/Boston/London. Pp. 25-41

Fishbein, E., Tirosh, D. y Hess, P. (1979). The Intuition of Infinity. *Educational Studies in Mathematics*, 10. Pp. 2-40.

Moreno, L.E. y Waldegg, G. (1991). The Conceptual Evolution of Actual Mathematical Infinity. *Educational Studies in Mathematics*, 22, 3. Pp. 211-231.

Nuñez, E. (1994). Subdivision and Small Infinities: Zeno, Paradoxes and Cognition. *Actas del PME 18*, Vol 3. Pp. 368-375.

Tall, D. (1980). The Notion of Infinite Measuring Numbers and its Relevance to the Intuition of Infinity. *Educational Studies in Mathematics*, 11. Pp. 271-284.

Tall, D. (1990). Inconsistencies in the Learning of Calculus and Analysis. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 12. Pp. 49-64.

Tall, D. (1995). Cognitive Growth in Elementary and Advanced Mathematical Thinking. *Actas del PME 19*, Vol. 1. Pp.61-75.

Tall, D y Gray, E. (1994). Duality, Ambiguity, and Flexibility: a "Proceptual" View of Simple Arithmetic. *Journal for Research in Mathematics Education*, 25, 2. Pp.116-140.

Tall, D. y Vinner, S. (1981). Concept Image and Concept Definition in Mathematics with Particular References to Limits and Continuity. *Educational Studies in Mathematics*, Vol 12, 2, 151-169.

Tirosh, D. (1990). Inconsistencies in Studentsí Mathematical Constructs. *Focus on Learning Problems in Mathematics*,12. Pp. 111-129

Tirosh, D. (1991). The Role of Studentsí Intuitions of Infinity in Teaching the Cantorian Theory. En Tall, D. (ed), *Advanced Mathematical Thinking*. Kluwer Academic Publisher. Dordrecht/Boston/London. Pp.199-214.

Tsamir, P. y Tirosh, D. (1997). Metacognizione e coerenza: il caso delliinfinito. *La matemática e la sua didattica*, 2. Pp. 122-131.

Vinner, S. (1990a). The Role of Definitions in the Teaching and Learning of Mathematics. En Tall, D. (ed.), *Advanced Mathematical Thinking*. Kluwer Academic Publisher. Dordrecht/ Boston/London. Pp. 65-80.

Vinner, S. (1990b). Inconsistencies: their Causes and Function in Learning Mathematics. *Focus on Learning Problems in Mathematics*,12. Pp.85-97

Zippin, L. (1996). *Usos del infinito*. Editorial Euler. Madrid.