Semántica versus sintaxis en la resolución de ecuaciones lineales

ARTÍCULOS DE INVESTIGACIÓN

Fecha de recepción: Abril, 1999

Aurora Gallardo - Mario Pizón
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN
Servicios Educativos Integrados al Estado de México
agallardo@enigma.red.cinvestav.mx

Educación Matemática
Vol. 12 No. 2 Agosto 2000
pp. 81-96

Resumen. *Se utiliza un modelo de enseñanza concreto "Tablero con Fichas" como elemento teórico-metodológico en el estudio de ecuaciones lineales. Esta investigación permite analizar las dificultades conceptuales y operativas presentadas por estudiantes de secundaria en un curso introductorio de álgebra.*

Abstract. *In this article "The Counter Board Model" is used as a methodological-theoretical component in the resolution of linear equations. Results reveal the difficulties secondary school students found in solving equations.*

Introducción

En este artículo se dan a conocer los resultados obtenidos en la investigación realizada con un grupo de estudiantes de segundo grado de secundaria que utilizó el modelo concreto, denominado "Tablero con fichas", para la resolución de ecuaciones lineales.

El punto central en torno al cual gira el trabajo, es emplear el "Tablero con fichas" como recurso de investigación, para indagar las dificultades conceptuales y operativas que manifiesta el estudiante de secundaria en la resolución de ecuaciones lineales. El "Tablero con fichas" se confronta con el modelo Viético.

A continuación, se mencionan temas fundamentales reportados en la literatura de investigación que surgen de manera esencial en este Estudio.

Dificultad en el cambio del concepto de igualdad en álgebra. Esquema de cuasi-igualdad.

Los alumnos manejan el signo igual como «un mandato operacional», «una señal de hacer algo». Se les hace difícil aceptar el significado de la igualdad como un equilibrio entre los dos miembros de la ecuación (Kieran, 1981).

Un hecho muy frecuente en el presente estudio es el esquema de cuasi-igualdad, sobre el cual Kieran (1982) aporta lo siguiente: en el esquema de cuasi-igualdad se enfatiza la noción de operador y no de equivalencia. Se construye la regla «No importa dónde se realicen las operaciones, con tal de que se ejecuten alguna vez». Dicho esquema, surge de la visualización del signo igual como señal que ordena ciertas operaciones, más que un símbolo de equivalencia.

La concatenación de términos algebraicos

La concatenación en aritmética denota adición, por ejemplo 45 significa $40 + 5$; sin embargo en álgebra se refiere a la multiplicación, por ejemplo 5b es $5 \times b$; esto conduce a los alumnos a malinterpretar el sentido de los términos algebraicos. Matz (1982) y Booth (1984) argumentan que la concatenación es usada en aritmética para la notación posicional, y además expresa la adición implícita en el caso de fracciones mixtas 43, $4\frac{3}{4}$.

Sin embargo, en el álgebra denota multiplicación simbólica: xy, 3y. A menudo, se tienen expresiones con símbolos numéricos y literales: 43x. Esto conduce al error: $4x = 46$ si $x = 6$, donde se utiliza la interpretación posicional de concatenación. Otro error consiste en afirmar que: $xy = -8$, dado que $x = -3$, $y = -5$; donde se usa la interpretación de adición implícita de concatenación.

Naturaleza numérica de expresiones algebraicas

Con respecto a la naturaleza especial del cero y el uno, recurrimos nuevamente a Matz (1982) que aporta lo siguiente: en el contexto de las colecciones de reglas concernientes a las identidades, los números 0 y 1 son reconocidos como especiales, es decir:

$$\mathbf{A \times 1 = A \text{ y } A + 0 = A}$$

Sin embargo, fuera de contexto estas reglas se confunden con una regla demasiado general:

$$\mathbf{A^* \text{ (número especial)} = A}$$

Donde * denota un operador específico. La regla anterior puede desencadenar el error:

$\mathbf{A \times 0 = 0}$. Ahora bien, como el estudiante posee las dos reglas, la correcta y la falsa generalización puede aplicarlas indistintamente dando lugar a respuestas correctas e incorrectas. En el presente Estudio aparecen otros hechos durante el proceso de resolución de ecuaciones, que resultan también de la naturaleza peculiar del cero y el uno.

Operar los negativos representa serias dificultades en los sujetos que se inician en el álgebra. Acerca de esta problemática Gallardo (1996), afirma: "la extensión del dominio numérico de los naturales a los enteros, durante el proceso de adquisición del lenguaje algebraico por el estudiante de secundaria, constituye un elemento esencial para lograr la competencia algebraica en la resolución de problemas y ecuaciones".

Elementos teórico-metodológicos del estudio

Acerca de la introducción del álgebra escolar, Bednarz et al (1996) establecen la existencia de diferentes acercamientos, a saber: la resolución de ecuaciones y las reglas de transformación; el planteamiento de problemas o clases de problemas; la generalización de leyes que rigen las relaciones numéricas; la introducción de situaciones funcionales y la modelación de fenómenos tanto físicos como matemáticos.

En relación al primer acercamiento mencionado, el uso de modelos de enseñanza resulta muy relevante. Rojano (1985) utilizó dos modelos concretos (el de Áreas y el de la Balanza) en la resolución de ecuaciones lineales. La fundamentación teórica de la pertinencia del modelaje, está apoyada en gran medida por Filloy (1990). Este autor propone la construcción de un modelo teórico local a través del desarrollo e integración de tres componentes: modelos de enseñanza, modelos de los procesos cognitivos y modelos de competencia formal. En el presente Estudio, los modelos de enseñanza utilizados por los estudiantes en la resolución de ecuaciones fueron: el Viético (conocidas reglas de operaciones a nivel sintáctico) y el Tablero con Fichas (manipulación física de pequeñas piezas). Los procesos cognitivos manifestados por los estudiantes en los diálogos de las entrevistas, permitieron una confrontación de los modelos antes mencionados y evidenciaron las dificultades que persisten o desaparecen con el uso de estos modelos. Los resultados obtenidos en el Estudio muestran así, errores conceptuales y operativos que los estudiantes necesitan superar a fin de convertirse en usuarios competentes en la resolución de ecuaciones lineales.

Ahora bien, esta investigación está apegada a los temas de enseñanza de ecuaciones lineales (Alonso et al, 1993) del programa oficial de secundaria, que presentan fundamentalmente ecuaciones de las formas $A + x = B$, $Ax = B$, $Ax + B = C$, $Ax + B = Cx + D$ y casos sencillos de ecuaciones con paréntesis; A, B, C, D números dados (SEP, 1993).

La secuencia metodológica utilizada durante el desarrollo del estudio fue la siguiente:

1. Realización de observaciones a 5 grupos de 2° grado, aproximadamente 230 alumnos de la Escuela Secundaria Federal No. 20 «Rafael Ramírez» de Tepotzotlán, México. De esta población estudiantil, se eligió un grupo de 45 alumnos para la aplicación de un cuestionario exploratorio.
2. Elaboración del cuestionario con 14 ecuaciones lineales y 7 problemas sencillos que pueden plantearse con ecuaciones lineales.
3. Aplicación del cuestionario a los 45 alumnos.
4. Selección de 9 sujetos para la entrevista individual. Se eligieron estudiantes con mucha dificultad en la resolución del cuestionario. Fallaron en los siete problemas y en la mayoría de las ecuaciones planteadas. Los problemas no fueron incluidos en el protocolo de la entrevista pues sólo se pretendía conocer si los estudiantes utilizarían el lenguaje algebraico en el planteamiento de problemas verbales. Se comprobó que nadie lo hizo.
5. Diseño del protocolo de la entrevista con 12 ecuaciones, considerando aspectos como: la ocurrencia de la incógnita, la ubicación de la incógnita con respecto a los miembros de la ecuación y la no inclusión de ecuaciones con paréntesis.
6. Aplicación de la entrevista de corte piagetiano a los sujetos seleccionados, cuatro hombres y cinco mujeres con quienes se realizó el siguiente proceso:

- Se les proporcionó una ecuación para que la resolvieran.
- Al no poder resolverla, se llevó a cabo una secuencia didáctica usando el Tablero con Fichas, a fin de que aprendieran a resolver ecuaciones.
- Posteriormente, resolvieron ecuaciones con este modelo concreto y registraron el procedimiento en la hoja de trabajo.

- Asimismo, procedieron únicamente con lápiz y papel apegándose al modelo Viético.

7. Se realizó un análisis del cuestionario y entrevistas.
8. Por último se concentraron los resultados generales de la investigación.

Los pilares centrales del método cualitativo utilizados en esta investigación son: la observación, el cuestionario y la entrevista. El objeto de la observación consistió en visualizar las dificultades de los sujetos en cada una de las etapas del trabajo. Respecto al uso del cuestionario la finalidad fue detectar tres tipos de estudiantes: los que no sabían resolver ecuaciones lineales, los que sí sabían resolverlas y aquellos que además de saber resolverlas, eran capaces de aplicarlas en la resolución de problemas. Referente a la entrevista, el propósito se centró en indagar el por qué de las acciones presentadas en el procedimiento de resolución de ecuaciones y en gran parte el uso del Tablero con Fichas permitió superar las dificultades encontradas. El tipo de entrevista fue exploratoria de corte piagetiano. Referente a esto Piaget (1969) argumenta: "Por lo que respecta al experimentador se puede afirmar lo siguiente: el arte del clínico consiste, no en hacer contestar, sino en hacer hablar libremente y en descubrir las tendencias espontáneas, en vez de canalizarlas y ponerles diques. Consiste en situar todo síntoma en un contexto mental, en lugar de hacer abstracción de ese contexto. Así el buen experimentador debe, en efecto, reunir dos cualidades con frecuencia incompatibles: saber observar, es decir, dejar hablar al niño, no agotar nada, no desviar nada y, al mismo tiempo saber buscar algo preciso, tener en todo instante alguna hipótesis de trabajo, alguna teoría justa o falsa que comprobar."

Descripción de dos modelos de enseñanza para la resolución de ecuaciones lineales

En este trabajo se contemplan dos tipos de modelos: sintáctico y semántico o también llamado concreto. Dentro del primer tipo se encuentra el Viético utilizado al inicio de la enseñanza sobre resolución de ecuaciones lineales. En el segundo tipo tenemos al "Tablero con fichas", un recurso didáctico, cuyas características contribuyen a que el conocimiento de ecuaciones sea más asimilable para el sujeto. Se utilizó en la secuencia didáctica de la entrevista como un puente entre lo semántico y lo sintáctico, entre lo intuitivo y lo formal. A continuación se muestra la descripción de los dos modelos mencionados.

Viético

Resolver la ecuación $Ax + B = Cx + D$; A, B, C y D son números dados y A mayor que C en este caso.

- Primera transformación, cambiar el término B al miembro derecho, mediante operación "resta":

$$Ax + B = Cx + D$$
$$Ax = Cx + D - B$$

- Segunda transformación, cambiar el término Cx al miembro izquierdo, mediante la operación "resta":

  $Ax - Cx = D - B$

  Simplificaciones:

  $(A - C)x = D - B$

- Tercera transformación, cambiar el coeficiente de x, (A – C) al miembro derecho, mediante la operación "división":

$$X = \frac{D - B}{A - C}$$

Tablero con fichas

Este modelo ha sido utilizado para la enseñanza de ecuaciones lineales con dos ocurrencias de la incógnita (Socas et al, 1989). En el presente trabajo no se emplea para enseñar sino para analizar los conflictos que presentan los estudiantes en su uso. A la versión original del modelo se consideró pertinente realizarle dos modificaciones:

1ª Se cambiaron los colores de las fichas, amarillo y negro, por blanco y negro.

2ª Se anexaron las reglas 1 y 3, descritas a continuación, con el objeto de tener mayor manipulación con las fichas.

Ahora daremos una breve descripción del modelo. El Tablero es un rectángulo de 65 cm por 41 cm dividido en dos partes iguales, lado izquierdo y lado derecho, con un signo igual en medio y fichas de dos figuras, triángulos y círculos y dos colores, blanco y negro.

Los símbolos se representan de la siguiente manera:

△ representa la **x** (equis con signo positivo)

▲ representa la **-x** (equis con signo negativo)

○ representa el **1** (uno positivo)

● representa el **-1** (uno negativo)

REGLAS

1. Al pasar una ficha de un lado a otro cambia de color.
2. Dos fichas de la misma figura y diferente color, colocadas en el mismo lado, se anulan (se hacen cero).
3. Si se le quitan o ponen fichas a un lado o se cambian de color, también se debe hacer lo mismo al otro lado.

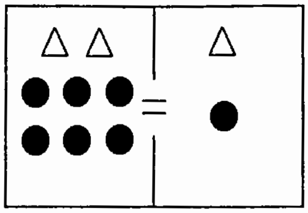
EJEMPLO

Para representar la ecuación $2x - 6 = x - 1$ en el tablero, se procede de la siguiente forma.

La expresión que está antes del signo igual (2x – 6) se representa con las fichas en el lado izquierdo del rectángulo.

La expresión que se encuentra después del signo igual (x – 1) se representa en el lado derecho del rectángulo. Hay que tener siempre presente, que en medio está el signo igual.

La ecuación queda representada como se muestra:

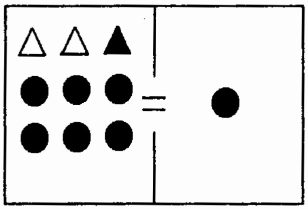


Se procede a resolverla de la siguiente manera:

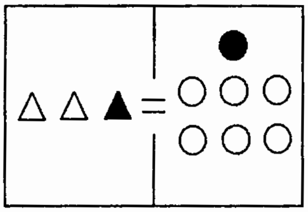
1. Primero pasamos las equis al lado izquierdo.
2. Luego pasamos los números al lado derecho.
3. Anulamos en ambos lados, si es que se puede.
4. Por último vemos cuánto vale cada equis.

Resolver la ecuación (2x – 6 = x – 1) de acuerdo al procedimiento planteado.

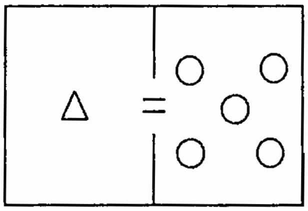
1 Pasamos las equis al lado izquierdo y queda así: (recordemos qué al pasar las fichas de un lado a otro cambian de color).



2 Pasamos los números al lado derecho y quedan así:



3 Ahora anulamos y nos queda como sigue:



4 Por último anotamos el resultado que es: x = 5

Se recomendó al estudiante, después de operar las Fichas en el Tablero, transferir las acciones al lenguaje algebraico y registrarlas por escrito.

Análisis de dificultades conceptuales y operativas vía el uso de modelos de ensañanza

En este apartado se presenta de manera individual, el desempeño de los sujetos durante el proceso de resolución de ecuaciones lineales en las entrevistas y algunos ítems del cuestionario. No se consideró necesario incluir en este artículo los ejercicios del cuestionario y de la entrevista pues estos se muestran en los diálogos sostenidos con los estudiantes. Es conveniente comentar que el presente análisis se llevó a cabo con base en lo que decían y hacían los alumnos, al tratar de resolver ecuaciones. La forma de trabajo consistió en examinar la lógica de los sujetos, tratando de comprender el procedimiento que seguían para encontrar el valor de la incógnita. El método de entrevista de corte piagetiano aplicado en este trabajo, nos condujo a encontrar hechos muy interesantes, que muestran, lo difícil que es construir el concepto de ecuación.

Para elaborar el protocolo de la entrevista, se tomaron en cuenta ítems con las siguientes características: sin paréntesis, con una o dos ocurrencias de la incógnita, con solución positiva, negativa, nula o fraccionaria. El protocolo de la entrevista consta de 12 ecuaciones (nueve de ellas comunes al cuestionario) y 2 ecuaciones con una ocurrencia de la incógnita las que hemos llamado ecuaciones auxiliares ($4x + 5 = 9$ y $4x + 5 = 13$) sugeridas cuando los alumnos no pudieron resolver el primer ítem. Es importante señalar que muchas de las dificultades presentadas por los sujetos, son superadas después de usar el Tablero con Fichas.

A continuación se enlistan los hechos manifestados por los estudiantes, durante el uso del modelo Viético y el modelo del Tablero con Fichas en la resolución de ecuaciones lineales.

Modelo Viético (hechos)

1. Conjunción de términos no semejantes.
2. Dificultad con el cero.
3. Pérdida del Denominador de la ecuación.
4. Aplicación incorrecta de la regla multiplicativa de los signos.
5. Conflicto con los números negativos.
6. Confusión entre operaciones de los dominios aditivo y multiplicativo.
7. Inversión incorrecta de operaciones.
8. Evitamiento de una de las dos ocurrencias de la incógnita en la ecuación.
9. Compensación de errores.
10. Esquema de Cuasi-igualdad.
11. Ausencia del Concepto de Ecuación.

Modelo del tablero con fichas (hechos)

12. Dificultad con la indivisibilidad numérica.
13. Fenómeno de Positividad de la Incógnita.
14. Diferenciación de la Incógnita respecto a su coeficiente.
15. No aceptación de la solución fraccionaria.
16. Rechazo a la solución nula.
17. Progreso en la adquisición del lenguaje algebraico.
18. Avance en el concepto de ecuación.
19. Transferencia del modelo concreto al modelo Viético.

Interpretación de los hechos

A continuación presentamos la interpretación de cada hecho, algunos ejemplos y el número de sujetos que incurren en él.

1. ***Conjunción de términos no semejantes.*** (Aparecen en 5 sujetos). En el lenguaje algebraico es muy común que el estudiante opere letras y números, por ejemplo: $3 + 5x = 8x$. En el tablero con fichas no operan los triángulos con los círculos lo cual evita la conjunción de términos no semejantes.

Cesar. Item 1 $\frac{9x+1}{2}=-13$

C: (Escribe) $9x + 1 = 10x$

E: ¿Por qué 10x?

C: No contesta. Se limita a corregir y llega al resultado correcto. Hace lo siguiente: $9x + 1 = -26$; $9x = -27$; $x = -3$

2. *Dificultad con el cero.* (Aparece en tres estudiantes). El cero es el elemento neutro de la suma pero comúnmente se le confunde con el elemento neutro de la multiplicación.

José Guadalupe. Ecuación auxiliar $4x + 5 = 9$

E - Tenemos 4x + 5, ¿qué indica 4x? ¿qué operación hay entre el cuatro y la equis?

J - Multiplicación.

E - Muy bien, esto es, "cuatro por un número más cinco igual a nueve"; entonces, ¿cuánto vale equis?

(Se queda un rato pensando sin saber que hacer y **E** interviene)

E - ¿Qué te parece si lo ponemos así? 4 x + 5 = 9. Cuatro por un cuadrito, en lugar

de la equis, más cinco igual a nueve. ¿Qué número debe ir adentro de ese cuadrito?

J - Cero.

E - A ver, lo probamos, cuatro por cero más cinco igual a ¿cuánto?

J - A nueve.

E - ¿Cuatro por cero?

J - Cuatro.

E - Y ¿cuatro por uno?

J - Cuatro.

E - Entonces cuatro por uno y cuatro por cero ¿da lo mismo?

J - No

E - ¿Cuánto es cuatro por cero?

J - Cero.

E - Cero más cinco.

J - Cinco.

E - Y cinco no es igual a nueve ¿verdad?

J - No.

E - Entonces ¿qué número debe ir adentro del cuadrito?

J - Uno.

E - ¿Por qué?

J - Porque, cuatro por una, es cuatro, más cinco son nueve.

3. ***Pérdida del denominador de la ecuación.*** (Aparece en un sujeto). Esto sucede cuando se trabaja con ecuaciones cuyos términos (al menos uno) tienen denominador y al operarlos, ignoran el denominador trabajando únicamente con el numerador.

> **Aidé. Item 13 del cuestionario** $\frac{3x}{2} + 6 = \frac{x}{2} + 12$
>
> $3x = 6 + x + 12;\ 3x = 19;\ x = \frac{19}{2};\ x = 9$

4. ***Aplicación incorrecta de la regla multiplicativa de los signos.*** (Aparece en 5 sujetos). La expresa correctamente pero hace una mala aplicación de ella.

> **Xóchitl. Item 10** $-x + 5 = 3x + 2$
>
> **X** - Menos equis más cinco es igual a tres equis más dos.
>
> (Hace lo siguiente:) $-x - 3x = 2 - 5;\ -4x = -3;\ x = \frac{-3}{-4}$
>
> (Se detiene un momento y el E la cuestiona) **E** - ¿Por qué te detienes?
>
> **X** - Es que no se puede dividir.
>
> **E** - Sí se puede, nada más que nos da decimales, pero aparte de eso falta otra cosa, casi tienes el resultado, nada más falta algo (Escribe lo siguiente) $x = +7$
>
> **E** - ¿Por qué?
>
> **X** - En lugar de dividir aplico la ley de los signos y sumo los números. (Ver además hecho N° 6, donde se manifiesta la confusión de operaciones).

5. ***Conflicto con los números negativos.*** (Aparece en todos los estudiantes). Es la incapacidad para operarlos correctamente.

> **Aidé. Item 1** $3x - 2 = x + 6$
>
> **E** - Muy bien, resuélvela.
>
> (Anota lo siguiente) $3x = 2 - 6;\ x = 4$
>
> **E** - ¿Cuál es el resultado?
>
> **AD**-Equis igual a cuatro.

(Obsérvese además, que la estudiante no percibe la incógnita en el segundo miembro de la ecuación. Ver hecho N° 8).

6. ***Confusión entre operaciones en los dominios aditivo y multiplicativo.*** (Aparece en 5 sujetos). Error al considerar la división como sustracción. También surge la confusión de multiplicación con suma.

Jorge Alberto. Item 7 $\mathbf{2x + 5 = 4x + 7}$

Escribe $-2x = 2$

$x = \frac{2}{-2}; x = 0$

Araceli . Item 1 0 $\mathbf{-x + 5 = 3x + 2}$

Escribe: $-4x = 2 - 5$; $-4x = -3$
$-4 + x = -3$; $x = 4 - 3$; $x = 1$

7. ***Inversión incorrecta de operaciones.*** (Aparece en 6 sujetos). Es la transposición errónea de términos de un miembro a otro, utilizando la operación inversa.

Víctor. Item 1 $\mathbf{3x - 2 = x + 6}$

V – Tres equis menos dos es igual a equis más seis.
E –Muy bien, ahora resuélvela.

(Hace lo siguiente) $3x = x + 6 - 2$; $3x = x + 4$; $x = \frac{3}{4}$

8. ***Evitamiento de una de las dos ocurrencias de la incógnita en la ecuación.*** (Aparece en 6 sujetos). Los estudiantes no perciben la incógnita en el segundo miembro en ecuaciones con dos ocurrencias de la x.

Jorge Alberto. Item 1 $\mathbf{3x - 2 = x + 6}$

JA- Tres equis menos dos es igual a equis menos seis.
E - Bien, continuamos.

(Hace el siguiente procedimiento) $3x = 6 + 2$; $3x = 8$; $3x = \frac{8}{3}$; $x = 2.6$

Xochitl. Item 1 $\mathbf{3x - 2 = x + 6}$

Procede de la forma siguiente: $3x = x + 6 + 2$; $x = \frac{x+8}{3}$

9. ***Compensación de errores.*** (Aparece en 4 estudiantes). Se refiere a fallas en el proceso que permiten arribar al resultado correcto.

Víctor. Ecuación auxiliar $\mathbf{4x + 5 = 13}$

(Hace el siguiente procedimiento)
$4x + 5 = 13$; $4x = 5 - 13$; $4x = 8$; $x = \frac{8}{4}$; $x = 2$

10. ***Esquema de cuasi-igualdad.*** (Aparece en 5 sujetos). Opera los términos sin tomar en cuenta el signo igual.

Nayeli. Item 5 $\mathbf{11x - 9 = 3x + 23}$

N - Once equis menos nueve es igual a tres equis más veintitrés.
(Hace lo siguiente) $11x - 9 = 3x + 23$; $8x - 3x = 14$

E - ¿Qué hiciste?

N - A once equis le resté tres equis y me dieron ocho y al veintitrés le resté nueve y salió catorce.

11. ***Ausencia del concepto de ecuación.*** (Aparece en los 9 sujetos). No comprenden que la ecuación es una igualdad, una equivalencia entre dos expresiones, un equilibrio entre el primer miembro y el segundo. En algunos casos utilizan el signo como operador y no como dualidad.

Víctor. Item 11 $\frac{x+3}{5} = 2$

V - Equis más tres entre cinco es igual a dos.

E - Muy bien.
(Anota lo siguiente) $x = 7$

E - ¿Ese es el resultado?

V - Sí. Equis igual a siete.

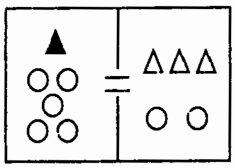
E - Y ¿Cómo le hiciste?

V - Sumé el cinco y el dos y me dio siete.

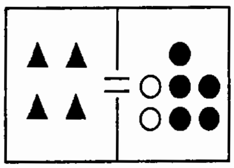
12. ***Dificultad con la indivisibilidad numérica.*** (Ocurre en todos los estudiantes). En el proceso de resolución de la ecuación en el tablero con fichas, existen casos en que la cardinalidad del término numérico (círculos) no es divisible entre el coeficiente de equis (triángulos). Esto impide que el estudiante realice la división. En $4x = 3$ el sujeto no obtiene el valor de la incógnita.

Nayeli. Item 10 $\mathbf{-x + 5 = 3x + 2}$

N - Menos equis más cinco es igual a tres equis más dos.
(La plantea en el tablero de la siguiente forma)

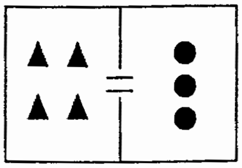


(Cambia las fichas y le queda así)



E - Muy bien.
(Anota lo siguiente) $-x - 3x = 2 - 5$

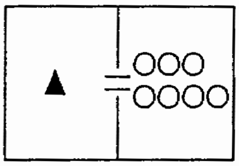
E - Continúa.
(Anula y le queda lo siguiente)
(Luego anota) $-4x = -3$



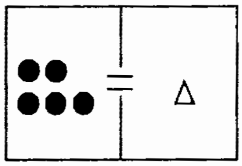
E - Muy bien, menos cuatro equis valen menos tres, una equis ¿cuánto valdrá?
(Piensa un largo rato y después escribe $-x = 3$)

13. ***Positividad de la incógnita.*** (Aparece en un sujeto). En los casos en que el resultado obtenido está dado por triángulos negros (equis con signo menos) el sujeto no tiene dificultad en transformarlos en triángulos blancos (equis con signo positivo) Ejemplo:

José Guadalupe. Item 8 $\quad -3 = x + 4$



El estudiante cambia el triángulo al lado derecho para cambiarlo de color obteniendo :



(Nótese que en el lenguaje algebraico es muy difícil transformar $-x = 7$ a $x = -7$)

14. ***Diferenciación de la incógnita respecto a su coeficiente.*** (Aparece en 6 sujetos). Decodifican **x** como **1x**, evitando así la concatenación de operaciones. Ante la expresión x + x =, el estudiante comete el error $x + x = x^2$. Sin embargo en el Tablero con Fichas, el sujeto decodifica x + x como 1x + 1x y llega al resultado correcto 1x + 1x = 2x. Por ejemplo, Graciela **Item 2: 2x – 6 = x – 1**. Después de trabajar en el Tablero con Fichas, la estudiante anota:

$$\begin{aligned} 2x - 1x &= -1 + 6 \\ 1x &= 5 \\ x &= 5 \end{aligned}$$

15. ***No aceptación de la solución fraccionaria.*** (Aparece en 4 sujetos). El alumno está acostumbrado a encontrar números enteros como resultado o valor de equis en las ecuaciones. Cuando obtiene una fracción no la acepta como posible solución.

José Guadalupe. Item 10 $\quad -x + 5 = 3x + 2$

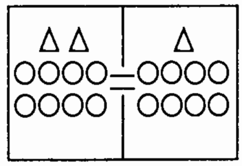
J - Menos equis más cinco es igual a tres equis más dos.
(Hace lo siguiente) $-x - 3x = -5 + 2; -4x = -3$
E - Menos cuatro equis valen menos tres, una equis ¿cuánto valdrá?
(Escribe lo siguiente) $x = -3$
E - ¿Ese es el resultado?

J - Sí, equis igual a menos tres.
E - Y a este número $-4x = -3$ ¿qué le sucedió?
J - No se puede dividir.

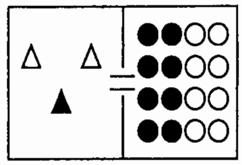
16. ***Rechazo a la solución nula.*** (Aparece en 4 sujetos). No le parece lógico al estudiante, que después de operar los términos, obtenga en el resultado al cero como valor de equis.

José Guadalupe. Item 3 $2x + 8 = x + 8$

J - Dos equis más ocho es igual a equis más ocho.
E - Bien, represéntala.
(Lo hace como se muestra en la figura)

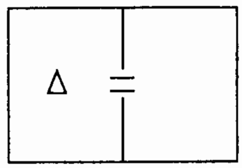


E - ¿Qué es lo que sigue?
J - Cambiarlas.
E - A ver, hazlo.
(Las cambia de lado así)



E - Muy bien.
(toma una ficha e intenta anular y **E** lo detiene)

E - Antes de anular, hay algo que debe hacerse.
(Escribe los siguientes términos)
$$2x - x = -8 + 8$$
E - Ahora sí, continúa.



J - Voy a sacar las de la misma forma y diferente color.
E - ¿Cuál es el resultado?
J - Equis.
E - Pero equis igual a ¿cuánto?, equis siempre va a tener un valor.
(No contesta se queda pensando un largo rato)

17. ***Progreso en la adquisición del lenguaje algebraico.*** (Aparece en todos los sujetos). Esto quiere decir que logran en cierta medida, apropiarse del significado de los símbolos y reglas operatorias necesarias para resolver ecuaciones lineales y ya no necesitan del modelo concreto.

Cesar. Item 7 $2x + 5 = 4x + 7$

C - Dos equis más cinco es igual a cuatro equis más siete.
(Escribe lo siguiente) $2x + 5 = 4x + 7$; $2x - 4x = -5 + 7$; $-2x = 2$

$$x = \frac{2}{-2};\ x = -1$$

18. ***Avance en el concepto de ecuación.*** (Aparece en todos los sujetos). Después de usar el Tablero con Fichas, el sujeto considera a la ecuación como una

equivalencia entre dos expresiones algebraicas y es capaz de aplicar correctamente la inversión de operaciones durante el proceso de resolución. Supera el esquema de cuasi-igualdad, el cual consiste en realizar las operaciones aritméticas sin respetar el signo igual.

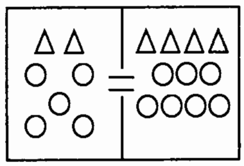
Xóchitl. Item 7 $2x + 5 = 4x + 7$

(Hace el siguiente procedimiento) $2x - 4x = 7 - 5; -2x = 2;\ x = \frac{2}{-2}; x = -1$

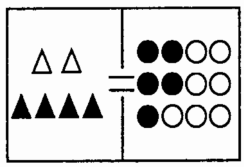
19. ***Transferencia del modelo concreto al modelo Viético.*** (Aparece en todos los sujetos). Los pasos que realiza el sujeto durante el proceso de resolución en el modelo concreto, puede representarlos a la vez algebraicamente en la hoja de trabajo.

Araceli. Item 7 $2x + 5 = 4x + 7$

A - Dos equis más cinco es igual a cuatro equis más siete.

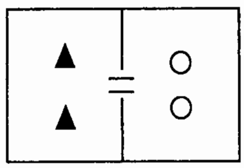


E - Muy bien.
(Inmediatamente la representa de la siguiente manera)



E - ¿Y ahora?

A - Pasamos las equis al lado izquierdo y los números al
derecho.
(Lo hace como se muestra en el dibujo)
(Empieza a anular y el **E** la detiene)



E - Antes de anular anota lo que tienes.

A - Sí. (Escribe lo siguiente) $2x - 4x = +7 - 5$

E - Ahora si puedes anular.
(Lo hace y le queda de esta forma)

E - Bien, anótale.
(Anota) $-2x = +2$

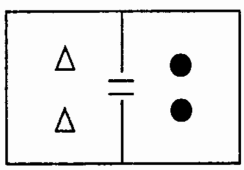
E - Menos dos equis es igual a más dos, pero, ¿cuánto valdrá equis?
(Anota) $x = 1$

E - Pero ¿cómo es el signo de equis?

A - Negativo.
(Al momento de contestar anota el signo menos) $-x = -1$

E - Queremos que el signo de equis sea positivo.

A - Los quitamos ...
(No termina la frase y cambia el color de las fichas quedando de la siguiente forma)



A - Entonces una equis positiva es igual a menos uno.
(Escribe) $+x = -1$

Conclusiones del estudio

Recapitulando podemos afirmar que las dificultades en que más incurren los sujetos cuando utilizan el modelo viético, son las siguientes:

- Aplican incorrectamente la inversión de operaciones.
- Carecen del concepto de ecuación.
- Surge la concatenación de términos no semejantes.
- Tienen problema con la operatividad de negativos.
- No aceptan la solución nula.
- No reconocen a la fracción como solución.

Estos conflictos obstaculizan la construcción de conocimientos referentes a ecuaciones. Con el uso del modelo concreto se superan algunas de estas dificultades y se puede afirmar lo que a continuación se expone.

- Progreso en la adquisición del lenguaje algebraico.
- Avance en el concepto de ecuación.
- Existe transferencia del modelo concreto al modelo sintáctico
- No aceptan a la fracción como solución.
- Una característica importante del Tablero con Fichas, es que permite diferenciar la naturaleza de la incógnita respecto a lo numérico, dicho de otra manera, ayuda a identificar el coeficiente, principalmente el 1.
- En el Tablero con Fichas se evita la concatenación de términos no semejantes.
- Es importante señalar que el único número de naturaleza dual en este modelo, es el cero, ya que es posible representarlo con dos círculos: uno negro y otro blanco, es decir, $-1 + 1 = 0$. Esta múltiple representación del cero como $-n + n = 0$, contribuye a su conceptualización. Por otra parte cuando aparece un espacio vacío en el tablero advertimos la característica nula del cero. ¡He ahí! la dualidad del cero como totalidad o nulidad de elementos.
- El hecho denominado "Positividad de la incógnita" permite la solución negativa ya que cuando el estudiante está operando en el modelo no presenta dificultad para pasar de $-x = n$ a $x = -n$.
- En el Tablero con fichas el signo de operación entre dos términos se asocia al signo del número. De esta manera, los estudiantes pueden percibir los enteros, desde el planteamiento mismo de la ecuación.
- Resulta muy relevante la persistente dificultad con los números fraccionarios y el cero. Ello advierte de la importancia del reconocimiento por parte del estudiante de los distintos dominios numéricos de solución de las ecuaciones.
- Es importante señalar que ningún modelo de enseñanza es paradigmático. De hecho, las ecuaciones con una sola ocurrencia de la incógnita, $Ax = B$, se resuelven en el Tablero con Fichas solamente en el caso en que B es divisible por A. Los autores de este Estudio esperaban que los alumnos se desprendieran del Modelo con Fichas al arribar a la ecuación con una sola ocurrencia de la incógnita y utilizaran inversión de operaciones (Modelo Viético). Esta situación no ocurrió en todos los casos debido a la dificultad con la indivisibilidad numérica. Otras limitaciones en el uso del Tablero con Fichas son las siguientes:
- No se pueden representar ecuaciones con paréntesis.
- Requiere de tiempo suficiente para su ejecución.
- No es práctico en ecuaciones con números grandes.

Por último podemos decir que, los nueve sujetos aprendieron a resolver ecuaciones lineales con el modelo concreto ya que todos se desprenden finalmente de él y logran apropiarse en cierta medida de la sintaxis algebraica. Sin embargo, no se llevó a cabo un estudio a largo plazo con los alumnos de esta investigación. Quedó como problema abierto si el uso del Tablero con fichas hizo perdurable la resolución correcta de las ecuaciones lineales presentadas. Ahora bien, como se afirmó desde el inicio, el trabajo puso el énfasis en la utilización de este modelo como elemento teórico-metodológico, a fin de analizar las dificultades en la resolución de ecuaciones. El uso de un modelo de enseñanza como recurso de investigación puede aplicarse a otros temas de matemáticas elementales que resulten problemáticos en el proceso de enseñanza aprendizaje en los niveles de primaria y secundaria.

Agradecimientos

Los autores manifestamos nuestra gratitud a la Escuela Secundaria Federal N°20 "Rafael Ramírez" de Tepotzotlán, México que hizo posible la experimentación de este Estudio. Hacemos un reconocimiento especial a Nélida Encalada por su valiosas sugerencias en la revisión del manuscrito.

Bibliografía

Alonso, F.; Barbero, C.; Fuentes, I.; Azcárate, A.; Dozagarat, J.; Gutiérrez, S.; Ortiz, M.; Riviere, V.; Da Veiga, C. (1993). *Ideas y actividades para enseñar álgebra*. Colección, Matemáticas: cultura y aprendizaje. Editorial Síntesis. Madrid.

Bednarz N., Kieran C., Lee L. (1996). Approaches to Algebra. Kluwer Academic Publishers.

Booth L. (1984). Algebra: Children's Strategies and Errors. NFER-NELSON.

Gallardo, A. (1996). El Paradigma Cualitativo en Matemática Educativa. Elementos teórico-metodológicos de un estudio sobre números negativos. Investigaciones en Matemática Educativa. Grupo Editorial Iberoamérica. México.

Kieran, C. (1981). *Concepts Associated with the Equality Symbol Educational Studies in Mathematics.*

Kieran, C. (1982). *The Learning of Algebra: A Teaching Experiment.* U. S. Department of Education. National Institute of Education . Educational Resourses Information Center. Washington D. C.

Filloy, E. (1990). *El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica*. Enseñanza de las ciencias.

Matz, M. (1982). *Towards Computational Teory of Algebraic Competence. Itelligent Tutoring Systems D.* Sleeman and J. S. Brown Academic Press. Massachusetts Institute of Technology.

Piaget, J. e Inhelder, B. (1969). *The psychology of the child.* (Routledge and Kegan Paul, Londres).

Pinzón, M. (1997). *El tablero con fichas, un modelo de enseñanza para la resolución de ecuaciones lineales (estudio con alumnos de secundaria)*. Tesis de Maestría. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, México.

Rojano, T. (1985). *De la aritmética al álgebra (estudio clínico con niños de 12 a 13 años de edad)*. Tesis de Doctorado. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, México.

Secretaría de Educación Pública (1993). *Plan y programas de estudio. Educación Básica Secundaria México.*

Socas, M.; Camacho, M.; Palarea, M.; Hernández, J. (1989). *Iniciación al álgebra.* Colección, Matemáticas: cultura y aprendizaje. Editorial Síntesis. Madrid.